На правах рукописи

Смолькин Евгений Юрьевич

Нелинейные задачи на собственные значения, описывающие распространение TE- и TM-волн в двухслойных цилиндрических диэлектрических волноводах

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Пенза — 2015

Работа выполнена на кафедре математики и суперкомпьютерного моделирования Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Пензенский государственный университет».

Научный руководитель:	**Смирнов Юрий Геннадьевич**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математика и суперкомпьютерное моделирование» ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет»
Официальные оппоненты:	**Ильинский Анатолий Серафимович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносов» (г. Москва), профессор кафедры «Математическая физика», заведующий лабораторией вычислительной электродинамики;
	Карчевский Евгений Михайлович, доктор физико-математических наук, ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» (г. Казань), профессор кафедры «Прикладная математика»;
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики» (МГТУ МИРЭА) (г. Москва)

Защита состоится 25 марта 2015 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 002.045.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт вычислительной математики» Российской академии наук (ИВМ РАН), расположенном по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН «Институт вычислительной математики» Российской академии наук http://www.inm.ras.ru.

Автореферат разослан «__» февраля 2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета **Бочаров Г. А.**

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена разработке методов решения нелинейных задач сопряжения на собственные значения, описывающих распространение ТЕ- и ТМ-волн в двухслойных диэлектрических волноводах кругового сечения, заполненных средой с нелинейностью, выраженной законом Керра, где диэлектрическая проницаемость среды *нелинейно зависит от интенсивности падающего поля и содержит в себе слагаемое, определяющее неоднородность среды.* Доказаны теоремы о существовании и локализации собственных значений в рассматриваемых нелинейных задачах. Для численного решения задачи предложены два метода: итерационный алгоритм, а также метод, основанный на решении вспомогательной задачи Коши (метод пристрелки). Доказана сходимость предложенных численных методов. С помощью разработанного комплекса программ получены и представлены расчеты постоянных распространения и полей для нелинейных волноводов с различными параметрами.

Актуальность темы

Задачи об исследовании спектра собственных волн различных волноведущих систем в электродинамике интенсивно изучаются в течение последних десятилетий и остаются актуальными в связи с их широким практическим применением, например, в современной микроэлектронике, оптике, лазерной технике. Необходимость теоретического исследования существования и свойств собственных волн диктуется практической потребностью разработки и расчета оптических устройств и устройств СВЧ. Успехи в разработке данного направления электродинамики привели к построению различных классов волноведущих структур.

Распространение электромагнитных волн в волноводах с заполнением линейной однородной средой (то есть когда диэлектрическая и магнитная проницаемости постоянны) является классической и хорошо изученной задачей.

По-видимому впервые задачи распространения поляризованных электромагнитных волн в средах с керровской нелинейностью были рассмотрены в работе П. Р. Елеонского, Л. Г. Оганесьянца и В. П. Силина[1]. В этой работе исходная векторная задача для системы уравнений Максвелла была сведена к анализу системы обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент поля. Авторы рассматривали поверхностные распространяющиеся волны. Аналитические решения для системы дифференциальных уравнений (выраженные через эллиптические функции) для задачи о ТЕ-волнах, распространяющихся в слое, были получены H. W. Schürmann, В. С. Серовым, Ю. В. Шестопаловым[2], а также A. D. Boardman[3]. Аналогичные задачи для ТЕ-волн в круглом

[1] **Eleonskii P. N., Oganes'yants L. G., Silin V. P.** Cylindrical Nonlinear Waveguides // Soviet Physics Jetp, 1972, Vol. 35, № 1, p. 44–47.

[2] **Schürmann H. W., Serov V. S., Shestopalov Yu. V.** TE-polarized waves guided by a lossless nonlinear three-layer structure // Phys. Rev. E, 1998, Vol. 58, № 1, p. 1040–1050.

[3] **Boardman A. D., Egan P., Lederer F., Langbein U., and Mihalache D.** Third-order nonlinear electromagnetic TE and TM guided waves, in Nonlinear Surface Electromagnetic Phenomena, Ed. by Ponath H. E. and Stegeman G. I. North Holland, Amsterdam, 1991, p. 73–287.

цилиндрическом однородном нелинейном волноводе были рассмотрены Ю. Г. Смирновым, С. Н. Куприяновой[4] и H. W. Schürmann, Ю. Г. Смирновым, Ю. В. Шестопаловым[5]. В этих работах были получены достаточные условия существования поверхностных волн, а также представлены некоторые численные результаты. Задача о распространении ТМ-волн в слое рассматривалась в работе Д. В. Валовика, Ю. Г. Смирнова[6], а задача о распространении ТМ-волн в круглом волноводе исследовалась Ю. Г. Смирновым, Э. А. Хорошевой[7]. Наличие нелинейности в случае однородных волноводов приводит к появлению принципиально новых режимов распространения электромагнитных волн. Важно отметить, что эти нелинейные эффекты наблюдаются в той области изменения спектрального параметра, в которой не существует решения соответствующей линейной задачи.

Задачи о распространении собственных электромагнитных волн в нелинейных и неоднородных волноводах являются более сложными. Поскольку многие материалы, используемые при конструировании волноводов для электромагнитных волн, являются неоднородными, а при увеличении интенсивности электромагнитных волн, распространяющихся по таким волноводам, начинают сказываться и нелинейные эффекты, то это указывает на практическую актуальность исследования нелинейных неоднородных волноведущих структур. С математической точки зрения это нелинейные задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла в неоднородной области, общих методов исследования которых пока не разработано.

Цели работы:

– исследовать задачи о распространении ТМ- и ТЕ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном неоднородном слое с произвольной неоднородностью;
– разработать метод исследования нелинейных задач сопряжения на собственные значения, описывающие распространение ТЕ- и ТМ-волн и исследовать разрешимость рассматриваемых нелинейных задач;
– разработать численные методы нахождения приближенных собственных значений рассматриваемых задач;

[4]**Смирнов Ю. Г., Куприянова С. Н.** Распространение электромагнитных волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2004, Т. 44, № 10, с. 1850–1860.

[5]**Schürmann H. W., Smirnov Yu. G., Shestopalov Yu. V.** Propagation of TE-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides // Phys. Rev. E, 2005, Vol. 71, № 1, p. 016614-1–016614-10

[6]**Валовик Д. В., Смирнов Ю. Г.** О распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2008, Т. 48, № 12, с. 2186–2194.

[7]**Смирнов Ю. Г., Хорошева Э. А.** О разрешимости нелинейной краевой задачи на собственные значения для распространяющихся ТМ-волн в круглом нелинейном волноводе // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, 2010, № 3 (15), с. 55–70.

– разработать комплекс программ, реализующих численные методы нахождения приближенных собственных значений (постоянных распространения) и собственных функций (полей) для рассматриваемых задач.

Методы исследования

Проведенные исследования опираются на: методы решения краевых задач на собственные значения для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений; методы теории интегральных уравнений; методы функционального анализа; численные методы исследования задач на собственные значения.

Научная новизна:

– доказаны теоремы существования и локализации собственных значений (постоянных распространения волновода) для рассматриваемых нелинейных задач сопряжения;
– разработан численный метод решения задач сопряжения на собственные значения;
– выполнены расчеты для ряда нелинейных волноводов.

Основные результаты диссертационной работы:

1. Исходные задачи о распространении TE- и TM-волн в двухслойных диэлектрических волноводах кругового сечения, заполненных неоднородной нелинейной средой с нелинейностью, выраженной законом Керра, сведены к исследованию задач сопряжения на собственные значения для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Для рассматриваемых задач получены достаточные условия существования и локализации либо одного, либо нескольких собственных значений.
3. Для обеих задач предложены и обоснованы численные методы нахождения приближенных собственных значений и собственных функций. Доказана сходимость предложенных численных методов.
4. Предложенные численные алгоритмы реализованы в виде комплекса программ и тестированы на модельных задачах. Выполнены расчеты приближенных собственных значений и собственных функций для конкретных волноведущих структур.

Теоретическая и практическая значимость

С теоретической точки зрения разработаны методы исследования нелинейных задач сопряжения на собственные значения в многослойных нелинейных неоднородных волноведущих структурах с произвольными неоднородностями в слоях.

Предложенный в рассматриваемой работе метод нахождения приближенных собственных значений может быть использован для практического нахождения постоянных распространения волноведущих структур. Метод эффективен и позволяет находить приближенные собственные значения с любой заданной точностью.

Обоснованность и достоверность результатов

Представленные в диссертации результаты имеют строгое математическое обоснование, численный метод также обоснован и тестирован на модельных задачах.

Апробация работы

Основные результаты работы доложены на научных конференциях и семинарах:

– Международной конференции «14th Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET2012)» (Украина, Харьков, 2012);
– Международной конференции «Days on Diffraction – 2013»(Россия, Санкт-Петербург, 2013);
– Международной конференции «PIERS« (Швеция, Стокгольм, 2013);
– Научном семинаре «Computational Applied Mathematics (CAM) Seminar» (Швеция, Гетеборг, 2014);
– Международной конференции «Days on Diffraction – 2014» (Россия, Санкт-Петербург, 2014);
– Международной конференции «PIERS» (Китай, Гуанчжоу, 2014);
– Научном семинаре «Вычислительная математика и приложения» ИВМ РАН (Россия, Москва, 2014).

Результаты, полученные в диссертации, включены в отчеты НИР и грантов, выполненных на кафедре математики и суперкомпьютерного моделирования ФГБОУ ВПО«Пензенский государственный университет»: гранты РФФИ (№ 12-07-97010-р_А, 2012-2013; № 11-07-00330-А, 2011–2012), ФЦП («Развитие потенциала высшей школы», № 2.1.1/1647, 2009–2011; «Кадры», № 14.B37.21.1950, 2012–2013).

Личный вклад автора

Постановка задачи о распространяющихся поляризованных электромагнитных волнах принадлежит Ю. Г. Смирнову и Д. В. Валовику. Исследование вопроса разрешимости нелинейной задачи на собственные значения, формулировка и доказательство теоремы о существовании и локализации собственных значений (Глава 1, 2), разработка численного метода (Глава 3) и численные результаты (Глава 4) принадлежат автору.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в восьми работах, в том числе четыре опубликованы в журналах, входящих в перечень изданий, рекомендованных ВАК РФ.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы, содержащего 54 наименования. Полный объем диссертации 119 страниц текста с 20 рисунками.

Содержание диссертации

Во **введении** приводится обзор работ по теме диссертации и вопросам, примыкающим к ней; обосновывается актуальность темы, формулируется цель работы, излагаются краткое содержание и основные результаты диссертации.

В **главе 1** исследуется задача о распространении поверхностных электромагнитных ТЕ-волн в неоднородном двухслойном диэлектрическом волноводе кругового сечения, заполненного средой с нелинейностью, выраженной законом Керра.

Рассматриваются монохроматические поверхностные электромагнитные ТЕ-волны, распространяющиеся в изотропном немагнитном диэлектрическом волноводе

$$\Sigma := \{(\rho,\varphi,z) : 0 \le \rho < R_1, 0 \le \varphi < 2\pi\} \cup \\ \cup \{(\rho,\varphi,z) : R_1 \le \rho \le R_2, 0 \le \varphi < 2\pi\},$$

расположенном в пространстве $\mathbb{R}^3$ с цилиндрической системой координат $O\rho\varphi z$ с образующей, параллельной оси Oz. Пространство заполнено изотропной средой без источников с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_3 \equiv \mathrm{const}$, где ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Доказано, что времязависимая задача сводится к уравнениям для комплексных амплитуд.

Электромагнитное поле $\mathbf{E}e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{H}e^{-i\omega t}$ (где $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ – комплексные амплитуды) удовлетворяет уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H}, \end{aligned} \tag{1}$$

где ω – частота электромагнитного поля; условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границах раздела сред $\rho = R_1$, $\rho = R_2$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает, как $O(|x|^{-1})$ при $\rho \to \infty$ в области $\rho > R_2$.

Диэлектрическая проницаемость во всем пространстве имеет вид $\varepsilon = \widetilde{\varepsilon}\varepsilon_0$, где

$$\widetilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \le \rho < R_1, \\ \varepsilon_2(\rho) + \widetilde{\alpha}\,|\mathbf{E}|^2, & R_1 \le \rho \le R_2, \\ \varepsilon_3, & \rho > R_2, \end{cases} \tag{2}$$

ε_1, ε_3 – вещественные положительные постоянные,

$$|\mathbf{E}|^2 = \left|\left(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_\rho\right)\right|^2 + \left|\left(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_\varphi\right)\right|^2 + \left|\left(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_z\right)\right|^2,$$

где $\mathbf{e}_k$ – ортонормированный вектор в направлении оси k; $(\cdot,\cdot)$ – евклидово скалярное произведение векторов и

$$0 < \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \varepsilon_2^* = \min_{\rho\in[R_1,R_2]} \varepsilon_2(\rho).$$

Среда предполагается изотропной и немагнитной. Во всем пространстве полагаем $\mu = \mu_0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Монохроматические ТЕ-волны имеют вид

$$\mathbf{E}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t}(0, E_\varphi, 0)^T, \ \mathbf{H}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t}(H_\rho, 0, H_z)^T.$$

Предположим, что волны, распространяющиеся вдоль образующей Oz волновода Σ, гармонически зависят от z и не зависит от φ. Таким образом, компоненты комплексных амплитуд имеют представление

$$E_{\varphi} = \mathrm{E}_{\varphi}(\rho)\, e^{i\gamma z}, H_{\rho} = \mathrm{H}_{\rho}(\rho)\, e^{i\gamma z}, H_{z} = \mathrm{H}_{z}(\rho)\, e^{i\gamma z}, \tag{3}$$

где γ – неизвестный вещественный спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

Подставляя выражения (3) в систему (1) и обозначив $u(\rho;\gamma) := \mathrm{E}_{\varphi}(\rho;\gamma)$ и $k_0^2 := \omega^2\mu_0\varepsilon_0$, получаем уравнение

$$\left(\rho^{-1}(\rho u)'\right)' + \left(k_0^2\widetilde{\varepsilon} - \gamma^2\right) u = 0, \tag{4}$$

где $\widetilde{\varepsilon}$ определятся формулой (2).

Считаем, что функция u дифференцируема так, что

$$u \in C^1[0,+\infty) \cap C^2[0,R_1) \cap C^2(R_1,R_2) \cap C^2(R_2,+\infty). \tag{5}$$

Считаем, что $\gamma^2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$.

Решения уравнения (4) в областях $0 \le \rho < R_1$ и $\rho > R_2$ с учетом условия ограниченности поля во всякой конечной области и условия на бесконечности соответственно имеют вид

$$u = C_1 I_1(k_1\rho), \ \ \rho < R_1, \tag{6}$$

$$u = C_2 K_1(k_3\rho), \ \ \rho > R_2, \tag{7}$$

где $k_1^2 := \gamma^2 - k_0^2\varepsilon_1, k_3^2 := \gamma^2 - k_0^2\varepsilon_3$.

В оболочке волновода $R_1 \le \rho \le R_2$ имеем $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon_2(\rho) + \widetilde{\alpha} u^2(\rho)$. Тогда из (4) получаем нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$u'' + \rho^{-1}u' - \rho^{-2}u + k_2^2(\rho)\, u + \alpha u^3 = 0, \tag{8}$$

где $\alpha := \widetilde{\alpha} k_0^2$, $k_2^2(\rho) := k_0^2\varepsilon_2(\rho) - \gamma^2$.

Из условий сопряжения для компонент электромагнитного поля получаем следующие условия сопряжения для функций $u(\rho)$ и $u'(\rho)$:

$$[u]|_{\rho=R_1} = [u]|_{\rho=R_2} = 0, \quad [u']|_{\rho=R_1} = [u']|_{\rho=R_2} = 0, \tag{9}$$

где $[v]|_{\rho=s} = \lim\limits_{\rho\to s-0} v(\rho) - \lim\limits_{\rho\to s+0} v(\rho)$ – скачок предельных значений функции в точке s, определенный в силу (5).

Задача P_E: требуется доказать существование вещественных значений γ таких, что при заданном значении $C_1 \ne 0$ (или $C_2 \ne 0$) существует ненулевая функция $u(\rho;\gamma)$, которая при $\rho < R_1$ и $\rho > R_2$ определяется формулами (6), (7) *соответственно, а при $R_1 \le \rho \le R_2$ является решением уравнения* (8)*, причем определенная таким образом при $\rho \in [0,+\infty)$ функция $u(\rho;\gamma)$ удовлетворяет условиям сопряжения* (9).

Значения γ, являющиеся решениями задачи P_E, называются собственными значениями, а соответствующие им функции $u(\rho;\gamma)$ – собственными функциями.

Пусть $\lambda := \gamma^2$ и пусть $\lambda_n, v_n(\rho)$ – полная система ортонормированных (вещественных) собственных чисел и собственных функций этой краевой задачи:

$$\begin{gathered}\rho v_n'' + v_n' + \left(k_0^2 \varepsilon_2(\rho)\rho - \rho^{-1}\right) v_n = \lambda_n \rho v_n, R_1 \le \rho \le R_2, \\ v_n'\left|_{\rho=R_1} = v_n'\right|_{\rho=R_2} = 0\ .\end{gathered} \tag{10}$$

Эта система существует, так как $\rho \in C^1[R_1, R_2], k_0^2 \varepsilon_2(\rho)\rho - \rho^{-1} \in C^1[R_1, R_2]$. Тогда при $\lambda \neq \lambda_n$ краевая задача $L_E u = 0$, $u'\left|_{\rho=R_1} = u'\right|_{\rho=R_2} = 0$, где $L_E = \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{d}{d\rho}\right) + \left(k_2^2(\rho)\rho - \rho^{-1}\right)$, имеет только тривиальное решение. Это значит, что при $\lambda \neq \lambda_n$ существует и единственна функция Грина $G_E(\rho, s; \lambda)$ следующей задачи:

$$L_E G_E = -\delta(\rho - s), \partial_\rho G_E\left|_{\rho=R_1} = \partial_\rho G_E\right|_{\rho=R_2} = 0 \quad (R_1 \le s \le R_2). \tag{11}$$

Функция Грина $G_E(\rho, s; \lambda)$ в окрестности собственного значения λ_i может быть представлена в виде

$$G_E(\rho, s; \lambda) = -\frac{v_i(\rho) v_i(s)}{\lambda - \lambda_i} + G_1(\rho, s; \lambda), \tag{12}$$

где $G_1(\rho, s; \lambda)$ регулярна в окрестности точки λ_i, а $\lambda_n, v_n(\rho)$ – уже упомянутые системы собственных чисел и собственных функций.

Все собственные значения рассматриваемой краевой задачи (10) являются простыми.

Используя вторую формулу Грина, получаем интегральное представление решения $u(s)$ уравнения (8) при $s \in [R_1, R_2]$:

$$u(s) = \alpha \int\limits_{R_1}^{R_2} G_E(\rho, s)\rho u^3(\rho)\, d\rho + f(s), \tag{13}$$

где $f(s) = R_2 u'(R_2 - 0) G_E(R_2, s) - R_1 u'(R_1 + 0) G_E(R_1, s)$.

Из свойств функции Грина ясно, что $f \in C[R_1, R_2]$. Считаем, что $\lambda \neq \lambda_n$.

Утверждение 1. *Если* $\alpha \le A^2$, *где* $A = \frac{2}{3}\frac{1}{\|f\|\sqrt{3\|\mathrm{N}_1\|}}$, *и* $\|\mathrm{N}_1\| = \max\limits_{s \in [R_1, R_2]} \int\limits_{R_1}^{R_2} |\rho G_E(\rho, s)|\, d\rho$, $\|f\| = \max\limits_{s \in [R_1, R_2]} |f(s)|$, *то уравнение* (13) *имеет единственное решение* u, *являющееся непрерывной функцией:* $u \in C[R_1, R_2]$ *такое, что* $\|u\| \le r_*$, *где* $r_* = -2\sqrt{\frac{1}{3\|\mathrm{N}\|}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\|f\|\sqrt{\|\mathrm{N}\|}\right) - \frac{2\pi}{3}\right)$ *и* $\|\mathrm{N}\| = \alpha\|\mathrm{N}_1\|$.

Отметим, что $A > 0$ и не зависит от α.

Теорема 1. *Пусть ядро* N *и правая часть* f *интегрального уравнения* (13) *непрерывно зависят от параметра* $\lambda \in \Lambda_0$, $N(\rho, s; \lambda) \subset C([R_1, R_2] \times [R_1, R_2] \times \Lambda_0)$, $f(s, \lambda) \subset C([R_1, R_2] \times \Lambda_0)$, *на некотором отрезке* Λ_0 *вещественной числовой оси. Пусть также*

$$0 < \|f(\lambda)\| < \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3\|\mathrm{N}(\lambda)\|}}. \tag{14}$$

Тогда решения $u(\rho;\lambda)$ *уравнения* (13) *при* $\lambda \in \Lambda_0$ *существуют, единственны и непрерывно зависят от параметра* λ, $u(\rho;\lambda) \subset C\left([R_1,R_2]\times\Lambda_0\right)$.

Из уравнения (13) при $s = R_1+0$ и $s = R_2-0$ получаем систему

$$\begin{cases} u\left(R_1+0\right) = \alpha \int\limits_{R_1}^{R_2} G_E\left(\rho,R_1\right)\rho u^3\left(\rho\right)d\rho + \\ \qquad\qquad + R_2 u'\left(R_2-0\right)G_E\left(R_2,R_1\right) - R_1 u'\left(R_1+0\right)G_E\left(R_1,R_1\right), \\ \\ u\left(R_2-0\right) = \alpha \int\limits_{R_1}^{R_2} G_E\left(\rho,R_2\right)\rho u^3\left(\rho\right)d\rho + \\ \qquad\qquad + R_2 u'\left(R_2-0\right)G_E\left(R_2,R_2\right) - R_1 u'\left(R_1+0\right)G_E\left(R_1,R_2\right). \end{cases}$$

Используя условия сопряжения (9) и принимая во внимание решения (6), (7), из последнего получаем дисперсионное уравнение в форме

$$C_1 g\left(\lambda\right) = \alpha P\left(\lambda\right), \tag{15}$$

где

$$g\left(\lambda\right) = \Big(I_1\left(k_1R_1\right) + R_1k_1I_1'\left(k_1R_1\right)G_E\left(R_1,R_1\right)\Big)\times \\ \times\Big(K_1\left(k_3R_2\right) - R_2k_3K_1'\left(k_3R_2\right)G_E\left(R_2,R_2\right)\Big) + \\ + R_1R_2k_1k_3I_1'\left(k_1R_1\right)K_1'\left(k_3R_2\right)G_E\left(R_1,R_2\right)G_E\left(R_2,R_1\right)$$

и

$$P\left(\lambda\right) = \Big(K_1\left(k_3R_2\right) - R_2k_3K_1'\left(k_3R_2\right)G_E\left(R_2,R_2\right)\Big)\times \\ \times\int\limits_{R_1}^{R_2} G_E\left(\rho,R_1;\lambda\right)\rho u^3\left(\rho\right)d\rho + \\ + R_2k_3K_1'\left(k_3R_2\right)G_E\left(R_2,R_1\right)\int\limits_{R_1}^{R_2} G_E\left(\rho,R_2;\lambda\right)\rho u^3\left(\rho\right)d\rho.$$

Нули функции $\Phi(\lambda) \equiv C_1g\left(\lambda\right) - \alpha P\left(\lambda\right)$ – это значения λ, для которых существует нетривиальное решение задачи P_E. То есть, если $\lambda = \widetilde{\lambda}$ таково, что $\Phi\big(\widetilde{\lambda}\big) = 0$, то собственные значения рассматриваемой задачи определяются из уравнения $\widetilde{\lambda} = \gamma^2$.

Ответ на вопрос о существовании решений дисперсионного уравнения для линейной задачи дает следующее

Утверждение 2. *Пусть* $\min\left(\varepsilon_1,\varepsilon_3\right) \geq \varepsilon_0,\ \max(\varepsilon_1,\varepsilon_3) < \varepsilon_2^* = \min\limits_{\rho\in[R_1,R_2]}\varepsilon_2(\rho)$ *и пусть* $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ *такие собственные значения задачи* (10), *что* $\lambda_1,\ldots,\lambda_p \in \big(\max(\varepsilon_1,\varepsilon_3),\varepsilon_2^*\big)$, *тогда задача* P_E *при* $\alpha = 0$ *имеет по крайней мере* $(p-1)$ *решений* (*собственных значений*) $\widetilde{\gamma}_j$, $\quad j=\overline{1,p-1}$ *таких, что* $\widetilde{\gamma}_j^2 \in \big(\lambda_j,\lambda_{j+1}\big)$, $\quad j=\overline{1,p-1}$.

Замечание 1. Всегда можно подобрать толщину $R_2 - R_1$ оболочки волновода Σ так, что линейная задача будет иметь решение.

Основным результатом первой главы является следующая

Теорема 2. *Пусть числа* ε_1, ε_3, $\varepsilon_2^* = \min\limits_{\rho\in[R_1,R_2]} \varepsilon_2(\rho)$ *удовлетворяют условиям* $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \geq \varepsilon_0$, $\varepsilon_2^* > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) > 0$ *и существуют целые числа* $k \geq 1$ *и* $l \geq 0$, *что справедливо* $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \lambda_l < \lambda_{l+1} < \ldots < \lambda_{l+k-1} < \lambda_{l+k} < \varepsilon_2^*$, *где* λ_i *– собственные значения задачи* (10). *Тогда найдется число* $\alpha_0 > 0$ *такое, что для всякого* $\alpha \leq \alpha_0$ *существует по крайней мере* k *собственных значений* γ_i *задачи* P_E, *причем* $\gamma_i \in \left(\sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1}, \sqrt{\lambda_i} - \delta_i\right)$, $i = \overline{1,k}$.

В теореме 2 δ_i являются произвольными достаточно малыми и положительными числами.

В **главе 2** рассматривается задача о распространении поверхностных электромагнитных ТМ-волн в неоднородном двухслойном диэлектрическом волноводе кругового сечения, заполненного средой с нелинейностью, выраженной законом Керра.

Постановка рассматриваемой в этой главе задачи почти дословно совпадает с постановкой аналогичной задачи в главе 1. Отличие заключается в типе волн и условиях сопряжения.

Монохроматические ТМ-волны имеют вид

$$\mathbf{E}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t}\left(E_\rho, 0, E_z\right)^T, \mathbf{H}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t}\left(0, H_\varphi, 0\right)^T.$$

Предположим, что волны, распространяющиеся вдоль образующей Oz волновода Σ, гармонически зависят от z и не зависят от φ. Таким образом, компоненты комплексных амплитуд имеют представление

$$E_\rho = \mathrm{E}_\rho(\rho)\, e^{i\gamma z}, E_z = \mathrm{E}_z(\rho)\, e^{i\gamma z}, H_\varphi = \mathrm{H}_\varphi(\rho)\, e^{i\gamma z}, \tag{16}$$

где γ – неизвестный вещественный спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

Подставляя компоненты (16) в (1) и обозначив $u_1(\rho,\gamma) := \mathrm{E}_\rho(\rho,\gamma)$, $u_2(\rho,\gamma) := i\mathrm{E}_z(\rho,\gamma)$, получаем систему

$$\begin{cases} \gamma u_2' + \left(\gamma^2 - k_0^2\widetilde{\varepsilon}\right) u_1 = 0, \\ -\gamma\frac{1}{\rho}\left(\rho u_1\right)' - \frac{1}{\rho}\left(\rho u_2'\right)' - k_0^2\widetilde{\varepsilon} u_2 = 0, \end{cases} \tag{17}$$

где $\widetilde{\varepsilon}$ определятся формулой (2).

Считаем, что функции u_1, u_2 дифференцируемы так, что

$$u_1 \in C[0,R_1] \cap C[R_1,R_2] \cap C[R_2,+\infty) \cap \\ \cap C^1[0,R_1] \cap C^1[R_1,R_2] \cap C^1[R_2,+\infty), \tag{18}$$

$$u_2 \in C[0,R_1] \cap C[R_1,R_2] \cap C[R_2,+\infty) \cap \\ \cap C^1[0,R_1] \cap C^1[R_1,R_2] \cap C^1[R_2,+\infty) \cap \\ \cap C^2(0,R_1) \cap C^2(R_1,R_2) \cap C^2(R_2,+\infty). \tag{19}$$

Считаем, что $\gamma^2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$.

Решения уравнения (17) в областях $0 \leq \rho < R_1$ и $\rho > R_2$ с учетом условия ограниченности поля во всякой конечной области и условия на бесконечности соответственно имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(\rho) = -\frac{\gamma}{k_1} C_1 I_1(k_1\rho), \\ u_2(\rho) = C_1 I_0(k_1\rho), \end{array} \right. \tag{20}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(\rho) = \frac{\gamma}{k_3} C_2 K_1(k_3\rho), \\ u_2(\rho) = C_2 K_0(k_3\rho), \end{array} \right. \tag{21}$$

где $k_1^2 := \gamma^2 - k_0^2\varepsilon_1, k_3^2 := \gamma^2 - k_0^2\varepsilon_3$.

В оболочке волновода $R_1 \le \rho \le R_2$ система (17) примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{1}{k_2^2(\rho)} \left(\gamma u_2' - \alpha f_1\right), \\ -\gamma \frac{1}{\rho} \left(\rho u_1\right)' - \frac{1}{\rho} \left(\rho u_2'\right)' - k_0^2 \varepsilon_2(\rho) u_2 = \alpha f_2, \end{array} \right. \tag{22}$$

где

$f_1 := \left(|u_1|^2 + |u_2|^2\right) u_1, f_2 := \left(|u_1|^2 + |u_2|^2\right) u_2, \alpha := \widetilde{\alpha} k_0^2, k_2^2(\rho) := k_0^2 \varepsilon_2(\rho) - \gamma^2.$

Из условий сопряжения для компонент электромагнитного поля получаем условия сопряжения для функций $u_1(\rho), u_2(\rho)$:

$$\begin{array}{l} [\gamma u_1 + u_2']|_{\rho=R_1} = 0, \quad [u_2]|_{\rho=R_1} = 0, \\ [\gamma u_1 + u_2']|_{\rho=R_2} = 0, \quad [u_2]|_{\rho=R_2} = 0. \end{array} \tag{23}$$

Задача P_M: требуется доказать существование вещественных значений γ таких, что при заданном значении $C_1 \neq 0$ (или $C_2 \neq 0$) существует ненулевые функции $u_1(\rho;\gamma), u_2(\rho;\gamma)$, которые при $\rho < R_1$ и $\rho > R_2$ определяются формулами (20), (21) *соответственно, а при $R_1 \le \rho \le R_2$ являются решением системы уравнений* (22), *причем определенные таким образом при $\rho \in [0, +\infty)$ функции $u_1(\rho;\gamma), u_2(\rho;\gamma)$ удовлетворяет условиям сопряжения* (23).

Значения γ, являющиеся решением задачи P_M, называются собственными значениями, а соответствующие им функции $u_1(\rho;\gamma), u_2(\rho;\gamma)$ – собственными функциями.

Из системы (22) получаем уравнение

$$L_M u_2 \equiv \left(\rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} u_2'\right)' + \rho\varepsilon_2(\rho) u_2 = \alpha \frac{1}{k_0^2} \left(\gamma \left(\rho \frac{f_1}{k_2^2(\rho)}\right)' - \rho f_2\right). \tag{24}$$

Пусть $\lambda := \gamma^2$ и пусть $\lambda_n, v_n(\rho)$ – полная система ортонормированных (вещественных) собственных чисел и собственных функций этой краевой задачи

$$\begin{array}{c} \left(\rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} v_n'\right)' + \rho\varepsilon_2(\rho) v_n = 0, R_1 \le \rho \le R_2, \\ v_n|_{\rho=R_1} = v_n|_{\rho=R_2} = 0\ . \end{array} \tag{25}$$

Поскольку оператор L_M имеет непрерывные коэффициенты (не обращающиеся в нуль) $\rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} \in C^1[R_1, R_2],\ \rho\varepsilon_2(\rho) \in C[R_1, R_2]$, следовательно, для уравнения $L_M u_2$ существуют два линейно независимых решения. Тогда существует функция Грина (или может быть построена обобщенная функция Грина) $G_M(\rho, s; \lambda)$ краевой задачи:

$$L_M G_M = -\delta(\rho - s), G_M|_{\rho=R_1} = G_M|_{\rho=R_2} = 0 \quad (R_1 \le s \le R_2). \tag{26}$$

Функция Грина $G_M(\rho, s; \lambda)$ в окрестности собственного значения λ_i может быть представлена в виде

$$G_M(\rho,\ s; \lambda) = -\frac{v_i(\rho)\, v_i(s)}{\lambda - \lambda_i} + G_1(\rho, s; \lambda), \tag{27}$$

где $G_1(\rho, s; \lambda)$ регулярна в окрестности точки λ_i, а $\lambda_n, v_n(\rho)$ уже упомянутые системы собственных чисел и собственных функций.

Все собственные значения краевой задачи (25) являются простыми.

Из условий сопряжения (23) и решений (20), (21) получаем

$$u_2(R_1 + 0) = C_1 I_0(k_1 R_1),\ u_2(R_2 - 0) = C_2 K_0(k_3 R_2).$$

Используя вторую формулу Грина и значения $u_2(R_1 + 0), u_2(R_2 - 0)$, получаем систему

$$\begin{cases} u_1(s) = \alpha \frac{\gamma^2}{k_2^2(s)} \int\limits_{R_1}^{R_2} \partial^2_{\rho s} G_M(\rho, s) \frac{\rho}{k_2^2(\rho)} |\mathbf{u}|^2 u_1 d\rho + \\ \qquad + \alpha \frac{\gamma}{k_2^2(s)} \int\limits_{R_1}^{R_2} \partial_s G_M(\rho, s)\, \rho\, |\mathbf{u}|^2 u_2 d\rho - \alpha \tilde{f}(s) + h_1(s), \\ u_2(s) = \alpha\gamma \int\limits_{R_1}^{R_2} \partial_\rho G_M(\rho, s) \frac{\rho}{k_2^2(\rho)} |\mathbf{u}|^2 u_1 d\rho + \\ \qquad + \alpha \int\limits_{R_1}^{R_2} G_M(\rho, s)\, \rho\, |\mathbf{u}|^2 u_2 d\rho + h_2(s), \end{cases} \tag{28}$$

где

$$\tilde{f}(s) = \frac{f_1(s)}{k_2^2(s)} \left[1 + \frac{\gamma^2}{k_0^2 \varepsilon_2(s)}\right],$$

$$h_1(s) = \gamma R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(s)\, k_2^2(R_1)} \left.\partial^2_{\rho s} G_M(\rho, s)\right|_{\rho = R_1} C_1 I_0(k_1 R_1) - \\ - \gamma R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(s)\, k_2^2(R_2)} \left.\partial^2_{\rho s} G_M(\rho, s)\right|_{\rho = R_2} C_2 K_0(k_3 R_2), \tag{29}$$

$$h_2(s) = R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} \left.\partial_\rho G_M(\rho, s)\right|_{\rho = R_1} C_1 I_0(k_1 R_1) - \\ - R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \left.\partial_\rho G_M(\rho, s)\right|_{\rho = R_2} C_2 K_0(k_3 R_2) \tag{30}$$

и $|\mathbf{u}|^2 = |u_1|^2 + |u_2|^2$

Система уравнений (28) может быть записана в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\left(|\mathbf{u}|^{\mathbf{2}}\, \mathbf{u}\right) + \mathbf{h}, \tag{31}$$

где $\mathbf{N} = \alpha(\mathbf{K} + \mathbf{J})$, и

$$\mathbf{Kg} = \int\limits_{R_1}^{R_2} \mathrm{K}(\rho, s)\, \mathbf{g}(\rho)\, d\rho, \tag{32}$$

а матрица ядер имеет вид

$$\mathrm{K}(\rho,s)=\{K_{nm}(\rho,s)\}_{n,m=1}^{2}=\rho\begin{pmatrix}\frac{\gamma^2}{k_2^2(s)}\frac{\partial_{\rho s}G_M}{k_2^2(\rho)} & \frac{\gamma}{k_2^2(s)}\partial_s G_M\\ \gamma\frac{\partial_\rho G_M}{k_2^2(\rho)} & G_M\end{pmatrix}, \tag{33}$$

где индексы у ∂ обозначают частные производные, $\mathbf{g}=(g_1,g_2)^T$; оператор

$$\mathbf{J}=-\frac{1}{k_2^2(s)}\left[1+\frac{\gamma^2}{k_0^2\varepsilon_2(s)}\right]\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \tag{34}$$

и $\mathbf{h}=(h_1,h_2)^T$ определен формулами (29),(30).

Отметим, что операторы $\mathbf{K}$, $\mathbf{J}$ являются линейными.

Будем рассматривать уравнение (31) в пространстве непрерывных функций $\mathbf{C}[R_1,R_2]=C[R_1,R_2]\times C[R_1,R_2]$ с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{C}}^2=\|u_1\|_C^2+\|u_2\|_C^2,$$

где $\|u\|_C=\max\limits_{x\in[R_1,R_2]}|u(x)|$.

Утверждение 3. *Если* $\alpha\le A^2$, *где* $A=\frac{2}{3}\frac{1}{\|\mathbf{h}\|\sqrt{3\|\mathbf{N}_1\|}}$ *и* $\|\mathbf{N}_1\|=\|\mathbf{K}+\mathbf{J}\|$, *то уравнение* (31) *имеет единственное решение в шаре* $B_{r_*}\equiv\{\mathbf{u}:\|\mathbf{u}\|\le r_*\}$, *являющееся непрерывной функцией:* $\mathbf{u}\in\mathbf{C}[R_1,\,R_2],\|\mathbf{u}\|\le r_*$, *где* $r_*=-2\sqrt{\frac{1}{3\|\mathrm{N}\|}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\|f\|\sqrt{\|\mathrm{N}\|}\right)-\frac{2\pi}{3}\right)$.

Теорема 3. *Пусть ядра матричного оператора* $\mathbf{N}$ *и правая часть* $\mathbf{h}$ *уравнения* (31) *непрерывно зависят от параметра* $\gamma\in\Gamma_0,\mathrm{N}(\gamma)\subset\mathrm{C}(\Gamma_0),h(\gamma)\subset\mathrm{C}(\Gamma_0)$, *на некотором отрезке* Γ_0 *вещественной числовой оси. Пусть также*

$$\|\mathbf{h}(\gamma)\|<\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3\ \|\mathbf{N}(\gamma)\|}}. \tag{35}$$

Тогда решение $\mathbf{u}(\rho;\gamma)$ *уравнения* (31) *при* $\gamma\in\Gamma_0$ *существует, единственно и непрерывно зависит от параметра* $\gamma,\mathbf{u}(\rho;\gamma)\subset\mathbf{C}([R_1,R_2]\times\Gamma_0)$.

Используя систему (28) и оставшуюся пару условий сопряжения (23) при $s=R_1+0$ и $s=R_2-0$, получаем дисперсионное уравнение в форме

$$C_1 g(\lambda)=\alpha P(\lambda), \tag{36}$$

где

$$P(\lambda)=H(R_2)\,R_2\frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)}\,\partial_{\rho s}^2 G_M(\rho,s)\Big|_{\substack{s=R_1\\ \rho=R_2}}K_0(k_3R_2)\,\widetilde{k}_2(R_1)-$$
$$-H(R_1)\,K_1(k_3R_2)\,\widetilde{k}_3-$$
$$-H(R_1)\,R_2\frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)}\,\partial_{\rho s}^2 G_M(\rho,s)\Big|_{\substack{s=R_2\\ \rho=R_2}}K_0(k_3R_2)\,\widetilde{k}_2(R_2),$$

$$g(\lambda) = \left(I_1(k_1R_1)\,\widetilde{k}_1 + R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)}\,\partial^2_{\rho s} G_M(\rho,s)\Big|_{\substack{s=R_1\\ \rho=R_1}} I_0(k_1R_1)\,\widetilde{k}_2(R_1) \right) \times$$

$$\times \left(K_1(k_3R_2)\,\widetilde{k}_3 + R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)}\,\partial^2_{\rho s} G_M(\rho,s)\Big|_{\substack{s=R_2\\ \rho=R_2}} K_0(k_3R_2)\,\widetilde{k}_2(R_2) \right) -$$

$$- R_1R_2 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)}\,\partial^2_{\rho s} G_M(\rho,s)\Big|_{\substack{s=R_2\\ \rho=R_1}} \partial^2_{\rho s} G_M(\rho,s)\Big|_{\substack{s=R_1\\ \rho=R_2}} \times$$

$$\times I_0(k_1R_1)\,K_0(k_3R_2)\,\widetilde{k}_2(R_2)\widetilde{k}_2(R_1),$$

где

$$H(s) := \gamma H_1(s) + H_2(s) =$$

$$= \gamma \tfrac{k_0^2 \varepsilon_2(s)}{k_2^2(s)} \int\limits_{R_1}^{R_2} \partial^2_{\rho s} G_M(\rho,s)\, \tfrac{\rho}{k_2^2(\rho)}\, |\mathbf{u}|^2 u_1 d\rho +$$

$$+ \tfrac{k_0^2 \varepsilon_2(s)}{k_2^2(s)} \int\limits_{R_1}^{R_2} \partial_s G_M(\rho,s)\, \rho\, |\mathbf{u}|^2 u_2 d\rho - \gamma \tfrac{2}{k_2^2(s)} f_1(s).$$

Нули функции $\Phi(\lambda) \equiv C_1 g(\lambda) - \alpha P(\lambda)$ – это значения λ, для которых существует нетривиальное решение задачи P_M. То есть если $\lambda = \widetilde{\lambda}$ таково, что $\Phi(\widetilde{\lambda}) = 0$, то собственные значения рассматриваемой задачи определяются из уравнения $\widetilde{\lambda} = \gamma^2$.

Из системы (1), обозначив $u_3(\rho) := \rho \mathrm{H}_\varphi(\rho)$ и $k_0^2 := \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$, получаем

$$\widetilde{\varepsilon}\rho \left(\frac{1}{\widetilde{\varepsilon}\rho} (u_3)' \right)' + \left(k_0^2 \widetilde{\varepsilon} - \gamma^2 \right) u_3 = 0. \tag{37}$$

Считаем, что функция u_3 дифференцируема так, что

$$u_3 \in C^1[0,+\infty) \cap C^2(0,R_1) \cap C^2(R_1,R_2) \cap C^2(R_2,+\infty). \tag{38}$$

При $0 \le \rho < R_1$ решение уравнения (37) имеет вид

$$u_3 = C_1^* \rho I_1(k_1\rho), \ \ \rho < R_1. \tag{39}$$

При $\rho > R_2$ решение уравнения (37) имеет вид

$$u_3 = C_2^* \rho K_1(k_3\rho), \ \ \rho > R_2. \tag{40}$$

В оболочке волновода $R_1 \le \rho \le R_2$ получаем дифференциальное уравнение второго порядка:

$$u_3'' - \frac{\varepsilon_2'(\rho)\rho + \varepsilon_2(\rho)}{\varepsilon_2(\rho)\rho} u_3' + k_2^2(\rho) u_3 = 0, \tag{41}$$

где $k_2^2(\rho) = k_0^2 \varepsilon_2(\rho) - \gamma^2$.

Из условий сопряжения для компонент электромагнитного поля получаем условия сопряжения для функции u_3

$$[u_3]|_{\rho=R_1} = [u_3]|_{\rho=R_2} = 0, \quad [u_3']|_{\rho=R_1} = [u_3']|_{\rho=R_2,} = 0. \tag{42}$$

Сформулируем линейную задачу сопряжения на собственные значения.

Задача P_M^*: *требуется доказать существование вещественных значений* γ *таких, что при заданном значении* $C_1^* \neq 0$ (*или* $C_2^* \neq 0$) *суще-*

ствует ненулевая функция $u_3(\rho)$, *которая при* $\rho < R_1$ *и* $\rho > R_2$ *определяется формулами* (39), (40) *соответственно, а при* $R_1 \leq \rho \leq R_2$ *является решением уравнения* (41), *причем определенная таким образом при* $\rho \in [0, +\infty)$ *функция* $u_3(\rho)$ *удовлетворяет условиям сопряжения* (42).

Замечание 2. Существует связь между константами C_1, C_2 в задаче P_M и константами C_1^*, C_2^* в задаче P_M^* :

$$C_1^* = -\tfrac{\gamma}{k_1}\omega\mu_0 C_1,$$
$$C_2^* = -\tfrac{\gamma}{k_3}\omega\mu_0 C_2.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение (41), записанное в виде

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_2(\rho)\rho}u_3'\right)' + \frac{k_0^2}{\rho}u_3 - \frac{1}{\varepsilon_2(\rho)\rho}\gamma^2 u_3 = 0, R_1 \leq \rho \leq R_2.$$

Перепишем последнее уравнение в операторной форме:

$$Lu_3 = 0\ ,\ \ L = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\varepsilon_2(\rho)\rho}\frac{d}{d\rho}\right) + \frac{k_0^2}{\rho} - \frac{1}{\varepsilon_2(\rho)\rho}\gamma^2, R_1 \leq \rho \leq R_2.$$

Пусть $\lambda := \gamma^2$. Рассмотрим на отрезке $[R_1; R_2]$ задачу Штурма–Лиувилля с краевыми условиями 2-го рода:

$$\begin{gathered}\left(\tfrac{1}{\varepsilon_2(\rho)\rho}v_n'\right)' + \tfrac{k_0^2}{\rho}v_n - \tfrac{1}{\varepsilon_2(\rho)\rho}\lambda_n v_n, R_1 \leq \rho \leq R_2,\\ v_n'\,|_{\rho=R_1} = v_n'\,|_{\rho=R_2} = 0\ .\end{gathered} \tag{43}$$

Пусть $\lambda_n, v_n(\rho)$ – полная система ортонормированных (в $L_2[R_1, R_2]$) вещественных собственных чисел и собственных функций этой краевой задачи. Эта система существует, так как $\rho \in C^1[R_1, R_2]$, $k_2^2(\rho) - \rho^{-1} \in C^1[R_1, R_2]$. Известно, что все собственные значения вещественные и простые (кратности 1). При этом существует лишь конечное число (или не существует совсем) положительных собственных значений, и бесконечное число – отрицательных, и $\lambda_n \to -\infty$, при $n \to \infty$. Упорядочим собственные значения в порядке убывания: $\cdots < \lambda_{i+1} < \lambda_i < \cdots < \lambda_2 < \lambda_1$.

Ответ на вопрос о разрешимости задачи (43) дается следующим утверждением.

Утверждение 4. *Пусть* $(\varepsilon_2(\rho)\rho)'$ *не обращается в нуль и* $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \geq \varepsilon_0$, $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \varepsilon_2^* = \min\limits_{\rho\in[R_1,R_2]} \varepsilon_2(\rho)$ *и пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *такие собственные значения задачи* (43), *что* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \left(\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2^*\right)$, *тогда задача* P_M^* *имеет по крайней мере* $(p-1)$ *решений* (*собственных значений*) $\widetilde{\gamma}_j$, $\quad j = \overline{1, p-1}$, *таких, что* $\widetilde{\gamma}_j^2 \in \left(\lambda_j, \lambda_{j+1}\right)$, $\quad j = \overline{1, p-1}$.

Замечание 3. Всегда можно подобрать толщину $R_2 - R_1$ оболочки волновода Σ так, что линейная задача будет иметь решение.

Смысл утверждения 4 заключается в том, что собственные значения задачи P_M^* (линейной задачи) лежат между собственными значениями задачи (43).

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5. *Если* $\tilde{\gamma}, u_1, u_2$ *решения задачи* P_M *(при* $\alpha = 0$*), то* $\tilde{\gamma}, u_3$ *– решения задачи* P_M^**. Наоборот, если* $\tilde{\gamma}, u_3$ *решения задачи* P_M^**, то* $\tilde{\gamma}, u_1, u_2$ *– решения задачи* P_M *(при* $\alpha = 0$*). Причем кратность корней задачи* P_M *(при* $\alpha = 0$*) совпадает с кратностью корней задачи* P_M^*

Выберем отрезки Γ_i, такие что каждый отрезок содержит ровно одно собственное значение γ_i задачи P_M, кроме того на объединении

$$\Gamma := \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$$

отрезков $\Gamma_i, i = \overline{1,k}$ функция Грина $G_M(\rho, s; \lambda)$ существует и непрерывна. Кроме того, считаем Γ_i таковыми, что выполняется условие $g\left(\underline{\Gamma_i}\right) g\left(\overline{\Gamma_i}\right) < 0$, где $\underline{\Gamma_i}, \overline{\Gamma_i}$ – концы отрезков Γ_i .

Основным результатом второй главы является следующая

Теорема 4. *Пусть числа* ε_1*,* ε_3*,* $\varepsilon_2^* = \min\limits_{\rho \in [R_1, R_2]} \varepsilon_2(\rho)$ *удовлетворяют условиям* $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \geq \varepsilon_0$*,* $\varepsilon_2^* > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) > 0$ *и существуют целые числа* $k \geq 1$ *и* $l \geq 0$*, что справедливо* $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \lambda_l < \lambda_{l+1} < \ldots < \lambda_{l+k-1} < \lambda_{l+k} < \varepsilon_2^*$*, где* λ_i *собственные значения краевой задачи* (25)*. Тогда найдется число* $\alpha_0 > 0$ *такое, что для всякого* $\alpha \leq \alpha_0$ *существует по крайней мере* k *собственных значений* γ_i *задачи* P_M*, причем* $\gamma_i \in \left(\sqrt{\underline{\Gamma_i}}, \sqrt{\overline{\Gamma_i}}\right)$*,* $i = \overline{1,k}$*.*

В теореме 4 δ_i являются произвольными достаточно малыми и положительными числами.

Глава 3 посвящена формулировке и обоснованию численного метода нахождения приближенных собственных значений рассматриваемых задач P_E и P_M. Численный метод основан на методе «пристрелки». Для этого формулируется вспомогательная задача Коши с дополнительными условиями на одной из границ волновода Σ.

Приведем краткое описание численного метода нахождения приближенных собственных значений в случае распространения ТЕ-волн.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$u'' = -\rho^{-1}u' + \rho^{-2}u - k_2^2(\rho)\, u - \alpha u^3 \tag{44}$$

с начальными условиями

$$u(R_1) := u(R_1 + 0)\,,\ u'(R_1) := u'(R_1 + 0)\,, \tag{45}$$

где $u(R_1 + 0)$ и $u'(R_1 + 0)$ определяются из решения (39) и имеют вид $u(R_1 + 0) = C_1 I_1(k_1 R_1)\,,\ u'(R_1 + 0) = C_1 k_1 \left(I_0(k_1 R_1) - \frac{I_0(k_1 R_1)}{k_1 R_1}\right)$, где C_1 – постоянная.

Считая постоянную C_1 заданной, из (40) и условий сопряжения (42) на границе $\rho = R_2$ получаем дисперсионное уравнение

$$\Delta(\gamma) \equiv u'(R_2)\, K_1(k_3 R_2) + k_3 u(R_2) \left(K_0(k_3 R_2) + \frac{K_1(k_3 R_2)}{k_3 R_2}\right). \tag{46}$$

Пусть $\sqrt{\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)} < \gamma_* < \gamma^* < \infty$ и $b_\gamma < \infty$ – некоторая постоянная. Определим множество

$$\Pi_\gamma := \left\{(\rho, u; \gamma) : \rho \leq R_1 + \widetilde{\rho}, |u - u(R_1)| \leq b_\gamma, \gamma \in [\gamma_*, \gamma^*]\right\},$$

и число M_γ такое, что $M_\gamma \geq \max\limits_{\Pi_\gamma} |P|$, где P – правая часть уравнения (44). При этом имеет место следующее

Утверждение 6. *Решение $u(\rho;\gamma)$ задачи Коши для системы* (44) *с начальными условиями* (45) *непрерывное, дифференцируемое относительно ρ, единственное и существует при всех $\rho \in (R_1, R_2)$, где $R_2 \leq \min(\tilde{\rho}, b_\gamma/M_\gamma)$, и непрерывно зависит от γ для всех $\gamma \in [\gamma_*, \gamma^*]$.*

Рассмотрим функцию

$$F(R_2;\gamma) := u(R_2 - 0;\gamma) - u(R_2 + 0;\gamma).$$

Используя условия сопряжения (42) на границе $\rho = R_2$ и решение (40) при $\rho > R_2$, получаем, что $F(R_2;\gamma) \equiv \Delta(\gamma)$.

Из формулы (46) ясно, что значение $F(R_2;\gamma)$ выражается только через значения решения задачи Коши в точке $\rho = R_2$.

Пусть $\gamma = \tilde{\gamma}$ таково, что $F(R_2;\gamma) = 0$, тогда ясно, что число $\tilde{\gamma}$ является собственным значением (постоянной распространения) *задачи* P_E.

Сформулируем критерий существования по крайней мере одного собственного значения.

Утверждение 7. *Пусть выполняются условия утверждения* 5 *и отрезок $\left[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right] \in [\gamma_*, \gamma^*]$ такой, что $F\left(R_2;\underline{\gamma}\right) F(R_2;\overline{\gamma}) < 0$. Тогда существует по крайней мере одна постоянная распространения (одно собственное значение) $\tilde{\gamma} \in \left(\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right)$ задачи P_E.*

Замечание 4. Условие $F(R_2;\underline{\gamma})F(R_2;\overline{\gamma}) < 0$ является достаточным условием существования постоянной распространения $\tilde{\gamma} \in \left(\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right)$ *задачи* P_E.

Справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть выполняются условия утверждения* 6 *и пусть $\left\{\tilde{\gamma}_n\right\}$ – последовательность приближенных значений постоянной распространения $\tilde{\gamma}$, полученная методом дихотомии, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\gamma}_n = \tilde{\gamma}$.*

Глава 4 посвящена описанию комплекса программ и численным результатам. В главе приводятся блок-схемы алгоритмов вычисления собственных значений и собственных функций рассматриваемых задач.

Результаты расчетов для задачи P_M представлены на рис. 1, 2. При расчете использовались следующие значения параметров: $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 9$, $\varepsilon_3 = 1$, $R_1 = 2$, $2 < R_2 < 8$, $k_0 = 1$, $C_1 = 1$.

Компонента E_z непрерывна на границе раздела сред, рис. 2 это иллюстрирует.

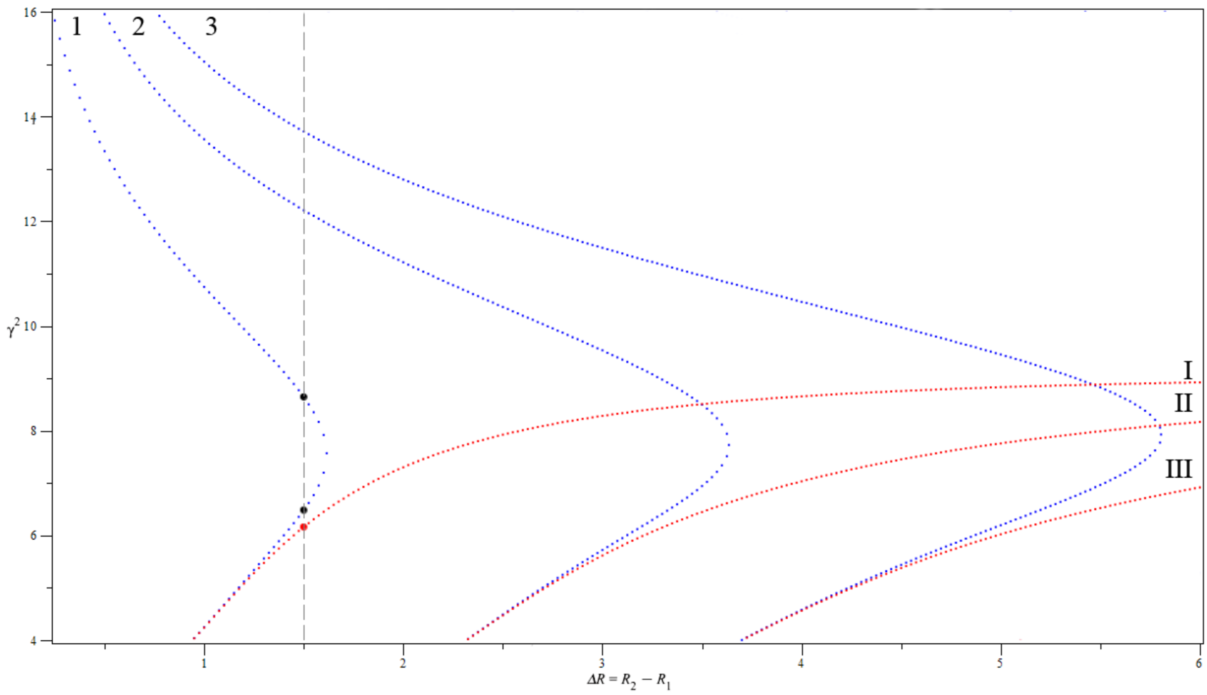

Рис. 1. Зависимость постоянной распространения γ^2 (вертикальная ось) от толщины слоя $\Delta = R_2 - R_1$ (горизонтальная ось); линейный (линии I–III) и нелинейный случаи (линии 1–3), $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2 + \frac{1}{\rho}$. При $\Delta = 1.5$ в линейном случае имеем только одно собственное значение $\gamma_1 = 2.48$ (●), в нелинейном случае – несколько: $\gamma_2 = 2.545$, $\gamma_3 = 2.9$ (●)

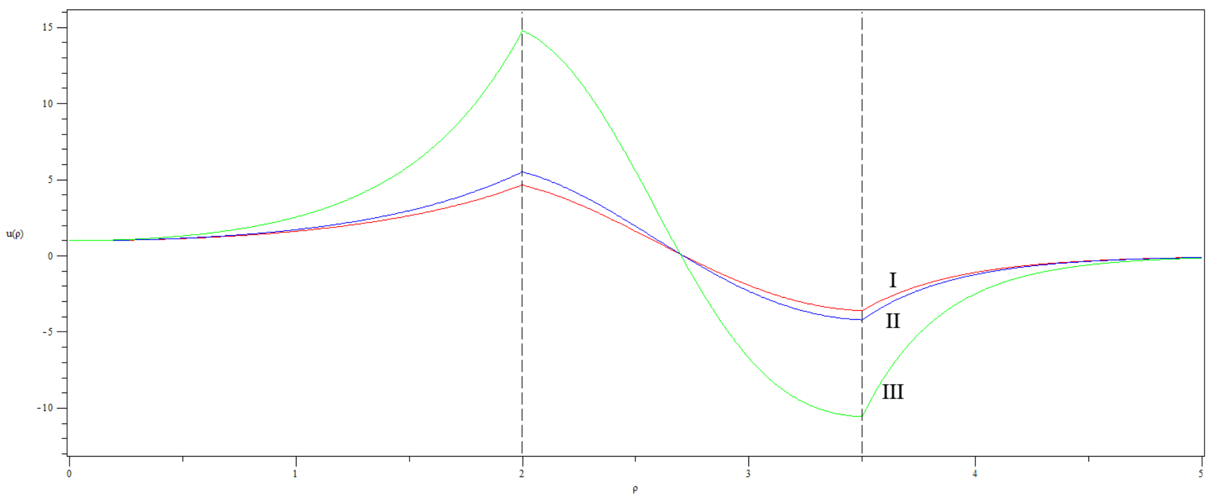

Рис. 2: Собственная функция u_2 (линия I) соответствует линейному случаю $\alpha = 0$, $\gamma_1 = 2.482$; линия II соответствует нелинейному случаю $\alpha = 0.01$, $\gamma_2 = 2.546$; линия III соответствует нелинейному случаю $\alpha = 0.01$, $\gamma_3 = 2.940$

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. **Валовик Д. В., Смирнов Ю. Г.,Смолькин Е. Ю.** Нелинейная задача сопряжения на собственные значения, описывающие распространение TE-волн в двухслойных цилиндрических диэлектрических волноводах // Журнал вычислительной математики и математической физики.–2013.–Т. 53, № 7.–С. 1150–1161.

2. **Валовик Д. В., Смолькин Е. Ю.** Численное решение задачи о распространении электромагнитных TM-волн в круглом диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки.–2012.–№ 3 (23).–С. 29–40.

3. **Валовик Д. В., Смолькин Е. Ю.** Расчет постоянных распространения неоднородных нелинейных двухслойных круглых цилиндрических волноводов методом задачи Коши // Радиотехника и электроника.–2013.–Т. 58, № 8.–С. 759–767.

4. **Смолькин Е. Ю.** Метод задачи Коши для решения нелинейной задачи сопряжения на собственные значения для TM-волн, распространяющихся в круглом двухслойном диэлектрическом волноводе с керровской нелинейностью // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки.–2012.–№ 4 (24).–С. 49–58.

Публикации в других издания

5. **Smolkin E. Yu., Valovik D. V.** Numerical solution of the problem of propagation of TM-polarized electromagnetic waves in a nonlinear two-layered dielectric cylindrical waveguide // MMET'2012 Proceeding, 2012–P. 68–71.

6. **Smirnov Yu. G., Smolkin E. Yu., Valovik D. V.** Nonlinear Double-Layer Bragg Waveguide: Analytical and Numerical Approaches to Investigate Waveguiding Problem // Advances in Numerical Analysis.–2014.–Vol. 2014.–P. 1–11.

7. **Smolkin E. Yu., Valovik D. V.** Propagation of TM Waves in a Double-layer Nonlinear Inhomogeneous Cylindrical Waveguide // PIERS'2014 Proceeding. 2014, 2014–P. 2614–2618.

8. **Smolkin E. Yu.** Propagation of TE waves in a double-layer nonlinear inhomogeneous cylindrical waveguide // Days on Diffraction'2014 Proceedings, 2014.–P. 204–209.