

Институт вычислительной математики им. Г.И. Маручка РАН

На правах рукописи

УДК 519.624.2

Крамаренко Василий Константинович

**Методы решения уравнения диффузии в средах с
контрастными включениями и с учетом особенностей от
распределенных источников**

Специальность 05.13.18 —

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Ю. В. Василевский

Научный консультант:
д.ф.-м.н. Ю. А. Кузнецов

Москва — 2019

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Метод учета особенности от распределенных источников в уравнении диффузии	12
1.1. Постановка задачи	12
1.2. Нелинейная двухточечная схема для метода конечных объемов . . .	13
1.3. Схема нелинейной коррекции в методе конечных объемов	15
1.3.1. Схема Писмана учета скважины при моделировании подземных течений	18
1.3.2. Метод расчета потока из скважины в область Ω	21
1.4. Варианты функций особенности решения	22
1.4.1. Изотропный случай	23
1.4.2. Анизотропный случай	23
1.4.3. Частично перфорированная скважина	26
1.5. Численные эксперименты	29
1.5.1. Треугольно–призматические сетки	31
1.5.2. Неортогональные гексаэдральные сетки	33
1.5.3. Двумерный изотропный случай, сдвинутая скважина	34
1.5.4. Двумерный анизотропный случай, гексаэдральная сетка . . .	37
1.5.5. Трехмерный изотропный и анизотропный случаи, наклонная скважина	38
1.5.6. Трехмерный случай, частично перфорированная скважина .	42
1.5.7. Изотропный случай, две скважины	43
1.5.8. Зависимость ошибки от радиуса применения схемы нелинейной коррекции для нескольких скважин	46
1.6. Выводы	47

Глава 2. Решение уравнения диффузии в средах с сильно контрастными включениями	48
2.1. Постановка задачи	48
2.2. Смешанный метод конечных элементов	50
2.3. Смешанный гибридный метод конечных элементов	51
2.4. Процедура ассемблирования матриц	54
2.5. Макро-гибридная формулировка	56
2.6. Построение двухуровневого предобуславливателя	57
2.7. Практическая реализация двухуровневого предобуславливателя	61
2.8. Блочнo-двухуровневый предобуславливатель	62
2.9. Эксперименты с двухуровневым и блочно-двухуровневым предобуславливателями	64
2.9.1. Сравнение двухуровневого предобуславливателя с предобуславливателем Якоби	64
2.9.2. Сравнение двухуровневого предобуславливателя с предобуславливателем Якоби и блочно-двухуровневым предобуславливателем	67
2.9.3. Исследование параллельных свойств блочно-двухуровневого предобуславливателя	68
2.10. Выводы	74
Заключение	79
Список литературы	80
Список рисунков	90
Список таблиц	92

Введение

В настоящее время уравнение диффузии используется для математического описания широкого круга явлений, таких как фильтрационные течения в пористых средах. При разработке математических моделей часто возникает необходимость учета различных особенностей среды, которые оказывают значительное влияние на получаемое решение. Такими особенностями среды могут быть анизотропия, гетерогенность или нелинейное поведение тензора диффузии или других физических характеристик среды.

Физический процесс фильтрации в общем случае описывается при помощи нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [1, 2]. При моделировании реальных объектов, таких как нефтяные месторождения, необходимо учитывать процессы фильтрации одновременно нескольких компонент, например воды, нефти, газа. Это приводит к системе уравнений многофазной фильтрации [3, 4]. Для решения нелинейных систем, возникающих в результате дискретизации таких уравнений, чаще всего используются методы решения, основанные на методе Ньютона [5]. В настоящей работе рассматривается уравнение диффузии, которое для вопросов, исследуемых в работе, эквивалентно линеаризованной однофазной задаче фильтрации.

Актуальность темы данной работы заключается в описании и исследовании двух новых методов корректного учета двух различных особенностей задачи в уравнении диффузии. Первый из предложенных подходов для метода конечных объемов позволяет учитывать произвольную особенность решения, имеющую аналитическое описание. Такой способ уже давно применяется в методе конечных элементов [6]. Идея подхода состоит в том, чтобы при наличии аналитического описания особенности непосредственно ввести его в дискретизацию. Этот подход был также исследован и для метода конечных объемов [7]. В диссертации данная идея обобщена и применена для корректного учета распределенных

источников (нагнетательных и эксплуатационных скважин для уравнения фильтрации), пересекающих произвольным образом ячейки расчетной сетки.

Второй подход, разработанный и исследованный в диссертации, связан с моделированием диффузионных процессов в средах с сильно контрастными включениями. Сильно контрастные включения являются подобластями, в которых тензор диффузии достаточно сильно отличается от тензора диффузии в остальной области. Во второй главе рассматривается построение простого преобуславливателя, использование которого в итерационных методах исключает зависимость их скорости сходимости от скачков коэффициента диффузии. При дополнительных ограничениях, таких как отсутствие общей границы у включений с контрастным коэффициентом диффузии, метод обеспечивает эффективное распараллеливание процесса итерационного решения линейных систем.

Детальный учет влияния скважин на фильтрационные течения имеет определяющее значение при моделировании нефтяных месторождений. Данная тема получила развитие в то же время, что и численные модели нефтегазодобычи. Разработка моделей для учета скважин велась с начала второй половины двадцатого века [8]. При использовании метода конечных объемов для дискретизации одной из задач является расчет потока между скважиной и ячейкой в том случае, когда известны давление в расчетной ячейке и давление в скважине. В начале семидесятых годов В.Б. Андреевым и С.А. Кряквиной [9] была предложена схема, аппроксимирующая поток из скважины, как разность давлений со специальным коэффициентом, рассчитываемым из условий задачи и расчетной сетки. В 1978 году аналогичную модель предложил Дональд Писман [10]. Его основная идея также заключается в том, чтобы ввести линейную зависимость между давлением на скважине (так называемым забойным давлением) и давлением в ячейке и ввести величину, известную как эквивалентный радиус. Данный подход давал возможность при известном забойном давлении рассчитать поток между скважиной и ячейкой. Изначально эта идея была сформулирована для равномерных квадратных сеток и изотропной среды, но потом была обобщена на течения в анизотропной среде [11], а также для потоков, не описываемых законом Дарси [12]. Данный

метод до сих пор широко применяется ввиду простоты реализации и независимости от схем дискретизации [13–15] как в методе конечных объемов, так и в других методах [16] для разнообразных типов скважин [17, 18], а также для течений, не описываемых законом Дарси на неструктурированных сетках [19]. Необходимо отметить, что в последней работе для нахождения эквивалентного радиуса решается локальная подзадача в ближайшей окрестности скважины. Однако во всех вариантах реализации метода предполагается прохождение скважины через центр ячейки. Альтернативой методу Писмана является подход, в котором в некоторой области вокруг скважины решается специальная подзадача, после чего полученные данные используются при расчете основной задачи методом конечных объемов [20], или методом конечных суперэлементов [21]. Необходимо отметить также, что при использовании метода конечных элементов для дискретизации задачи, задание потока между скважиной и расчетной областью также может потребовать специальной постановки задачи и использования особых граничных условий для более эффективного решения задачи, как описано, например, в [22, 23].

Подход, лежащий в основе предложенного метода, был предложен в 1994 году Дидьером Ю Дингом [7] и далее усовершенствован в работах [24, 25]. В дальнейшем этот подход был развит в работе [26], где и был получен второй порядок сходимости решения. Однако при этом накладывались существенные ограничения как на расчетную сетку, так и на саму модель скважины. В частности, сетка предполагалась тетраэдральной и построенной таким образом, чтобы скважина проходила через ребра используемой сетки.

В диссертации предлагается новый метод учета скважины на произвольной многогранной сетке и произвольного прохождения скважины через ячейки многогранной расчетной сетки [27–29]. Как и в работах [25, 26], он основывается на идее включения аналитической функции непосредственно в дискретизацию. Предлагаемый метод представляет собой линейную многоточечную схему, построенную по принципам, описанным в работе [30]. Однако вместо триплета, то есть трех векторов, участвующих в разложении, восстанавливающем потоки на каждой грани, в данном методе используются четыре вектора и, соответственно,

четыре коэффициента в разложении. Четвертый коэффициент отвечает за аналитическую функцию, которая зависит от учитываемой особенности решения. Такая совокупность четырех векторов называется квадруплетом. Потоки из скважины в ячейку также рассчитываются при помощи аппроксимации квадруплетами. В первой главе дано описание построения линейной многоточечной схемы при помощи квадруплетов, а также представлены эксперименты с различным тензором диффузии, в частности, изотропный и анизотропный случаи, а также эксперименты для случая нескольких скважин и частично перфорированной скважины. Для численного исследования свойств нового метода, он был внедрен в программную платформу INMOST.

Во второй главе предложен способ построения предобуславливателя для матрицы конечно-элементной дискретизации уравнения диффузии с сильно контрастными включениями. Для решения задач, связанных с уравнениями диффузии, основным инструментом являются итерационные методы, использующие пространства Крылова. Это, в первую очередь, методы сопряженных и бисопряженных градиентов [31, 32], а также обобщенный метод минимальных невязок [31, 33, 34]. Метод сопряженных градиентов был предложен в 1952 году [35, 36]. Он изначально был сформулирован как точный метод решения системы с симметричной положительно определенной матрицей, но позднее стал применяться именно как итерационный метод [37]. Развитием метода сопряженных градиентов можно считать стабилизированный метод бисопряженных градиентов [38], применяемый для произвольных квадратных невырожденных матриц. Однако одна его итерация требует двух умножений матрицы на вектор, что повышает вычислительную сложность каждой итерации [31, 39]. Отдельно следует упомянуть обобщенный метод минимальных невязок, известный в настоящее время как GMRES [40], первая версия которого была предложена и обоснована Ю.А. Кузнецовым в 1968 году [33, 34]. Этот метод, в отличие от метода сопряженных градиентов, требует хранения в памяти набора векторов, число которых увеличивается пропорционально размерности пространств Крылова. Более детальное описание истории создания и развития итерационных методов, основанных на пространствах

Крылова приведено в [41]. Также следует отметить, что решение задач с высоконтрастными включениями может производиться не только при помощи методов, использующих пространства Крылова, но и при помощи многих других, например, метода фиктивных областей [42], для которого также доказана независимость скорости сходимости от скачка коэффициентов, однако на каждом шаге итерационного процесса необходимо решать уравнение Пуассона.

Сама идея предобуславливания системы линейных уравнений для ускорения итерационного решения была высказана еще Аланом Тьюрингом [43]. Уже в середине прошлого века проводились исследования по созданию различных предобуславливателей [44, 45]. В настоящее время многократно выросло количество методов предобуславливания [46, 47]. Одной из первых идей было применение предобуславливателя Якоби, который не только прост в реализации, но и эффективен в ряде случаев [48, 49]. Также необходимо отметить почти идеальную параллелизуемость этого метода. Тем не менее, он не всегда оказывается эффективным для решения сложных задач.

Другой широко применяемой группой предобуславливателей являются различные варианты неполного LU разложения матрицы, или разложения Холецкого в симметричном случае. Сама идея неполной факторизации была высказана еще в пятидесятых годах [44, 45]. В качестве предобуславливателя такое разложение начали использовать в середине семидесятых годов [50], после чего было предложено и исследовано большое число различных методов [51–54], было проведено как их теоретическое обоснование [55], так и предложены практические методики по реализации предобуславливателей типа ILU [56, 57]. В настоящее время существуют не только теоретические описания данного семейства методов [58], но и готовые библиотеки программ, предоставляющие возможность использовать эти алгоритмы [59–63].

Еще одним эффективным способом предобуславливания является многосеточный метод. Идея этого метода была высказана в 60-годах Р.П. Федоренко [64] и Н.С. Бахваловым [65]. Позднее, многосеточный метод стал использоваться в каче-

стве метода предобуславливания в виде алгебраического многосеточного метода [41, 66–68].

Метод декомпозиции области также является одним из важнейших подходов, на основе которых происходит построение предобуславливателей. Идеи, связанные с методом декомпозиции области, были высказаны В.И. Агошковым и В.И.Лебедевым в работах [69–72]. Необходимо также отметить работу А.М. Мацокина и С.В. Непомнящих [73], которая заложила основу использования аддитивного метода Шварца при разработке параллельных предобуславливателей [74, 75]. Более полный обзор методов декомпозиции области приведен в [76].

Метод, представляемый во второй главе диссертации, использует подход построения каркасного пространства, предложенный в статье [77] для построения блочно-двухуровневого предобуславливателя в случае отсутствия общей границы между включениями. Блочно-двухуровневый предобуславливатель включает диагональную матрицу и совокупность одноранговых матриц, каждая из которых соответствует одному включению. Данный вид предобуславливателя был сформулирован в [78], реализован и протестирован в [79, 80]. Было подтверждено, что при его использовании количество итераций метода сопряженных градиентов не зависит от скачка коэффициентов диффузии. Было также проведено сравнение предложенного предобуславливателя с другими эффективными методами и подтверждены его хорошая параллелизуемость и быстродействие. Для сравнения с другими методами блочно-двухуровневый предобуславливатель был внедрен в программный комплекс INMOST.

Целью данной работы является разработка методов решения уравнения диффузии в средах с контрастными включениями и с учетом особенностей от распределенных источников (скважин).

Для достижения поставленной в данной работе цели были решены следующие **задачи**:

1. Разработать метод конечных объемов приближенного решения уравнения диффузии с учетом особенностей от распределенных источников (скважин), обладающий вторым порядком аппроксимации.

2. Разработать и исследовать параллельный метод для приближенного решения задачи диффузии в средах с высококонтрастными включениями.

Научная новизна:

1. Впервые был предложен метод учета произвольной аналитической функции особенности в методе конечных объемов при учете особенностей от распределенных источников (скважин) в задачах диффузии.
2. Впервые был предложен блочно-двухуровневый предобуславливатель, который обеспечивает независимость скорости сходимости от скачков коэффициента диффузии.

Практическая значимость данной диссертации заключается в разработке нового метода включения произвольной функции особенности в метод конечных объемов, а также в предложении нового варианта предобуславливателя с проекторами для решения задач диффузии в высококонтрастных средах.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Метод учета особенности решения, порождаемой распределенными источниками (скважинами), в задачах диффузии.
2. Параллельный блочно-двухуровневый предобуславливатель для итерационного решения систем с матрицами жесткости, порождаемыми в задачах диффузии с высококонтрастными включениями.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на: на российско-немецком семинаре "German-Russian Workshop on Mathematical Modelling in Medicine and Geophysics" в 2016 году, международной конференции "ECMOR" в 2017 году, на "Всероссийской конференции-школе молодых исследователей Абрау-Дюрсо" в 2017 году, на международной конференции "Russian Supercomputing days" в 2018 году, на третьем и пятом международных семинарах "Numerical methods and applications in Earth and life science" в городе Сьон в 2017 и 2019 годах, а также на семинаре в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук и на семинаре в Вычислительном центре имени А. А. Дородницына Российской академии наук.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 3 — в тезисах докладов.

В совместных работах автор участвовал в разработке методов и алгоритмов, реализовывал методы и проводил численные эксперименты.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 94 страницы, включая 23 рисунка и 24 таблицы. Список литературы содержит 93 наименования.

Благодарности.

Автор выражает искреннюю благодарность Ю. В. Василевскому за научное руководство диссертацией, Ю. А. Кузнецову за научное консультирование, всестороннюю поддержку и обеспечение хороших условий для работы. Кроме того, автор благодарен К. Д. Никитину, И. Н. Коньшину за ценные советы, рекомендации и замечания, полученные в процессе работы над диссертацией.

Глава 1. Метод учета особенности от распределенных источников в уравнении диффузии

1.1. Постановка задачи

Пусть Ω — трехмерная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D$. Рассматривается стационарная задача диффузии. На части границы Γ_D ставится граничное условие Дирихле, на части границы Γ_N — условие Неймана:

$$\begin{aligned} -\nabla (\mathbb{D}\nabla p) &= f_{rh} \quad \text{в } \Omega, \\ p &= g \quad \text{на } \Gamma_D, \\ -(\mathbb{D}\nabla p) \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_N \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbb{D}(\mathbf{x})$ — симметричный положительно определенный тензор диффузии, $f_{rh} = f_{rh}(\mathbf{x})$ — функция источника, которая в общем случае принадлежит пространству L_2 , $g(\mathbf{x})$ — функция граничного условия Дирихле, условие Неймана предполагается однородным.

Введем в области Ω конформную сетку Ω_h , состоящую из многогранных ячеек.

Проинтегрируем уравнение (1.1) по ячейке сетки $T \in \Omega_h$.

$$-\int_T \nabla (\mathbb{D}\nabla p) dx = \int_T f_{rh} dx. \quad (1.2)$$

По теореме Остроградского-Гаусса уравнение (1.2) можно записать в виде

$$-\int_{\partial T} \mathbb{D}\nabla p \cdot \mathbf{n} ds = \int_T f_{rh} dx. \quad (1.3)$$

Так как интегрирование производилось по многогранной ячейке, то интеграл в предыдущем выражении можно записать в виде

$$-\sum_{f_i \in T} \int_{f_i} \mathbb{D}\nabla p \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{f_i \in T} \int_{f_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \int_T f_{rh} dx, \quad (1.4)$$

где f_i — грани ячейки e_t .

В методе конечных объемов проводится дискретизация путем приближения интегралов в уравнении (1.4) различными методами.

1.2. Нелинейная двухточечная схема для метода конечных объемов

В данном разделе кратко описана нелинейная монотонная двухточечная схема дискретизации для метода конечных объемов. В данной схеме дискретизации потока для каждой пары ячейка–грань ищется специальная тройка линейно независимых векторов, называемая триплетом. Векторы строятся из точки колокации данной ячейки (ее барицентра), до точек колокации в соседних ячейках (их барицентров), как показано на рисунке 1.1. В некоторых случаях для нахождения точек колокации также могут потребоваться центры граней и ребер, подробнее см. [81].

Триплет выбирается таким образом, чтобы по нему можно было разложить вектор конормали $\ell_f = \mathbb{D} \cdot \mathbf{n}_f$ так, что

$$\ell_f = \alpha \mathbf{t}_1 + \beta \mathbf{t}_2 + \gamma \mathbf{t}_3, \quad (1.5)$$

где коэффициенты α , β и γ являются неотрицательными, см. [30].

В рассматриваемой схеме нормальная компонента потока является производной по направлению вдоль конормали. Она может быть представлена как сумма трех производных вдоль векторов $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$, которые могут быть приближены с помощью формулы центральных разностей:

$$(-\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}_f)_+ = \alpha_+ (p_{+,1} - p_+) + \beta_+ (p_{+,2} - p_+) + \gamma_+ (p_{+,3} - p_+) + \mathcal{O}(h). \quad (1.6)$$

Для противоположной ячейки T_- относительно той же грани f можно провести аналогичную процедуру поиска триплета, представления конормали и, соответственно, аппроксимацию потока в виде другой суммы:

$$(\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}_f)_- = \alpha_- (p_{-,1} - p_-) + \beta_- (p_{-,2} - p_-) + \gamma_- (p_{-,3} - p_-) + \mathcal{O}(h). \quad (1.7)$$

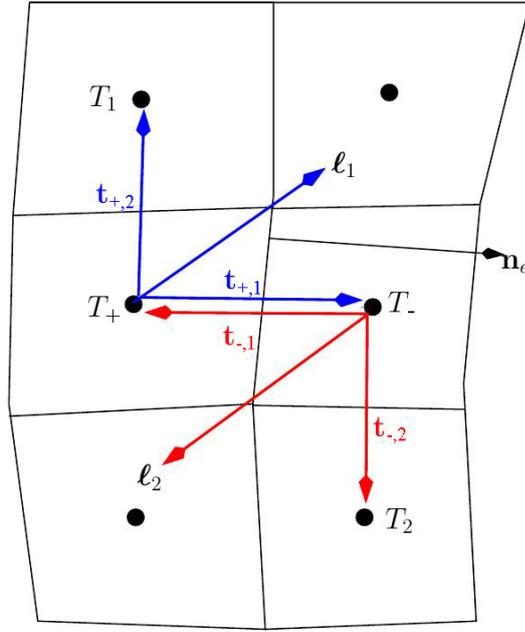


Рисунок 1.1 — Два представления для вектора конормали $\ell_1 = -\ell_2 = \mathbb{D} \cdot \mathbf{n}_f$ в двумерном случае.

Взяв линейную комбинацию уравнений (1.6) и (1.7) с неотрицательными коэффициентами μ_+ и μ_- получаем аппроксимацию потока через грань:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}_f &= \mu_+ \mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n}_f + \mu_- \mathbf{u}_- \cdot \mathbf{n}_f + O(h) \\
 &= \mu_+ (\alpha_+ + \beta_+ + \gamma_+) p_+ - \mu_- (\alpha_- + \beta_- + \gamma_-) p_- \\
 &\quad - \mu_+ (\alpha_{+p_{+,1}} + \beta_{+p_{+,2}} + \gamma_{+p_{+,3}}) + \mu_- (\alpha_{-p_{-,1}} + \beta_{-p_{-,2}} + \gamma_{-p_{-,3}}) + O(h).
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Для аппроксимации потока используется выпуклая линейная комбинация μ_+ и μ_- :

$$\mu_+ + \mu_- = 1. \tag{1.9}$$

Данная схема в общем случае является многоточечной. Для построения двухточечной нелинейной монотонной схемы можно избавиться от неизвестных для давления в формуле (1.8) путем подбора коэффициентов μ_+ и μ_- :

$$-\mu_+ d_+ + \mu_- d_- = 0, \tag{1.10}$$

где $d_{\pm} = \alpha'_{\pm} p_{\pm,1} + \beta'_{\pm} p_{\pm,2} + \gamma'_{\pm} p_{\pm,3}$. Коэффициенты подбираются таким образом, чтобы суммарный вклад всех ячеек, кроме двух, соседствующих через грань f , был равен нулю.

Финальная формула для дискретизации потока будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}_f = M^+ p_+ - M^- p_-, \quad (1.11)$$

где $M^\pm = M^\pm(p) = \mu_\pm(p) (\alpha'_\pm + \beta'_\pm + \gamma'_\pm)$.

Постановка (1.11) в (1.4) порождает систему нелинейных алгебраических уравнений относительно переменной p .

Было показано [30], что сходящийся метод Пикара решения нелинейной системы порождает M-матрицы, поэтому все итерационные приближения являются неотрицательными векторами, что обеспечивает неотрицательность дискретного решения. Также следует отметить, что в случае K -ортогональных сеток совпадает с традиционной линейной двухточечной схемой дискретизации потока.

1.3. Схема нелинейной коррекции в методе конечных объемов

В данном разделе описана схема нелинейной коррекции [27] в методе конечных объемов [81]. Для этого рассмотрим область вокруг скважины и модифицируем схему [30] так, чтобы учесть сингулярность, порождаемую скважиной.

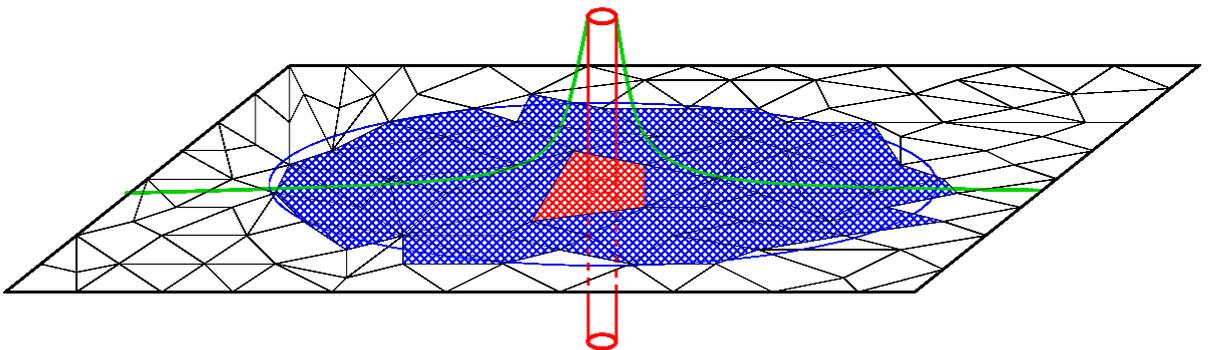


Рисунок 1.2 — Логарифмическая сингулярность для области вокруг скважины.

Пусть в каждой ячейке вблизи скважины давление представимо в виде суммы линейной и нелинейной части:

$$p_T = \underbrace{a x + b y + c z + d}_{p_{lin}} + \underbrace{e F(x, y, z)}_{p_F}, \quad (1.12)$$

где $F(x, y, z)$ — функция, описывающая сингулярность, а a, b, c, e — некие неизвестные коэффициенты, которые необходимо найти. Например в изотропном однородном случае $F(x, y, z) = \ln(\bar{r}(x, y, z))$, где $\bar{r}(x, y, z)$ — расстояние между точкой (x, y, z) и осью скважины.

Тогда разложение (1.12) можно подставить в уравнение (1.4):

$$\begin{aligned} \int_f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_f dS &= - \int_f (\mathbb{D} \nabla p_T) \cdot \mathbf{n}_f dS \\ &= - \int_f (\mathbb{D} \nabla p_{lin}) \cdot \mathbf{n}_f dS - \int_f (\mathbb{D} \nabla p_F) \cdot \mathbf{n}_f dS. \end{aligned} \quad (1.13)$$

При построении схемы не накладываается никаких ограничений на прохождение скважины через ячейки расчетной сетки. Учитывая этот факт, а также то, что метод формулируется для ячеек произвольной формы, можно предположить, что тензор будет диагональным, $\mathbb{D} = \text{diag}(d_x, d_y, d_z)$. В противном случае расчетную сетку можно повернуть таким образом, чтобы диагонализировать тензор \mathbb{D} .

При использовании (1.12) и (1.13), выражение для интегрального нормального потока может быть представлено следующим образом.:

$$\begin{aligned} q_f &= \int_f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_f dS = - \int_f \mathbb{D} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}_f dS - e \int_f (\mathbb{D} \nabla F(x, y, z)) \cdot \mathbf{n}_f dS \\ &= a l_1 + b l_2 + c l_3 + e l_4. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Интегралы для l_1 , l_2 и l_3 могут быть вычислены аналитически. Интеграл для l_4 также может быть вычислен аналитически для некоторых случаев расположения скважины относительно грани, вида сетки и тензора диффузии [26], но в общем случае необходимо использовать численное интегрирование. В настоящей работе была использована кубатурная формула 13 порядка. Интегралы l_i зависят только от сетки, расположения скважины и тензора диффузии, то есть могут рассчитываться один раз при подготовке к решению, в то время как коэффициенты (a, b, c, e) восстанавливаются из решения в соседних ячейках.

Для восстановления этих коэффициентов используется подход, аналогичный [30], но вместо набора из трех векторов (триплет) вводится новый набор из четырех векторов (квадруплет). В этом случае при построении приближения выбираются четыре соседние точки колокации, используя которые можно построить разложения, аналогичные (1.6), (1.7).

Пусть T_+ и T_- — ячейки, соседствующие через грань f : обозначим барицентры этих ячеек \mathbf{x}_+ и \mathbf{x}_- . Точки \mathbf{x}_i составляют квадруплет, а соответствующие давления в этих точках обозначены $p_i = p(\mathbf{x}_i)$ и $p_{\pm} = p(\mathbf{x}_{\pm})$. Предположим, что представление (1.12) с коэффициентами a, b, c, e верно для каждой точки в квадруплете. Тогда, вычитая значения давления в центре ячейки T_+ из значения в точках колокации и объединяя уравнения в систему, можно получить:

$$\begin{pmatrix} p_1 - p_+ \\ p_2 - p_+ \\ p_3 - p_+ \\ p_4 - p_+ \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 - x_+ & y_1 - y_+ & z_1 - z_+ & F_1 - F_+ \\ x_2 - x_+ & y_2 - y_+ & z_2 - z_+ & F_2 - F_+ \\ x_3 - x_+ & y_3 - y_+ & z_3 - z_+ & F_3 - F_+ \\ x_4 - x_+ & y_4 - y_+ & z_4 - z_+ & F_4 - F_+ \end{bmatrix}}_Q \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ e \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ e \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

где $F_* := F(x_*, y_*, z_*)$. Отметим, что поиск точек колокации для квадруплета производится в два этапа: сначала находится триплет, а после ищется четвертая точка колокации таким образом, чтобы детерминант матрицы Q был не равен нулю и максимален по модулю. В случае, если такая четвертая точка колокации не была найдена при обходе окрестных барицентров, в область поиска добавляются центры граней и, если необходимо, ребер.

Решая систему (1.15), получим коэффициенты a_+, b_+, c_+, e_+ для ячейки T_+ :

$$\begin{aligned} a_+ &= \sum_j (p_j - p_+) m_{1,j}, & b_+ &= \sum_j (p_j - p_+) m_{2,j}, \\ c_+ &= \sum_j (p_j - p_+) m_{3,j}, & e_+ &= \sum_j (p_j - p_+) m_{4,j}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $m_{i,j}$ — элементы обратной матрицы из $M = Q^{-1}$. Таким же образом можно построить аппроксимацию для a_-, b_-, c_-, e_- из ячейки T_- .

Подставляя (1.16) в уравнение (1.14) можно получить:

$$\begin{aligned}
 q_{\pm} &= \pm \int_f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_f dS \\
 &= \pm \left[l_1 \sum_j (p_j - p_{\pm}) m_{1,j}^{\pm} + l_2 \sum_j (p_j - p_{\pm}) m_{2,j}^{\pm} \right. \\
 &\quad \left. + l_3 \sum_j (p_j - p_{\pm}) m_{3,j}^{\pm} + l_4 \sum_j (p_j - p_{\pm}) m_{4,j}^{\pm} \right]
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

или

$$\begin{aligned}
 q_{\pm} &= \pm \left[\sum_j p_j \underbrace{\sum_i l_i m_{i,j}^{\pm}}_{k_j^{\pm}} - p_{\pm} \sum_j \underbrace{\sum_i l_i m_{i,j}^{\pm}}_{k_j^{\pm}} \right] \\
 &= \pm \left(\sum_j k_j^{\pm} (p_j - p_{\pm}) \right).
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Окончательная аппроксимация потоков получается при сложении q_+ и q_- .

$$q_f = \mu_+ \left(\sum_j k_j^+ (p_j - p_+) \right) - \mu_- \left(\sum_{j'} k_{j'}^- (p_{j'} - p_-) \right). \tag{1.19}$$

В настоящей работе были выбраны коэффициенты $\mu_+ = \mu_- = 1/2$. Данный вариант коэффициентов μ_+ , μ_- был выбран из соображений удобства и простоты.

1.3.1. Схема Писмана учета скважины при моделировании подземных течений

Модель Писмана является одной из первых моделей, использованных для учета скважины при моделировании течений в пористых средах. В первоначальной постановке она была сформулирована для квадратных сеток в рамках метода конечных разностей. Предполагалось, что скважина вертикальная и совершенная, то есть бесконечная и перфорирована равномерно по всей длине, а также проходит через центр ячейки. В этом случае можно воспользоваться формулой так радиального течения (формулой Дюпуй) [10]:

$$p = p_w - \frac{q_w}{2\pi d h_w} \ln \left(\frac{r}{r_w} \right). \tag{1.20}$$

В этой формуле переменная p обозначает давление в некой точке пространства вне скважины, r — расстояние от точки до оси скважины, тензор диффузии скалярный $\mathbb{D} = d\mathbb{I}$, а d — коэффициент диффузии, p_w — давление в скважине, q_w — поток из скважины, h_w — глубина проницаемой части скважины, r_w — радиус скважины.

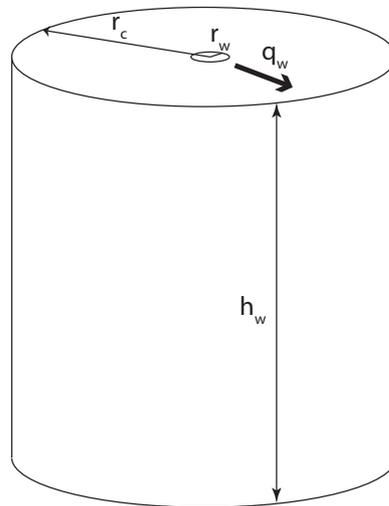


Рисунок 1.3 — Радиальный поток из скважины.

Рассмотрим ячейку, через центр которой проходит скважина, а также 4 соседних ячейки, см. рисунок 1.4.

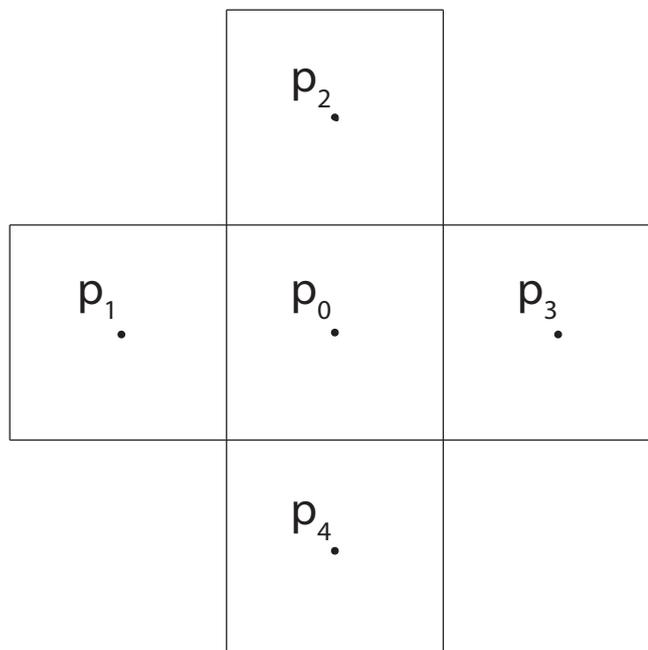


Рисунок 1.4 — Пример сетки, используемой для выведения формулы Писмана.

Используя классическую двухточечную схему дискретизации, можно записать уравнение:

$$dh_w(4p_0 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4) = q_w. \quad (1.21)$$

Учитывая симметрию решения, это уравнение можно переписать как

$$(p_0 - p_i) = \frac{q_w}{4dh_w}. \quad (1.22)$$

С помощью уравнения (1.20), а также учитывая, что до центра соседней ячейки расстояние равно шагу сетки ($r = h$), можно вывести:

$$p_0 = p_w - \frac{q_w}{2\pi dh_w} \ln\left(\frac{h}{r_w}\right) + \frac{q_w}{4dh_w} = p_w + \frac{q_w}{2\pi dh_w} \ln\left(\frac{r_w}{\alpha h}\right),$$

где $\alpha = e^{-\pi/2}$. После этого формула Писмана для расчета потока из скважины в ячейку (или наоборот) может быть выписана следующим образом

$$q = (p_0 - p_w) \cdot \frac{2\pi dh_w}{\ln(\alpha h/r_w)} = (p_0 - p_w) \cdot WI, \quad (1.23)$$

где

$$WI = \frac{2\pi dh_w}{\ln(\alpha h/r_w)} \quad (1.24)$$

называется индексом скважины.

Для более сложных случаев, таких как анизотропные коэффициенты диффузии, есть свои варианты индекса скважины:

$$WI_{ani} = \frac{2\pi dh_w \sqrt{d_x d_y}}{\ln(r_e/r_w)}, \quad (1.25)$$

где

$$r_e = \frac{0.14 \sqrt{\sqrt{d_y/d_x} h^2 + \sqrt{d_x/d_y} H^2}}{0.5 \left(\sqrt[4]{d_y/d_x} + \sqrt[4]{d_x/d_y} \right)}.$$

Эти обобщения формулы Писмана применимы только при специальном расположении скважины, а также при использовании специального вида сеток. В настоящей работе предложена схема учета скважины, для произвольного расположения скважины в многогранной ячейке неструктурированной сетки.

1.3.2. Метод расчета потока из скважины в область Ω

Сформулируем альтернативу методу Писмана [10] для расчета потока из скважины в ячейку.

Исходная формула Писмана была выведена при использовании двух ключевых предположений:

- поток из скважины равен сумме линейных потоков через грани;
- формула (1.23) выводится в предположении совершенной вертикальной скважины, вокруг которой во всех соседних ячейках давление задается формулой Дюпуи.

Предлагаемый подход позволяет рассматривать более общий случай, когда скважина не проходит через центр ячейки. Для каждой ячейки находится дополнительная точка, которая располагается на скважине, как показано на рисунке 1.5, и в которой давление прямо пропорционально зависит от забойного давления на скважине, а в простейшем случае — равно этому давлению. При расчете для каждого квадруплета, точки внутри скважины проектируются на поверхность скважины. На рисунке 1.5 показаны два различных набора векторов. Набор слева построен с использованием точек колокации в барицентрах, тогда как набор векторов справа построен с использованием дополнительной точки колокации на скважине. Для построения потока из скважины в ячейку, были использованы квадруплеты, построенные по принципу, проиллюстрированному на рисунке 1.5 справа. Используя эту точку для получения давления p_+ и для построения квадруплетов, по той же схеме, что и в разделе 1.3, и рассматривая только исходящий поток ($\mu_+ = 1, \mu_- = 0$) в (1.19), можно построить дискретизацию потока из скважины.

При известном забойном давлении на скважине составленные таким образом потоки также добавляются в общую матрицу. Если же задан поток из скважины и стоит задача найти забойное давление на ней, то для скважины вводится дополнительная степень свободы.

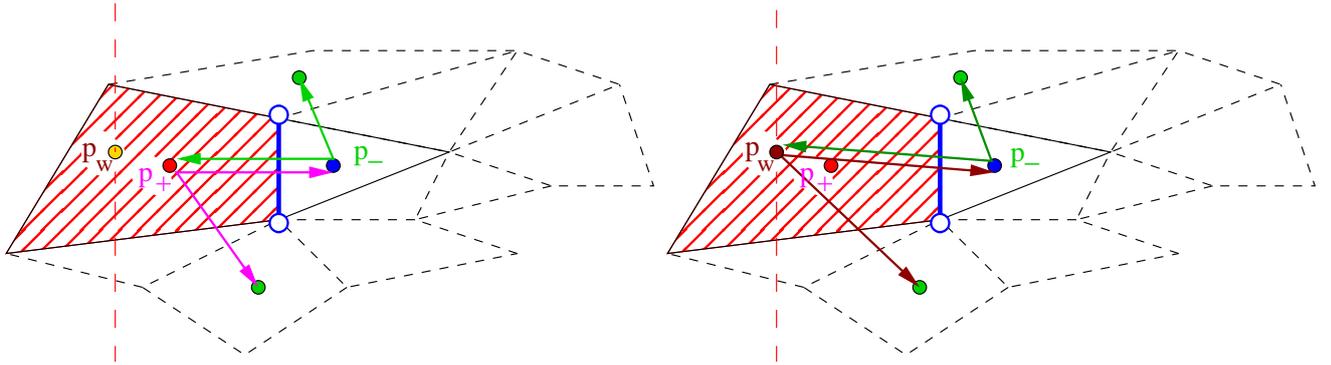


Рисунок 1.5 — Шаблоны для расчета давления по схеме нелинейной коррекции (слева) и дополнительный шаблон для взаимодействия между ячейкой и скважиной (справа).

$$f_{rh} = \mu_+ \left(\sum_j k_j^+ (p_j - p_w) \right) - \mu_- \left(\sum_{j'} k_{j'}^- \cdot (p_{j'} - p_{cell}) \right). \quad (1.26)$$

В настоящей работе были выбраны $\mu_+ = 1$ и $\mu_- = 0$, то есть:

$$f_{rh} = \sum_f \left[\left(\sum_l k_l^+ (p_l - p_w) \right) \right], \quad (1.27)$$

где коэффициенты при неизвестных p_l добавляются в матрицу, а $\sum_f \left(\sum_l k_l^+ (p_w) \right)$ — в правую часть.

1.4. Варианты функций особенности решения

В данном разделе приведены различные варианты аналитических функций F из (1.12), которые были использованы в экспериментах в качестве нелинейной поправки для решения. Каждая функция была применена для определенного эксперимента.

1.4.1. Изотропный случай

Изотропный случай является наиболее известным и хорошо изученным. В случае, если рассматривается совершенная скважина в изотропной среде, то для описания особенности в качестве F из (1.12) можно применить формулу $F(x, y, z) = \ln(r)$, где $r(x, y, z)$ — расстояние от оси скважины до нужной нам точки. В этом случае аналитическое решение для уединенной совершенной скважины описывается выражением (1.20).

Отметим, что данная функция была использована Писманом при выведении классического выражения для индекса скважины WI.

Для данного случая, а также при использовании треугольно- или многоугольно-призматических сеток возможен упрощенный расчет интеграла l_4 из (1.14). При описанных допущениях интеграл пропорционален углу, под которым видно данную грань из скважины. Данный способ расчета интеграла l_4 детально описан в работе [26].

1.4.2. Анизотропный случай

Рассмотрим случай с однородным анизотропным тензором диффузии для случая изолированной совершенной скважины. Для простоты вначале будет рассмотрен двумерный случай анизотропного тензора, что эквивалентно задаче, в которой ось скважины сонаправлена с одной из осей тензора. Во второй части раздела будет дан способ приведения произвольного тензора с двумерному случаю при помощи предположения о совершенности скважины.

Рассмотрим анизотропный случай в двумерной области с $\mathbb{D} = \text{diag}(d_x, d_y)$ и $d_y > d_x$. Такая задача была исследована в [11]. Используя эту работу, приведем

основные шаги по получению аналитической функции F , которая будет служить нелинейной поправкой к решению.

Проведем процедуру замены системы координат:

$$x' = \left(\frac{d_y}{d_x}\right)^{1/4} x, \quad y' = \left(\frac{d_x}{d_y}\right)^{1/4} y. \quad (1.28)$$

В новой системе координат тензор диффузии становится изотропным, однако в этом случае как сетка, так и скважина изменят свою конфигурацию. Скважина в данном случае будет представлена в виде цилиндра с эллиптическим сечением.

Для корректного описания скважины перейдем в эллиптические координаты:

$$x' = B \cosh(\rho) \cos(\varphi), \quad y' = B \sinh(\rho) \sin(\varphi), \quad (1.29)$$

где $B = \sqrt{r_w^2(d_y - kd_x)/(d_x d_y)^{1/2}}$ — коэффициент для эллиптической системы координат (получен в [11]), а r_w — радиус скважины.

В координатах (ρ, φ) аналитическое решение выписывается в виде:

$$p = p_w - \frac{q_w}{2\pi\sqrt{d_x d_y}} (\rho - \rho_w). \quad (1.30)$$

Эллиптическая координата ρ может быть получена из (1.29):

$$\rho = \operatorname{arccosh} \sqrt{\frac{\sqrt{x'^2 + (y' - B)^2} + \sqrt{x'^2 + (y' + B)^2}}{4B^2}}. \quad (1.31)$$

Функция, описывающая сингулярность выражается уравнением (1.31) при использовании преобразования координат (1.29). Интеграл

$$l_4 = - \int_f \mathbb{D}\nabla F(x, y) \cdot \mathbf{n}_f dS = - \int_f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_f dS \quad (1.32)$$

l_4 в (1.14) рассчитывается при помощи численного интегрирования кубатурной формулой 13 порядка.

В этом уравнении вектор $\mathbf{v} = \mathbb{D}\nabla F(x, y)$ в эллиптических координатах может быть представлен следующим образом:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d_x \sqrt[4]{\frac{d_y}{d_x}} \sinh \rho \cos \varphi}{B(\sinh^2 \rho + \sin^2 \varphi)} \\ \frac{d_y \sqrt[4]{\frac{d_x}{d_y}} \cosh \rho \sin \varphi}{B(\sinh^2 \rho + \sin^2 \varphi)} \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Двумерное приближение для трехмерного случая может быть применено в силу того, что скважина бесконечна и равномерно перфорирована по всей длине. В общем случае тензор диффузии может быть полным и ось скважины может быть не направлена вдоль какой-либо оси тензора. В таком случае суммарный поток вдоль скважины в любой точке в ее окрестности равен нулю. Из-за этого можно не учитывать составляющую потока вдоль ее оси, а рассматривать только составляющую, перпендикулярную этой оси, как показано на рисунке 1.6. В результате возможно использовать двумерную проекцию \mathbb{D}'_{xy} тензора диффузии на плоскость, перпендикулярную оси скважины.

Для нахождения двумерной проекции тензора диффузии необходимо найти такое преобразование, которое бы повернуло скважину параллельно одной из осей координат, а потом в матрице тензора диффузии рассмотреть подматрицу, соответствующую остальным двум осям. Можно записать следующий алгоритм (Алгоритм 1):

Алгоритм 1 Получение \mathbb{D}'_{xy}

- 1: Найти такое вращение, после которого ось скважины была бы направлена вдоль какой-либо из осей координат. Пусть в нашем случае вдоль оси Oz.
 - 2: Найти тензор \mathbb{D}' в новых координатах.
 - 3: Для получения тензора \mathbb{D}'_{xy} взять подматрицу тензора размера 2, отвечающую за оси, перпендикулярные оси скважины (см рисунок 1.6). В нашем случае это плоскость xOy.
 - 4: Провести диагонализацию этой подматрицы, получая необходимые коэффициенты d'_x и d'_y .
-

Полученные коэффициенты d'_x и d'_y могут быть использованы в выражении (1.30) для получения аналитического решения в новых координатах. Интеграл ℓ_4 в этом случае рассчитывается тем же способом, что и в (1.32).

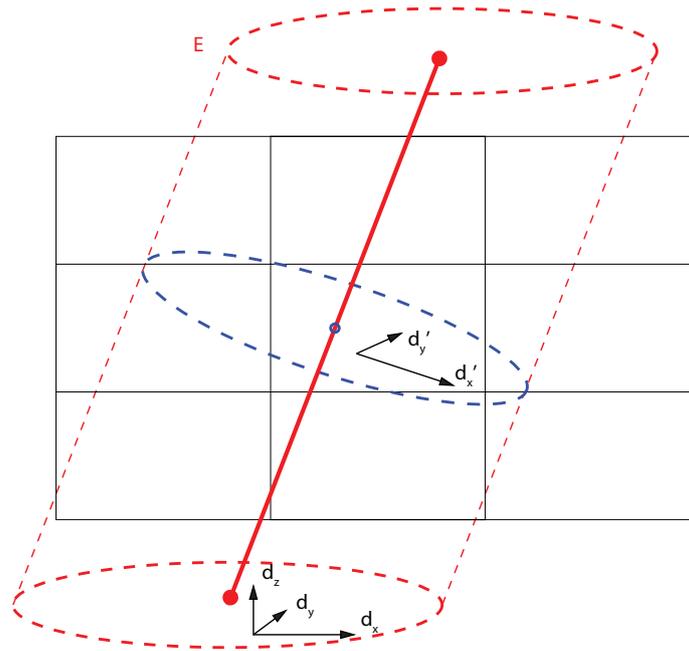


Рисунок 1.6 — Наклонная скважина в анизотропной среде.

1.4.3. Частично перфорированная скважина

Совершенные скважины, которые были бы бесконечными и равномерно перфорированными по всей длине, являются идеализацией. В реальных задачах необходима поправка, которая бы корректно описывала решение рядом с перфорированным участком скважины конечного размера.

Рассмотрим сегмент скважины $[A, B]$, внутри которого она является равномерно перфорированной, а за его пределами перфорация отсутствует, и предположим, что радиус скважины мал по сравнению с длиной данного сегмента. Пусть тензор диффузии также будет изотропным: $\mathbb{D} = d\mathbb{I}$, $A = (0, 0, -L)$, $B = (0, 0, L)$. Тогда можно рассматривать скважину как отрезок с постоянной плотностью потока $q/2L$. Рассмотрим некоторую бесконечно малую часть перфорированного сегмента скважины, как точечный источник $\Delta q = q \Delta l/2L$. Поток на расстоянии R от этой части будет направлен от сегмента скважины и равен по модулю следующей величине [82]:

$$|\Delta \mathbf{u}| = \frac{\Delta q}{4\pi} \frac{1}{R^2}, \quad (1.34)$$

где $\Delta \mathbf{u}$ — вектор потока через бесконечно малый телесный угол.

Если рассматривается точка на расстоянии r от оси скважины и на высоте z от средней точки сегмента скважины, то расстояние R от бесконечно малой части сегмента будет равно

$$R = \sqrt{r^2 + (z - l)^2}, \quad (1.35)$$

где l — расстояние от средней точки сегмента до этой бесконечно малой части скважины, см. рисунок 1.7.

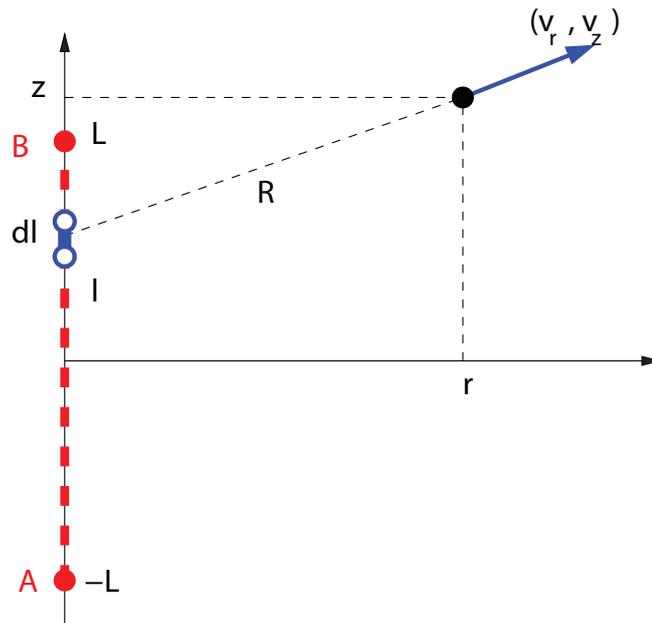


Рисунок 1.7 — Поток от бесконечно малой части сегмента скважины.

Компоненты вектора $\Delta \mathbf{u} = (\Delta u_r, \Delta u_z)^T$ в точке (r, z) выражаются следующими формулами:

$$\Delta u_r = |\Delta \mathbf{u}| \frac{r}{R}, \quad \Delta u_z = |\Delta \mathbf{u}| \frac{z - l}{R}. \quad (1.36)$$

Поток $\mathbf{u}(r, z) = (v_r, v_z)^T$ можно представить как сумму всех потоков от всех бесконечно малых частей скважины. Интегрируя (1.36) по сегменту $[A, B]$, получаем следующие выражения для компонент вектора \mathbf{u} :

$$\begin{aligned}
v_r &= \int_{-L}^L \frac{q r}{8L \pi R^3} dl = \frac{q}{8L \pi} \frac{l - z}{r \sqrt{r^2 + (z - l)^2}} \Big|_{-L}^L \\
&= \frac{q}{8L \pi} \left(\frac{L - z}{r \sqrt{r^2 + (z - L)^2}} + \frac{L + z}{r \sqrt{r^2 + (z + L)^2}} \right), \\
v_z &= \int_{-L}^L \frac{q(z - l)}{8L \pi R^3} dl = \frac{q}{8L \pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - l)^2}} \Big|_{-L}^L \\
&= \frac{q}{8L \pi} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + L)^2}} \right).
\end{aligned} \tag{1.37}$$

На следующем шаге можно найти поле $p(r, z)$ такое, что $-d\nabla p = \mathbf{u}(r, z)$, то есть

$$\begin{pmatrix} -d\frac{\partial p}{\partial r} = v_r \\ -d\frac{\partial p}{\partial z} = v_z \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

В результате интегрирования двух уравнений по r и по z соответственно можно найти функцию, которая описывает решение задачи

$$p = C - F(r, z), \tag{1.39}$$

где функция F выражается следующим образом:

$$\begin{aligned}
F(r, z) &= \frac{q}{8L\pi d} \left[2 \ln r - \right. \\
&\quad \left. \ln \left(\sqrt{r^2 + (L - z)^2} + (L - z) \right) - \right. \\
&\quad \left. \ln \left(\sqrt{r^2 + (L + z)^2} + (L + z) \right) \right],
\end{aligned} \tag{1.40}$$

а C — константа, зависящая от длины сегмента, его радиуса и забойного давления в этом сегменте. Она может быть найдена при помощи фиксации давления p_w на поверхности скважины в точке с координатами $(r_w, 0)$. После этого можно выписать итоговое аналитическое решение, которое будет применяться для учета

частично перфорированной скважины:

$$p = p_w - \frac{q}{8 L \pi d} \left[\ln \frac{r^2}{L_- L_+} - \ln \frac{r_w^2}{L + \sqrt{r_w^2 + L^2}} \right], \quad (1.41)$$

где $L_{\pm} = L \pm z + \sqrt{r^2 + (L \pm z)^2}$.

Отметим также, что решение (1.41) стремится к решению для совершенной скважины при $L \rightarrow \infty$.

1.5. Численные эксперименты

Для верификации представленного подхода, были проведены эксперименты для задач с известными решениями. Были рассмотрены различные случаи коэффициента диффузии и формы ячеек, а также рассмотрен и исследован случай с несколькими скважинами.

Все величины в экспериментах являются безразмерными. Поток из скважины выбирался равным 1, забойное давление — равным 2. На боковых границах области установлены условия Дирихле, полученные из аналитического решения. Безразмерные величины были выбраны для более удобного и эффективного исследования метода на модельных задачах.

Размер расчетной области $100 \times 100 \times 3$ для вертикальной скважины и $100 \times 100 \times 12.5$ для наклонной и частично перфорированной скважины, радиус скважины $r_w = 0.01$, тензор диффузии — диагональный, $\mathbb{D} = \text{diag}(d_x, d_y, d_z)$. Рассматриваются различные соотношения d_y/d_x . Для моделирования двумерного случая рассматривается псевдодвумерная область сеткой размером $N \times N \times 1$ ячейками с нулевыми условиями Неймана на верхней и нижней границах. Для наклонной скважины на верхней и нижней границах были использованы условия Дирихле, как и на боковых границах. В области рассматривались различные сетки, использование которых было вызвано необходимостью проверить эффективность метода для различных, в том числе и неструктурированных сеток.

Во всех экспериментах использовались две схемы дискретизации: нелинейная монотонная двухточечная схема (НМД-схема) из [30] и схема с нелинейной коррекцией (НК-схема). Для учета скважины в схеме нелинейной коррекции использовались три различных подхода. Для НМД-схемы при учете скважины использовалась или формула Писмана, или же поток аналитического решения явно учитывался как источник в правой части уравнения (1.1). Для НК-схемы использовался или метод из Раздела 1.3.2, или поток аналитического решения учитывался, как источник в правой части уравнения (1.1).

Введем нормы ошибок, которые будут использоваться в численных экспериментах. На рисунках изображена дискретная C -норма ошибки решения, которая приводится для каждой ячейки сетки и равна в ней модулю разницы решения и аналитической функции, с которой проводилось сравнение.

В таблицах использовалась относительная L^2 -норма ошибки решения. Введем ее, рассмотрев в каждой ячейке задано аналитическое решение p_{anl} и решение, полученное какой-либо схемой p_{sol} . Тогда L^2 -норма ошибки решения для всех ячеек T_i принадлежащих сетке Ω_h может быть выписана следующим образом

$$L^2(sol) = \sqrt{\frac{\sum_{T_i \in \Omega_h} V_{T_i} (p_{anl} - p_{sol})^2}{\sum_{T_i \in \Omega_h} V_{T_i} (p_{anl})^2}} \quad (1.42)$$

Также в таблицах приведена ошибка потока ε_q , которая равна разнице аналитического потока и потока, полученному по формулам (1.27) или (1.23), в зависимости от примененного метода. Для проведения численных экспериментов была создана численная реализация предложенных методов, внедренная в программную платформу INMOST.

1.5.1. Треугольно–призматические сетки

Рассмотрим псевдодвумерную призматическую сетку, которая составлена из одного слоя треугольных призм. Треугольная сетка в плоскости является неструктурированной с выраженной анизотропией, как на рисунке 1.8. Сетка была построена при помощи пакета Ani2D [63].

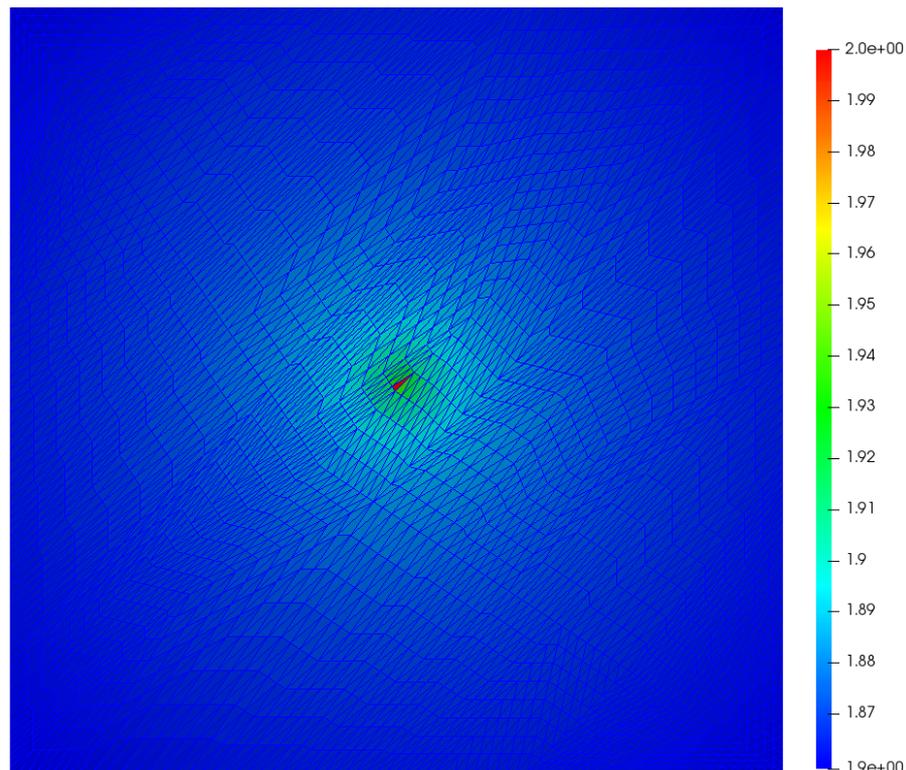


Рисунок 1.8 — Решение для нелинейной двухточечной схемы с подстановкой аналитического потока из скважины.

Из-за неортогональности сеток метод учета скважины, предложенный Писманом [10], не может быть применен в данном эксперименте. Поэтому для нелинейной монотонной схемы метода конечных объемов используется поток из скважины, задаваемый аналитическим решением.

В таблице 1 показаны результаты расчетов на построенной сетке для НМД-схемы и НК-схемы для анизотропной треугольно–призматической сетки: относительная L^2 норма для НМД-схемы с аналитически заданным потоком из скважины и для НК-схемы со схемой учета скважины в дискретизации, описанной в Разделе 1.3.2. Было проведено два варианта экспериментов. В первом варианте не исполь-

зовалась схема для взаимодействия скважины и расчетной сетки, а вместо этого просто бралось значение потока аналитического решения. Во втором случае использовался метод из раздела 1.3.2.

N_c	$L^2_{\text{НМД,А}}$	$L^2_{\text{НК,А}}$	$L^2_{\text{НК}}$
324	1.1e-3	1.5e-10	5.7e-11
1296	5.7e-4	3.8e-11	1.1e-10
5184	2.7e-4	1.0e-9	8.3e-10

Таблица 1 — Относительная ошибка решения для треугольных неструктурированных сеток.

В данной таблице N_c обозначает количество ячеек в сетке. В столбце $L^2_{\text{НМД,А}}$ дана L^2 -норма ошибки для эксперимента с использованием НМД-схемы и потоком, взятым из аналитического решения, в столбце $L^2_{\text{НК,А}}$ — L^2 -норма ошибки для НК-схемы при использовании аналитического потока из скважины. Результаты в таблице показывают, что при применении НК-схемы норма ошибки решения падает почти до нуля. Это связано с тем, что НК-схема по построению должна точно воспроизводить аналитическое решение в том случае, если граничные условия Дирихле на боковых гранях поставлены в соответствии с этим аналитическим решением, а НК-схема используется во всей расчетной области.

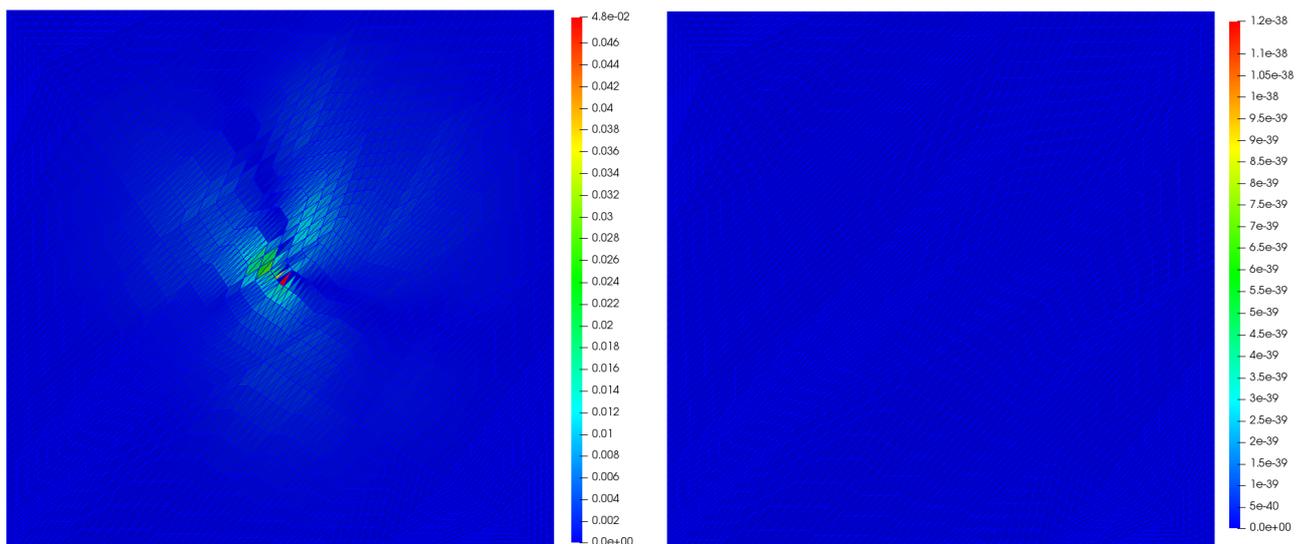


Рисунок 1.9 — Ошибка нелинейной монотонной схемы метода конечных объемов (слева) и схем с нелинейной коррекцией около скважины (справа) на треугольно–призматической сетке.

На рисунке 1.9 изображена ошибка при применении НМД-схемы и НК-схемы с приведенным в Разделе 1.3.2 методом взаимодействия скважины и расчетной сетки. Как видно из рисунка 1.9, C -норма ошибки для НК-схемы равна нулю, что говорит о точном воспроизведении аналитического решения.

1.5.2. Неортогональные гексаэдральные сетки

В этом эксперименте рассматриваются неортогональные гексаэдральные сетки. Такие сетки строятся из кубических путем сдвига вершин в горизонтальной плоскости на случайную величину с сохранением выпуклости ячеек, как изображено на рисунке 1.10. В данном эксперименте также невозможно использование формулы Писмана, как и в предыдущем эксперименте.

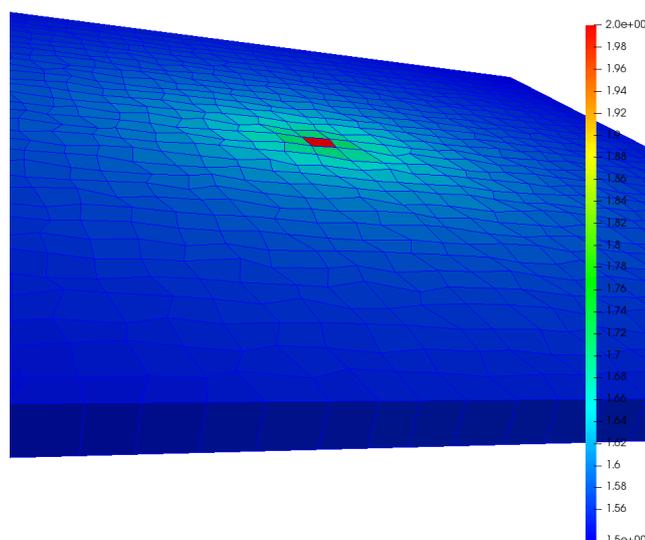


Рисунок 1.10 — Решение для НК-схемы со схемой учета скважины в дискретизации на неортогональной сетке, $100/66 = h$.

В таблице 2 показаны результаты расчетов на неортогональных гексаэдральных сетках: относительная L^2 -норма ошибки в решении НМД-схемы и L^2 -норма ошибки НК-схемы со схемой учета скважины в дискретизации. Отметим, что так же, как и в предыдущем эксперименте, были протестированы два варианта НК-схемы, представленные в предыдущем разделе. НК-схема показывает почти нулевую ошибку решения и является гораздо более точной, по сравнению с

НМД-схемой. Также необходимо отметить, что для НМД-схемы было использовано значение аналитического потока из скважины, что существенно улучшает свойства решения для НМД-схемы.

h	$L^2_{\text{НМД,А}}$	$L^2_{\text{НК,А}}$	$L^2_{\text{НК}}$
100 /33	2.2e-4	4.7e-12	6.4e-12
100 /67	1.0e-5	1.5e-10	4.1e-11
100 /99	1.1e-5	2.2e-11	1.1e-10

Таблица 2 — Относительная ошибка решения для неортогональных гексаэдральных ячеек.

На рисунке 1.11 показаны поля ошибок решения НМД-схемы конечных объемов и НК-схемы со схемой учета скважины в дискретизации на неортогональной сетке.

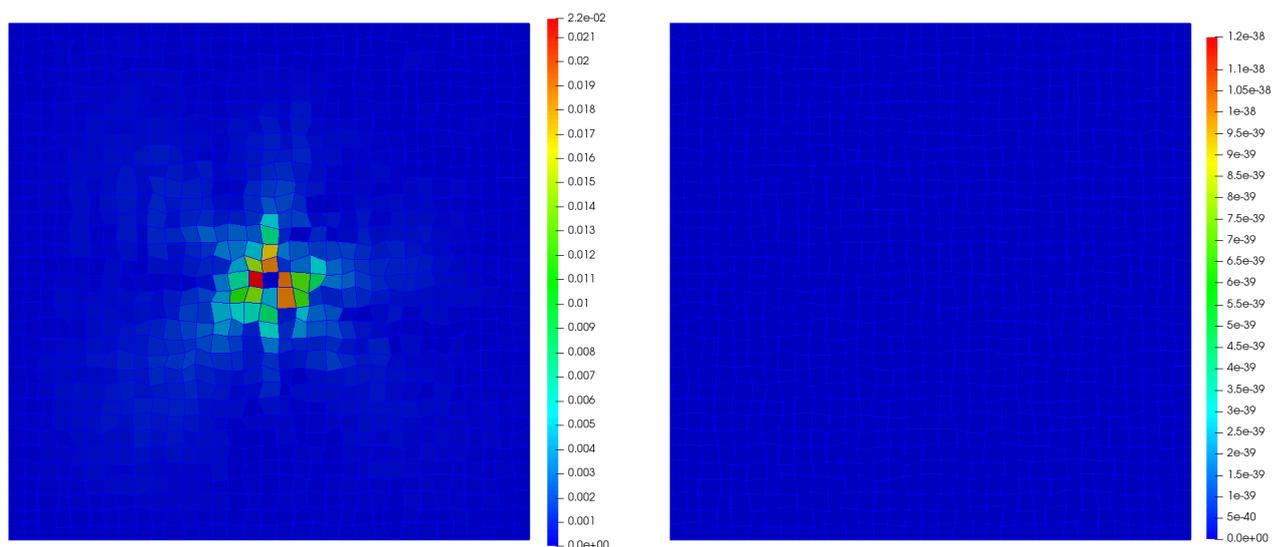


Рисунок 1.11 — Поле ошибки для НМД-схемы конечных объемов (слева) и НК-схемы со схемой учета скважины в дискретизации (справа) на неортогональной сетке $67 \times 67 \times 1$.

1.5.3. Двумерный изотропный случай, сдвинутая скважина

Рассмотрим сетку, состоящую из призм с квадратным основанием, а также с вертикальной скважиной, сдвинутой относительно центра ячейки, через которую она проходит. Скважина сдвинута в плоскости xOy по диагонали на значение

$\delta \cdot d/2$, где d — длина диагонали ячейки, а δ — переменный параметр. При таком условии аналитическое решение задачи будет несимметричным относительно центра ячейки со скважиной.

По построению любой метод, использующий идею Писмана учета скважины при помощи индекса скважины (WI), получает решение, симметричное относительно центра ячейки со скважиной. В отличие от них предлагаемый подход дает несимметричное решение.

δ	$L^2_{\text{НМД,А}}$	$L^2_{\text{НК,А}}$	$L^2_{\text{НМД,П}}$	$L^2_{\text{НК}}$	$\varepsilon_q^{\text{НМД}}$	$\varepsilon_q^{\text{НК}}$
0	1.4e-4	1.3e-11	1.8e-4	1.3e-11	5.0e-3	8.9e-11
0.1	1.5e-3	6.3e-12	1.5e-3	1.5e-11	5.0e-3	1.2e-10
0.3	5.6e-4	2.3e-11	5.8e-4	2.0e-11	5.0e-3	4.7e-10
0.5	7.1e-4	2.7e-11	7.1e-4	2.1e-11	5.0e-3	4.9e-10
0.7	1.1e-3	5.2e-11	1.1e-3	1.1e-11	5.0e-3	1.5e-9

Таблица 3 — Ошибки в потоке и решении для НМД-схемы и для НК-схемы на равномерной кубической сетке $33 \times 33 \times 1$ при различных значениях параметра δ .

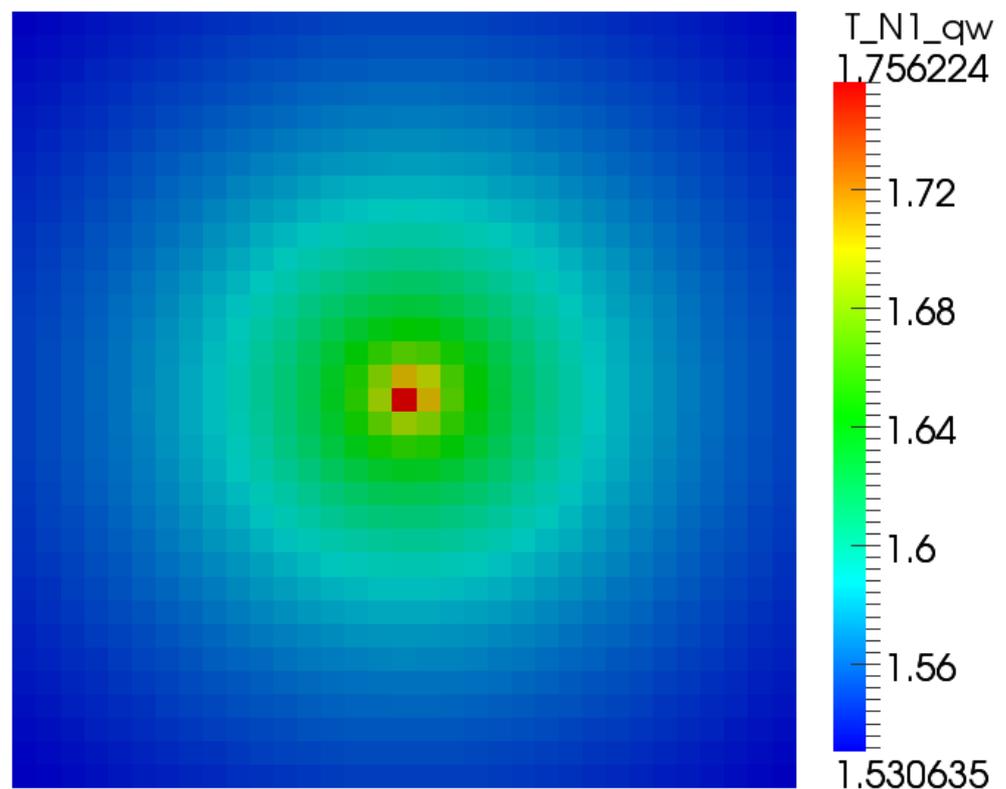


Рисунок 1.12 — Решение для НК-схемы для сдвинутой скважины на кубической сетке.

Для сравнения были использованы НМД-схема и метод Писмана для учета скважины. Также проводились эксперименты с использованием НМД- и НК-схем при прямом учете потока из скважины, который брался из аналитического решения. В таблице 3 показаны результаты расчетов и относительная L^2 -норма ошибки решения для обоих методов на равномерной квадратной сетке $33 \times 33 \times 1$. Ошибки считались по сравнению с аналитическим решением в области. Само аналитическое решение изображено на рисунке 1.12.

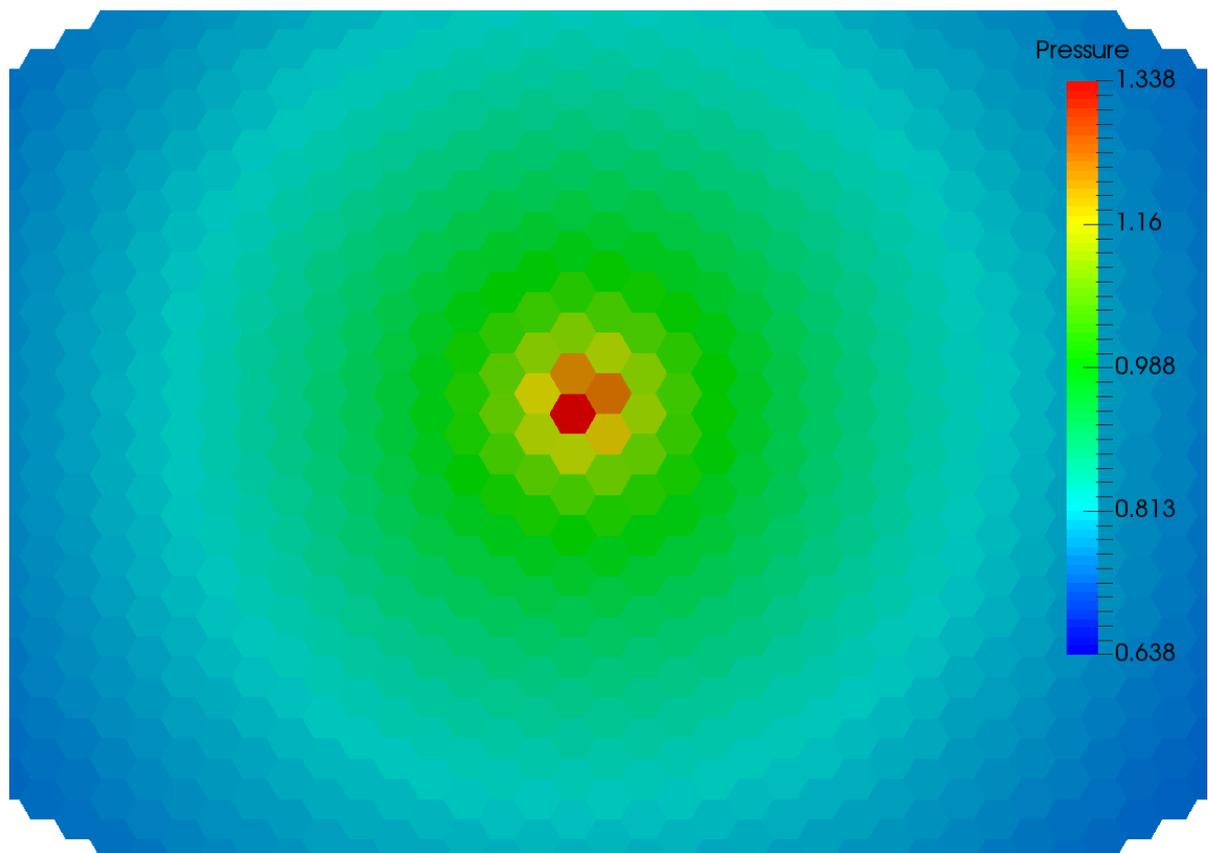


Рисунок 1.13 — Аналитическое решение, полученное при помощи НК-схемы в методе конечных объемов на гексагональной призматической сетке при $\delta = 0.5$.

Также был проведен аналогичный эксперимент на гексагональной призматической сетке. На рисунке 1.13 изображен фрагмент решения на этой сетке. В этом случае область являлась не прямоугольной и была заполнена гексагональными призмами. В таблице 4 показаны относительные L^2 -нормы ошибок в давлении для случая НМД-схемы в методе конечных объемов и НК-схемы.

В обоих экспериментах НК-схема показывает гораздо меньшую ошибку в решении по сравнению с НМД-схемой. Это связано с тем, что метод взаимодей-

δ	$L^2_{\text{НМД,А}}$	$L^2_{\text{НК}}$
0	1.1e-4	8.2e-11
0.1	1.4e-3	2.0e-11
0.3	4.2e-3	1.0e-11
0.5	7.1e-3	1.1e-11

Таблица 4 — Ошибка в решении на гексагональной призматической сетке $\delta = 0.5$.

ствия скважины и расчетной сетки, описанный в Разделе 1.3.2, явным образом использует положение скважины, в то время как метод Писмана, использует усредненный коэффициент, который не учитывает смещение скважины относительно центра.

1.5.4. Двумерный анизотропный случай, гексаэдральная сетка

В следующем эксперименте используется гексаэдральная псевдо-двумерная неортогональная сетка, которая была построена из одного слоя равномерной кубической сетки путем сдвига вершин ячеек в случайном направлении в плоскости xOy не более чем на 10% от шага ячейки h . Рассматривается анизотропный коэффициент диффузии $d_x = 1$, $d_y = 10, 100, 1000, 10000$ для различных размеров сетки N вдоль горизонтальной оси. В качестве аналитического решения использовались выражения (1.30) и (1.31).

d_y/d_x	$L^2_{\text{НМД,А}}$	$L^2_{\text{НК}}$	$\mathbf{L}^2_{\text{НМД,А}}$	$\mathbf{L}^2_{\text{НК}}$	$\varepsilon_q^{\text{НК}}$
10	5.3e-4	1.9e-9	5.6e-2	2.0e-7	4.7e-7
100	1.7e-4	9.0e-9	5.9e-2	2.7e-6	1.3e-5
1000	9.0e-4	7.0e-8	8.0e-2	6.2e-5	6.6e-4
10000	4.0e-5	5.7e-8	1.1e-1	1.5e-3	1.7e-3

Таблица 5 — Ошибки потока и решения для НМД-схемы и для НК-схемы для анизотропного коэффициента диффузии и гексаэдральной сетки $67 \times 67 \times 1$.

Ошибки в потоке и решении для НМД-схемы и для НК-схемы в таблице 5 сравниваются для случаев с различной анизотропией. Из-за большой анизотро-

пии изменения решения очень малы: $p \in [1.995, 2.0]$ для $d_y/d_x = 10000$. Для лучшего отображения ошибки, была предложена в данном случае специальная норма \mathbf{L}^2 , которая представляет из себя ошибку, нормализованную по отношению к $\|p_{anl} - p_{anl,min}\|$ вместо $\|p_{anl}\|$, где $\|p_{anl}\|$ — L^2 -норма решения для данной ячейки, а $\|p_{anl} - p_{anl,min}\|$ — норма разницы между аналитическим решением в данной точке и минимальным значением решения в области Ω .

$$\mathbf{L}^2 = \sqrt{\frac{\sum_{cells} V_{cell} (p_{anl} - p_{sol})^2}{\sum_{cells} V_{cell} (p_{anl} - p_{anl,min})^2}} \quad (1.43)$$

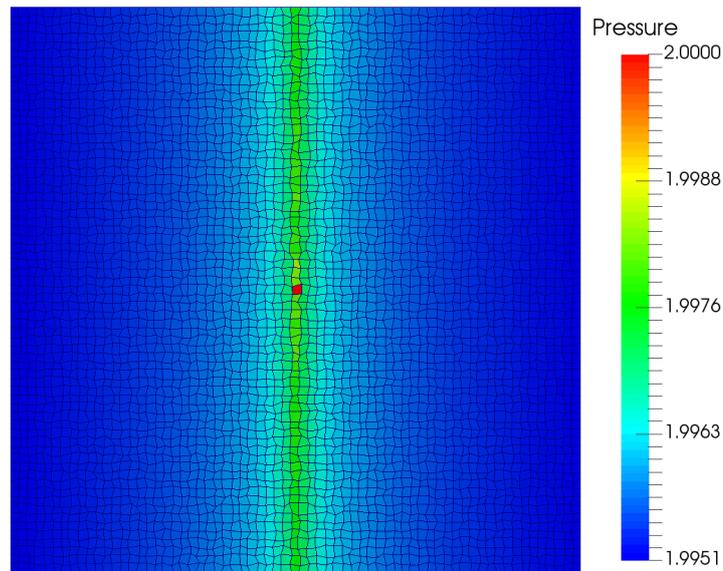
Так как метод Писмана не применим к этому случаю, применяется только схема из Раздела 1.3.2. Можно вычислить ошибку новой схемы при помощи сравнения результирующего потока с аналитическим значением потока из скважины $\varepsilon_q^{НК}$. Эта ошибка является абсолютной, а не относительной. Можно заметить, что ошибка очень мала даже для большой степени анизотропии.

Ошибки решения для обеих схем на гексаэдральной сетке $67 \times 67 \times 1$ представлены на рисунке 1.14. Из таблицы 5 можно сделать вывод, что в анизотропном случае, при использовании соответствующего решения, НК-схема также остается гораздо более точной, нежели НМД-схема. Ненулевая погрешность НК-схемы, в отличие от экспериментов из разделов 1.5.1 и 1.5.2, объясняется ошибками численного интегрирования, которое было применено в данном случае.

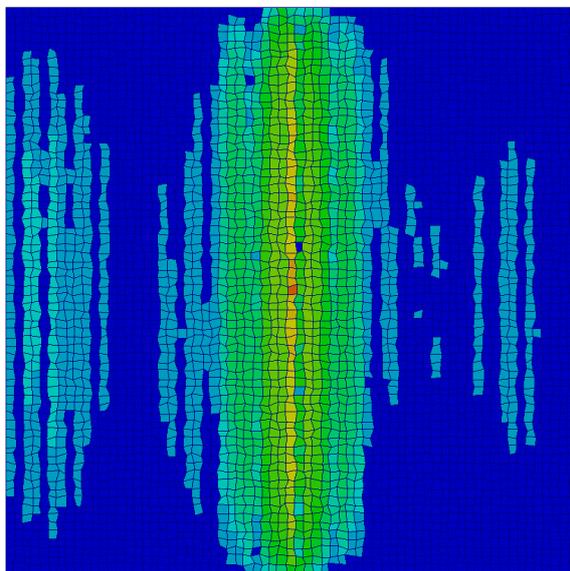
1.5.5. Трехмерный изотропный и анизотропный случаи, наклонная скважина

В данном эксперименте рассматривается трехмерная область Ω с ячейками в виде прямоугольных параллелепипедов и наклонной скважиной. Была выбрана сетка с 10 слоями по оси Z. По всей границе области Ω были выставлены условия Дирихле.

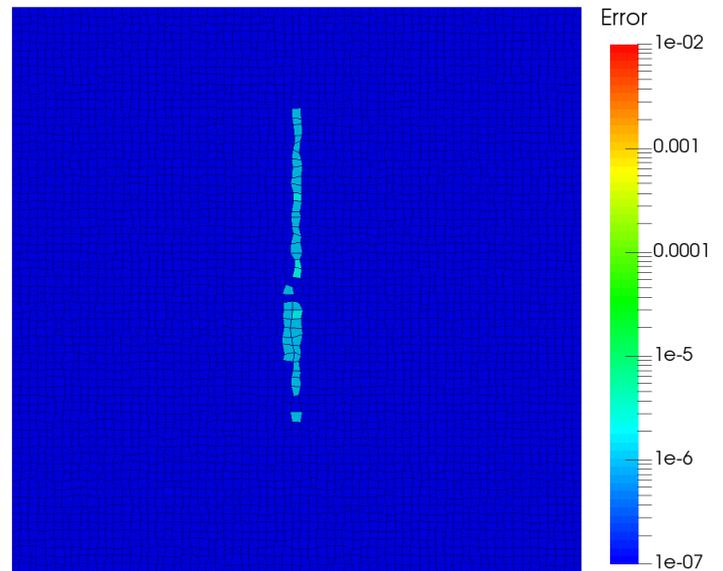
Зависимость ошибки в решении от угла наклона для НК- и НМД-схемы представлена в таблице 6. Угол наклона $\alpha = 0^\circ$ соответствует вертикальной сква-



Аналитическое решение



НМД-ошибка



НК-ошибка

Рисунок 1.14 — Аналитическое решение (сверху) и ошибки решения НМД-схемы (внизу слева) и НК-схемы (снизу справа) для анизотропного случая $d_y/d_x = 10000$ на гексаэдральной сетке $67 \times 67 \times 1$.

жине. Вертикальные сечения сетки с изображенными полями ошибок при $\alpha = 60^\circ$ для рассматриваемых схем представлены на рисунке 1.15.

Для анизотропного случая был рассмотрен эксперимент с тензором: $\mathbb{D} = \text{diag}(10, 100, 1)$. Аналитическое решение для каждой плоскости, перпендикулярной оси скважины, задавалось при помощи уравнений (1.30) и (1.31).

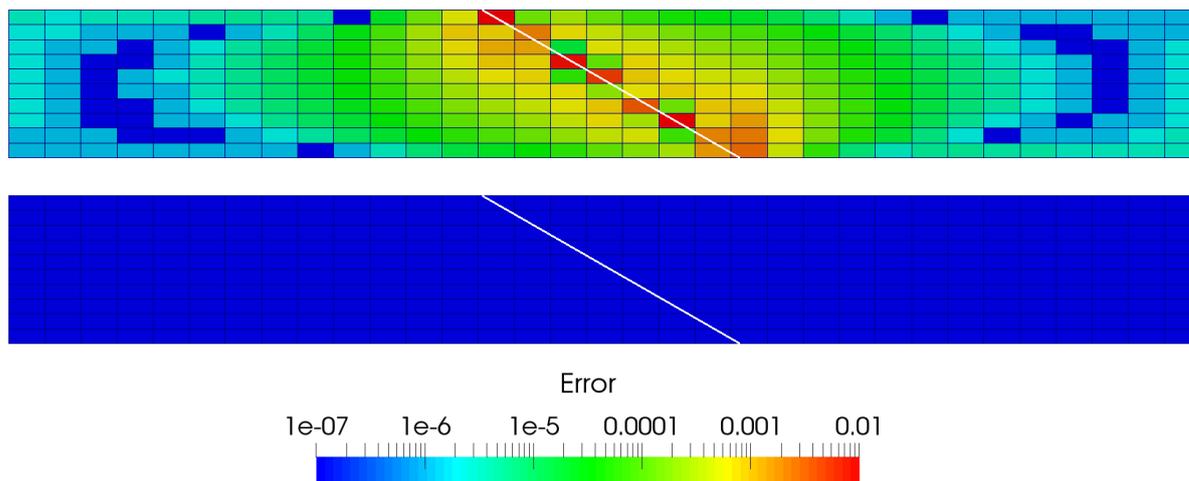


Рисунок 1.15 — Ошибка для решения для угла наклона $\alpha = 60^\circ$ для НМД-схемы (вверху) и НК-схемы (внизу). Трехмерный изотропный случай для наклонной скважины.

α	$L^2_{\text{НМД,А}}$	$L^2_{\text{НК}}$	$\varepsilon_q^{\text{НК}}$
0°	6.5e-4	1.0e-12	3.0e-11
30°	1.2e-4	3.6e-9	3.1e-4
45°	1.7e-4	3.7e-12	1.3e-4
60°	1.1e-4	1.7e-10	7.5e-7

Таблица 6 — Ошибки потока и решения для НМД-схемы и для НК-схемы в методе конечных объемов для трехмерного случая с 10 слоями и наклонной скважиной.

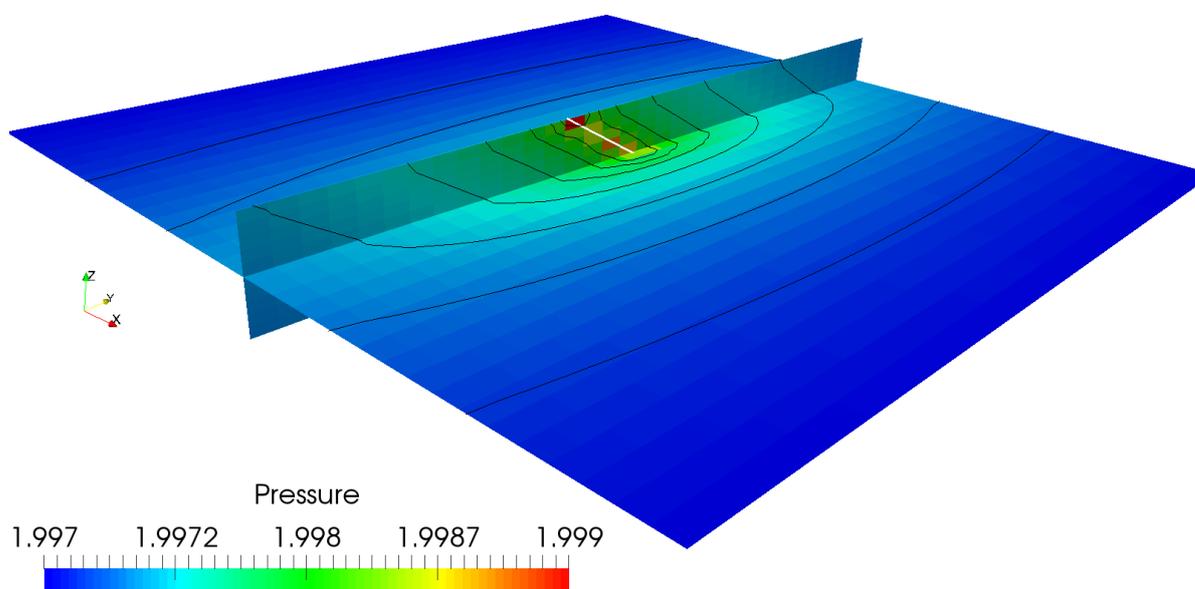


Рисунок 1.16 — Аналитическое решение при угле наклона $\alpha = 60^\circ$ для трехмерного изотропного случая с 10 слоями и наклонной скважиной, $\mathbb{D} = \text{diag}(10,100,1)$.

На рисунке 1.16 показаны две плоскости, пересекающие область моделирования в двух перпендикулярных направлениях, и решение на них. Ошибки реше-

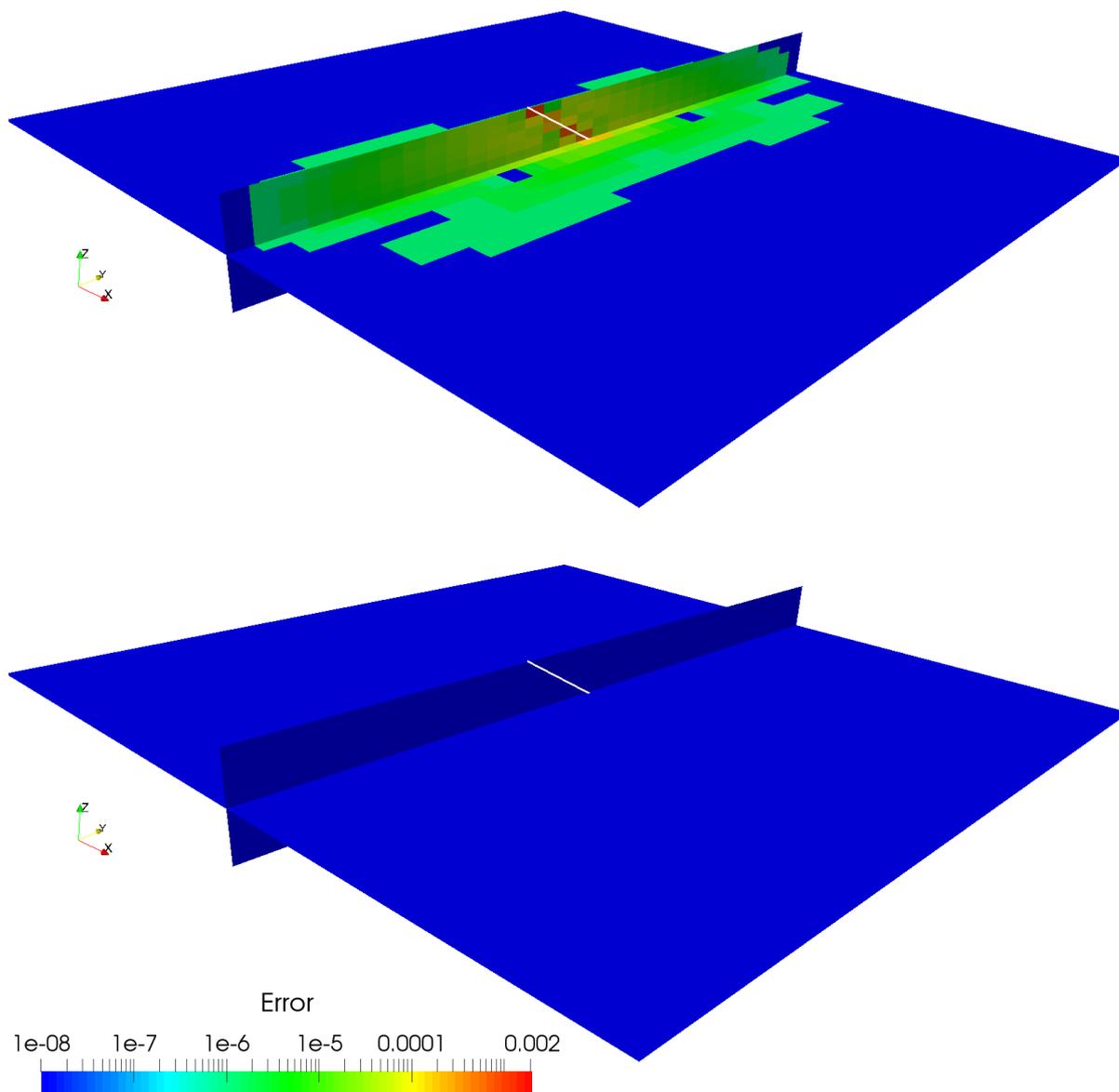


Рисунок 1.17 — Ошибка решения для угла $\alpha = 60^\circ$ для НМД-схемы (сверху) и НК-схемы (снизу). Трехмерный случай с 10 вертикальными слоями для наклонной скважины, $\mathbb{D} = \text{diag}(10,100,1)$.

α	$L^2_{\text{НМД},A}$	$L^2_{\text{НК}}$	$L^2_{\text{НМД},A}$	$L^2_{\text{НК}}$	$\varepsilon_q^{\text{НК}}$
0°	$2.5e-5$	$2.8e-11$	$1.2e-1$	$1.3e-7$	$4.9e-7$
30°	$5.9e-6$	$1.7e-10$	$2.4e-2$	$8.6e-7$	$1.0e-5$
45°	$5.6e-6$	$2.2e-10$	$2.6e-2$	$1.0e-6$	$9.0e-6$
60°	$3.8e-6$	$2.5e-10$	$1.9e-2$	$1.2e-6$	$2.9e-5$

Таблица 7 — Ошибка решения для НМД-схемы и НК-схемы и ошибка потока для НК-схемы для трехмерного случая с 10 слоями и наклонной скважиной, $\mathbb{D} = \text{diag}(10,100,1)$.

ния для НМД-схемы и для НК-схемы показаны на рисунке 1.17 и в Таблице 7. По

аналогии с анизотропным случаем из Раздела 1.5.4 также была рассчитана величина и $\varepsilon_q^{\text{НК}}$, чтобы показать реальное отношение ошибок и вариации решения.

В обоих экспериментах L^2 -норма ошибки для НК-схемы ниже на несколько порядков, нежели для НМД-схемы. Также в таблицах представлены ошибки для потока из скважины, которые также не превышают десятые доли процента.

1.5.6. Трехмерный случай, частично перфорированная скважина

Эксперимент с частично перфорированной скважиной во многом повторяет предыдущий эксперимент: рассмотрена область размером $100 \times 100 \times 12.5$ с десятью слоями по оси Z . Скважина представлена сегментом $[A, B]$, где $A = (50, 50, 1.95)$ и $B = (50, 50, 10.55)$. Тензор диффузии изотропен: $\mathbb{D} = \mathbb{I}$. Для аналитического решения была использована формула (1.41). НК-схема в данном эксперименте используется во всей области моделирования.

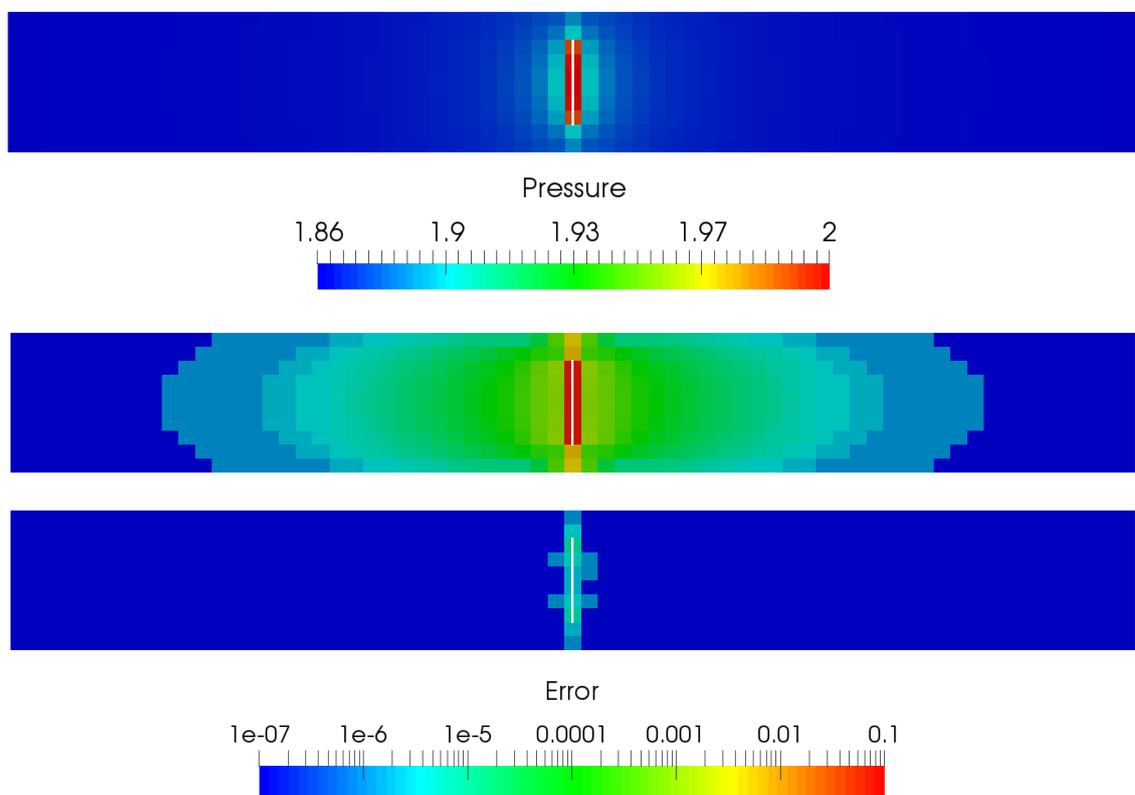


Рисунок 1.18 — Аналитическое решение для НМД-схемы (вверху) и НК-схемы (внизу).

Рисунок 1.18 (сверху) показывает вертикальные сечения сетки с аналитическим решением частично перфорированной скважины. Поля ошибок решения для НМД-схемы и НК-схемы показаны на рисунке 1.18 (снизу). В Таблице 8 показаны ошибки в решении для рассмотренных методов.

N	$L^2_{\text{НМД,А}}$	$L^2_{\text{НК}}$
33	1.0e-3	5.5e-10
67	4.4e-4	3.3e-8
99	2.6e-4	4.6e-9

Таблица 8 — Ошибки решения для НМД-схемы и НК-схемы для частично перфорированной скважины.

При соответствующем выборе функции особенности для частично перфорированной скважины, НК-схема показывает лучшую точность, нежели НМД-схема, как видно из Таблицы 8.

1.5.7. Изотропный случай, две скважины

В предыдущих экспериментах используемая аналитическая поправка в НК-схеме всегда была той же функцией, которая присутствовала в аналитическом решении, с которым происходило сравнение. Именно этим объясняется малая L^2 -норма ошибки во всех предыдущих экспериментах. В этом эксперименте впервые для коррекции и для расчета граничных условий будут использованы две различные аналитически функции.

Эксперимент заключается в совместном моделировании двух скважин. Рассматриваемая область размером $[-100; 100] \times [-50; 50] \times [0; 3]$, в которой в точках $(-50, 0)$ и $(50, 0)$ расположены 2 скважины. Потоки из скважин составляют $q_1 = 1$, $q_2 = 4$. Тензор диффузии считается скалярным: $\mathbb{D} = d\mathbb{I}$.

Аналитическое решение приведено в [83] и имеет следующий вид:

$$p = \frac{q_1 \ln r_1}{2\pi d h_w} + \frac{q_2 \ln r_2}{2\pi d h_w} + C, \quad (1.44)$$

где h_w — высота скважины ($h_w = 3$ в нашем случае), и C — константа интегрирования. В данном эксперименте $d = 1$. Для нелинейной коррекции будет использована функция $\ln(\mathbf{x})$, описанная в Разделе 1.4.1.

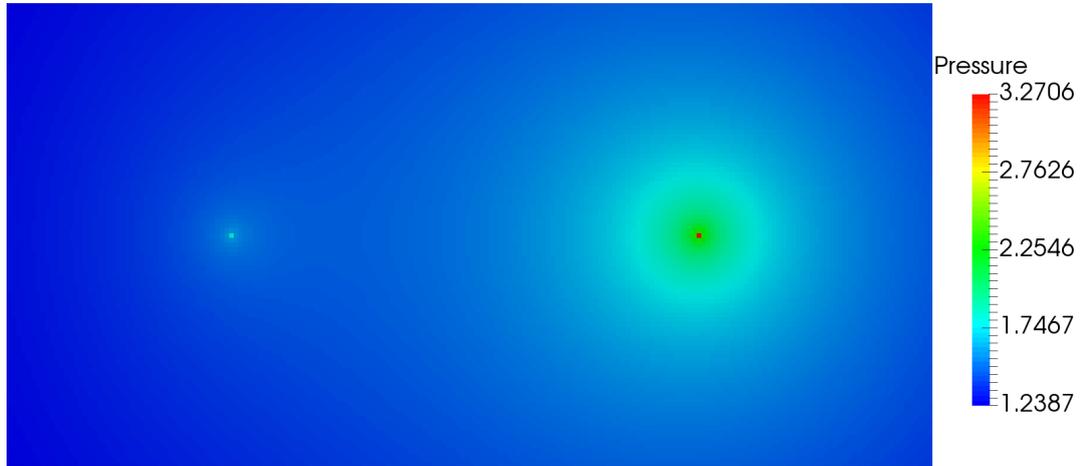


Рисунок 1.19 — Аналитическое решение для случая 2 скважин.

Для определения константы C фиксируется давление в точке $\mathbf{x}_0 = (0,0)$, $P_0 = p(\mathbf{x}_0) = 1.5$. Аналитическое решение, изображенное на рисунке 1.19, в этом случае будет выражаться следующим образом.

$$p = P_0 - \frac{q_1 \ln(r_1/r_{w,p1})}{2\pi h_w} - \frac{q_2 \ln(r_2/r_{w,p2})}{2\pi h_w}, \quad (1.45)$$

где r_1 и r_2 — расстояния от первой и второй скважин до рассматриваемой точки, а $r_{w,p1}$ и $r_{w,p2}$ — расстояния от скважин до точки \mathbf{x}_0 с зафиксированным давлением. Давления на скважинах также получаются при использовании выражения (1.45).

В данном эксперименте радиусы кругов применения НК-схемы, для каждой скважины составляют $R_1 = R_2 = 30$.

Для проведения этого эксперимента была использована сетка, состоящая из прямоугольных параллелепипедов, которая наилучшим образом подходит для применения метода Писмана. Были рассмотрены следующие размеры сеток $66 \times 33 \times 1$, $134 \times 67 \times 1$ и $198 \times 99 \times 1$.

На рисунке 1.20 показаны поля ошибок для монотонной двухточечной схемы и метода Писмана и для схемы нелинейной коррекции в логарифмической шкале

h	$L^2_{\text{НМД,А}}$	$L^2_{\text{НК,А}}$	$L^2_{\text{НМД,Писман}}$	$L^2_{\text{НК}}$
100 /33	1.2e-2	2.8e-5	1.2e-2	2.8e-5
100 /67	5.1e-3	7.0e-6	5.2e-3	7.6e-6
100 /99	3.1e-3	3.2e-6	3.1e-3	3.1e-6
h	$\varepsilon_{q_1}^{\text{НМД}}$	$\varepsilon_{q_2}^{\text{НМД}}$	$\varepsilon_{q_1}^{\text{НК}}$	$\varepsilon_{q_2}^{\text{НК}}$
100 /33	4.6e-3	1.9e-2	2.1e-5	4.1e-5
100 /67	4.6e-3	1.9e-2	2.3e-5	5.4e-5
100 /99	4.6e-3	1.8e-2	2.0e-5	7.0e-5

Таблица 9 — Ошибки решения и потоков q_1 и q_2 для случая двух скважин.

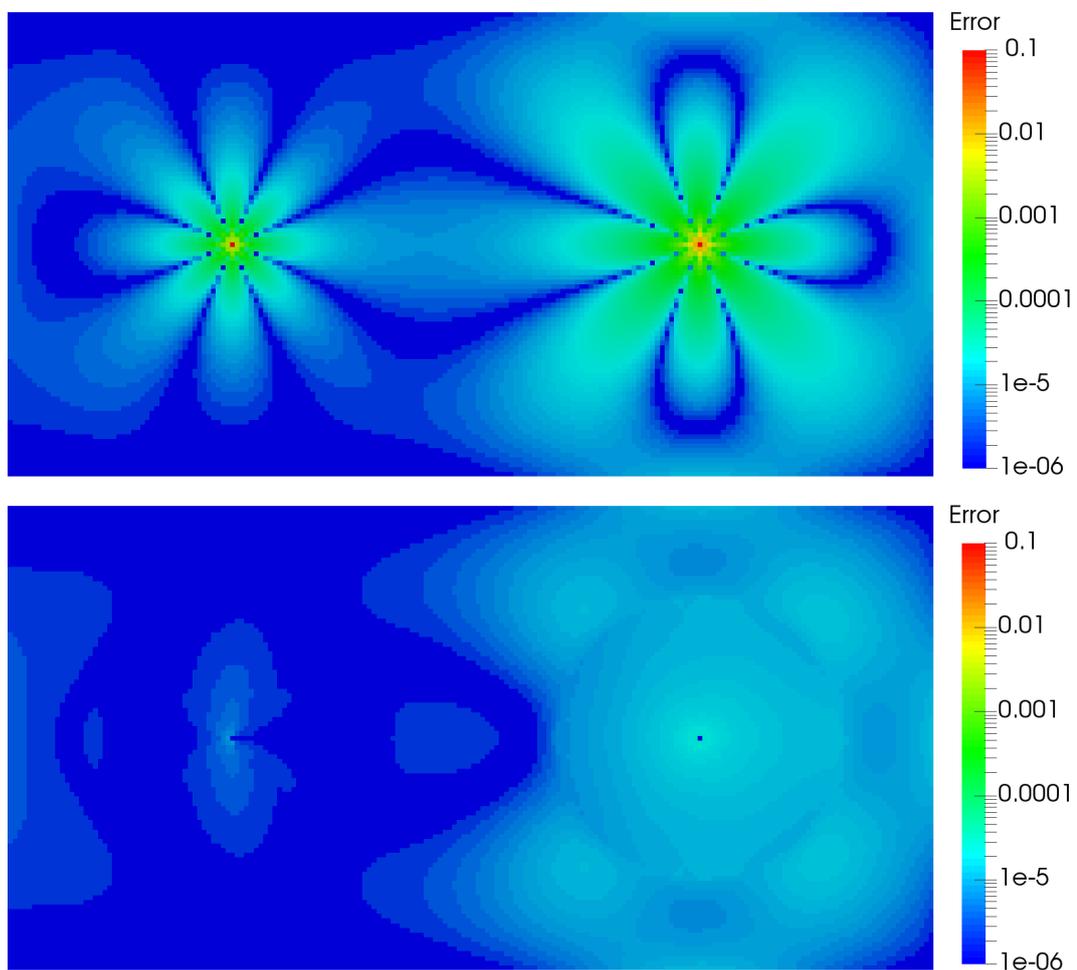


Рисунок 1.20 — Относительные ошибки для решения НМД-схемы и метода Писмана (сверху) и для НК-схемы (снизу) в логарифмической шкале. Сетка размером $134 \times 67 \times 1$.

Из таблицы 9 видно, что НК-схема даже при ее применении для каждой скважины отдельно в некоторой окрестности, имеет ошибку в решении на 2-3 порядка меньшую, чем НМД-схема в сочетании с методом Писмана. На рисунке 1.20 изображены поля ошибок решения для данного эксперимента. Также стоит

отметить, что на рисунке ясно видна область применения НК-схемы. В ней величина ошибки решения, в отличие от поля ошибок решения для НМД-схемы, не превышает ошибки за пределами области применения НК-схемы.

1.5.8. Зависимость ошибки от радиуса применения схемы нелинейной коррекции для нескольких скважин

В случае моделирования нескольких скважин очень важным становится вопрос — какой размер окрестности необходимо использовать для НК-схемы. Описанный в Разделе 1.5.7 эксперимент позволяет детально исследовать этот вопрос. Также как и в случае с одной скважиной, для каждой из скважины в качестве области применения был выбран круг радиуса R , в котором использовалась НК-схема, тогда как в остальной части области была использована НМД-схема, которая в случае K -ортогональных сеток совпадает с традиционной линейной двухточечной схемой дискретизации потока для метода конечных объемов.

В Таблице 10 представлены результаты расчета на сетке $134 \times 67 \times 1$ с двумя скважинами и радиусами влияния $R_1 = R_2 = R$ относительная L^2 -норма ошибки в решении при помощи НМД-схемы и L^2 -норма ошибки НК-схемы со схемой учета скважины в дискретизации, которая описана в Разделе 1.3.2. Результаты показывают, что в предложенном подходе даже для наименьшего радиуса $R = 10$ ошибка в решении значительно меньше, чем для НМД-схемы с методом Писмана или с использованием расхода из аналитического решения.

R	49	45	40	30	20	10
$L^2_{\text{НК,А}}$	6.1e-06	6.2e-06	6.4e-06	7.0e-06	8.7e-06	1.5e-05
$L^2_{\text{НК}}$	6.8e-06	6.9e-06	7.1e-06	7.6e-06	9.1e-06	1.5e-05

Таблица 10 — Поток и относительная ошибка в решении для эксперимента с 2 скважинами для НК-схемы в случае использования ее в областях разного радиуса вокруг скважин, кубическая сетка $134 \times 67 \times 1$.

1.6. Выводы

В данной главе рассмотрен метод учета скважин для приближенного решения стационарного уравнения фильтрации эквивалентного уравнению диффузии. Предложен способ учета влияния скважины в околоскважинном пространстве, основанный на включении аналитической функции, отражающей поведение скважины, в саму дискретизацию. Описана новая схема учета скважины в дискретизации. Проведены эксперименты, иллюстрирующие работу метода, как с одной, так и с несколькими скважинами. Рассмотрены несколько различных аналитических функций для разных физических условий. Предложенная схема учета скважины для околоскважинного пространства, а также схема взаимодействия ячейки со скважиной дает ошибки в решении и в потоке из скважины на несколько порядков меньше, чем нелинейная монотонная двухточечная схема с методом Писмана для взаимодействия скважины и ячейки.

Глава 2. Решение уравнения диффузии в средах с сильно контрастными включениями

2.1. Постановка задачи

При рассмотрении и моделировании различных задач фильтрации часто возникает необходимость решать задачи диффузии с высоконтрастными включениями в них. В процессе решения таких задач возникают линейные системы, для итерационного решения которых необходимы достаточно простые и эффективные предобуславливатели. Для описания одного способа построения таких предобуславливателей рассмотрим классическое уравнение реакции–диффузии:

$$\begin{aligned} -\nabla (\mathbb{D}\nabla p) + cp &= f \quad \text{в } \Omega, \\ -(\mathbb{D}\nabla p) \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_N, \\ p &= 0 \quad \text{на } \Gamma_D, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где Ω — многоугольник/многогранник в области $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma_N \cup \Gamma_D = \partial\Omega$, $\Gamma_D = \bar{\Gamma}_D$, \mathbf{n} — внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$, $\mathbb{D} = \mathbb{D}(\mathbf{x})$ — тензорный коэффициент диффузии, c — неотрицательный коэффициент реакции и $f = f(\mathbf{x})$ — функция источника, Γ_N — часть границы, на которой установлены граничные условия типа Неймана, а Γ_D — часть границы, на которой установлены граничные условия типа Дирихле, в данном случае — однородные. Здесь, для простоты, рассматривается случай, когда \mathbb{D} — шаровый тензор, то есть $\mathbb{D}(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x})\mathbb{I}$, где \mathbb{I} — единичная матрица, а $d(\mathbf{x})$ — кусочно-постоянная функция в Ω .

При численном моделировании часто возникают задачи со значительным скачками коэффициентов. Для решения таких задач могут быть использованы различные методы дискретизации, самыми распространенными из которых являются метод конечных разностей [84], метод конечных объемов [85] и метод конечных элементов [86, 87]. В данной главе для дискретизации и формирования ли-

нейных систем будет использован смешанный метод конечных элементов [88]. В данной главе дается детальное описание смешанных гибридных формулировок задач диффузии, их аппроксимации на треугольных/тетраэдральных ячейках при помощи смешанного метода конечных элементов, формирования матриц в соответствующих алгебраических системах и анализ их свойств. Это описание необходимо для построения предобуславливателя, а также анализа его свойств.

Для использования классического метода конечных элементов необходимо записать вариационную формулировку в следующем виде: найти $p \in Q$ такое что

$$\Phi(p) = \min_{q \in Q} \Phi(q), \quad (2.2)$$

где

$$\Phi(q) = \int_{\Omega} (\mathbb{D}^{-1} \nabla q) \cdot \nabla q \, dx + \int_{\Omega} c q^2 \, dx - 2 \int_{\Omega} f q \, dx, \quad (2.3)$$

$$Q = \{q, \nabla q \in L_2(\Omega), q = 0 \text{ на } \Gamma_D\}. \quad (2.4)$$

Рассмотрим систему (2.1) в смешанной дифференциальной формулировке, введя переменную вектор-функцию потока $\mathbf{u} = -\mathbb{D} \nabla p$, и поставим задачу: найти вектор-функцию \mathbf{u} и функцию p , такие что

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{-1} \mathbf{u} + \nabla p &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} + c p &= f \quad \text{в } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_N, \\ p &= 0 \quad \text{на } \Gamma_D. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Описанная ниже процедура построения предобуславливателя может быть применена к решению линейных систем, полученных в результате дискретизации задачи классическим методом конечных элементов, смешанным, или гибридным смешанным методом конечных элементов. Вариационная формулировка задачи (2.5) выглядит следующим образом: найти $\mathbf{u} \in V, p \in Q = L_2(\Omega)$, такие что

$$J(\mathbf{u}, p) = \max_{q \in Q} \min_{\mathbf{v} \in V} J(\mathbf{v}, q), \quad (2.6)$$

где

$$J(\mathbf{v}, q) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbb{D}^{-1}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v}) q \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} c q^2 \, dx - \int_{\Omega} f q \, dx, \quad (2.7)$$

$$V = \{\mathbf{v} : |\mathbf{v}|, \nabla \mathbf{v} \in L_2(\Omega), \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma_N\}, \quad Q = L_2(\Omega). \quad (2.8)$$

Задача (2.6)-(2.8) эквивалентна стандартной слабой формулировке [88]: найти $\mathbf{u} \in V, p \in Q$, такие что

$$\int_{\Omega} \mathbb{D}^{-1}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) \, dx = 0, \quad (2.9)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q \, dx + \int_{\Omega} c p q \, dx = \int_{\Omega} f q \, dx$$

для всех $\mathbf{v} \in V, q \in Q$.

Следует отметить, что формулировки приведены для случая однородных граничных условий.

2.2. Смешанный метод конечных элементов

В данном и последующих разделах рассматривается двумерный случай. Для трехмерного случая процедура построения дискретизации аналогична. Пусть в двумерной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ задана треугольная сетка Ω_h . Предполагается, что сетка Ω_h конформная, то есть две разные ячейки e_s и e_t в Ω_h , либо не касаются друг друга, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону — отрезок $\Gamma_{s,t}$, $s < t$, $s, t = \overline{1, N}$, где N — общее количество ячеек в Ω_h , здесь и далее $\overline{1, m}$ обозначает $1, 2, \dots, m$.

В случае треугольных сеток для дискретизации задачи (2.9) чаще всего используется метод Равьяра-Тома наименьшего порядка \mathbb{RT}_0 [88]. В этом методе конечно-элементные пространства $V_h \subset V$ состоят из кусочно-линейных вектор-функций, а пространство $Q_h \subset Q$ — из кусочно-постоянных функций (постоянных в каждой ячейке сетки).

Смешанный метод конечных элементов формулируется следующим образом: найти вектор-функцию $\mathbf{v}_h \in V_h$ и функцию $p_h \in Q_h$ такие, что

$$\int_{\Omega} (\mathbb{D}^{-1} \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{v}_h \, dx - \int_{\Omega} p_h \cdot (\nabla \cdot \mathbf{v}_h) \, dx = 0, \quad (2.10)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}_h) \cdot q_h \, dx + \int_{\Omega} c \cdot p_h \cdot q_h \, dx = \int_{\Omega} f \cdot q_h \, dx, \quad (2.11)$$

для всех $\mathbf{v}_h \in V_h$, $q_h \in Q_h$. Дискретизация системы уравнений (2.9) при помощи смешанного метода конечных элементов, например RT_0 или PWCF (piecewise constant fluxes [89]), приводит к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{F} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

с седловой матрицей

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} M & B^T \\ B & -\Sigma \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

где $M = M^T > 0$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$ — диагональная матрица, $\bar{F} \in \mathbb{R}^N$. Матрица \mathcal{A} , порожденные методами PWCF и RT_0 , по аналогии с [90], могут рассматриваться, как спектрально эквивалентные. Поэтому все описанные ниже подходы одинаково применимы для обоих методов.

Численное решение системы (2.12) итерационными методами связано с существенными трудностями, так как матрица \mathcal{A} хотя и симметрична, но не положительно определена. Для построения дискретизации с симметричными положительно определенными матрицами нужно использовать гибридные аналоги смешанных методов конечных элементов.

2.3. Смешанный гибридный метод конечных элементов

Смешанная гибридная дифференциальная формулировка задачи (2.5) на сетке $\Omega_h = \bigcup_{s=1}^N e_s$ записывается следующим образом: найти вектор-функции \mathbf{u}_s ,

функции p_s и функции $\lambda_{s,t}$, $s > t$, $s,t = \overline{1,N}$, удовлетворяющие следующим уравнениям и условиям:

$$\mathbb{D}_s^{-1} \mathbf{u}_s + \nabla p_s = 0 \quad \text{в } e_s, \quad (2.14)$$

$$\nabla \mathbf{u}_s + c p_s = f \quad \text{в } e_s, \quad (2.15)$$

$$\lambda_{s,t} \equiv p_s \equiv p_t \quad \text{на } \Gamma_{s,t} \quad s < t, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{n}_t = 0 \quad \text{на } \Gamma_{s,t}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}_s = 0 \quad \text{на } \partial e_s \cap \Gamma_N, \quad (2.18)$$

$$p_s = 0 \quad \text{на } \partial e_s \cap \Gamma_D, \quad (2.19)$$

где ∂e_s — граница ячейки e_s , $s,t = \overline{1,N}$.

Эквивалентная слабая формулировка задачи (2.14)—(2.19) имеет вид: найти вектор-функции $\mathbf{u}_s \in V_s$, функции $p_s \in Q_s$ и функции $\lambda_{ts} \in \Lambda_{s,t}$, $s < t$, $s,t = \overline{1,N}$ такие, что

$$\begin{aligned} & \int_{e_s} (\mathbb{D}^{-1} \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{v}_s \, dx - \int_{e_s} p_s \cdot (\nabla \cdot \mathbf{v}_s) \, dx + \\ & + \sum_{s < t} \int_{\Gamma_{ts}} (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_s) \lambda_{s,t} \, dl - \sum_{s > t} \int_{\Gamma_{st}} (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_s) \lambda_{t,s} \, dl = 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\int_{e_s} (\nabla \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{q}_s \, dx + \int_{e_s} c \cdot p_s \cdot \mathbf{q}_s \, dx = \int_{e_s} f \cdot \mathbf{q}_s \, dx, \quad (2.21)$$

$$\forall (\mathbf{v}_s, \mathbf{q}_s) \in V_s \times Q_s, \quad s = \overline{1,N}, \quad (2.22)$$

$$\int_{\Gamma_{st}} \mu_{st} (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{n}_t) \, dl = 0, \quad (2.23)$$

$$\forall \mu_{st} \in \Lambda_{s,t}, \quad s < t, \quad s,t = \overline{1,N}. \quad (2.24)$$

Здесь

$$V_s = \{ \mathbf{v} : \mathbf{v} \in H_{\text{div}}(\Omega_s), \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_s = 0 \text{ на } \partial \Omega \}, \quad (2.25)$$

$$Q_s = L_2(\Omega_s), \quad \Lambda_{s,t} = H^{1/2}(\Gamma_{s,t}), \quad (2.26)$$

и \mathbf{n}_s — внешние единичные нормали к ∂e_s , $s, t = \overline{1, N}$. Смешанная гибридная формулировка (2.20)-(2.26) эквивалентна формулировке (2.9) в том смысле, что вектор-функции \mathbf{u}_s и функции p_s являются сужениями вектор-функции \mathbf{u} и функции p на e_s , а функции λ_{st} являются следами на $\Gamma_{s,t}$ функции p , $s < t$, $s, t = \overline{1, N}$.

Выберем конечно-элементные пространства

$$\Lambda_{st,h} = \left\{ \lambda_h : \lambda_h \equiv \text{const на } \Gamma_{s,t} \right\}, \quad s < t, \quad (2.27)$$

$$V_{s,h} = \left\{ \mathbf{v}_h : \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_s = \text{const на } \Gamma_{s,t}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_s = 0 \text{ на } \partial\Omega \right\}, \quad (2.28)$$

$$Q_{s,h} = \left\{ q_h : q_h \equiv \text{const на } e_s \right\}, \quad (2.29)$$

где \mathbf{v}_h — кусочно-линейная вектор-функция на e_s .

Тогда смешанный гибридный метод конечных элементов для задачи (2.5) задается формулами (2.20)—(2.26) с заменой V_s на $V_{s,h}$, Λ_{st} на $\Lambda_{st,h}$ и Q_s на $Q_{s,h}$, соответственно. Результатом дискретизации является следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\tilde{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{F} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

с симметричной седловой матрицей

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{M} & \tilde{B}^T & C^T \\ \tilde{B} & -\Sigma & 0 \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

При подходящем упорядочении компонент векторов и уравнений в системе (2.30) матрица \tilde{M} является блочно-диагональной с блоками \tilde{M}_s , $s = \overline{1, N}$, размера не больше 3×3 для треугольных сеток или 4×4 для тетраэдральных сеток. Поэтому вектор \bar{u} можно легко исключить из системы (2.30) и перейти к системе

$$\tilde{S} \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{F} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

с симметричной матрицей

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{pp} & \tilde{S}_{p\lambda} \\ \tilde{S}_{\lambda p} & \tilde{S}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ C \end{bmatrix} \tilde{M}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{B}^T & C^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Изложенная процедура перехода от системы (2.30) к системе (2.32) называется конденсацией.

Матрица \tilde{S} является положительно определенной за исключением единственного случая, когда $\Gamma_D = \emptyset$ и одновременно $\Sigma = 0$, т.е. коэффициент реакции c в (2.1) тождественно равен нулю в Ω , когда она будет положительно полуопределенной. В последнем случае предполагается выполнение условия совместности $\int_{\Omega} f dx = 0$.

2.4. Процедура ассемблирования матриц

В этом разделе для простоты изложения мы предположим, что на границе области $\partial\Omega$ задано только однородное условие Неймана, то есть $\bar{\Gamma}_N = \partial\Omega$, и коэффициент реакции положителен по крайней мере в одной ячейке $e_t \in \Omega_h$. Матрица \tilde{A} в (2.31) может быть представлена в виде

$$\tilde{A} = \sum_{t=1}^N N_t \mathcal{A}_t N_t^T, \quad (2.34)$$

где

$$\mathcal{A}_t = \begin{pmatrix} M_t & B_t^T & C_t^T \\ B_t & -\Sigma_t & 0 \\ C_t & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

— соответствующие седловые матрицы для ячеек e_t с симметричными положительно определенными матрицами M_t а N_t — соответствующие матрицы ассемблирования, $t = \overline{1, N}$, которые эквивалентны действию по подстановке значений из локальных матриц в глобальную матрицу \tilde{A} линейной системы. Тогда матрица

\tilde{S} в (2.33) может быть представлена в виде

$$\tilde{S} = \sum_{t=1}^N \mathcal{N}_t S_t \mathcal{N}_t^T, \quad (2.36)$$

где

$$S_t = \begin{bmatrix} B_t \\ C_t \end{bmatrix} M_t^{-1} \begin{bmatrix} B_t^T & C_t^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathring{S} + \begin{bmatrix} \Sigma_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

— симметричная положительно определенная или полуопределенная матрица и \mathcal{N}_t — соответствующие ассемблирующие матрицы, $t = \overline{1, N}$. Отметим также, что ядро матрицы \mathring{S} имеет размерность 1 и состоит из векторов с одинаковыми компонентами.

На практике более удобной является другая вариационная формулировка дифференциальной смешанной гибридной формулировки (2.14)–(2.19) задачи диффузии (2.1). В этом случае требование $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_s = 0$ на $\partial\Omega$ не включается в определение пространств V_s в (2.25), а заменяется дополнительным уравнением

$$\int_{\partial e_s \cap \partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_s \cdot \mu \, dl = 0 \quad (2.38)$$

для всех $\mu \in L_2(\partial e_s \cap \partial\Omega)$, $s = \overline{1, N}$. Соответственно, в смешанном гибридном методе конечных элементов для каждой стороны треугольной ячейки e_s , принадлежащей $\partial\Omega$, нормальная компонента задается дополнительная неизвестная λ , которая представляет собой среднее значение функции решения $p = p(x)$ исходной задачи (2.1) на $\partial e_s \cap \partial\Omega$. $\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_s$ вектор-функции потока $\mathbf{v}_h \in V_{s,h}$ на этой стороне предполагается константой. Если две стороны ячейки e_s принадлежат $\partial\Omega$, то таких новых неизвестных для этой ячейки будет две. При этом размерность “старого” пространства $V_{s,h}$ в (2.25) равна единице, а размерность нового пространства $V_{s,h}$ будет три.

Новая формулировка имеет два преимущества по сравнению со старой. Во-первых, все матрицы M_s в (2.35) имеют один и тот же размер 3×3 , а матрица S_s в (2.37) размер 4×4 в двумерном случае, соответственно, $s = \overline{1, m}$. Во-вторых, в случае $|\Gamma_D| \neq 0$ (когда на части границы задается краевое условие Дирихле) соответствующая матрица $\tilde{\mathcal{A}}_t$ в (2.34) является диагональным блоком матрицы $\tilde{\mathcal{A}}$ для

задачи Неймана ($|\Gamma_D| = 0$). Аналогично, соответствующая матрица \tilde{S}_t для случая $|\Gamma_D| \neq 0$ является соответствующим диагональным блоком матрицы \tilde{S} для задачи Неймана. Таким образом, конденсированная алгебраическая система смешанного метода конечных элементов получается из системы (2.32) подстановкой в неё значений Дирихле вместо новых степеней свободы λ на $\partial e_s \cap \Gamma_D$ и исключением из системы уравнений с соответствующими номерами.

2.5. Макро-гибридная формулировка

В дальнейшем при построении предобуславливателя будет использована макро-гибридная формулировка системы (2.30). Предположим, что сеточная область Ω_h разбита на m односвязных не пересекающихся многоугольных сеточных подобластей $E_s \equiv E_{h,t}$, так что сужения $\Omega_{h,t}$ сетки Ω_h на E_t являются конформными сетками. Тогда для каждой подобласти E_s мы можем определить матрицы

$$\tilde{\mathcal{A}}_t = \sum_{e_k \in E_t} N_{t,k} \mathcal{A}_k N_{t,k}^T \equiv \mathring{A}_t + R_t \equiv \begin{bmatrix} \tilde{M}_t & \tilde{B}_t^T & \tilde{C}_t^T \\ \tilde{B}_t & -\tilde{\Sigma}_t & 0 \\ \tilde{C}_t & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

с соответствующими матрицами ассемблирования $N_{t,k}$, $e_k \in E_t$, $t = \overline{1, m}$, а затем определить матрицу $\tilde{\mathcal{A}}$ в (2.31) по формуле

$$\tilde{\mathcal{A}} = \sum_{t=1}^m \tilde{N}_t \tilde{\mathcal{A}}_t \tilde{N}_t^T \equiv \mathring{A} + R \quad (2.40)$$

с соответствующими матрицами ассемблирования \tilde{N}_t , $t = \overline{1, m}$. Здесь

$$R_t = - \sum_{e_k \in E_t} N_{t,k} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\Sigma}_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} N_{t,k}^T \quad (2.41)$$

является диагональной матрицей с неположительными диагональными элементами, так же, как и матрица

$$R = \sum_{t=1}^m \tilde{N}_t R_t \tilde{N}_t^T. \quad (2.42)$$

В рамках макро-гибридной формулировки матрица \tilde{S} в (2.33) может быть задана формулой

$$\tilde{S} = \sum_{t=1}^m \tilde{N}_t \tilde{S}_t \tilde{N}_t^T \quad (2.43)$$

с соответствующими матрицами ассемблирования \tilde{N}_t , где

$$\tilde{S}_t = \begin{bmatrix} \tilde{B}_t \\ \tilde{C}_t \end{bmatrix} \tilde{M}_t^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{B}_t^T & \tilde{C}_t \end{bmatrix} + R_t \equiv \mathring{S}_t + R_t \quad (2.44)$$

$t = \overline{1, m}$. Заметим, что матрицы \mathring{S}_t в (2.37) определены для ячеек e_t из Ω_h , $t = \overline{1, N}$, а матрицы \tilde{S}_t в (2.44) определены для подобластей E_t , $t = \overline{1, m}$.

Для дальнейших построений отметим, что в случае $\Gamma_D \cap \partial E_t = \emptyset$ матрицы \mathring{S}_t являются симметричными положительно полуопределенными матрицами, а их нуль-пространства содержат только вектора с постоянными компонентами, то есть $\dim \ker \mathring{S}_t = 1$, $t = \overline{1, m}$. Также отметим, что в случае, когда тензор \mathbb{D} в (2.1) является скалярным в E_t , то есть $\mathbb{D} = d_t \mathbb{I}$ в E_t с положительной константой d_t , то матрица \mathring{S}_t пропорциональна матрице $\mathring{S}_t^{(1)}$, где $\mathring{S}_t^{(1)}$ — матрица для подобласти с коэффициентом диффузии равным единице, $\mathring{S}_t \equiv d_t \mathring{S}_t^{(1)}$, где $\mathring{S}_t^{(1)} \equiv \mathring{S}_t$ в случае $\mathbb{D} = \mathbb{I}$ в E_t , $t = \overline{1, m}$.

2.6. Построение двухуровневого предобуславливателя

В данном разделе будет рассмотрена процедура построения двухуровневого предобуславливателя для матрицы \tilde{S}_t из (2.44).

Пусть K_t — диагональная $m_t \times m_t$ матрица с положительными диагональными элементами, где m_t — размерность \mathring{S}_t , $1 \leq t \leq m$. Примером такой матрицы

может служить “лампированная” матрица масс из классического галеркинського метода конечных элементов с кусочно-линейными базисными функциями (P1), как показано в статье [90]. “Лампированной” называется диагональная матрица, у которой каждый диагональный элемент равен сумме элементов строки исходной матрицы. Рассмотрим проблему собственных значений:

$$\dot{S}_t \bar{w} = \lambda K_t \bar{w}. \quad (2.45)$$

Пусть $0 = \lambda_{t,1} < \lambda_{t,2} \leq \dots \leq \lambda_{t,m_t}$ — собственные значения задачи (2.45), а $\bar{w}_{t,1}, \dots, \bar{w}_{t,m_t}$ набор K_t -ортонормальных собственных векторов, $t = \overline{1, m}$. Тогда можно выписать спектральное разложение для \dot{S}_t :

$$\dot{S}_t = K_t W_t \Lambda_t W_t^T K_t, \quad (2.46)$$

где $\Lambda_t = \text{diag}\{\lambda_{t,1}, \lambda_{t,2}, \dots, \lambda_{t,m_t}\}$ и

$$W_t = [\bar{w}_{t,1}, \dots, \bar{w}_{t,m_t}]. \quad (2.47)$$

Очевидно, что

$$W_t^T K_t W_t = K_t W_t W_t^T = W_t W_t^T K_t = I_t \quad (2.48)$$

с $m_t \times m_t$ единичной матрицей I_t , $t = \overline{1, m}$. Напомним, что

$$\bar{w}_{t,1} = \frac{1}{\|\bar{\varepsilon}_t\|_{K_t}} \bar{\varepsilon}_t, \quad (2.49)$$

где $\bar{\varepsilon}_t$ является m_t -вектором с компонентами, равными единице и $\|\bar{\varepsilon}_t\|_{K_t} = (K_t \bar{\varepsilon}_t, \bar{\varepsilon}_t)^{1/2}$ — K_t -норма $\bar{\varepsilon}_t$, $t = \overline{1, m}$.

Следуя [77], определим матрицы

$$\dot{B}_t = \beta_t K_s W_t (I_t - \hat{I}_t) W_t K_t = \beta_t (K_t - K_t \bar{w}_{t,1} \bar{w}_{t,1}^T K_t), \quad (2.50)$$

где $\beta_t \geq \lambda_{t,n_t}$, например $\beta_t = d_t \|K_t^{-1} \dot{S}_t\|_\infty$, а \hat{I}_t — матрица $n_t \times n_t$ с одним ненулевым элементом на позиции (1,1), равным единице, тогда как остальные её элементы равны нулю, $t = \overline{1, m}$.

Очевидно, что

$$\frac{\lambda_{t,2}}{\beta_t} (\dot{B}_t \bar{v}, \bar{v}) \leq (\dot{S}_t \bar{v}, \bar{v}) \leq \frac{\lambda_{t,n_t}}{\beta_t} (\dot{B}_t \bar{v}, \bar{v}) \leq (\dot{B}_t \bar{v}, \bar{v}) \quad (2.51)$$

для всех $\bar{v} \in \mathbb{R}^{n_t}$, $t = \overline{1, m_t}$.

В качестве преобуславливателя для матрицы \tilde{S}_t , $t = \overline{1, m}$, из (2.44) выберем

$$B_t = \mathring{B}_t + R_t, \quad (2.52)$$

где R_t взята из (2.41), и матрицу

$$B = \sum_{t=1}^m \mathcal{N}_t B_t \mathcal{N}_t^T \quad (2.53)$$

в качестве преобуславливателя для матрицы \tilde{S} из (2.43). Дальнейший анализ построен на следующих хорошо известных неравенствах. Пусть a_i, b_i , $i = \overline{1, r}$ — два набора неотрицательных чисел, где $r > 1$ — положительное целое. Предположим, что числа a_i, b_i одновременно либо равны нулю, либо положительны. Тогда имеют место неравенства

$$\min_{\substack{b_i \neq 0 \\ i = \overline{1, r}}} \frac{a_i}{b_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^r a_i}{\sum_{i=1}^r b_i} \leq \max_{\substack{b_i \neq 0 \\ i = \overline{1, r}}} \frac{a_i}{b_i}. \quad (2.54)$$

Первым очевидным применением этих неравенств являются оценки

$$\frac{\lambda_{t,2}}{\beta_t} (B_t \bar{v}, \bar{v}) \leq (\tilde{S}_t \bar{v}, \bar{v}) \leq (B_t \bar{v}, \bar{v}) \quad (2.55)$$

для всех $\bar{v} \in \mathbb{R}^{n_t}$, $t = \overline{1, m}$. Отметим, что в случае, когда тензор диффузии \mathbb{D} в $E_{h,t}$ является шаровым, то есть $\mathbb{D} = d_t \mathbb{I}$ с положительной константой d_t , собственное число $\lambda_{t,2}$ и величина $\beta = \|K_t^{-1} \mathring{S}_t\|_\infty$ пропорциональны d_t и, следовательно, величина

$$\alpha_t = \frac{\lambda_{t,2}}{\beta} \quad (2.56)$$

не зависит от d_t , $t = \overline{1, m}$.

Подставим величины

$$a_t = (B_t \bar{v}, \bar{v}) \quad \text{и} \quad b_t = (\tilde{S}_t \bar{v}, \bar{v}) \quad (2.57)$$

в (2.54). Тогда, используя (2.55) мы получаем оценки

$$\alpha (B \bar{v}, \bar{v}) \leq (\tilde{S} \bar{v}, \bar{v}) \leq (B \bar{v}, \bar{v}) \quad (2.58)$$

где

$$\alpha = \min_{1 \leq t \leq m} \alpha_t. \quad (2.59)$$

Таким образом было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Собственные числа матрицы $B^{-1}\tilde{S}$ принадлежат отрезку $[\alpha; 1]$, где величина α определена в (2.56) и (2.59). В случае шаровых тензоров $\mathbb{D} = d_t\mathbb{I}$ величина α не зависит от d_t , $t = \overline{1, m}$.*

Рассмотрим теперь случай, когда на части границы $\Gamma_D \in \partial\Omega$ задано однородное краевое условие Дирихле. Пусть часть границы ∂E_t подобласти E_t принадлежит $\partial\Omega$, то есть $|\partial E_t \cap \partial\Omega| \neq 0$, $t = \overline{1, m}$. Как уже отмечалось ранее в этой главе, соответствующая матрица \mathring{S}_t является диагональным блоком матрицы \mathring{S} для случая краевых условий Неймана на $\partial E_t \cap \partial\Omega$ и, следовательно, является положительно определенной. Таким образом, все соответствующие числа $\lambda_{t,1} \leq \lambda_{t,2} \leq \dots \leq \lambda_{t,n_t}$ спектральной задачи

$$\mathring{S}_t \bar{w} = \lambda \bar{w} \quad (2.60)$$

положительны. Выберем опять

$$\beta_t = \|K_t^{-1} \mathring{S}_t\|_\infty \quad (2.61)$$

и определим предобуславливатель

$$B_t = \beta_t \cdot K_t. \quad (2.62)$$

Тогда очевидно, что

$$\alpha_t (b_t \bar{v}, \bar{v}) \leq (\tilde{S} \bar{v}, \bar{v}) \leq (B \bar{v}, \bar{v}) \quad (2.63)$$

где

$$\alpha_t = \frac{\lambda_{t,1}}{\beta_t}. \quad (2.64)$$

Предобуславливатель B для матрицы \tilde{S} определяется также формулой (2.52) с новыми матрицами B_t для подобластей E_t с $|\partial E_t \cap \partial\Omega| \neq 0$, $t = \overline{1, m}$. При этом неравенства (2.58) сохраняются со значением α из (2.59) и значениями

α_t задаваемыми формулами (2.56), (2.64). Таким образом справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. В случае смешанных краевых условий Неймана/Дирихле или только условий Дирихле собственные числа матрицы $B^{-1}\tilde{S}$ принадлежат отрезку $[\alpha; 1]$, где величина α определена в (2.56), (2.64) и (2.59). В случае шаровых тензоров $\mathbb{D} = d_t\mathbb{I}$ величина α не зависит от d_t , $t = \overline{1, m}$.

2.7. Практическая реализация двухуровневого предобуславливателя

Для итерационного решения системы линейных уравнений на каждой итерации необходимо решить систему

$$B\bar{u} = \bar{g}. \quad (2.65)$$

Система (2.65) будет решаться способом, описанным в [89]. Матрица системы (2.65) может быть представлена в виде

$$B = \sum_t \beta_t \mathcal{N}_t \left(K_t - K_t \bar{w}_{t,1} \bar{w}_{t,1}^T K_t + \begin{bmatrix} \Sigma_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \mathcal{N}_t^T, \quad (2.66)$$

или, выделяя её диагональную часть, в виде:

$$B = K - \sum_t \beta_t \mathcal{N}_t K_t \bar{w}_{t,1} \bar{w}_{t,1}^T K_t \mathcal{N}_t^T, \quad (2.67)$$

где $K = \sum_t \beta_t \mathcal{N}_t K_t \mathcal{N}_t^T$.

Таким образом, систему (2.65) можно записать в виде:

$$K\bar{u} - \sum_t \beta_t \mathcal{N}_t K_t \bar{w}_{t,1} \bar{w}_{t,1}^T K_t \mathcal{N}_t^T \bar{u} = \bar{g}, \quad (2.68)$$

или

$$\bar{u} - K^{-1} \sum_t \beta_t \mathcal{N}_t K_t \bar{w}_{t,1} \bar{w}_{t,1}^T K_t \mathcal{N}_t^T \bar{u} = K^{-1} \bar{g}. \quad (2.69)$$

Если ввести новую переменную $\xi_t = \bar{w}_{t,1}^T K_t \mathcal{N}_t^T u$, то уравнение (2.69) может быть представлено в виде:

$$\bar{u} - \sum_t \beta_t K^{-1} \mathcal{N}_t K_t \bar{w}_{t,1} \xi_t = K^{-1} \bar{g}. \quad (2.70)$$

При умножении (2.70) на $\bar{w}_{t,1}^T K_t \mathcal{N}_t^T$ для всех $E_t, t = \overline{1, m}$, из уравнения (2.70) можно составить новую линейную систему:

$$(I - Q) \bar{\xi} = \bar{\psi}, \quad (2.71)$$

где $Q = \{q_{ts}\}, \bar{\psi} = \{\psi_t\}$,

$$q_{ts} = \bar{w}_{t,1}^T K_t \mathcal{N}_t^T \beta_t K^{-1} \mathcal{N}_s K_s \bar{w}_{s,1}, \quad (2.72)$$

$$\psi_t = \bar{w}_{t,1}^T K_t \mathcal{N}_t^T \bar{g}. \quad (2.73)$$

Полученная линейная система является разреженной, однако на каждом шаге все равно необходимо решать линейную систему с этой матрицей.

2.8. Блочнo-двухуровневый преобуславливатель

Пусть, как и в предыдущей задаче тензор диффузии — скалярный. Сделаем дополнительное предположение о коэффициенте диффузии. Пусть задана скалярная величина d_0 и пусть подобласти в задаче (2.14)–(2.19) разделены на две группы, причем коэффициенты диффузии в первой группе подобластей удовлетворяют соотношению $d_t \gg d_0, k = \overline{1, m_0}$, а коэффициенты диффузии во второй группе подобластей одинаковы: $d_t = d_0, t = \overline{m_0 + 1, m}$. Пусть также подобласти внутри первой подгруппы не имеют общей границы, $|\Gamma_{k,l}| = 0, 1 \leq k < t \leq m_0, m_0 < m$. Тогда матрицу \tilde{S} из (2.43) можно представить как сумму матриц \tilde{S}_0 и \tilde{S}_1 , где

$$\tilde{S}_1 = \sum_{t=1}^{m_0} (d_t - d_0) \mathcal{N}_t \tilde{S}_t^{(1)} \mathcal{N}_t^T, \quad (2.74)$$

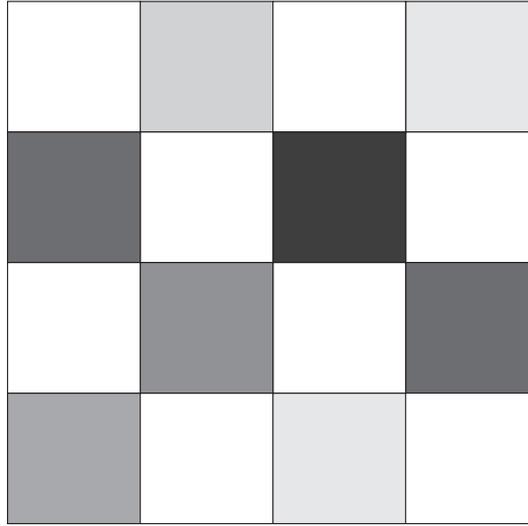


Рисунок 2.1 — Пример шахматного распределения.

$$\tilde{S}_0 = \sum_{t=m_0}^m \mathcal{N}_t \tilde{S}_t^{(1)} \mathcal{N}_t^T, \quad (2.75)$$

$\tilde{S}_t^{(1)} = \tilde{S}_t$ при $d_t = d_0$.

В рассматриваемом случае можно предложить новый вариант предобуславливателя. При этом для первой группы подобластей предобуславливатель будет задан в виде двухуровневого предобуславливателя, описанного в Разделе 2.6, тогда как во второй группе он останется диагональным. В итоге блочно-двухуровневый предобуславливатель B для матрицы \tilde{S} может быть выписан в следующем виде:

$$B = Z + \sum_{t=1}^{m_0} (d_t - d_0) \mathcal{N}_t B_t \mathcal{N}_t^T, \quad (2.76)$$

где Z — диагональная матрица с положительными элементами, например $Z = \|K^{-1} \tilde{S}\|_{\infty} K$, где $K = \sum_{t=m_0}^m \mathcal{N}_t K_t \mathcal{N}_t^T$. Так как области из первой группы не имеют общих границ между собой, то очевидно, что матрица B является блочно-диагональной матрицей, у которой блоки B_{tt} , $t = \overline{1, m_0}$, являются одноранговыми возмущениями диагональных матриц, а остальные блоки являются диагональными матрицами.

В рассмотренном случае, при использовании процедуры применения предобуславливания, описанной в разделе 2.7, матрица грубой сетки $I - Q$ из (2.71) вырождается в диагональную матрицу. Этот факт позволяет еще более ускорить

применение предобуславливателя, исключив обмены между процессорами при правильном выборе разбиения сетки. Такой предобуславливатель будем называть блочно-двухуровневым.

Отметим, что при построении блочно-двухуровневого предобуславливателя было использовано только одно свойство матрицы \mathring{S} , которое относится к ее ядру. Ядро матрицы \mathring{S} должно содержать только вектор с константными компонентами. Таким свойством обладают не только матрицы, полученные при помощи смешанных методов конечных элементов, но и галеркинских методов. Примером такого метода может служить дискретизация при помощи P1 кусочно-линейных базисных функций [86].

2.9. Эксперименты с двухуровневым и блочно-двухуровневым предобуславливателями

В данном разделе будут представлены различные эксперименты с двухуровневым и блочно-двухуровневым предобуславливателями, подтверждено отсутствие зависимости скорости сходимости от скачка коэффициентов диффузии, и проведено сравнение с другими типами предобуславливателей.

2.9.1. Сравнение двухуровневого предобуславливателя с предобуславливателем Якоби

Рассмотрим задачу (2.5) в единичном квадрате, разбитом на $m = \sqrt{m} \times \sqrt{m}$ квадратных подобластей, как показано на рисунке 2.2. Предположим, что коэффициент диффузии является константой внутри каждой подобласти E_k , т.е. $\mathbb{D}_k = d_k \mathbb{I}$, $d_k \equiv \text{const} > 0$ в E_k , $k = \overline{1, m}$. В $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$ определим квадратную сетку Ω_h с шагом $h = \frac{1}{n}$. Пусть n кратно \sqrt{m} . Введем макро-сетку с шагом $H = \frac{1}{\sqrt{m}}$. В задаче

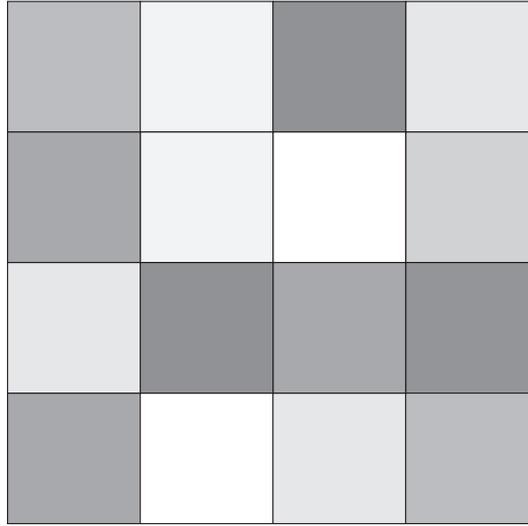


Рисунок 2.2 — Область Ω , разбитая на подобласти E_k , $k = \overline{1, m}$, $m = 16$.

используются граничные условия из (2.5) с $\Gamma_D = \emptyset$. Для численных экспериментов в каждой области коэффициент диффузии был выбран случайным образом в диапазоне от $d_{min} \equiv 1$ до величины d_{max} , которая является изменяющимся параметром в проведенных экспериментах. Также были рассмотрены различные виды коэффициента реакции: константный коэффициент реакции для всей области, или случайное распределение значений этого коэффициента.

Дискретизация задачи (2.5) была построена при помощи гибридной схемы метода конечных элементов PWCF [89]. Используя этот метод, можно получить систему уравнений (2.30). Для нахождения матриц B_t в (2.50) была выбрана диагональная “лампованная” матрица масс K_t из галеркинського метода с кусочно-линейными базисными функциями (P1), $t = \overline{1, m}$.

При проведении численных экспериментов были выбраны коэффициенты

$$\alpha_t = \|K_t^{-1} \tilde{S}_t\| \equiv \alpha = \frac{8d_t}{h^2}. \quad (2.77)$$

Первая часть экспериментов представляет собой исследование зависимости количества итераций от значения максимального коэффициента диффузии во включениях. Было проведено сравнение скорости сходимости предложенного метода и традиционного диагонального предобуславливателя Якоби. В таблицах ниже ПЯ — диагональный предобуславливатель Якоби, ДП — двухуровневый предобуславливатель, n_{it} — количество итераций, $H = 1/\sqrt{m}$. Также в таблице приведены различные значения коэффициента реакции c , как задаваемого одной

константой во всей области Ω , так и задаваемого отдельной константой, выбираемой случайным образом для каждой квадратной подобласти.

В качестве начального приближения выбирался вектор со случайными компонентами, модуль каждого из которых не превышал единицы. Критерием остановки являлось падение \tilde{S} -нормы ошибки в 10^6 раз. Для решения системы был выбран метод сопряженных градиентов. Ниже представлены таблицы с результатами сравнения двух методов решения системы (2.32). Матрица B в (2.53) является вырожденной, поэтому линейные системы с этой матрицей решались в ортогональном дополнении к $\ker B$.

Н	$n \times n$	$d_{\max} = 1$		$d_{\max} = 10^2$		$d_{\max} = 10^4$		$d_{\max} = 10^6$	
		ПЯ	ДП	ПЯ	ДП	ПЯ	ДП	ПЯ	ДП
$\frac{1}{8}$ $c = 1$	128×128	502	310	913	310	1281	308	1714	304
	256×256	910	652	1837	678	2375	647	2981	646
	512×512	1705	1373	3278	1397	5659	1321	7175	1310
$\frac{1}{16}$ $c = 1$	128×128	600	144	1256	143	2658	140	5123	138
	256×256	944	330	1882	348	4896	327	7901	325
	512×512	1678	744	3587	745	8013	737	19325	729
$\frac{1}{8}$ $c \in [0.01; 100]$	128×128	276	377	701	317	1278	307	1520	306
	256×256	543	736	1324	691	2145	655	2655	650
	512×512	970	1497	2217	1421	4508	1392	6680	1303
$\frac{1}{16}$ $c \in [0.01; 100]$	128×128	278	199	798	158	2009	147	4726	143
	256×256	527	388	1323	339	3524	331	8938	323
	512×512	907	794	2277	755	7502	736	15326	733

Таблица 11 — Сравнение количества итераций n_{it} с предобуславливателем Якоби (ПЯ) и двухуровневым предобуславливателем (ДП).

Как видно из таблицы 11, количество итераций для двухуровневого предобуславливателя не зависит от скачка коэффициентов диффузии.

Во второй части экспериментов было добавлено также измерение времени t_{sol} , затрачиваемого на решение системы. Коэффициент реакции везде был равен единице, $c \equiv 1$. Результаты экспериментов представлены в Таблице 12 и также

подтверждают независимость количества итераций при решении линейных систем.

H	$n \times n$		$d_{max} = 10^2$		$d_{max} = 10^4$		$d_{max} = 10^6$	
			ПЯ	ДП	ПЯ	ДП	ПЯ	ДП
$\frac{1}{8}$	128×128	n_{it}	913	310	1281	308	1714	304
		t_{sol}	3.71	1.58	5.21	1.55	6.92	1.51
	256×256	n_{it}	1837	678	2375	647	2981	646
		t_{sol}	34.78	16.68	50.80	16.79	65.05	16.43
	512×512	n_{it}	3278	1397	5659	1321	7175	1310
		t_{sol}	256.11	136.67	423.89	118.01	531.58	126.96
$\frac{1}{16}$	128×128	n_{it}	1256	143	2658	140	5123	138
		t_{sol}	5.54	0.86	12.17	0.86	24.67	0.92
	256×256	n_{it}	1882	348	4896	327	7901	325
		t_{sol}	39.85	9.96	105.86	8.13	164.77	7.31
	512×512	n_{it}	3587	745	8013	737	19325	729
		t_{sol}	295.35	74.63	664.05	74.78	1577.69	73.83

Таблица 12 — Сравнение сходимости и времени решения t_{sol} с предобуславливателем Якоби (ПЯ) и двухуровневым предобуславливателем (ДП).

Для дискретизации при помощи кусочно-линейных функций (P1) были получены аналогичные результаты, главным выводом из которых является независимость количества итераций от скачков коэффициента диффузии в разных подобластях.

2.9.2. Сравнение двухуровневого предобуславливателя с предобуславливателем Якоби и блочно-двухуровневым предобуславливателем

Для следующей серии экспериментов был добавлен блочно-двухуровневый предобуславливатель, описанный в разделе 2.8, поэтому были наложены дополнительные ограничения на коэффициент диффузии. Были сделаны дополнительные предположения о коэффициенте диффузии, взятые из Раздела 2.8, то есть об-

ласти были разделены на 2 подгруппы, в одной из которых коэффициенты диффузии были существенно больше, нежели во второй, как изображено на рисунке 2.1. После этого был повторен опыт из предыдущего раздела, с добавлением блочно-двухуровневого предобуславливателя.

Ниже представлены результаты сравнения трех предобуславливателей: диагонального, двухуровневого предобуславливателя и блочно-двухуровневого предобуславливателя (БДП). Коэффициент реакции был выбран постоянным и $c \equiv 1$.

Результаты экспериментов, представленных в Таблице 13, показывают постоянство независимость сходимости для метода сопряженных градиентов от d_{max} при использовании двухуровневого предобуславливателя и блочно-двухуровневого предобуславливателя. Наиболее эффективным является двухуровневый предобуславливатель, далее следует блочно-двухуровневый предобуславливатель, и наименее эффективным является диагональный предобуславливатель. Двухуровневый предобуславливатель также является самым быстрым по времени решения линейной системы при небольшой количестве подобластей, однако при их увеличении блочно-двухуровневый предобуславливатель оказывается быстрее, как видно из 3 и 6 строк Таблицы 13.

Отметим, что реализовать блочно-двухуровневого предобуславливатель при дискретизации кусочно-линейными элементами P1 для данной задачи невозможно, так как в углах квадратных подобластей будут касания и в этом случае матрица $I - Q$ из (2.71) не выродится в диагональную, что существенно для блочно-двухуровневого предобуславливателя.

2.9.3. Исследование параллельных свойств блочно-двухуровневого предобуславливателя

Численные эксперименты по сравнению эффективности параллельной реализации предложенного блочно двухуровневого предобуславливателя с други-

ми предобуславливателями проводились с использованием платформы INMOST [59], которая позволяет вызывать различные вычислительные пакеты линейной алгебры, в рамках единого интерфейса.

Для сравнения свойств различных предобуславливателей были использованы три различных вычислительных пакета: PETSc [60], Trilinos [61] и INMOST. Для всех 4 вариантов решения системы линейных уравнений, включая вариант с применением предложенного блочно-двухуровневого предобуславливателя, в качестве итерационной схемы для единообразия был выбран метод стабилизированных бисопряженных градиентов (BiCGstab). Этот метод был использован для корректного сравнения различных предобуславливателей (в том числе несимметричных), реализованных в различных пакетах.

В самой платформе INMOST был выбран предобуславливатель $ILU2(\tau)$ с параметром отсечения малых элементов τ , равным 10^{-3} . В пакете PETSc был использован традиционный предобуславливатель на основе неполного треугольного разложения $ILU(k)$ с достаточно большим значением параметра расширения структуры предобуславливателя, $k = 7$, что было обусловлено необходимостью повышения его надежности. В качестве схемы распараллеливания для $ILU2(\tau)$ и $ILU(k)$ использовался аддитивный метод Шварца с перекрытием, размер которого в данных экспериментах был равен 1. В пакете Trilinos был использован алгебраический многосеточный предобуславливатель. Количество уровней предобуславливателя было выбрано равным 5, а пред- и пост-сглаживание было произведено при помощи пакета Ifpack. Сам блочно-двухуровневый предобуславливатель также был внедрен в программную платформу INMOST.

Отметим, что в случае предложенного блочно-двухуровневого (БДП) и $ILU2$ предобуславливателя использовался итерационный метод BiCGstab из платформы INMOST, тогда как пакеты Trilinos и PETSc использовали свои встроенные реализации итерационной схемы BiCGstab.

Все численные эксперименты проводились на кластере ИВМ РАН [91] на 32 вычислительных ядрах двух вычислительных узлов очереди x8score, имеющих следующие характеристики:

- Compute Node Arbyte Alkazar+ R2Q50.
- 16 ядер (два 8-ядерных процессора Intel Xeon E5-2665@2.40ГГц).
- Оперативная память: 64 Гб.
- Операционная система: SUSE Linux Enterprise Server 11 SP1 (x86_64).

Блочно-двухуровневый предобуславливатель был реализован на основе разработанной в ИВМ РАН программной платформы INMOST [59] [92].

Для исследования свойств сформулируем следующую тестовую задачу. Будем считать область Ω единичным квадратом, разбитым на квадратные ячейки, каждая из которых в свою очередь разбита на два треугольника. Пусть в области Ω задан шаровый тезор диффузии $\mathbb{D} = d_0\mathbb{I}$. Внутри области выделены m подобластей ω_s , $s = \overline{1, m}$, соответствующие включениям, в которых коэффициент диффузии d_s существенно больше коэффициента в остальной части области, $d_s \gg d_0$, $s = 1, \dots, m$, как показано на рисунке 2.3. Включения не имеют общей границы друг с другом и не соприкасаются с границей области, т.е. $\partial\omega_s \cap \partial\omega_t = \emptyset$, $\partial\omega_s \cap \partial\Omega = \emptyset$, $s, t = 1, \dots, m$. Подобласти с большим коэффициентом диффузии одинаковы по размеру и являются квадратами, как изображено на рисунке 2.3. Расстояния между подобластями равны размерам подобластей. В ходе экспериментов размер рассматривается различным размер подобластей. В области Ω ставится задача (2.1) с однородными граничными условиями Дирихле. Были рассмотрены различные значения m количества включений и различные размеры включений n , и, таким образом, различные размерности решаемой задачи N_A .

Для дискретизации был использован метод конечных элементов с кусочно-линейными базисными функциями (P1), что является эквивалентным применением стандартной пятиточечной схемы конечных разностей [93] на квадратной сетке. В этом случае, учитывая, что включения не касаются друг друга и границы расчетной области, можно использовать описанную выше процедуру построения предобуславливателя, см. раздел 2.8.

Коэффициент диффузии для основной области был выбран равный единице, т.е. $d_0 = 1$. Были проведены две серии экспериментов, в которых скачки коэффициентов имели различную структуру. В первой серии все включения имели

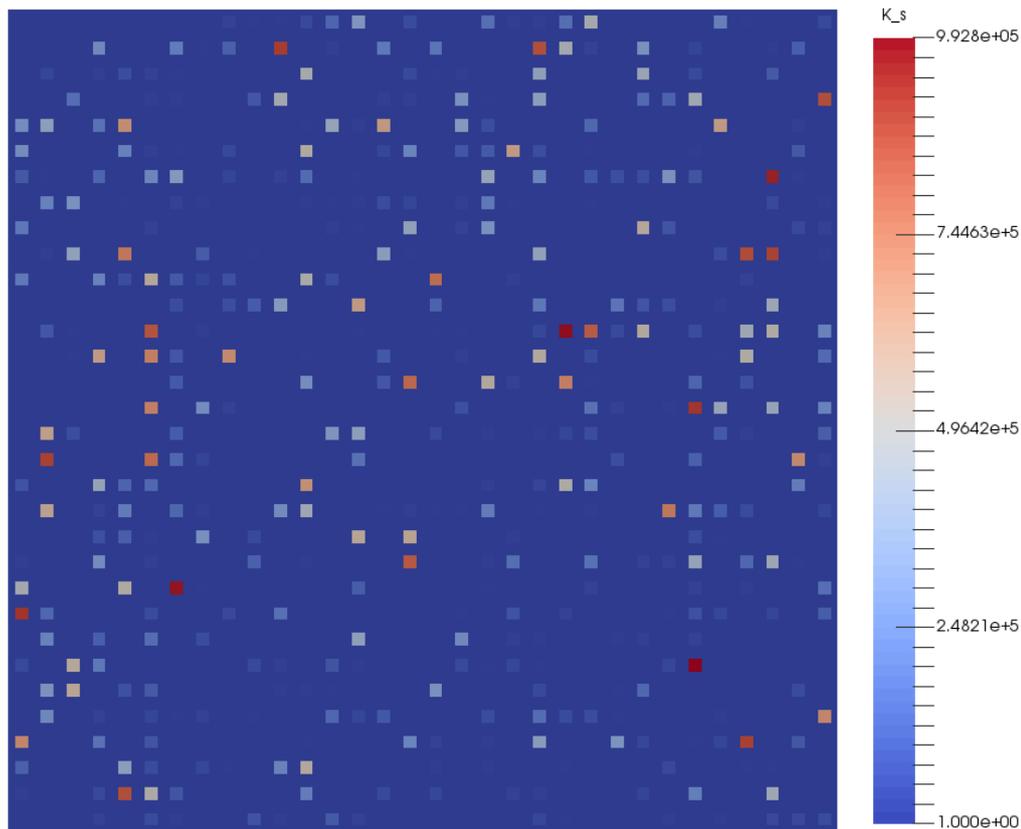


Рисунок 2.3 — Пример распределения включений с коэффициентом диффузии, выбранным случайным образом из интервала $[1; 10^6]$.

одинаковый коэффициент диффузии $d_s = d_{\max}$, сильно отличающийся от коэффициента диффузии основной области, т.е. $d_{\max} \gg d_0$. Во второй серии экспериментов коэффициенты диффузии выбирались для каждого включения случайным образом в диапазоне от коэффициента диффузии основной области до некоего значения d_{\max} , т.е. $d_s \in [1; d_{\max}]$.

Правая часть во всех экспериментах выбиралась нулевой, тогда как начальное приближение выбиралось случайным образом в диапазоне $(0; 1)$. Критерием остановки было падение L_2 -нормы невязки в 10^{12} раз.

В таблицах 14–22 величина d_s обозначает коэффициент диффузии во включениях. Он может быть одинаковым во всех включениях или может быть выбран случайным образом из диапазона $[1; d_{\max}]$, “#iter” — количество итераций метода BiCGstab, “ T_{total} ” — время, затраченное на построение предобуславливателя и решения линейной системы, а T_{it} — среднее время, затраченное на одну итерацию.

Было проведено 3 серии экспериментов, в каждой из которых постоянным параметром был размер одной подобласти. Для самого маленького размера подобластей, 2×2 можно заметить, что наиболее быстрыми оказываются предобуславливатели ILU2 и ILU(k). Результаты этих экспериментов представлены в таблицах 14, 15 и 16. Это обусловлено тем, что для этих предобуславливателей были выбраны достаточно жесткие критерии построения, которые дают возможность очень быстро сходиться итерационному процессу в этом случае. Следует отметить, что блочно-двухуровневый предобуславливатель в этих экспериментах также подтверждает теоретические оценки и количество итераций при его применении не возрастает при возрастании скачка коэффициентов. Также блочно-двухуровневый предобуславливатель в этих, и следующих экспериментах является самым быстрым в пересчете на одну итерацию.

Во второй серии экспериментов размер одной возмущенной подобласти равен 4×4 . Результаты, представленные в таблицах 17, 18 и 19 также показывают невозрастание количества итераций для блочно-двухуровневого предобуславливателя при увеличении скачков коэффициента диффузии. Однако следует отметить, что при одинаковом скачке коэффициента блочно-двухуровневый предобуславливатель сходится быстрее, чем при случайном разбросе коэффициентов диффузии во включениях и что в пересчете на одну итерацию он остается самым быстрым. Однако ILU-предобуславливатели все еще остаются быстрее, из-за подобранных значений параметров

Третья часть экспериментов по сравнению предобуславливателей была проведена с размером подобласти 8×8 . При этом размере области заметно резкое увеличение времени решения с предобуславливателем ILU(k) при $k = 7$ по сравнению с остальными предобуславливателями, как видно из таблиц 20, 21 и 22. Следует также подчеркнуть, что при использовании меньшего количества уровней расширения структуры в этом предобуславливателе, например, $k = 6$, не дает гарантии решения линейной системы.

Стоит также отметить, что во всех сериях экспериментов многосеточный метод из пакета Trilinos показывает значительный рост числа итераций и времени решения при увеличении скачка коэффициентов.

В таблицах 23 и 24 приводятся результаты исследования зависимости скорости сходимости от количества процессоров $N_{proc} = 1, 2, \dots, 64$ для различных предобуславливателей. В таблице 23 представлены результаты расчетов для задачи с коэффициентом диффузии $d_s = 10^4$ и параметрами сетки $m = 64, n = 8, N_A = 1046529$, а в таблице 24 для задачи с $d_s \in [1; 10^6]$, $m = 128, n = 8, N_A = 4190209$. В качестве оценки параллельной эффективности приводится величина ускорения относительно времени расчета на одном процессоре $S_1 = \text{Time}(1)/\text{Time}(N_{proc})$. Наибольшую параллельную эффективность показали методы AMG и предложенный метод. Для предобуславливателей ILU(7) и ILU2 с ростом количества процессоров наблюдается заметный рост количества итераций, причем для задачи с неоднородным коэффициентом диффузии из таблицы 24 для всех расчетов сходимость с предобуславливателем ILU(7) достигнута не была. В таблице 24 через «Ассиг.» обозначена достигнутая в этом случае точность решения.

Как видно из таблицы 24, блочно-двухуровневый предобуславливатель в данном эксперименте является одним из самых быстрых методов предобуславливания и также показывает одно из наилучших ускорений. Ввиду его блочно-диагональной структуры и независимости скорости сходимости итерационного метода от роста количества процессоров, он показывает высокую параллельную эффективность при минимальном времени на одну итерацию. В этом заключается основное преимущество предложенного блочно-двухуровневого предобуславливателя перед остальными способами построения предобуславливателей для рассматриваемой задачи диффузии в средах с контрастными включениями.

2.10. Выводы

В данной главе представлена методика построения параллельного блочно-двухуровневого предобуславливателя для решения уравнения диффузии с кусочно-постоянными коэффициентами. При использовании данного предобуславливателя скорость сходимости итерационного процесса не зависит от скачка коэффициентов. В силу простоты построения метод также является эффективным при расчете на массивно-параллельных системах, что подтверждается результатами численных экспериментов. Было проведено сравнение скорости сходимости как с предобуславливателем Якоби, так и с широко используемыми в настоящее время методами предобуславливания, такими, как метод неполного треугольного разложения матрицы (ILU) и алгебраический многосеточный метод. Описываемый предобуславливатель показал достаточное быстродействие и хорошую масштабируемость.

H	n		$d_{max} = 10^2$			$d_{max} = 10^4$			$d_{max} = 10^6$		
			ПЯ	ДП	БДП	ПЯ	ДП	БДП	ПЯ	ДП	БДП
$\frac{1}{8}$	256×256	n_{it}	2100	673	1535	5090	556	1326	6993	542	1152
		t_{sol}	41.69	17.38	33.33	105.41	13.47	29.92	142.89	13.13	27.24
$\frac{1}{16}$	256×256	n_{it}	2386	326	1303	10104	293	1140	33412	267	993
		t_{sol}	48.38	8.28	29.25	206.66	8.76	27.22	721.48	6.49	24.79
$\frac{1}{64}$	256×256	n_{it}	2841	65	1075	16148	58	958	98142	50	761
		t_{sol}	60.61	32.38	28.01	401.62	39.25	31.75	2295.67	30.98	20.12
$\frac{1}{8}$	512×512	n_{it}	4262	1373	2840	7421	1227	2581	15808	1141	2147
		t_{sol}	328.07	132.31	250.762	521.89	117.91	233.01	1251.71	109.25	194.52
$\frac{1}{16}$	512×512	n_{it}	4611	733	2440	16412	638	2070	54350	602	1814
		t_{sol}	376.06	75.06	231.07	1193.26	50.81	151.68	3488.7	48.76	134.3
$\frac{1}{128}$	512×512	n_{it}	5182	67	1996	27086	58	1665	>100000	51	1202
		t_{sol}	500.23	1099.37	234.53	2776.97	1159.6	217.94	>9570.59	977.63	131.91
$N = 256 \times 256$											
d_{max}			8×8		16×16		64×64				
			n_{it}	t_{sol}	n_{it}	t_{sol}	n_{it}	t_{sol}			
10^2	ПЯ		2100	41.69	2386	48.38	2841	60.61			
	ДП		673	17.38	326	8.28	65	32.38			
	БДП		1535	33.33	1303	29.25	1075	28.01			
10^4	ПЯ		5090	105.41	10104	206.66	16148	401.62			
	ДП		556	13.47	293	8.76	58	39.25			
	БДП		1326	29.92	1140	27.22	958	31.75			
10^6	ПЯ		6993	142.89	33412	721.48	98142	2295.67			
	ДП		542	13.13	267	6.49	50	30.98			
	БДП		1152	27.24	993	24.79	761	20.12			
$N = 512 \times 512$											
d_{max}			8×8		16×16		128×128				
			n_{it}	t_{sol}	n_{it}	t_{sol}	n_{it}	t_{sol}			
10^2	ПЯ		4262	328.07	4611	376.06	5182	500.23			
	ДП		1373	132.31	733	75.06	67	1099.37			
	БДП		2840	250.762	2440	231.07	1996	234.53			
10^4	ПЯ		7421	521.89	16412	1193.26	27086	2776.97			
	ДП		1227	117.91	638	50.81	58	1159.6			
	БДП		2581	233.01	2070	151.68	1665	217.94			
10^6	ПЯ		15808	1251.71	54350	3488.7	>100000	>9570.59			
	ДП		1141	109.25	602	48.76	51	977.63			
	БДП		2147	194.52	1814	134.3	1202	131.91			

Таблица 13 — Сравнение количества итераций и времени решения для предобуславливателя Якоби (ПЯ), двухуровневого предобуславливателя (ДП) и блочно-двухуровневого предобуславливателя (БДП).

Предобуславливатель		#iter	T_{total}	T_{it}		#iter	T_{total}	T_{it}
PETSc ILU(7)	$d_s = 10^4$	48	0.02	0.00041	$d_s = 10^6$	54	0.02	0.00037
Trilinos AMG		107	0.20	0.00186		285	0.32	0.00112
INMOST ILU2(10^{-3})		62	0.06	0.00096		82	0.12	0.00146
БДП		163	0.13	0.00079		130	0.05	0.00046
PETSc ILU(7)	$d_s \in [1; 10^4]$	51	0.02	0.00039	$d_s \in [1; 10^6]$	50	0.02	0.0004
Trilinos AMG		133	0.15	0.00112		775	0.81	0.00104
INMOST ILU2(10^{-3})		50	0.03	0.0006		61	0.03	0.00049
БДП		176	0.04	0.00022		160	0.03	0.00018

Таблица 14 — Сравнение сходимости для предобуславливателей. Количество подобластей $m = 32 \times 32$, размер подобласти $n = 2 \times 2$, количество неизвестных $N_A = 16129$.

Предобуславливатель		#iter	T_{total}	T_{it}		#iter	T_{total}	T_{it}
PETSc ILU(7)	$d_s = 10^4$	86	0.14	0.00162	$d_s = 10^6$	90	0.20	0.00222
Trilinos AMG		123	0.34	0.00276		440	1.15	0.00261
INMOST ILU2(10^{-3})		119	0.14	0.00117		175	0.16	0.00091
БДП		292	0.18	0.00061		271	0.16	0.00059
PETSc ILU(7)	$d_s \in [1; 10^4]$	91	0.15	0.00164	$d_s \in [1; 10^6]$	103	0.17	0.00165
Trilinos AMG		128	0.36	0.00281		1055	2.70	0.00255
INMOST ILU2(10^{-3})		66	0.21	0.00318		97	0.21	0.00216
БДП		334	0.21	0.00062		285	0.17	0.00059

Таблица 15 — Сравнение сходимости для предобуславливателей. Количество подобластей $m = 64 \times 64$, размер подобласти $n = 2 \times 2$, количество неизвестных $N_A = 65025$.

Предобуславливатель		#iter	T_{total}	T_{it}		#iter	T_{total}	T_{it}
PETSc ILU(7)	$d_s = 10^4$	115	0.91	0.00791	$d_s = 10^6$	134	1.04	0.00776
Trilinos AMG		153	2.01	0.01313		369	4.81	0.01303
INMOST ILU2(10^{-3})		243	1.87	0.00769		338	1.98	0.0058
БДП		613	2.61	0.00425		451	1.88	0.00416
PETSc ILU(7)	$d_s \in [1; 10^4]$	134	1.05	0.00783	$d_s \in [1; 10^6]$	146	1.17	0.00801
Trilinos AMG		125	1.67	0.01336		890	11.59	0.01302
INMOST ILU2(10^{-3})		110	1.66	0.01509		227	2.31	0.01017
БДП		681	2.91	0.00427		447	1.87	0.00418

Таблица 16 — Сравнение сходимости для предобуславливателей. Количество подобластей $m = 128 \times 128$, размер подобласти $n = 2 \times 2$, количество неизвестных $N_A = 261121$.

Предобуславливатель		#iter	T_{total}	T_{it}		#iter	T_{total}	T_{it}
PETSc ILU(7)	$d_s = 10^4$	83	0.27	0.00325	$d_s = 10^6$	80	0.14	0.00175
Trilinos AMG		120	1.22	0.01016		414	1.10	0.00265
INMOST ILU2(10^{-3})		62	0.06	0.00095		163	0.23	0.00141
БДП		284	0.50	0.00176		290	0.15	0.00051
PETSc ILU(7)	$d_s \in [1; 10^4]$	85	0.14	0.00164	$d_s \in [1; 10^6]$	90	0.15	0.00166
Trilinos AMG		64	0.19	0.00296		538	1.43	0.00265
INMOST ILU2(10^{-3})		54	0.27	0.005		84	0.30	0.00357
БДП		375	0.20	0.0005		309	0.17	0.00055

Таблица 17 — Сравнение сходимости для предобуславливателей. Количество подобластей $m = 32 \times 32$, размер подобласти $n = 4 \times 4$, количество неизвестных $N_A = 65025$.

Предобуславливатель		#iter	T_{total}	T_{it}		#iter	T_{total}	T_{it}
PETSc ILU(7)	$d_s = 10^4$	125	0.99	0.00792	$d_s = 10^6$	120	0.94	0.00783
Trilinos AMG		122	1.66	0.01360		750	9.71	0.01294
INMOST ILU2(10^{-3})		131	1.93	0.01581		279	2.42	0.00867
БДП		544	2.16	0.00397		528	1.98	0.00375
PETSc ILU(7)	$d_s \in [1; 10^4]$	126	0.99	0.00785	$d_s \in [1; 10^6]$	134	1.04	0.00776
Trilinos AMG		85	1.15	0.01352		551	7.14	0.01295
INMOST ILU2(10^{-3})		86	1.80	0.02093		133	1.99	0.01496
БДП		644	2.43	0.00377		472	1.77	0.00375

Таблица 18 — Сравнение сходимости для предобуславливателей. Количество подобластей $m = 64 \times 64$, размер подобласти $n = 4 \times 4$, количество неизвестных $N_A = 261121$.

Предобуславливатель		#iter	T_{total}	T_{it}		#iter	T_{total}	T_{it}
PETSc ILU(7)	$d_s = 10^4$	206	6.34	0.03077	$d_s = 10^6$	205	6.37	0.03107
Trilinos AMG		146	11.26	0.07712		663	50.04	0.07547
INMOST ILU2(10^{-3})		242	11.08	0.04578		338	10.98	0.03248
БДП		1122	17.53	0.01562		866	13.13	0.01516
PETSc ILU(7)	$d_s \in [1; 10^4]$	218	6.71	0.03082	$d_s \in [1; 10^6]$	183	5.71	0.03120
Trilinos AMG		111	8.57	0.07720		891	67.93	0.07624
INMOST ILU2(10^{-3})		149	10.78	0.07234		355	19.45	0.05478
БДП		1445	21.92	0.01516		1336	20.48	0.01532

Таблица 19 — Сравнение сходимости для предобуславливателей. Количество подобластей $m = 128 \times 128$, размер подобласти $n = 4 \times 4$, количество неизвестных $N_A = 1046529$.

Предобуславливатель		#iter	T_{total}	T_{it}		#iter	T_{total}	T_{it}
PETSc ILU(7)	$d_s = 10^4$	1341	9.89	0.00737	$d_s = 10^6$	403	3.02	0.0074
Trilinos AMG		91	1.23	0.01351		463	6.01	0.01298
INMOST ILU2(10^{-3})		94	1.56	0.01659		421	5.63	0.01337
БДП		714	2.66	0.00372		400	1.51	0.00377
PETSc ILU(7)	$d_s \in [1; 10^4]$	574	4.25	0.00740	$d_s \in [1; 10^6]$	1012	7.51	0.00742
Trilinos AMG		63	0.87	0.01380		380	4.96	0.01305
INMOST ILU2(10^{-3})		69	1.62	0.02347		171	3.39	0.01982
БДП		740	2.78	0.00375		576	2.12	0.00368

Таблица 20 — Сравнение сходимости для предобуславливателей. Количество подобластей $m = 32 \times 32$, размер подобласти $n = 8 \times 8$, количество неизвестных $N_A = 261121$.

Предобуславливатель		#iter	T_{total}	T_{it}		#iter	T_{total}	T_{it}
PETSc ILU(7)	$d_s = 10^4$	565	17.10	0.03026	$d_s = 10^6$	1982	59.12	0.02982
Trilinos AMG		88	6.87	0.07806		483	36.63	0.07583
INMOST ILU2(10^{-3})		191	11.56	0.06052		1094	53.49	0.04889
БДП		1016	15.00	0.01476		966	14.10	0.01459
PETSc ILU(7)	$d_s \in [1; 10^4]$	1177	35.2	0.02990	$d_s \in [1; 10^6]$	1223	36.63	0.02995
Trilinos AMG		71	5.58	0.07859		513	39.08	0.07617
INMOST ILU2(10^{-3})		126	10.49	0.08325		299	21.29	0.07120
БДП		1262	18.97	0.01503		1152	17.15	0.01488

Таблица 21 — Сравнение сходимости для предобуславливателей. Количество подобластей $m = 64 \times 64$, размер подобласти $n = 8 \times 8$, количество неизвестных $N_A = 1046529$.

Предобуславливатель		#iter	T_{total}	T_{it}		#iter	T_{total}	T_{it}
PETSc ILU(7)	$d_s = 10^4$	3641	449.99	0.12358	$d_s = 10^6$	3996	495.52	0.12400
Trilinos AMG		92	34.41	0.37402		518	189.17	0.36519
INMOST ILU2(10^{-3})		322	74.85	0.2324		1441	278.21	0.19306
БДП		2609	165.9	0.06358		1839	117.47	0.06387
PETSc ILU(7)	$d_s \in [1; 10^4]$	1517	189.21	0.12472	$d_s \in [1; 10^6]$	3871	368.87	0.09529
Trilinos AMG		76	28.57	0.37592		544	105.23	0.19343
INMOST ILU2(10^{-3})		206	63.98	0.31058		492	80.80	0.16422
БДП		2996	192.85	0.06436		2539	76.18	0.0300

Таблица 22 — Сравнение сходимости для предобуславливателей. Количество подобластей $m = 128 \times 128$, размер подобласти $n = 8 \times 8$, количество неизвестных $N_A = 4190209$.

	N_{proc}	1	2	4	8	16	32	64
PETSc ILU(7)	#iter	1248	2046	2173	1767	1337	1629	2476
	Time	147.04	115.13	65.94	35.25	25.55	16	14.75
	S_1	1.0	1.27	2.22	4.17	5.75	9.19	9.96
Trilinos AMG	#iter	116	128	117	133	117	112	114
	Time	48.85	27.89	13.36	8.71	5.82	2.59	1.49
	S_1	1.0	1.75	3.65	5.60	8.39	18.86	32.78
INMOST ILU2(10^{-3})	#iter	156	208	226	200	206	217	237
	Time	53.09	35.51	20.35	10.51	8.20	4.86	3.12
	S_1	1.0	1.49	2.60	5.05	6.47	10.92	17.01
БДП	#iter	1643	2022	1544	1341	1556	1482	1295
	Time	123.45	75.46	30.93	16.06	15.48	7.93	4.03
	S_1	1.0	1.63	3.99	7.69	7.97	15.56	30.63

Таблица 23 — Зависимость скорости решения задачи от количества процессоров для разных предобуславливателей. $d_s = 10^4$, количество подобластей $m = 64 \times 64$, размер подобласти $n = 8 \times 8$, количество неизвестных $N_A = 1046529$.

	N_{proc}	1	2	4	8	16	32	64
PETSc ILU(7)	#iter	10000	10000	10000	10000	10000	4383	10000
	Time	1137.28	536.83	301.08	198.38	190.04	42.83	56.99
	Accur.	2.0e-09	6.0e-10	5.0e-02	2.0e-09	4.0e-10	1.0e-09	3.0e-09
Trilinos AMG	#iter	635	647	455	570	626	673	497
	Time	258.48	137.10	50.32	36.36	30.63	15.04	5.59
	S_1	1.0	1.88	5.13	7.05	8.43	17.18	46.23
INMOST ILU2(10^{-3})	#iter	183	259	288	262	346	370	305
	Time	75.52	53.24	32.68	16.92	16.7	10.2	4.87
	S_1	1.0	1.41	2.31	4.46	4.52	7.40	15.50
БДП	#iter	1848	1343	1219	1375	1527	1579	1608
	Time	138.89	50.62	24.87	16.42	15.66	8.5	4.92
	S_1	1.0	2.74	5.58	8.45	8.86	16.34	28.22

Таблица 24 — Зависимость скорости решения задачи от количества процессоров для разных предобуславливателей. $d_s \in [1; 10^6]$, количество подобластей $m = 128 \times 128$, размер подобласти $n = 8 \times 8$, количество неизвестных $N_A = 4190209$.

Заключение

Работа посвящена исследованию методов учета различных особенностей при моделировании диффузионных процессов. Основным результатом работы: предложены и исследованы подходы для учета особенности от распределенных источников, а также расчета задач с сильно контрастными средами. В частности, получены следующие результаты:

1. Предложен и численно исследован метод конечных объемов для приближенного решения уравнения диффузии на многогранных сетках, учитывающий особенности от распределенных источников.
2. Предложена модель взаимодействия распределенного источника (скважины) и содержащей его ячейки сетки.
3. Предложен блочно-двухуровневый предобуславливатель, который обеспечивает независимость скорости сходимости от скачков коэффициента диффузии и экспериментально подтверждено отсутствие роста числа итераций при возрастании скачка коэффициента диффузии.
4. Разработана параллельная реализация блочно-двухуровневого предобуславливателя и проведено его сравнение с предобуславливателями $AS-ILU(k, q)$, $AS-ILU2(\tau, q)$, а также алгебраическим многосеточным предобуславливателем.
5. Численные реализации разработанных методов внедрены в программную платформу INMOST.

Список литературы

1. *Баренблатт Г., Ентов Е., Рыжик В.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. Недра, 1984. 211 с.
2. *Каневская Р. Д.* Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождения углеводородов. Москва : Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2002. 140 с.
3. *Chen Z., Huan G., Ma Y.* Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media. Philadelphia, PA : Society for Industrial, Applied Mathematics, 2006.
4. *Aziz K., Settari A.* Petroleum Reservoir Simulation. Philadelphia, PA : Applied Science Publishers LTD, London, 1979. 476 p.
5. *Kelley C.* Solving Nonlinear Equations with Newton's Method. Society for Industrial, Applied Mathematics, 2003.
6. *Оганесян Л., Руховец Л.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Издательство АН Армянской ССР, 1979. С. 235.
7. *Ding Y. Renard G.* A new representation of wells in numerical reservoir simulation. // SPE Journal. 1994. Vol. 9, no. 02. Pp. 140–144.
8. *Вахитов Г.* Эффективные способы решения задач разработки нефтеводоносных пластов методом конечных разностей. Москва : Москва Гостоптехиздат, 1963. 216 с.
9. *Андреев В., Кряквина С. А.* О функции источника сеточного оператора Лапласа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т. 12, № 2. С. 364–373.
10. *Peaceman D. W.* Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation // SPE Journal. 1978. Vol. 18, no. 3. Pp. 183–194.

11. *Peaceman D. W.* Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with non-square grid blocks and anisotropic permeability // *SPE Journal*. 1983. Vol. 23, no. 3. Pp. 531–543.
12. *Ewing R. E., Lazarov R. D., Lyons S. L., Papavassiliou D. V., [et al.]*. Numerical well model for non-Darcy flow through isotropic porous media // *Computational Geosciences*. 1999. Vol. 3, no. 3. Pp. 185–204.
13. *Wolfsteiner C., Durlofsky L., Khalid A.* Calculation of well index for nonconventional wells on arbitrary grids // *Computational Geosciences*. 2003. Vol. 7, no. 1. Pp. 61–82.
14. *Kheriji W., Masson R., Moncorgé A.* Nearwell local space and time refinement in reservoir simulation // *Mathematics and Computers in Simulation*. 2014. Nov. Vol. Volume 118. Pp. 273–292.
15. *Aziz K., Durlofsky L., Tchelepi H., Gerritsen M.* Notes for petroleum reservoir simulation // *Course of the Petroleum Engineering Department*. 2005. C. 1998–1999.
16. *Chen Z., Zhang Y.* Well flow models for various numerical methods // *International Journal of Numerical Analysis & Modeling*. 2009. Vol. 6, no. 3. Pp. 375–388.
17. *Aavatsmark I., Klausen R.* Well index in reservoir simulation for slanted and slightly curved wells in 3D grids // *SPE Journal*. 2003. Vol. 8, no. 01. Pp. 41–48.
18. *King M., Mansfield M.* Flow Simulation of Geologic Models // *SPE Reservoir Evaluation and Engineering*. 1999. Vol. 2, no. 04.
19. *Garanzha V. A., Konshin V. N., Lyons S. L., Papavassiliou D. V., [et al.]*. Validation of Non-darcy Well Models Using Direct Numerical Simulation // *Numerical Treatment of Multiphase Flows in Porous Media* / ed. by Z. Chen, R. E. Ewing, Z.-C. Shi. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2000. Pp. 156–169.

20. *Wolfsteiner C., Durlofsky L., Khalid A.* Approximate model for productivity of nonconventional wells in heterogeneous reservoirs // *SPE Journal*. 2000. June. Vol. 5. Pp. 218–226.
21. *Галанин М. П., Лазарева С. А., Савенков Е. Б.* Численное исследование метода конечных суперэлементов на примере решения задачи о скважине для уравнения Лапласа // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2005. № 10. С. 61–66.
22. *Лаевский Ю. М.* Задача о скважинах для стационарного уравнения диффузии // *Сибирский Журнал Вычислительной математики*. 2010. Т. 13, № 2. С. 123–142.
23. *Воронин К. В., Григорьев А. В., Лаевский Ю. М.* Об одном подходе к моделированию скважин // *Сибирский Журнал Вычислительной математики*. 2017. Т. 20, № 2. С. 145–155.
24. *Ding Y., Jeannin L.* A new methodology for singularity modelling in flow simulations in reservoir engineering // *Computational Geosciences*. 2001. No. 5. Pp. 93–119.
25. *Ding D., Jeannin L.* New numerical schemes for near-well modeling using flexible grid // *SPE Journal*. 2004. Apr. Vol. 9, no. 1. Pp. 109–121.
26. *Dotlić M., Vidović D., Pokorni B., Pušić M., [et al.]*. Second-order accurate finite volume method for well-driven flows // *Journal of Computational Physics*. 2016. Vol. 307. Pp. 460–475.
27. *Kramarenko V., Nikitin K., Vassilevski Y.* A finite volume scheme with improved well modeling in subsurface flow simulation // *Computational Geosciences*. 2017. Vol. 21, no. 5. Pp. 1023–1033.
28. *Kramarenko V., Nikitin K., Vassilevski Y.* A nonlinear correction FV scheme for near-well regions // *Finite Volumes for Complex Applications VIII - Hyperbolic, Elliptic and Parabolic Problems* / под ред. С. Cancès, P. Omnes. Cham : Springer International Publishing, 2017. С. 507–516.

29. *Nikitin K., Kramarenko V., Vassilevski Y.* Enhanced nonlinear finite volume scheme for multiphase flows // ECMOR XV - 15th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery. European Association of Geoscientists, Engineers, EAGE, 2016.
30. *Danilov A., Vassilevski Y.* A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations on conformal polyhedral meshes // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2009. Vol. 24, no. 3. Pp. 207–227.
31. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. 2nd. Philadelphia, PA, USA : Society for Industrial, Applied Mathematics, 2003.
32. *Марчук Г., Кузнецов Ю.* Итерационные методы и квадратичные функционалы. Новосибирск. Наука., 1972.
33. *Марчук Г. И., Кузнецов Ю. А.* К вопросу об оптимальных итерационных процессах // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181, № 6. С. 1331–1334.
34. *Кузнецов Ю. А.* К теории итерационных процессов // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184, № 2. С. 274–277.
35. *Lanczos C.* Solutions of systems of linear equations by minimized iterations // Journal of research of the National Bureau of Standards. 1952. Vol. 49, no. 1. Pp. 33–53.
36. *Hestenes M. R., Stiefel E.* Methods of conjugate gradients for solving linear systems // Journal of research of the National Bureau of Standards. 1952. Vol. 49. Pp. 409–436.
37. *Reid J.* The use of conjugate gradients for systems of linear equations possessing “Property A” // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1972. Vol. 9, no. 2. Pp. 325–332.
38. *Van der Vorst H. A.* Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. 1992. Vol. 13, no. 2. Pp. 631–644.

39. *Paige C., Saunders M.* Solution of sparse indefinite systems of linear equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1975. Vol. 12, no. 4. Pp. 617–629.
40. *Saad Y., Schultz M.* GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. 1986. Vol. 7, no. 3. Pp. 856–869.
41. *Olshanskii M., Tyrtysnikov E.* Iterative Methods for Linear Systems / под ред. М. А. Olshanskii, Е. Е. Tyrtysnikov. Philadelphia, PA : Society for Industrial, Applied Mathematics, 2014.
42. *Бахвалов Н. С., Богачёв К. Ю., Мэтр Ж. Ф.* Эффективный алгоритм решения жестких эллиптических задач с приложениями к методу фиктивных областей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1999. Т. 39, № 6. С. 919–931.
43. *Turing A. M.* Rounding-off errors in matrix processes // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1948. Vol. 1, no. 1. Pp. 287–308.
44. *Varga R.* Factorization and normalized iterative methods. // Boundary problem in differential equations / ed. by R.E.Langer. Madison University of Wisconsin Press, 04/1960. Pp. 121–142.
45. *Булеев Н. И.* Численный метод решения двумерных и трехмерных уравнений диффузии // Математический сборник. 1960. Т. 51(93), № 2. С. 227–238.
46. *Michele B.* Preconditioning techniques for large linear systems: a survey // Journal of Computational Physics. 2002. Nov. Vol. 182, no. 2. Pp. 418–477.
47. *Wathen A. J.* Preconditioning // Acta Numerica. 2015. Vol. 24. Pp. 329–376.
48. *Wathen A. J.* Realistic eigenvalue bounds for the Galerkin mass matrix // IMA Journal of Numerical Analysis. 1987. Т. 7, № 4. С. 449–457.
49. *Graham I., Hagger M.* Unstructured additive Schwarz–conjugate gradient method for elliptic problems with highly discontinuous coefficients // SIAM Journal on Scientific Computing. 1999. Vol. 20, no. 6. Pp. 2041–2066.

50. *Meijerink J. A., Van der Vorst H. A.* An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M -matrix // *Mathematics of Computation.* 1977. Vol. 31, no. 137. Pp. 148–162.
51. *Tismenetsky M.* A new preconditioning technique for solving large sparse linear systems // *Linear Algebra and its Applications.* 1991. Vol. 154–156. Pp. 331–353.
52. *Chan T. F., Van der Vorst H. A.* Approximate and incomplete factorizations // *Parallel Numerical Algorithms* / ed. by D. E. Keyes, A. Sameh, V. Venkatakrishnan. Dordrecht : Springer Netherlands, 1997. Pp. 167–202.
53. *Kaporin I. E.* New convergence results and preconditioning strategies for the conjugate gradient method // *Numerical Linear Algebra with Applications.* 1994. Vol. 1, no. 2. Pp. 179–210.
54. *Kaporin I. E., Konshin I. N.* A parallel block overlap preconditioning with inexact submatrix inversion for linear elasticity problems // *Numerical Linear Algebra with Applications.* 2002. Vol. 9, no. 2. Pp. 141–162.
55. *Kaporin I. E.* High quality preconditioning of a general symmetric positive definite matrix based on its $U^T U + U^T R + R^T U$ -decomposition // *Numerical Linear Algebra with Applications.* 1998. Vol. 5, no. 6. Pp. 483–509.
56. *Kaporin I. E.* Scaling, reordering, and diagonal pivoting in ILU preconditionings // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling.* 2007. Vol. 22, no. 4. Pp. 341–375.
57. *Богачев К. Ю., Жаблицкий Я. В.* Метод Капорина-Коньшина параллельной реализации блочных предобусловливателей для несимметричных матриц в задачах фильтрации многокомпонентной смеси в пористой среде // *Вестник Московского Университета, Серия 1: Математика, Механика.* 2010. № 1. С. 46–52.
58. *Greenbaum A.* Iterative methods for solving linear systems. Philadelphia, PA, USA : University of Washington, Seattle, Washington, 1997.

59. INMOST – a toolkit for distributed mathematical modeling. дата обращения: 08.09.2019. URL: <http://www.inmost.org>.
60. PETSc — a suite of data structures and routines for the scalable (parallel) solution of scientific applications modeled by partial differential equations. дата обращения: 08.09.2019. URL: <http://www.mcs.anl.gov/petsc>.
61. Trilinos – platform for the solution of large-scale, complex multi-physics engineering and scientific problems. дата обращения: 08.09.2019. URL: <http://trilinos.org/>.
62. Advanced Numerical Instruments 3D. дата обращения: 08.09.2019. URL: <https://sourceforge.net/projects/ani3d/>.
63. Advanced Numerical Instruments 2D. дата обращения: 08.09.2019. URL: <https://sourceforge.net/projects/ani2d/>.
64. Федоренко Р. П. О скорости сходимости одного итерационного процесса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4, № 3. С. 559–564.
65. Бахвалов Н. С. О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1966. Т. 6, № 5. С. 861–883.
66. Bramble J. H. Multigrid Methods. Berlin : Chapman, Hall/CRC, 1993. 691 p.
67. Kuznetsov Y. A. Algebraic multigrid domain decomposition methods // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 1989. Vol. 15, no. 3/4. Pp. 247–255.
68. Boyle J., Mihajlović M., Scott J. HSL_MI20: An efficient AMG preconditioner for finite element problems in 3D // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2010. Vol. 82, no. 1. Pp. 64–98.
69. Лебедев В., Агошков В. Операторы Пуанкаре-Стеклова и их приложения в анализе. Москва. ОВМ АН СССР, 1983. С. 184.

70. *Агошков В., Лебедев В.* Операторы Пуанкаре-Стеклова и методы разделения области в вариационных задачах // Вычислительные процессы и системы. 1985. С. 173–227.
71. *Агошков В.* Операторы Пуанкаре-Стеклова и методы разделения области в конечно-мерных пространствах. Москва. ОВМ АН СССР, 1987. С. 35.
72. *Лебедев В.* Методы композиции. Москва. ОВМ АН СССР, 1986. С. 191.
73. *Мацюкин А., Непомнящих С.* Метод альтернирования Шварца в подпространстве // Известия высших учебных заведений. Математика. 1985. № 10. С. 61–66.
74. *Quarteroni A., Valli A.* Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Berlin : Oxford University Press., 1999. 376 p.
75. *Mathew T.* Domain Decomposition Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations. Berlin : Springer, 2008. 784 p.
76. The official page of Domain Decomposition Methods. дата обращения: 08.09.2019. URL: <http://www.ddm.org/>.
77. *Kuznetsov Y. A.* Two-level preconditioners with projectors for unstructured grids // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2000. Vol. 15, no. 3/4. Pp. 247–255.
78. *Kuznetsov Y. Kramarenko V.* Preconditioners with projectors for mixed hybrid finite element methods // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2017. Vol. 32, no. 1. Pp. 39–45.
79. *Крамаренко В.* Предобуславливатель с проекторами для смешанного метода конечных элементов // Современные проблемы математического моделирования. Сборник трудов XVII Всероссийской конференции-школы молодых исследователей Абрау-Дюрсо. 2017. С. 91–99.

80. *Крамаренко В., Кузнецов Ю., Коньшин И.* Параллельный блочно-диагональный переобуславливатель с проекторами для задачи диффузии // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2018. Т. 172, № 11. С. 3–11.
81. *Nikitin K., Terekhov K., Vassilevski Y.* A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations and multiphase flows // Computational Geosciences. 2014. Vol. 18, no. 3. Pp. 311–324.
82. *Сивухин Д.* Общий курс физики (в 5 томах). Том III. Электричество. Учебное пособие для вузов. Физматлит, 2018.
83. *Haitjema H. M.* Analytic element modeling of groundwater flow. ClassPak Publishing, 2005. С. 394.
84. *Самарский А., Вабищевич П.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии. УРСС, 2009.
85. *Ильин В.* Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. 345 с.
86. *Марчук Г., Агошков В.* Введение в проекционно-сеточные методы. Наука, 1981.
87. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. Мир, 1975. 543 с.
88. *Boffi D., Brezzi F., Fortin M.* Mixed Finite Element Methods and Application. Berlin : Springer, 2009. 691 p.
89. *Kuznetsov Y. A.* Approximations with piece-wise constant fluxes for diffusion equations. // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2011. Vol. 19, no. 4. Pp. 309–328.
90. *Kuznetsov Y. A.* Matrix analysis of mixed finite element methods for the diffusion equation. // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2005. Vol. 20, no. 3. Pp. 263–281.

91. Кластер ИВМ РАН. дата обращения: 08.09.2019. URL: <http://cluster2.inm.ras.ru>.
92. *Василевский Ю., Коньшин И., Копытов Г., Терехов К.* INMOST – программная платформа и графическая среда для разработки параллельных численных моделей на сетках общего вида. Moscow : Издательство Московского университета, 2013.
93. *Dobrowolski M.* On Finite Difference Schemes for Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients // *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2013. Vol. 13, no. 3. Pp. 281–289.

Список рисунков

1.1	Два представления для вектора конормали $\ell_1 = -\ell_2 = \mathbb{D} \cdot \mathbf{n}_f$ в двумерном случае.	14
1.2	Логарифмическая сингулярность для области вокруг скважины.	15
1.3	Радиальный поток из скважины.	19
1.4	Пример сетки, используемой для выведения формулы Писмана.	19
1.5	Шаблоны для расчета давления по схеме нелинейной коррекции (слева) и дополнительный шаблон для взаимодействия между ячейкой и скважиной (справа).	22
1.6	Наклонная скважина в анизотропной среде.	26
1.7	Поток от бесконечно мало части сегмента скважины.	27
1.8	Решение для нелинейной двухточечной схемы с подстановкой аналитического потока из скважины.	31
1.9	Ошибка нелинейной монотонной схемы метода конечных объемов (слева) и схем с нелинейной коррекцией около скважины (справа) на треугольно–призматической сетке.	32
1.10	Решение для НК-схемы со схемой учета скважины в дискретизации на неортогональной сетке, $100/66 = h$	33
1.11	Поле ошибки для НМД-схемы конечных объемов (слева) и НК-схемы со схемой учета скважины в дискретизации (справа) на неортогональной сетке $67 \times 67 \times 1$	34
1.12	Решение для НК-схемы для сдвинутой скважины на кубической сетке.	35
1.13	Аналитическое решение, полученное при помощи НК-схемы в методе конечных объемов на гексагональной призматической сетке при $\delta = 0.5$	36

1.14	Аналитическое решение (сверху) и ошибки решения НМД-схемы (внизу слева) и НК-схемы (снизу справа) для анизотропного случая $d_y/d_x = 10000$ на гексаэдральной сетке $67 \times 67 \times 1$	39
1.15	Ошибка для решения для угла наклона $\alpha = 60^\circ$ для НМД-схемы (вверху) и НК-схемы (внизу). Трехмерный изотропный случай для наклонной скважины.	40
1.16	Аналитическое решение при угле наклона $\alpha = 60^\circ$ для трехмерного изотропного случая с 10 слоями и наклонной скважиной, $\mathbb{D} = \text{diag}(10,100,1)$	40
1.17	Ошибка решения для угла $\alpha = 60^\circ$ для НМД-схемы (сверху) и НК-схемы (снизу). Трехмерный случай с 10 вертикальными слоями для наклонной скважины, $\mathbb{D} = \text{diag}(10,100,1)$	41
1.18	Аналитическое решение для НМД-схемы (вверху) и НК-схемы (внизу).	42
1.19	Аналитическое решение для случая 2 скважин.	44
1.20	Относительные ошибки для решения НМД-схемы и метода Писмана (сверху) и для НК-схемы (снизу) в логарифмической шкале. Сетка размером $134 \times 67 \times 1$	45
2.1	Пример шахматного распределения.	63
2.2	Область Ω , разбитая на подобласти $E_k, k = \overline{1,m}, m = 16$	65
2.3	Пример распределения включений с коэффициентом диффузии, выбранным случайным образом из интервала $[1; 10^6]$	71

Список таблиц

1	Относительная ошибка решения для треугольных неструктурированных сеток.	32
2	Относительная ошибка решения для неортогональных гексаэдральных ячеек.	34
3	Ошибки в потоке и решении для НМД-схемы и для НК-схемы на равномерной кубической сетке $33 \times 33 \times 1$ при различных значениях параметра δ	35
4	Ошибка в решении на гексагональной призматической сетке $\delta = 0.5$	37
5	Ошибки потока и решения для НМД-схемы и для НК-схемы для анизотропного коэффициента диффузии и гексаэдральной сетки $67 \times 67 \times 1$	37
6	Ошибки потока и решения для НМД-схемы и для НК-схемы в методе конечных объемов для трехмерного случая с 10 слоями и наклонной скважиной.	40
7	Ошибка решения для НМД-схемы и НК-схемы и ошибка потока для НК-схемы для трехмерного случая с 10 слоями и наклонной скважиной, $\mathbb{D} = \text{diag}(10,100,1)$	41
8	Ошибки решения для НМД-схемы и НК-схемы для частично перфорированной скважины.	43
9	Ошибки решения и потоков q_1 и q_2 для случая двух скважин.	45
10	Поток и относительная ошибка в решении для эксперимента с 2 скважинами для НК-схемы в случае использования ее в областях разного радиуса вокруг скважин, кубическая сетка $134 \times 67 \times 1$	46
11	Сравнение количества итераций n_{it} с предобуславливателем Якоби (ПЯ) и двухуровневым предобуславливателем (ДП).	66

- 12 Сравнение сходимости и времени решения t_{sol} с предобуславливателем Якоби (ПЯ) и двухуровневым предобуславливателем (ДП). 67
- 13 Сравнение количества итераций и времени решения для предобуславливателя Якоби (ПЯ), двухуровневого предобуславливателя (ДП) и блочно-двухуровневого предобуславливателя (БДП). 75
- 14 Сравнение сходимости для предобуславливателей. Количество подобластей $m = 32 \times 32$, размер подобласти $n = 2 \times 2$, количество неизвестных $N_A = 16129$ 76
- 15 Сравнение сходимости для предобуславливателей. Количество подобластей $m = 64 \times 64$, размер подобласти $n = 2 \times 2$, количество неизвестных $N_A = 65025$ 76
- 16 Сравнение сходимости для предобуславливателей. Количество подобластей $m = 128 \times 128$, размер подобласти $n = 2 \times 2$, количество неизвестных $N_A = 261121$ 76
- 17 Сравнение сходимости для предобуславливателей. Количество подобластей $m = 32 \times 32$, размер подобласти $n = 4 \times 4$, количество неизвестных $N_A = 65025$ 76
- 18 Сравнение сходимости для предобуславливателей. Количество подобластей $m = 64 \times 64$, размер подобласти $n = 4 \times 4$, количество неизвестных $N_A = 261121$ 77
- 19 Сравнение сходимости для предобуславливателей. Количество подобластей $m = 128 \times 128$, размер подобласти $n = 4 \times 4$, количество неизвестных $N_A = 1046529$ 77
- 20 Сравнение сходимости для предобуславливателей. Количество подобластей $m = 32 \times 32$, размер подобласти $n = 8 \times 8$, количество неизвестных $N_A = 261121$ 77

- 21 Сравнение сходимости для предобуславливателей. Количество подобластей $m = 64 \times 64$, размер подобласти $n = 8 \times 8$, количество неизвестных $N_A = 1046529$ 77
- 22 Сравнение сходимости для предобуславливателей. Количество подобластей $m = 128 \times 128$, размер подобласти $n = 8 \times 8$, количество неизвестных $N_A = 4190209$ 78
- 23 Зависимость скорости решения задачи от количества процессоров для разных предобуславливателей. $d_s = 10^4$, количество подобластей $m = 64 \times 64$, размер подобласти $n = 8 \times 8$, количество неизвестных $N_A = 1046529$ 78
- 24 Зависимость скорости решения задачи от количества процессоров для разных предобуславливателей. $d_s \in [1; 10^6]$, количество подобластей $m = 128 \times 128$, размер подобласти $n = 8 \times 8$, количество неизвестных $N_A = 4190209$ 78