

Озерицкий Алексей Владимирович

ЭФФЕКТИВНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ

01.01.07 — вычислительная математика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2007

Работа выполнена в Московском Государственном Университете
им. М. В. Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
доцент Корнев А. А.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Нечепуренко Ю. М.

кандидат физико-математических наук
Кукаркин А. Б.

Ведущая организация: Институт математического моделирования
РАН.

Защита состоится "17" мая 2007 г. в 15 ч. 00 мин. на заседании Диссертационного совета Д 002.45.01 в Институте вычислительной математики РАН по адресу: 119991, г. Москва, ГСП-1, ул. Губкина, 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института вычислительной математики РАН.

Автореферат разослан "16" апреля 2007 г.

Учёный секретарь Диссертационного совета
доктор физико-математических наук

Бочаров Г. А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В задаче стабилизации и управления рассматривается некоторая физическая система. Её математическая интерпретация (модель) задается с помощью понятия полудинамической системы и описывается с помощью оператора эволюции $S(t, \cdot)$. Рассматривается по крайней мере два варианта поведения системы, называемых в дальнейшем траекториями, одно из которых является для нас идеальным, а второе – наблюдаемым. Необходимо как-то повлиять на систему извне, чтобы наблюдаемое поведение стало “похожим” на идеальное. Критерий и степень “похожести”, а также временной промежуток, на котором эта “похожесть” достигается, могут определяться по-разному и в общем случае это зависит от конкретной формулировки задачи. В данной работе за основу брался размер отрезка времени на котором траектории сближаются, а также расстояние между траекториями в начальный и конечный моменты времени. Также могут различаться способы воздействия на систему, с помощью которых достигается требуемое поведение. Так как многие задачи стабилизации и управления для уравнений математической физики сводятся к задачам, в которых изменяют только начальные данные, то в качестве способа управления системой брался метод управления по начальным данным. В работе построены и обоснованы эффективные прикладные алгоритмы решения данной задачи, которые могут применяться для сложно-заданных полудинамических систем. С помощью построенных методов исследована возможность стабилизации решений для уравнения баротропного вихря на сфере.

Актуальность темы. Решение задачи стабилизации и управления для уравнений математической физики является привлекательными как с теоретической точки зрения, так и в силу многочисленных приложений. Алгоритмы численного решения данной задачи, основанные на теории инвариантных многообразий, активно начали развиваться с шестидесятых годов прошлого века. Наиболее известны работы Гукхеймера, Владимирского, Шильникова, Фурсикова, Чижонкова. Тем не менее, численные аспекты решения данной задачи далеки от завершения. Например, многие разработанные ранее методы либо применимы к полудинамическим систе-

мам частного вида, то есть используются те или иные допущения о виде системы и её внутреннем устройстве, либо обладают невысокой точностью или неприменимы для задач высокой размерности.

Цели работы:

- математическая переформулировка алгоритма проектирования на устойчивое многообразие на основе метода сжимающих отображений с асимптотикой полиномиального, а не экспоненциального характера;
- приближенное вычисление инвариантных подпространств оператора L , доказательство вычислительной устойчивости алгоритма проектирования на устойчивое многообразие;
- разработка и реализация параллельной версии алгоритма.

Методика исследования. В ходе исследования применяются следующие математические методы. Решение задачи строится на основании известных результатов теории устойчивых многообразий, развитой в работах Аносова Д. В., Ладыженской О. А. и Песина Я. М., применимой в случае динамических систем гиперболического типа. С помощью обобщенной теоремы Адамара-Перрона *рассматриваемая задача стабилизации сводилась к приближенному проектированию на устойчивое многообразие*, задаваемое некоторой функцией f . Функция f строилась с помощью метода сжимающих отображений на основе алгоритмов, предложенных в работах Корнева А. А. При нахождении инвариантных подпространств, необходимых для построения функции f , применялся метод Арнольди. Построенные алгоритмы проверялись на задачах Лоренца, Чафе-Инфанта, Чафе-Инфанта на сфере и баротропного вихря на сфере.

Научная новизна работы. Построены и обоснованы два прикладных численных алгоритма проектирования на устойчивое многообразие, обладающие полиномиальной сложностью. Построена параллельная версия алгоритма проектирования на устойчивое многообразие. Обоснована сходимость предложенных алгоритмов. Обоснована устойчивость алгоритмов относительно ошибок округления при вычислении инвариантных подпространств оператора L . Впервые исследована возможность управления по начальным данным решениями уравнения баротропного вихря на сфере.

Достоверность, теоретическая и практическая значимость.

Достоверность проведенного исследования основана на практическом подтверждении теоретических фактов для широкого класса полудинамических систем. Теоретическая значимость заключается в развитии методов стабилизации для сложно-заданных полудинамических систем.

Практическая ценность работы состоит в том, что на основе известных алгоритмов решения задачи стабилизации построены новые, которые могут применяться для широкого класса задач математической физики. Построенные алгоритмы не зависят от специфики конкретной задачи, а также могут применяться для задач со сложно-заданным разрешающим оператором. Используемые методы решения задач стабилизации и управления могут быть применены для управления динамикой различных физических систем.

Апробация работы. Основные результаты докладывались автором на: конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (Москва, 2002 г.), конференции “Тихонов и современная математика” (Москва, 2006 г.), конференции “Математическая Гидродинамика” (Москва, 2006 г.), всероссийском научно-исследовательском семинаре “Нелинейная динамика и управление” под рук. ак. С. В. Емельянова, ак. С. К. Коровина. (Москва, 2006 г.), научно-исследовательском семинаре при НИВЦ МГУ под рук. проф. Я. М. Жилейкина (Москва, 2007 г.), семинаре “Вычислительные и информационные технологии в математике” под рук. проф. В. И. Лебедева и чл.-корр. Е. Е. Тыртышникова (Москва, 2007 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в пяти работах.

Личный вклад автора. Вклад автора в совместные работы заключался: в совместной постановке и анализе численных экспериментов [2,3,5], технической реализации [3], совместном теоретическом обосновании [3].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения, списка литературы из 32 названий, содержит 10 иллюстраций и 17 таблиц. Текст работы изложен на 122 страницах.

Основное содержание работы

Во введении обсуждается постановка рассматриваемой задачи, приводится обзор работ по данной тематике, кратко сформулированы основные полученные результаты. **В первой главе**, состоящей из трех параграфов, приводятся основные результаты методов стабилизации, основанные на проектировании на устойчивое многообразие в окрестности неподвижной точки или траектории. Также рассмотрены вопросы об устойчивости приведенных алгоритмов относительно вычислительных ошибок в промежуточных задачах.

Параграф 1.1 содержит математическую формулировку задачи стабилизации, а также описание итерационных процессов проектирования на устойчивое многообразие в случае стационарной точки и нестационарной точки, изложенное на основе результатов работ Корнева А. А.

Пусть $S : H \rightarrow H$ непрерывное отображение Банахова пространства H с нормой $\| \cdot \|$ и $z_0, a_0 \in H$. Будем предполагать, что a_0 принадлежит некоторой окрестности \mathcal{O}_{z_0} точки z_0 , и задано конечномерное подпространство $\mathcal{L} = \langle e_1, \dots, e_{i_0} \rangle$. Нас интересует метод построения такого вектора u , что

$$u = a_0 + \sum_{i=1}^{i_0} c_i e_i, \quad u \in \mathcal{O}_{z_0}, \quad c_i \in R, \quad (1)$$
$$\|S^i(u) - S^i(z_0)\| \leq 2q^i \|u - z_0\|, \quad 0 \leq i \leq n, \quad 2q^n < 1,$$

для заданного n .

В параграфах 1.1.1 и 1.1.2 приводятся алгоритмы, основанные на работах Корнева, решения данной задачи с помощью теории устойчивых многообразий. В параграфе 1.1.1 приводится алгоритм для стационарного случая, в параграфе 1.1.2 - для нестационарного.

Предположим, что отображение S достаточно гладкое, и в окрестности \mathcal{O}_{z_i} каждой точки $z_i = S^i(z_0)$ можно построить линеаризацию оператора S : $S(z_i + u) = S(z_i) + L^{(i)}u + R^{(i)}(u)$. Также предположим, что для ограниченного линейного оператора $L^{(i)} : H \rightarrow H$ и непрерывного отображения $R^{(i)}(u) = S(z_i + u) - S(z_i) - L^{(i)}u$ найдутся операторы проектирования $P_{\pm}^{(i)}$ и числа $\mu_{-}^{(i)}, \mu_{+}^{(i)}, r^{(i)} > 0$ такие, что в окрестности

$\mathcal{O}_{z_i} = \{u : \|P_{\pm}^{(i)}(z_i - u)\| \leq r^{(i)}\}$ выполнены следующие условия гиперболичности (A):

$$\begin{aligned}
A_1) \quad & P_+^{(i)} + P_-^{(i)} = I, \quad \|P_+^{(i)}\| \leq C_1, \quad \|P_-^{(i)}\| \leq C_2; \\
A_2) \quad & L^{(i)}(P_+^{(i)}H) = P_+^{(i+1)}H, \quad L^{(i)}(P_-^{(i)}H) \subset P_-^{(i+1)}H \\
A_3) \quad & \|L^{(i)}w\| \leq \mu_-^{(i)}\|w\|, \quad \forall w \in P_-^{(i)}H, \quad \mu_-^{(i)} < 1, \\
A_4) \quad & \|L^{(i)}v\| \geq \mu_+^{(i)}\|v\|, \quad \forall v \in P_+^{(i)}H, \quad \mu_+^{(i)} > \mu_-^{(i)}, \\
A_5) \quad & \|R^{(i)}(u_1) - R^{(i)}(u_2)\| < \theta^{(i)}\left(\max\{\|u_1\|, \|u_2\|\}\right)\|u_1 - u_2\| \\
& \forall u_{1,2} : z_i + u_{1,2} \in \mathcal{O}_{z_i}
\end{aligned}$$

с непрерывной положительной неубывающей функцией $\theta^{(i)}(\cdot)$, $\theta^{(i)}(0) = 0$ (данные условия для неподвижной точки z_0 назовем условиями (a)).

Для каждого $i = 0, \dots, n$ рассмотрим класс $B_{\gamma^{(i)}}(\mathcal{O}^{(i)})$ всех непрерывных отображений таких, что

$$\begin{aligned}
f(w) : P_-^{(i)}\mathcal{O}^{(i)} &\rightarrow P_+^{(i)}\mathcal{O}^{(i)}, \text{ где } \mathcal{O}^{(i)} = \{u : \|P_{\pm}^{(i)}(u)\| \leq r^{(i)}\}, \\
f(0) = 0, \quad \|f(w_1) - f(w_2)\| &\leq \gamma^{(i)}\|w_1 - w_2\|, \quad 0 \leq \gamma^{(i)} \leq 1.
\end{aligned}$$

Пусть фиксирована некоторая функция $f^{(n)}(w) \in B_{\gamma^{(n)}}(\mathcal{O}^{(n)})$, задающая в окрестности точки \mathcal{O}_{z_n} локальное многообразие:

$$\mathcal{W}^-(z_n, f^{(n)}) = \{m = z_n + v + w : m \in \mathcal{O}_{z_n}, w = P_-^{(n)}(m - z_n), v = f^{(n)}(w)\}.$$

Рассматриваемая задача стабилизации эквивалентна нахождению такой функции $f^{(0)} \in B_{\gamma^{(0)}}(\mathcal{O}^{(0)})$, что для всякой точки вида $z_0 + w + f^{(0)}(w)$, $w \in P_-^{(0)}\mathcal{O}^{(0)}$, выполняется вложение $S^n(z_0 + w + f^{(0)}(w)) \subset \mathcal{W}^-(z_n, f^{(n)})$. Будем называть задачу нахождения $f^{(0)}$ по заданному $f^{(n)}$ *задачей (ff)*.

Для фиксированной функции $f^{(n)}$ будем строить $f^{(0)}$ последовательно за n шагов. На каждом шаге по $f^{(i+1)}$ найдем функцию $f^{(i)}$, задающую многообразие $\mathcal{W}^-(z_i, f^{(i)})$. Из условия вложения $S(\mathcal{W}^-(z_i, f^{(i)})) \subset \mathcal{W}^-(z_{i+1}, f^{(i+1)})$ с учетом условий (A) можно выписать следующее уравнение и итерационный процесс нахождения функции $f^{(i)}$:

$$\begin{aligned}
f^{(i)}(w) = \mathcal{F}(f^{(i)}, L^{(i)}, P_{\pm}^{(i)}) := & (L^{(i)})^{-1}\left(f^{(i+1)}(P_-^{(i+1)}\tilde{S}^{(i)}(w + f^{(i)}(w))) - \right. \\
& \left. - P_+^{(i+1)}\tilde{S}^{(i)}(w + f^{(i)}(w))\right) + f^{(i)}(w), \quad f_{k+1}^{(i)}(w) = \mathcal{F}(f_k^{(i)}, L^{(i)}, P_{\pm}^{(i)}),
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\tilde{S}^{(i)}(u) = S(z_i + u) - S(z_i)$.

В параграфе 1.1.3 приводится формулировка задачи, называемой далее *задачей* (lf), проектирования на устойчивое многообразия вдоль подпространства \mathcal{L} , а также описан соответствующий итерационный процесс, основанный на результатах работ Корнева А. А. Суть задачи состоит в построении такого $u = a_0 + l$, $l \in \mathcal{L}$, что $u \in \mathcal{W}^-(z_0, f^{(0)})$. Точка $u = a_0 + l$ может быть найдена из условия $S(u) \in \mathcal{W}^-(z_1, f^{(1)})$:

$$P_+^{(1)} [S(a_0 + l_{k+1}) - S(z_0)] = f^{(1)} (P_-^{(1)} [S(a_0 + l_k) - S(z_0)]). \quad (3)$$

Данная задача сводится к последовательному решению задач (ff) и (lf).

В параграфе 1.2 рассмотрены вопросы об устойчивости итерационного процесса (2) относительно ошибок вычисления операторов $P_{\pm}^{(i)}$. Во-первых, отметим, что вывод соотношений (2) существенно опирается на инвариантность подпространств $P_{\pm}^{(i)}H$ относительно операторов $L^{(i)}$. Во-вторых, условия (A) гарантируют обратимость и сжимаемость оператора $L^{(i)}$ только на подпространствах $P_+^{(i)}H$, что также принципиально при построении доказательства. На всем пространстве H операторы $L^{(i)}$ могут быть плохо обусловлены либо вырождены, поэтому формально даже малые ошибки в построении $P_{\pm}^{(i)}$ недопустимы. При численной реализации итерационного процесса (2) операторы проектирования $P_{\pm}^{(i)}$ вычисляются с некоторой погрешностью (например, с машинной точностью), влияние которой на окончательный результат $f^{(0)}$ может оказаться катастрофическим.

Пусть $P_+^{(i)}H = \langle e_1^{(i)+}, \dots, e_{i_0}^{(i)+} \rangle$, $P_-^{(i)\perp}H = \langle e_1^{(i)-}, \dots, e_{i_0}^{(i)-} \rangle$ (сопряженное подпространство к $P_-^{(i)}H$). Сформулируем метод проектирования на многообразии $\mathcal{W}^-(z_0)$ в случае приближенно вычисленных векторов $e_i^{(i)\pm}$, $i = 0, \dots, i_0$. Пусть операторы $L^{(i)}$ не вырождены и известны такие операторы проектирования $\tilde{P}_{\pm}^{(i)}$, что выполнены следующие условия (\tilde{A}):

$$\begin{aligned} \|L^{(i)}u\| &\leq C_+^{(i)}\|u\|, \quad \|(L^{(i)})^{-1}u\| \leq C_-^{(i)}\|u\|, \quad \forall u \in H; \\ \tilde{P}_+^{(i)}H &= \langle \tilde{e}_1^{(i)+}, \dots, \tilde{e}_{i_0}^{(i)+} \rangle, \quad \tilde{P}_-^{(i)\perp}H = \langle \tilde{e}_1^{(i)-}, \dots, \tilde{e}_{i_0}^{(i)-} \rangle, \\ \tilde{e}_i^{(i)\pm} &= e_i^{(i)\pm} + \epsilon_i^{(i)\pm}, \quad \|\epsilon_i^{(i)\pm}\| \leq \epsilon^{(i)}\|e_i^{(i)\pm}\|, \quad i = 1, \dots, i_0. \end{aligned}$$

назовем эти условия в случае неподвижной точки z_0 условиями (\tilde{a}).

В параграфе 1.2.1 рассмотрен случай неподвижной точки z_0 . Рассмотрим класс $\tilde{B}_\gamma(\mathcal{O})$ всех непрерывных отображений $\tilde{f}(w) : \tilde{P}_-\mathcal{O} \rightarrow \tilde{P}_+\mathcal{O}$

таких, что

$$\tilde{f}(0) = 0, \quad \|\tilde{f}(w_1) - \tilde{f}(w_2)\| \leq \gamma \|w_1 - w_2\|, \quad \gamma = \text{const} < \infty.$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1 Пусть выполнены условия (a), (\tilde{a}). Тогда найдутся такие $\varepsilon, \gamma, r > 0$, что в окрестности $\mathcal{O} = \{u : \|P_-u\| \leq r, \|P_+u\| \leq \gamma r\}$ итерационный процесс $f_{k+1}(w) = \mathcal{F}(f_k, L, \tilde{P}_\pm)$ сходится в пространстве $\tilde{B}_\gamma(\mathcal{O})$ со скоростью геометрической прогрессии с любого начального приближения $f_0 \in \tilde{B}_\gamma(\mathcal{O})$. Предельная функция \tilde{f} является решением уравнения (2). Для каждого $w \in \mathcal{O}$ выполняется условие $\|S^i(w + \tilde{f}(w))\| \subset \mathcal{O}$, $i = 0, 1, \dots$, и верна оценка

$$\|S^i(w + \tilde{f}(w))\| \leq C \tilde{q}^i \|w + \tilde{f}(w)\|, \quad C = \text{const} < \infty, \tilde{q} < 1.$$

Теорема 2 Пусть на каждом шаге итерационного процесса (2) добавляется некоторая погрешность, такая что $f_k \in B_\gamma(\mathcal{O})$. Тогда имеет место оценка

$$\max_{w \in P_- \mathcal{O}} \|f(w) - f_{k+1}(w)\| \leq q \max_{w \in P_- \mathcal{O}} \|f(w) - f_k(w)\|, \quad q < 1.$$

В параграфе 1.2.2 рассмотрен вопрос об устойчивости алгоритма (2) в нестационарном случае. По сути в этом параграфе формулируются и доказываются аналоги теорем о сходимости, сформулированные в параграфе 1.1.2.

Рассмотрим класс $\tilde{B}_{\gamma^{(i)}}(\mathcal{O}^{(i)})$ всех непрерывных отображений $\tilde{f}(w) : \tilde{P}_-^{(i)} \mathcal{O}^{(i)} \rightarrow \tilde{P}_+^{(i)} \mathcal{O}^{(i)}$ таких, что

$$\tilde{f}(0) = 0, \quad \|\tilde{f}(w_1) - \tilde{f}(w_2)\| \leq \gamma^{(i)} \|w_1 - w_2\|, \quad \gamma^{(i)} = \text{const} < \infty.$$

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 3 Пусть выполнены условия (A), (\tilde{A}). Тогда найдутся такие $\varepsilon^{(i)}, \gamma^{(i)}, r^{(i)} > 0$, что итерационный процесс $f_{k+1}^{(i)}(w) = \mathcal{F}(f_k^{(i)}, L^{(i)}, \tilde{P}_\pm^{(i)})$ сходится в пространстве $\tilde{B}_{\gamma^{(i)}}(\mathcal{O}^{(i)})$ со скоростью геометрической прогрессии с любого начального приближения $f_0 \in \tilde{B}_{\gamma^{(n)}}(\mathcal{O}^{(n)})$.

Теорема 4 Пусть выполнены условия теоремы 3 и функции $f^{(i)}$, $f^{(i+1)}$ удовлетворяют уравнению $f^{(i)}(w) = \mathcal{F}(f^{(i)}, L^{(i)}, \tilde{P}_{\pm}^{(i)})$. Пусть

$$\begin{aligned}\epsilon^{(i+1)}(C_+^{(i)} + \theta^{(i)}(r^{(i)})(1 + \gamma^{(i)})) &= \beta^{(i+1)}, \\ \mu_-^{(i)} + \theta^{(i)}(r^{(i)})(1 + \gamma^{(i)}) &= p^{(i)} < 1.\end{aligned}$$

Тогда выполнены оценки

$$\begin{aligned}\|P_-^{(i+1)}(S(z_i + f^{(i)}(w) + w) - S(z_i))\| &\leq (p^{(i)} + \beta^{(i+1)})\|w\|, \\ \|S(z_i + f^{(i)}(w) + w) - S(z_i)\| &\leq (p^{(i)} + \beta^{(i+1)})(1 + \gamma^{(i+1)})\|w\|.\end{aligned}$$

Теорема 5 Пусть для $i = 0, \dots, n-1$ выполнены условия теорем 3 и 4. Тогда для произвольного $f^{(n)} \in \tilde{B}_{\gamma^{(n)}}(\mathcal{O}^{(n)})$ найдется такое $r^{(0)} > 0$, что существует функция $f^{(0)} \in \tilde{B}_{\gamma^{(0)}}(\mathcal{O}^{(0)})$ такая, что

$$\begin{aligned}\|P_-^{(n)}(S^n(z_0 + f^{(0)}(w) + w) - S^n(z_0))\| &\leq q^n\|w\|, \\ \|S^n(z_0 + f^{(0)}(w) + w) - S^n(z_0)\| &\leq Cq^n\|w\|, q < 1.\end{aligned}$$

Теорема 3 гарантирует разрешимость метода на каждом шаге, теоремы 4 и 5 гарантируют сближения траекторий. Отметим, что найденная таким образом функция $f^{(0)}$ может находиться сколь угодно близко к многообразию $\mathcal{W}^-(z_0)$, однако может и не лежать на нем. Теорема 5 гарантирует сближение точки $w + f^{(0)}(w)$ с траекторией z_0 за n шагов, что удовлетворяет решению задачи (1) в случае $\mathcal{L} = P_+H$.

Теорема 6 Пусть на каждом шаге итерационного процесса (2) добавляется некоторая погрешность, такая что $f_k^{(i)} \in B_{\gamma^{(i+1)}}(\mathcal{O}^{(i+1)})$. Тогда имеет место следующая оценка

$$\max_{w \in P_-^{(i)}\mathcal{O}} \|f^{(i)}(w) - f_{k+1}^{(i)}(w)\| \leq q \max_{w \in P_-^{(i)}\mathcal{O}} \|f^{(i)}(w) - f_k^{(i)}(w)\|, \quad q < 1.$$

Теоремы 1–6 позволяют обосновать сходимость методов, предложенных во второй главе.

Вторая глава, состоящая из шести параграфов, посвящена практической реализации алгоритмов. Также здесь предложены и обоснованы модификации изложенных алгоритмов с вычислительной сложностью $O(n^2)$ на n итераций, отметим, что исходный алгоритм имеет вычислительную сложность $O(2^n)$. Данные усовершенствования алгоритма проектирования

позволяют его использовать для сложно-заданных полудинамических систем. Также разработана версия алгоритма, которая может применяться для вычислений на слабосвязанных вычислительных машинах.

Базовый алгоритм (2) вычисления устойчивого многообразия может быть схематически представлен как последовательность вычислений:

1. при $n \leq 0$ $f^n(y) = 0$,
2. при $n > 0$ $x_1 = f^{n-1}(y)$,
3. $y_1 = P_-S(x_1 + y)$, $x_2 = P_+S(x_1 + y)$,
4. $x_3 = f^{n-1}(y_1) - x_2$,
5. $x = L_+^{-1}(x_3) + x_1$.

Данную схему вычислений можно изобразить в виде дерева. Склеим соседние вершины в дереве, находящиеся на одном уровне. Несложно видеть, что эта склейка приводит к тому, что количество арифметических операций на n итераций сократилось с $O(2^n)$ до $O(n^2)$.

В параграфе 2.1.2 изложена модификация базового алгоритма, которая может быть легко распараллелена. Суть метода состоит в том, что устойчивое многообразие ищется не в одной точке, а в виде кривой $x = f(y)$, при этом значение функции находится в группе точек $\{y_i\}$, данное множество точек строится как $\{y_k = L^k(y_0)\}$, $k = 0, \dots, n$, промежуточные значения на кривой $x = f(y)$ находятся с помощью линейной интерполяции. Распараллеливание осуществляется путем передачи каждому процессу своей группы точек $\{y_i\}$.

В параграфе 2.1.3 описаны варианты распределения точек по процессам и алгоритм пересылки данных между процессами. Представлен псевдокод алгоритмов. Дана оценка времени работы алгоритма в оптимальном случае (когда время пересылки данных равно нулю).

В параграфе 2.2 приведено обобщение алгоритмов метода склейки и параллельного алгоритма проектирования на устойчивое многообразие на случай нестационарной точки.

Алгоритм метода склейки в нестационарном случае аналогичен стационарному случаю с изменениями — шаги 3,4,5 алгоритма заменяются на цикл итераций для нахождения каждого $f^{(i)}$, операторы P_{\pm} , S , L заменяются на соответствующие им операторы с индексами (i) или $(i + 1)$. В качестве начального приближения к функции $f^{(i)}$ берется $f_0^{(i)} = f^{(i+1)}$.

Параллельный алгоритм для нестационарной точки реализуется аналогично стационарному случаю с естественными модификациями. Начальное множество точек $\{y_k\}$ инициализируется как: $y_k = \underbrace{L^{(n)} \dots L^{(n)}}_k(y_0)$. Алгоритм нахождения точек x_k^m аналогичен стационарному случаю, добавляются только внутренние итерации. В **параграфе 2.3** описаны проблемы практической реализации алгоритма проектирования вдоль \mathcal{L} . В частности описаны модификации параллельного алгоритма для использования его совместно с алгоритмом решения задачи (lf) .

Параграф 2.4 посвящен применению алгоритмов в случае неизвестного оператора S . Оператор L и базис P_+H ищутся приближенно с помощью оператора S . Требуемый в алгоритмах оператор $(P_+L)^{-1}$ задается в виде квадратной матрицы размерности n_x , где $n_x = \dim P_+H$.

Параграф 2.5 посвящен проблемам нахождения инвариантных подпространств оператора L и операторов проектирования P_{\pm} . Задача проектирования на подпространство P_+H может быть сведена к частичной проблеме на собственные значения операторов L и сопряженного к нему. Для решения этой проблемы используется метод Арнольди.

В **третьей главе** подробно описаны используемые модели, для которых проводился расчет. Здесь содержится информация о применяемых разностных схемах, выписана линеаризация S и сопряженная задача. Рассматривались следующие задачи:

Модель Лоренца

$$\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = \sigma(y(t) - x(t)), \\ \frac{\partial y(t)}{\partial t} = x(t)(r - z(t)) - y(t), \\ \frac{\partial z(t)}{\partial t} = x(t)y(t) - bz(t). \end{cases} \quad \sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28.$$

Решение строилось методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Задача Чафе-Инфанта

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \Delta u(x, t) - bu(x, t) - u^3(x, t), \quad u(x, t) \in [0, 1], \quad u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

Решение строилось методом Фурье.

Задача Чафе-Инфанта на сфере

$$\frac{\partial u(\phi, \lambda, t)}{\partial t} = -\sigma u(\phi, \lambda, t) + \mu \Delta u(\phi, \lambda, t) - u^3(\phi, \lambda, t),$$

где $\phi \in [0, \pi/2]$ - широта, $\lambda \in [0, 2\pi]$ - долгота, Δu - оператор Лапласа на единичной сфере. Задача рассматривалась на сдвинутой на полшага относительно полюсов сетке. Решение искалось методом разделения переменных. По циклической координате (λ) делалось разложение Фурье, по координате ϕ проводился метод прогонки. Для аппроксимации по времени использовалась схема Кранка-Николсон.

Основное внимание в главе уделено уравнению **баротропного вихря на сфере**, которое описывает динамику вязкой несжимаемой баротропной жидкости на сфере с учетом орографических неоднородностей постилающей поверхности:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi) + J(\psi, l + h) + \sigma \Delta \psi - \mu \Delta^2 \psi = f(\phi, \lambda),$$

где $\phi \in [0, \pi/2]$ - широта, $\lambda \in [0, 2\pi]$ - долгота, $\psi = \psi(\phi, \lambda, t)$ - функция тока, Δ - оператор Лапласа на единичной сфере, J - якобиан, l - параметр Кориолиса: $l = 2\Omega \sin \phi$, $\Omega = 7.27 \times 10^{-5} \text{c}^{-1}$ - угловая скорость вращения Земли, h - орографические неоднородности постилающей поверхности, f - внешний форсинг, $\mu = 8 \times 10^{-5}$, $\sigma = 1.6 \times 10^{-2}$.

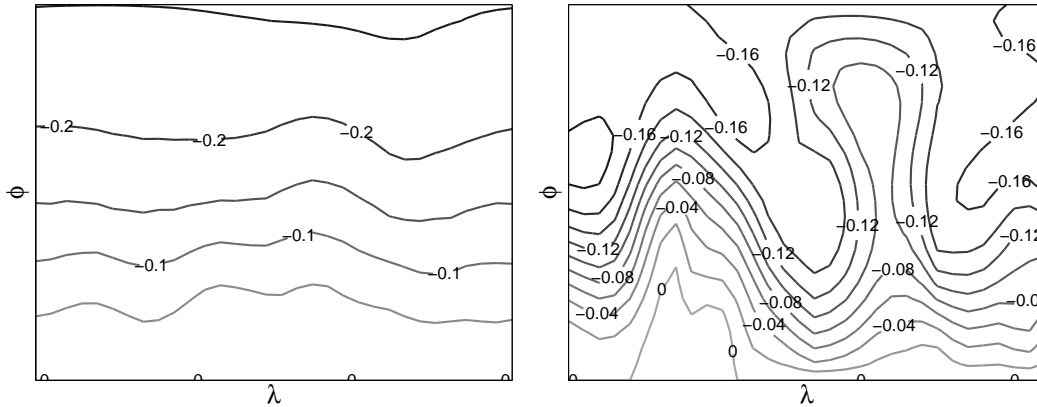
По пространству задача аппроксимировалась с помощью схемы Аракавы. Данная схема применялась, так как обладает законом сохранения энергии и квадрата вихря, что позволяет её использовать для счета на отрезках времени большой протяженности. Для аппроксимации по времени использовалась схема Кранка-Николсон. На основе свойства антисимметричности оператора J , вычисленного по схеме Аракавы, выписана сопряженная задача.

В четвертой главе, состоящей из пяти параграфов, приводятся результаты расчетов по аппроксимации устойчивых многообразий. **В параграфе 4.1** сравнивается скорость работы трех алгоритмов (базового, склейки, параллельного) на задачах Чафе-Инфанта и Лоренца.

В параграфе 4.2 приведен расчет задачи проектирования на устойчивое многообразие с операторами проектирования P_{\pm} , найденными точно и с погрешностями, проведено сравнение полученных результатов. Отметим, что аппроксимация подпространств $P_{\pm}H$ не сказалась на результатах стабилизации. Данный расчет выполнен в стационарном случае ($z_0 = 0$)

для уравнения баротропного вихря на сфере с параметром $\sigma = -20$. В **параграфе 4.3** приведены расчеты данной задачи на сетках до 512×384 . Показана пригодность разработанного комплекса программ для вычислений данной сложности.

Параграф 4.4 посвящен исследованию возможности управления по начальным данным решениями уравнения баротропного вихря на сфере с параметрами, являющиеся физически осмысленными: $l = 2\Omega \sin\phi$, $\sigma = 0.016$, $\mu = 8.5 \times 10^{-05}$. На следующих рисунках изображены функции z_0 (слева) и a_0 (справа):



При данных параметрах траектории с начальными условиями a_0 и z_0 сразу расходятся. Цель задачи — изменить функцию a_0 в области K так, чтобы траектории с начальными условиями a_0 и z_0 сходились, где K - области вида: $\left\{ \phi_i \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \lambda \leq 2\pi \right\}$, где $\phi_i = i \frac{\pi}{2(N_\phi - 1) + 1}$. Задача решалась на сетке 24×32 ($N_\phi \times N_\lambda$). Для $i = 3$ время сближения траекторий составило 4.124, расстояние между точками траекторий в конечный момент времени составило 8.4×10^{-02} , в начальный момент и до стабилизации оно было порядка 0.2.

В **приложениях** содержится описание структуры написанных программных модулей. Описан программный интерфейс. В **заключении** кратко формулируются основные результаты диссертационной работы.

Основные результаты диссертационной работы

- Построены и реализованы прикладные численные алгоритмы решения задачи асимптотической стабилизации по начальным данным. Обоснована сходимостью предложенных алгоритмов;
- Обоснована устойчивость алгоритмов относительно ошибок округления при вычислении промежуточных задач;
- Для модельной траектории уравнения баротропного вихря на сфере найдены начальные условия, позволяющие проводить стабилизацию;
- Предложенные алгоритмы реализованы в виде пакета программ на языке Си/Си++. Реализована параллельная версия алгоритма.

Публикации по теме диссертации

1. *Ozeritsky A. V.*, Efficient algorithms for stable manifolds// Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2005. V. 20, N. 2. P. 209-224.
2. *Корнев А. А., Озерницкий А. В.*, О приближенном проектировании на устойчивое многообразие// ЖВМиМФ. 2005. Т. 45, N. 9. С. 1580-1586.
3. *Корнев А. А., Озерницкий А. В.*, О вычислительной устойчивости одного метода стабилизации// Вестник МГУ. 2007. N. 1. С. 33-36.
4. *Ozeritsky A. V.*, Efficient Algorithms for Solutions of Asymptotic Stabilization on the Origin// International Conference "Tikhonov and Contemporary Mathematics". Moscow. 2006. P. 94-95.
5. *Kornev A. A., Ozeritsky A. V.*, On the problem of approximate projection onto the invariant manifolds of the Navier-Stokes equations// International Conference "Mathematical Hydrodynamics". Moscow. 2006. P. 47-48.

Подписано в печать 16.04.2007.

Печать трафаретная.

Заказ №369

Тираж: 120 экз.

Типография “11-й ФОРМАТ”

ИНН 7726330900

115230, Москва, Варшавское ш., 36

(495) 975-78-56

www.autoreferat.ru