

На правах рукописи

Смолькин Евгений Юрьевич

**Нелинейные задачи на собственные значения,  
описывающие распространение ТЕ- и ТМ-волн  
в двухслойных цилиндрических диэлектрических волноводах**

Специальность 05.13.18

«Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ»

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор  
Ю.Г. Смирнов

Пенза 2014

# Оглавление

Введение	4
<b>1 Нелинейная задача сопряжения на собственные значения, описывающая распространение ТЕ-волн в двухслойных цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных неоднородной нелинейной средой</b>	<b>14</b>
1.1 Постановка задачи . . . . .	15
1.2 ТЕ-волны . . . . .	18
1.3 Дифференциальные уравнения задачи . . . . .	20
1.4 Условия сопряжения и задача сопряжения . . . . .	21
1.5 Нелинейное интегральное уравнение . . . . .	22
1.6 Исследование интегрального уравнения . . . . .	24
1.7 Теорема о непрерывной зависимости решения от спектрального параметра . . . . .	27
1.8 Итерационный метод . . . . .	30
1.9 Дисперсионное уравнение . . . . .	31
1.10 Существование решений дисперсионного уравнения . . . . .	33
<b>2 Нелинейная задача сопряжения на собственные значения, описывающая распространение ТМ-волн в двухслойных цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных неоднородной нелинейной средой</b>	<b>37</b>
2.1 Постановка задачи . . . . .	38
2.2 ТМ-волны . . . . .	41
2.3 Дифференциальные уравнения задачи . . . . .	43
2.4 Условия сопряжения и задача сопряжения . . . . .	45
2.5 Система нелинейных интегральных уравнений . . . . .	46
2.6 Исследование операторного уравнения . . . . .	56

2.7	Теорема о непрерывной зависимости решения от спектрального параметра . . . . .	60
2.8	Итерационный метод . . . . .	63
2.9	Дисперсионное уравнение . . . . .	67
2.10	О разрешимости линейной задачи сопряжения на собственные значения	71
2.11	Существование решений дисперсионного уравнения . . . . .	76
<b>3</b>	<b>Численный метод определения приближенных постоянных распространения</b>	<b>79</b>
3.1	Метод задачи Коши для решения нелинейной задачи сопряжения на собственные значения для ТЕ-волн . . . . .	79
3.1.1	Существование постоянных распространения . . . . .	79
3.1.2	Метод вычисления собственных значений . . . . .	82
3.2	Метод задачи Коши для решения нелинейной задачи сопряжения на собственные значения для ТМ-волн . . . . .	85
3.2.1	Существование постоянных распространения . . . . .	85
3.2.2	Метод вычисления собственных значений . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Комплекс программ и численные результаты.</b>	<b>91</b>
4.1	Комплекс программ для численного решения задачи $P_E$ . . . . .	91
4.2	Численные результаты для задачи $P_E$ . . . . .	93
4.3	Комплекс программ для численного решения задачи $P_M$ . . . . .	101
4.4	Численные результаты для задачи $P_M$ . . . . .	103
	<b>Литература</b>	<b>113</b>

# Введение

Задачи об исследовании спектра собственных волн различных волноведущих систем в электродинамике интенсивно изучаются в течение нескольких десятилетий и остаются актуальными в связи с их широким практическим применением, например, в современной микроэлектронике, в оптике, в лазерной технике [1, 2, 3, 4, 16, 27, 37, 42, 50, 51]. Необходимость теоретического исследования существования и свойств собственных волн диктуется практической потребностью разработки и расчета оптических устройств и устройств СВЧ. Успехи в разработке данного направления электродинамики привели к построению различных классов волноведущих структур.

Распространение электромагнитных волн в волноводах с заполнением линейной однородной средой (то есть когда диэлектрическая и магнитная проницаемости постоянны) является классической и хорошо изученной задачей [5, 27, 34].

Математическая теория линейных неоднородных волноведущих систем развивалась, например, в [52, 21].

В теории распространения собственных электромагнитных волн в нелинейных однородных волноводах, т.е. волноводах с нелинейной зависимостью диэлектрической проницаемости от модуля интенсивности электрического поля, получено гораздо меньше результатов. Несмотря на то, что попытки решения таких задач предпринимались в течение длительного времени, многие важные результаты, в первую очередь существование собственных значений в задачах, как для плоских, так и

для круглых цилиндрических волноводов (имеются в виду нелинейные, но однородные волноводы) были получены относительно недавно.

По-видимому впервые задачи распространения поляризованных электромагнитных волн в средах с керровской нелинейностью были рассмотрены в работе П.Р. Елеонского, Л.Г. Оганесянца и В.П. Силина [43]. В этой работе исходная векторная задача для системы уравнений Максвелла была сведена к анализу системы обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент поля. Авторы рассматривали поверхностные распространяющиеся волны. Аналитические решения для системы дифференциальных уравнений (выраженные через эллиптические функции) для задачи о ТЕ-волнах, распространяющихся в слое были получены Н.-W. Schürmann, В.С. Серовым, Ю.В. Шестопаловым в [47], а также A.D. Boardman et al. в [39]. Аналогичные задачи для ТЕ-волн в круглом цилиндрическом однородном нелинейном волноводе были рассмотрены Ю.Г. Смирновым и С.Н. Куприяновой в [30] и Н.-W. Schürmann, Ю.Г. Смирновым, Ю.В. Шестопаловым в [48]. В этих работах были получены достаточные условия существования поверхностных волн, а также представлены некоторые численные результаты. Задача о распространении ТМ-волн в слое рассматривалась в работе Д.В. Валовика и Ю.Г. Смирнова [10], а задача о распространении ТМ-волн в круглом волноводе исследовалась Ю.Г. Смирновым и Э.А. Хорошевой в [32]. В работах [6, 7, 11, 53] рассматривались задачи о распространении электромагнитных волн в слое с произвольной нелинейностью, в слое из нелинейного метаматериала и указаны новые нелинейные эффекты, имеющие место в этих задачах. Наличие нелинейности в случае однородных волноводов приводит к появлению принципиально новых режимов распространения электромагнитных волн (см., например, [11, 53]). Важно отметить, что эти нелинейные эффекты наблюдаются в той области изменения спектрального параметра, в которой не существует решения со-

ответствующей линейной задачи. Перечисленные результаты подробно изложены в монографиях [12, 50].

В последние годы появились работы, посвященные исследованию неоднородных нелинейных волноведущих структур [29, 52] (см. также [44]) и многослойных (двухслойных) структур [46].

Задачи о распространении собственных электромагнитных волн в нелинейных и неоднородных волноводах являются более сложными. Поскольку многие материалы, используемые при конструировании волноводов для электромагнитных волн являются неоднородными, а при увеличении интенсивности электромагнитных волн, распространяющихся по таким волноводам, начинают сказываться и нелинейные эффекты, то это указывает на актуальность исследования нелинейных неоднородных волноведущих структур. Кроме того, такие задачи весьма интересны и сложны с математической точки зрения. Они представляют собой нелинейные задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла в неоднородной области, общих методов исследования которых пока не разработано.

Метод интегральных дисперсионных уравнений, предложенный в цитированных выше работах Д.В. Валовика и Ю.Г. Смирнова, может быть применен только для исследования плоских нелинейных однородных волноводов (точнее, этот метод может быть использован для исследования задач на собственные значения только для автономных дифференциальных уравнений).

Один из основных методов исследования рассматриваемых задач для нелинейных и неоднородных сред – метод интегральных уравнений, который позволяет, используя функцию Грина, свести задачу о собственных значениях к исследованию некоторого интегрального уравнения. Существование решений интегрального уравнения доказывается с помощью принципа сжимающих отображений, а это подразумевает малость

коэффициента нелинейности. С одной стороны такой подход оправдан с физической точки зрения, так как выражение для закона Керра справедливо только для малых значений этого коэффициента. С другой стороны, наличие нелинейности даже с малым коэффициентом все равно приводит к возникновению новых режимов распространения электромагнитных волн. Метод сжимающих отображений позволяет доказывать существование собственных значений в задачах о распространении волн в нелинейных и неоднородных волноводах только в окрестности решений соответствующей линейной задачи. Тем не менее развитие метода интегральных уравнений на случай нелинейных неоднородных волноведущих структур представляется актуальным. Во-первых, в случае неоднородных волноводов функция Грина не может быть выписана явно и для доказательства существования собственных значений приходится использовать общие теоремы о функции Грина линейного (поскольку с помощью функции Грина обращается именно линейная часть) дифференциального оператора. Это обстоятельство создает определенные трудности в исследовании таких задач. Во-вторых, строгие результаты о существовании собственных значений позволяют тестировать численные методы, которые актуальны при решении практических задач и которые могут применяться в той области изменения спектрального параметра, в которой отсутствует решение соответствующей линейной задачи.

Предложено несколько численных методов для решения рассматриваемого класса задач [12, 50]. Одним из наиболее эффективных численных методов, позволяющих исследовать в том числе и произвольные нелинейности, видимо, является метод задачи Коши, примененный к исследованию задачи в слое в работах [8, 56, 9].

В данной диссертации рассматриваются нелинейные задачи сопряжения на собственные значения, описывающие распространение ТЕ- и ТМ-волн в двухслойных диэлектрических волноводах кругового сечения, за-

полненных средой с нелинейностью, выраженной законом Керра, где диэлектрическая проницаемость среды *нелинейно зависит от интенсивности поля и содержит в себе слагаемое определяющее неоднородность среды*. Доказаны теоремы о существовании и локализации собственных значений в рассматриваемых нелинейных задачах. Для численного решения задачи предложены два метода: итерационный алгоритм, а также метод, основанный на решении вспомогательной задачи Коши (метод пристрелки). Доказана сходимость предложенных численных методов.

Численно-аналитический метод исследования задач о распространении электромагнитных ТЕ- и ТМ-волн в круглых двухслойных цилиндрических волноводах, заполненных нелинейной неоднородной средой предложены в работах автора и Д.В. Валовика [14, 15]. В случае ТЕ-волн решение получено в работе автора, Ю.Г. Смирнова и Д.В. Валовика [13]. Оказалось, что метод, предложенный в указанных статьях, может быть развит для изучения не только для двухслойных структур, но и для многослойных, причем, с помощью предложенного метода появляется возможность изучать нелинейности и неоднородности весьма широкого класса (как линейные, так и нелинейные многослойные структуры находят многие приложения, см., например, [17, 41, 45, 46]).

Работа состоит из четырех глав.

В **главе 1** рассматривается задача о распространении поверхностных электромагнитных ТЕ-волн в неоднородном двухслойном диэлектрическом волноводе кругового сечения, заполненного средой с нелинейностью, выраженной законом Керра. Проблема сводится к анализу нелинейного интегрального уравнения с ядром в виде функции Грина. Существование распространяющихся ТЕ-волн доказано с помощью метода сжимающих отображений. Для численного решения задачи предложен итерационный алгоритм (доказана его сходимость). Доказано существование корней дисперсионного уравнения – постоянных распространения



волновода. Получены условия, когда могут распространяться  $n$  волн, указаны области локализации соответствующих постоянных распространения.

В пунктах 1.1, 1.2 представлена постановка задачи и вывод из уравнений Максвелла системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих распространение ТЕ-волн. Пункт 1.3 посвящен решению дифференциальных уравнений для областей пространства, в которых диэлектрическая проницаемость постоянна. В пункте 1.4, представлены условия сопряжения на границах раздела сред для искомых функций. Из условий сопряжения для электромагнитного поля находятся условия сопряжения, которым удовлетворяют собственные функции задачи. Сформулировано понятие собственного значения рассматриваемой нелинейной задачи. Строго формулируется задача сопряжения (задача  $P_E$ ) для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, к которому сводится исходная задача о распространении ТЕ-волн. В пункте 1.5 введена функция Грина, получено интегральное представление решения  $u(s)$  нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения при  $s \in [R_1, R_2]$ . Пункт 1.6 посвящен исследованию интегрального уравнения. В пункте 1.7 сформулирована и доказана теорема о непрерывной зависимости решения от спектрального параметра. В пункте 1.8 для численного решения задачи предложен итерационный алгоритм, доказана его сходимость. В пункте 1.9 выведено дисперсионное уравнение. В пункте 1.10 рассмотрен вопрос о существовании решений дисперсионного уравнения, доказано существование корней дисперсионного уравнения – постоянных распространения волновода. Получены условия, когда могут распространяться несколько волн, указаны области локализации постоянных распространения.

В **главе 2** рассматривается задача о распространении поверхностных электромагнитных ТМ-волн в неоднородном двухслойном диэлек-

трическом волноводе кругового сечения, заполненного средой с нелинейностью, выраженной законом Керра. Проблема сводится к анализу системы нелинейных интегральных уравнений с ядром в виде функции Грина. Существование распространяющихся ТМ-волн доказано с помощью метода сжимающих отображений. Для численного решения задачи предложен итерационный алгоритм (доказана его сходимость). Доказано существование корней дисперсионного уравнения – постоянных распространения волновода. Получены условия, когда могут распространяться  $n$  волн, указаны области локализации соответствующих постоянных распространения.

В пунктах 2.1, 2.2 представлена постановка задачи и вывод из уравнений Максвелла системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих распространение ТМ-волн. Пункт 2.3 посвящен решению дифференциальных уравнений для областей пространства, в которых диэлектрическая проницаемость постоянна. В пункте 2.4, представлены условия сопряжения на границах раздела сред для искомым функций. Из условий сопряжения для электромагнитного поля находятся условия сопряжения, которым удовлетворяют собственные функции задачи. Сформулировано понятие собственного значения рассматриваемой нелинейной задачи. Строго формулируется задача сопряжения (задача  $P_M$ ) для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым сводится исходная задача о распространении ТМ-волн. В пункте 2.5 введена функция Грина, получены интегральные представления решений  $u_1(s)$  и  $u_2(s)$  системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений при  $s \in [R_1, R_2]$ . Пункт 2.6 посвящен исследованию операторного уравнения. В пункте 2.7 сформулирована и доказана теорема о непрерывной зависимости решения от спектрального параметра. В пункте 2.8 для численного решения задачи предложен итерационный алгоритм, доказана его сходимость. В пункте 2.9 выведено

дисперсионное уравнение. Пункт 2.10 посвящен постановке и решению задачи сопряжения  $P_M^*$  эквивалентной задаче  $P_M$  (при  $\alpha = 0$ ). В пункте 2.11 рассмотрен вопрос о существовании решений дисперсионного уравнения, доказано существование корней дисперсионного уравнения – постоянных распространения волновода. Получены условия, когда могут распространяться  $n$  волн, указаны области локализации соответствующих постоянных распространения.

**Глава 3** посвящена формулировке и обоснованию численного метода нахождения приближенных собственных значений рассматриваемой задачи. Численный метод основан на методе «пристрелки». Для этого формулируется вспомогательная задача Коши с дополнительными условиями на одной из границ.

В пункте 3.1 рассматривается задачи Коши для решения нелинейной задачи сопряжения на собственные значения для ТЕ-волн. Формулируется и доказывается теорема о существовании, единственности и непрерывной зависимости решения от параметра вспомогательной задачи Коши, а также теорема о существовании и локализации, по крайней мере, одного собственного значения. На основе этой теоремы предложен метод нахождения приближенных собственных значений рассматриваемой нелинейной задачи. В пункте 3.2 рассматривается задачи Коши для решения нелинейной задачи сопряжения на собственные значения для ТМ-волн. Формулируется и доказывается теорема о существовании, единственности и непрерывной зависимости решения от параметра вспомогательной задачи Коши, а также теорема о существовании и локализации, по крайней мере, одного собственного значения. На основе этой теоремы предложен метод нахождения приближенных собственных значений рассматриваемой нелинейной задачи.

**Глава 4** посвящена описанию комплекса программ и численным результатам. В главе приводятся блок-схемы алгоритмов вычисления

собственных значений и собственных функций рассматриваемых задач. Результаты расчетов проиллюстрированы графиками соответствующих зависимостей. Проведено сравнение между решениями дисперсионного уравнения в случае линейной среды в слое.

В пункте 4.1 приведены блок-схемы алгоритмов вычисления собственных значений и собственных функций для ТЕ-волн. В пункте 4.2 представлены результаты расчетов собственных значений и собственных функций для ТЕ-волн. В пункте 4.3 приведены блок-схемы алгоритмов вычисления собственных значений и собственных функций для ТМ-волн. В пункте 4.4 представлены результаты расчетов собственных значений и собственных функций для ТМ-волн.

**Личный вклад автора.** Постановка задачи о распространяющихся поляризованных электромагнитных волнах принадлежит Смирнову Ю.Г. и Валовику Д.В. Исследование вопроса разрешимости нелинейной задачи на собственные значения, формулировка и доказательство теоремы о существовании и локализации собственных значений (Глава 1, 2), разработка численного метода (Глава 3) и численные результаты (Глава 4) принадлежат автору.

*Диссертация содержит следующие основные результаты:*

- 1. Исходные задачи о распространении ТЕ- и ТМ-волн в двухслойных диэлектрических волноводах кругового сечения, заполненных неоднородной нелинейной средой с нелинейностью, выраженной законом Керра, сведены к исследованию задач сопряжения на собственные значения для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.*
- 2. Для рассматриваемых задач получены достаточные условия о существовании и локализации либо одного, либо нескольких собственных значений.*

3. Для обеих задач предложены и обоснованы численные методы нахождения приближенных собственных значений и собственных функций. Доказана сходимость предложенных численных методов.
4. Предложенные численные алгоритмы реализованы в виде комплекса программ и протестированы на модельных задачах. Выполнены расчеты приближенных собственных значений и собственных функций для конкретных волноведущих структур.

## Глава 1

# Нелинейная задача сопряжения на собственные значения, описывающая распространение ТЕ-волн в двухслойных цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных неоднородной нелинейной средой

Глава посвящена распространению электромагнитных ТЕ-волн в двухслойном цилиндрическом волноводе с нелинейной неоднородной диэлектрической проницаемостью. Проблема сводится к решению нелинейной задачи сопряжения на собственные значения для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Доказана теорема о существовании и локализации собственных значений рассматриваемой задачи.

Результаты главы опубликованы в [13, 49].

## 1.1 Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$  с цилиндрической системой координат  $O\rho\varphi z$ . Пространство заполнено изотропной средой без источников с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_3 \equiv \text{const}$ , где  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума. В  $\mathbb{R}^3$  помещен двухслойный цилиндрический диэлектрический волновод

$$\Sigma := \{(\rho, \varphi, z) : 0 \leq \rho < R_1, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \cup \\ \cup \{(\rho, \varphi, z) : R_1 \leq \rho \leq R_2, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

с образующей, параллельной оси  $Oz$ , и круговым поперечным сечением.

На рис. 1.1 представлена геометрия задачи. Волновод неограниченно продолжается в направлении  $z$ .

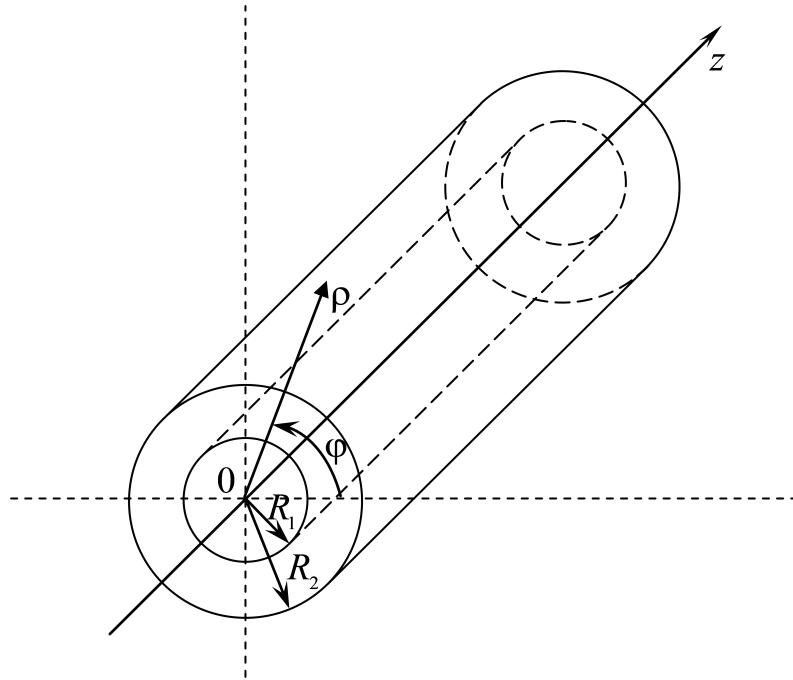


Рис. 1.1: Геометрия задачи.

Сечение волновода, перпендикулярное его оси, состоит из круга радиуса  $R_1$  и кольца с внутренним радиусом  $R_1$ , внешним радиусом  $R_2$  соответственно, то есть, волновод является двухслойным (см. рис. 1.1):

$R_1$  есть радиус внутреннего цилиндра,  $R_2 - R_1$  есть толщина внешней цилиндрической оболочки. Такие многослойные волноводы в случае линейных однородных сред исследовались в работе [17], одно из практических приложений указано в [46].

Запишем уравнения Максвелла в форме [34]

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} = \partial_t \tilde{\mathbf{D}}, \quad \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} = -\partial_t \tilde{\mathbf{B}}, \quad (1.1)$$

где  $\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}} = \mu \tilde{\mathbf{H}}$  и  $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ .

Ток проводимости  $\tilde{\mathbf{j}}$  в уравнениях (1.1) отсутствует, так как  $\tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\tilde{\mathbf{H}}$  образуют полное поле.

Таким образом из уравнений (1.1) получаем

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} = \partial_t (\varepsilon \tilde{\mathbf{E}}), \quad \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} = -\partial_t (\mu \tilde{\mathbf{H}}). \quad (1.2)$$

Электромагнитное поле  $\tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\tilde{\mathbf{H}}$  удовлетворяет системе уравнений Максвелла (1.2), условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границах раздела сред  $\rho = R_1$ ,  $\rho = R_2$  и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает, как  $O(|x|^{-1})$  при  $\rho \rightarrow \infty$  в области  $\rho > R_2$ .

Пусть электромагнитное поле гармонически зависит от времени [43]

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\rho, \varphi, z, t) &= \mathbf{E}^+(\rho, \varphi, z) \cos \omega t + \mathbf{E}^-(\rho, \varphi, z) \sin \omega t, \\ \tilde{\mathbf{H}}(\rho, \varphi, z, t) &= \mathbf{H}^+(\rho, \varphi, z) \cos \omega t + \mathbf{H}^-(\rho, \varphi, z) \sin \omega t, \end{aligned}$$

где  $\omega$  – круговая частота,  $\tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\mathbf{E}^+$ ,  $\mathbf{E}^-$ ,  $\tilde{\mathbf{H}}$ ,  $\mathbf{H}^+$ ,  $\mathbf{H}^-$  – действительные вектор-функции.

Легко видеть, что поля  $\tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\tilde{\mathbf{H}}$  выражаются следующим образом

$$\tilde{\mathbf{E}} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} e^{-i\omega t} \}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{H} e^{-i\omega t} \},$$

где величины

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + i\mathbf{E}^-, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^+ + i\mathbf{H}^-$$



носят название комплексных амплитуд и

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= (E_\rho, E_\varphi, E_z)^T, \\ \mathbf{H} &= (H_\rho, H_\varphi, H_z)^T;\end{aligned}$$

$(\cdot)^T$  обозначает операцию транспонирования. Каждая компонента полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  является функцией трех пространственных переменных.

Мы считаем, что при  $R_1 \leq \rho \leq R_2$ , диэлектрическая проницаемость имеет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_0 \varepsilon_2(\rho) + \varepsilon_0 \tilde{\alpha} \left( |(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_\rho)|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_0 |(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_\varphi)|^2 + \varepsilon_0 |(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_z)|^2 \right), \quad (1.3)\end{aligned}$$

где  $\mathbf{e}_k$  – ортонормированный вектор в направлении оси  $k$ ,  $(\cdot, \cdot)$  – евклидово скалярное произведение векторов,  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума,  $\varepsilon_2(\rho) \in C[R_1, R_2]$ ,  $\tilde{\alpha} > 0$  – вещественная постоянная.

При  $0 \leq \rho < R_1$ , диэлектрическая проницаемость есть  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \equiv \text{const}$ .

Поскольку  $|\mathbf{E}e^{-i\omega t}| = |\mathbf{E}|$ , то для полей  $\mathbf{E}e^{-i\omega t}$  и  $\mathbf{H}e^{-i\omega t}$  и диэлектрической проницаемости (1.3) зависимость уравнений Максвелла (1.2) от времени такая же как и в линейном случае (то есть, когда  $\varepsilon$  постоянная). Это позволяет доказать справедливость уравнений Максвелла (1.2) для комплексных амплитуд  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ .

Действительно, подставив комплексные амплитуды  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  в систему уравнений Максвелла (1.2) убеждаемся, что  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{H} &= -i\omega \varepsilon \mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= i\omega \mu \mathbf{H},\end{aligned} \quad (1.4)$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границах раздела сред  $\rho = R_1$ ,  $\rho = R_2$  и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при  $\rho \rightarrow \infty$  в области  $\rho > R_2$ .

Диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}\varepsilon_0$  во всем пространстве имеет вид

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \leq \rho < R_1, \\ \varepsilon_2(\rho) + \tilde{\alpha} |\mathbf{E}|^2, & R_1 \leq \rho \leq R_2, \\ \varepsilon_3, & \rho > R_2, \end{cases} \quad (1.5)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_3$  – вещественные положительные постоянные,

$$|\mathbf{E}|^2 = |(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_\rho)|^2 + |(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_\varphi)|^2 + |(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_z)|^2.$$

Среда также предполагается изотропной и немагнитной. Во всем пространстве полагаем  $\mu = \mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума.

Разыскиваются поверхностные волны, распространяющиеся вдоль образующей волновода. Решение уравнений Максвелла ищется во всем пространстве.

## 1.2 ТЕ-волны

Рассмотрим ТЕ волны в гармоническом режиме

$$\mathbf{E}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} (0, E_\varphi, 0)^T, \quad \mathbf{H}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} (H_\rho, 0, H_z)^T,$$

где  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  – комплексные амплитуды и  $E_\varphi = E_\varphi(\rho, \varphi, z)$ ,  $H_\rho = H_\rho(\rho, \varphi, z)$ ,  $H_z = H_z(\rho, \varphi, z)$ .

Подставив поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в уравнения Максвелла (1.4), получим

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -i\omega \varepsilon E_\varphi, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -i\omega \mu H_\rho, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\varphi)}{\partial \rho} = i\omega \mu H_z. \end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений этой системы видно, что  $H_z$  и  $H_\rho$  не зависят от  $\varphi$ ; поскольку  $E_\varphi$  выражается через  $H_z$  и  $H_\rho$ , то  $E_\varphi$  также не зависит от  $\varphi$ .

*Замечание 1.1.* Выбирая для компонент зависимость  $e^{in\varphi}$  по переменной  $\varphi$ , где  $n$  – целое число и взяв  $n = 0$ , получим волны, не зависящие от  $\varphi$ .

Поверхностные волны, распространяющиеся вдоль образующей  $Oz$  волновода  $\Sigma$ , гармонически зависят от  $z$ . Значит, компоненты полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  имеют представление

$$E_\varphi = E_\varphi(\rho) e^{i\gamma z}, H_\rho = H_\rho(\rho) e^{i\gamma z}, H_z = H_z(\rho) e^{i\gamma z},$$

где  $\gamma$  – неизвестный вещественный спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

Рассмотренная выше система принимает вид

$$\begin{cases} i\gamma H_\rho(\rho) - H'_z(\rho) = -i\omega\varepsilon E_\varphi(\rho), \\ i\gamma E_\varphi(\rho) = -i\omega\mu H_\rho(\rho), \\ \frac{1}{\rho}(\rho E_\varphi(\rho))' = i\omega\mu H_z(\rho), \end{cases} \quad (1.6)$$

где  $(\cdot)' \equiv \frac{d}{d\rho}$ .

Из второго и третьего уравнений системы (1.6) находим

$$H_z(\rho) = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{1}{\rho} (\rho E_\varphi(\rho))', H_\rho(\rho) = -\frac{\gamma}{\omega\mu} E_\varphi(\rho).$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение системы (1.6) получаем

$$\left( \frac{1}{\rho} (\rho E_\varphi(\rho))' \right)' + (\omega^2 \mu \varepsilon - \gamma^2) E_\varphi(\rho) = 0.$$

Обозначив  $u(\rho) := E_\varphi(\rho)$  и  $k_0^2 := \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$  получаем

$$\left( \rho^{-1} (\rho u)' \right)' + (k_0^2 \tilde{\varepsilon} - \gamma^2) u = 0, \quad (1.7)$$

где производная обозначает дифференцирование по  $\rho$  и  $u(\rho, \gamma)$  – вещественная функция, и

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \leq \rho < R_1, \\ \varepsilon_2(\rho) + \tilde{\alpha} |u|^2, & R_1 \leq \rho \leq R_2, \\ \varepsilon_3, & \rho > R_2. \end{cases}$$

Считаем, что функция  $u$  дифференцируема так, что

$$u \in C^1[0, +\infty) \cap C^2(0, R_1) \cap C^2(R_1, R_2) \cap C^2(R_2, +\infty). \quad (1.8)$$

Принадлежность функции  $u$  указанному пересечению множеств означает, что сужение функции на выбранный интервал (или полуинтервал) принадлежит соответствующему функциональному классу.

Считаем, что  $\gamma^2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ .

### 1.3 Дифференциальные уравнения задачи

При  $0 \leq \rho < R_1$ , имеем  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1$ , тогда из (1.7) получаем уравнение Бесселя

$$u'' + \rho^{-1}u' - \rho^{-2}u - k_1^2u = 0, \quad (1.9)$$

где  $k_1^2 = \gamma^2 - k_0^2\varepsilon_1$ .

Решение уравнения (1.9) имеет вид

$$u = C_1 I_1(k_1 \rho) + \tilde{C}_1 K_1(k_1 \rho), \quad \rho < R_1,$$

где функции  $I_1$  и  $K_1$  – модифицированные функции Бесселя,  $C_1$  и  $\tilde{C}_1$  – постоянные. Известно [26], что функция  $K_1(\rho)$  неограниченно возрастает при  $\rho \rightarrow 0$ , а функция  $I_1(\rho)$  стремится к нулю при  $\rho \rightarrow 0$ . Принимая во внимание условие ограниченности поля во всякой конечной области получаем, что  $\tilde{C}_1 = 0$  и

$$u = C_1 I_1(k_1 \rho), \quad \rho < R_1. \quad (1.10)$$

При  $\rho > R_2$ , имеем  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_3$ , тогда из (1.7) получаем так же уравнение Бесселя

$$u'' + \rho^{-1}u' - \rho^{-2}u - k_3^2u = 0, \quad (1.11)$$

где  $k_3^2 = \gamma^2 - k_0^2\varepsilon_3$ .

Решение уравнения (1.11) имеет вид

$$u = \tilde{C}_2 I_1(k_3 \rho) + C_2 K_1(k_3 \rho), \quad \rho > R_2,$$

где  $C_2$  и  $\tilde{C}_2$  – постоянные. Известно [26], что функция  $I_1(\rho)$  стремится к бесконечности при  $\rho \rightarrow +\infty$ , а функция  $K_1(\rho)$  стремится к нулю при  $\rho \rightarrow +\infty$ . Принимая во внимание условие на бесконечности получаем, что  $\tilde{C}_2 = 0$  и

$$u = C_2 K_1(k_3 \rho), \quad \rho > R_2. \quad (1.12)$$

В оболочке волновода  $R_1 \leq \rho \leq R_2$  имеем  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_2(\rho) + \tilde{\alpha}u^2(\rho)$ . Тогда, из (1.7) получаем нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$u'' + \rho^{-1}u' - \rho^{-2}u + k_2^2(\rho)u + \alpha u^3 = 0, \quad (1.13)$$

где  $\alpha = \tilde{\alpha}k_0^2$ ,  $k_2^2(\rho) = k_0^2\varepsilon_2(\rho) - \gamma^2$ .

## 1.4 Условия сопряжения и задача сопряжения

Как известно, касательные составляющие электромагнитного поля непрерывны на границе раздела сред. В рассматриваемом случае касательными составляющими являются компоненты  $E_\varphi$  и  $H_z$ . Из этого условия получаем

$$\begin{aligned} E_\varphi(R_1 + 0) &= E_\varphi(R_1 - 0), \quad H_z(R_1 + 0) = H_z(R_1 - 0), \\ E_\varphi(R_2 + 0) &= E_\varphi(R_2 - 0), \quad H_z(R_2 + 0) = H_z(R_2 - 0). \end{aligned}$$

Далее

$$H_z(\rho) = \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1}{\rho} E_\varphi(\rho) + E'_\varphi(\rho) \right).$$

Но так как  $E_\varphi(\rho)$  и  $H_z(\rho)$  непрерывны при  $\rho = R_1$  и  $\rho = R_2$ , то, значит, и  $E'_\varphi(\rho)$  непрерывна при  $\rho = R_1$  и  $\rho = R_2$ . Из сказанного получаем условия сопряжения для функций  $u(\rho)$  и  $u'(\rho)$

$$[u]_{\rho=R_1} = [u]_{\rho=R_2} = 0, \quad [u']_{\rho=R_1} = [u']_{\rho=R_2} = 0 \quad (1.14)$$

где  $[v]_{\rho=s} = \lim_{\rho \rightarrow s-0} v(\rho) - \lim_{\rho \rightarrow s+0} v(\rho)$  – скачок предельных значений функции в точке  $s$ , определенный в силу (1.8).

Принимая во внимание решения (1.10), (1.12) уравнения (1.7), в которых учтены условие ограниченности поля во всякой конечной области и условие излучения на бесконечности сформулируем задачу  $P_E$ :

*Задача  $P_E$ : требуется доказать существование вещественных значений  $\gamma$  таких, что при заданном значении  $C_1 \neq 0$  (или  $C_2 \neq 0$ ) существует ненулевая функция  $u(\rho)$ , которая при  $\rho < R_1$  и  $\rho > R_2$  определяется формулами (1.10), (1.12) соответственно, а при  $R_1 \leq \rho \leq R_2$  является решением уравнения (1.13), причем, определенная таким образом при  $\rho \in [0, +\infty)$  функция  $u(\rho)$  удовлетворяет условиям сопряжения (1.14).*

Значения  $\gamma$ , являющиеся решениями задачи  $P_E$  называются собственными значениями, а соответствующие им функции  $u(\rho)$  – собственными функциями. Такое определение собственного значения было дано в [10] и неоднократно использовалось в дальнейшем (см., например, [6, 8]).

В рассматриваемой задаче собственное значение  $\gamma$  зависит от значения собственной функции на одной из границ волновода.

*Замечание 1.2.* Можно задать значение  $C_2$  вместо  $C_1$ .

## 1.5 Нелинейное интегральное уравнение

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение (1.13), записанное в виде

$$(\rho u')' + (k_2^2(\rho) \rho - \rho^{-1}) u + \alpha \rho u^3 = 0, R_1 \leq \rho \leq R_2$$

и линейное уравнение

$$(\rho u')' + (k_2^2(\rho) \rho - \rho^{-1}) u = 0, R_1 \leq \rho \leq R_2.$$

Перепишем последнее уравнение в операторной форме:

$$L_E u = 0, \quad L_E = \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + (k_2^2(\rho) \rho - \rho^{-1}), R_1 \leq \rho \leq R_2.$$

Пусть  $\lambda := \gamma^2$ . Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \rho v_n'' + v_n' + (k_0^2 \varepsilon_2(\rho) \rho - \rho^{-1}) v_n &= \lambda_n \rho v_n, R_1 \leq \rho \leq R_2, \\ v_n' |_{\rho=R_1} &= v_n' |_{\rho=R_2} = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Пусть  $\lambda_n, v_n(\rho)$  – полная система ортонормированных (в  $L_2[R_1, R_2]$ ) вещественных собственных чисел и собственных функций этой краевой задачи. Эта система существует, так как  $\rho \in C^1[R_1, R_2]$ ,  $k_2^2(\rho) - \rho^{-1} \in C^1[R_1, R_2]$  [35, 45]. Тогда при  $\lambda \neq \lambda_n$  краевая задача  $L_E u = 0$ ,  $u' |_{\rho=R_1} = u' |_{\rho=R_2} = 0$  имеет только тривиальное решение. Это значит, что при  $\lambda \neq \lambda_n$  существует и единственна функция Грина  $G_E(\rho, s; \lambda)$  краевой задачи

$$L_E G_E = -\delta(\rho - s), \partial_\rho G_E |_{\rho=R_1} = \partial_\rho G_E |_{\rho=R_2} = 0 \quad (R_1 \leq s \leq R_2). \quad (1.16)$$

Функция Грина  $G_E(\rho, s; \lambda)$  в окрестности собственного значения  $\lambda_i$  может быть представлена в виде (см., например, [25])

$$G_E(\rho, s; \lambda) = -\frac{v_i(\rho) v_i(s)}{\lambda - \lambda_i} + G_1(\rho, s; \lambda), \quad (1.17)$$

где  $G_1(\rho, s; \lambda)$  регулярна в окрестности точки  $\lambda_i$ , а  $\lambda_n, v_n(\rho)$  уже упомянутые системы собственных чисел и собственных функций.

Все собственные значения рассматриваемой краевой задачи 1.15 являются простыми [35].

Запишем уравнение (1.13) в операторном виде:

$$L_E u + \alpha B(\rho) = 0, \quad B(\rho) := \rho u^3. \quad (1.18)$$

Используя вторую формулу Грина [45], получаем

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} (v L_E u - u L_E v) d\rho &= \int_{R_1}^{R_2} \left[ v (\rho u')' - u (\rho v')' \right] d\rho = \\ &= R_2 (u(R_2) v'(R_2) - u'(R_2) v(R_2)) - R_1 (u(R_1) v'(R_1) - u'(R_1) v(R_1)) \end{aligned}$$

и полагая  $v = G_E$ , получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{R_1}^{R_2} (G_E L_E u - u L_E G_E) d\rho = \\
& = R_2 (u' (R_2 - 0) G_E (R_2, s) - u (R_2 - 0) G'_E (R_2, s)) - \\
& - R_1 (u' (R_1 + 0) G_E (R_1, s) - u (R_1 + 0) G'_E (R_1, s)) = \\
& = R_2 u' (R_2 - 0) G_E (R_2, s) - R_1 u' (R_1 + 0) G_E (R_1, s).
\end{aligned}$$

Из уравнения (1.18), находим

$$\int_{R_1}^{R_2} G_E (\rho, s) L_E u d\rho = -\alpha \int_{R_1}^{R_2} G_E (\rho, s) \rho u^3 d\rho$$

Используя (1.16) получаем,

$$\int_{R_1}^{R_2} u (\rho) L_E G_E (\rho, s) d\rho = -\int_{R_1}^{R_2} u (\rho) \delta (\rho - s) d\rho = -u (s)$$

Используя уравнение (1.18), получаем интегральное представление решения  $u (s)$  уравнения (1.13) при  $s \in [R_1, R_2]$ :

$$u (s) = \alpha \int_{R_1}^{R_2} G_E (\rho, s) \rho u^3 (\rho) d\rho + f (s), \quad (1.19)$$

где  $f (s) := R_2 u' (R_2 - 0) G_E (R_2, s) - R_1 u' (R_1 + 0) G_E (R_1, s)$ .

## 1.6 Исследование интегрального уравнения

Рассмотрим уравнение (1.19). Положим  $N (\rho, s; \lambda) := \alpha G_E (\rho, s; \lambda) \rho$  и рассмотрим интегральное уравнение

$$u (s) = \int_{R_1}^{R_2} N (\rho, s; \lambda) u^3 (\rho) d\rho + f (s) \quad (1.20)$$

в пространстве  $C [R_1, R_2]$ .



Из свойств функции Грина ясно, что  $f \in C [R_1, R_2]$ . Считаем, что  $\lambda \neq \lambda_n$ .

Из свойств функции Грина следует, что ядро  $N (\rho, s; \lambda)$  является непрерывной функцией в квадрате  $R_1 \leq \rho, s \leq R_2$ .

Рассмотрим в  $C [R_1, R_2]$  линейный интегральный оператор

$$Nw = \int_{R_1}^{R_2} N (\rho, s; \lambda) w (\rho) d\rho.$$

Он ограничен, вполне непрерывен и  $\|N\| = \max_{s \in [R_1, R_2]} \int_{R_1}^{R_2} |N (\rho, s)| d\rho$ . Поскольку нелинейный оператор  $B (u) = u^3 (\rho)$  ограничен и непрерывен в  $C [R_1, R_2]$ , то нелинейный оператор

$$F (u) = \int_{R_1}^{R_2} N (\rho, s; \lambda) u^3 (\rho) d\rho$$

является вполне непрерывным на каждом ограниченном в  $C [R_1, R_2]$  множестве.

В последующих рассуждениях нам понадобится следующее вспомогательное числовое кубическое уравнение:  $\|N\| r^3 + \|f\| = r$ , где

$$\|f\| = \max_{s \in [R_1, R_2]} |f (s)|.$$

Изложим здесь известные факты об этом уравнении [30]. Пусть

$$r - \|N\| r^3 = \|f\|, \tag{1.21}$$

рассмотрим функцию  $y (r) := r - \|N\| r^3$ .

Функция  $y (r)$  имеет только одну положительную точку максимума  $r_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}$ , значение в которой равно  $y_{\max} = y (r_{\max}) = \frac{2}{3\sqrt{3\|N\|}}$ .

Тогда, при условии  $0 \leq \|f\| < \frac{2}{3\sqrt{3\|N\|}}$  уравнение (1.21) имеет два неотрицательных корня  $r_*$  и  $r^*$ ,  $r_* < r^*$ , удовлетворяющих неравенствам  $0 \leq r_* < \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}$ ;  $\frac{1}{\sqrt{3\|N\|}} < r^* \leq \frac{1}{\sqrt{\|N\|}}$ .

Эти корни нетрудно выписать как решения кубического уравнения

$$r^3 - \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}r + \frac{\|f\|}{\|N\|} = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} r_* &= -2\sqrt{\frac{1}{3\|N\|}} \cos \left( \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \|f\| \sqrt{\|N\|} \right) - \frac{2\pi}{3} \right), \\ r^* &= -2\sqrt{\frac{1}{3\|N\|}} \cos \left( \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \|f\| \sqrt{\|N\|} \right) + \frac{2\pi}{3} \right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Если  $\|f\| = 0$ , то  $r_* = 0$ ,  $r^* = \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}$ .

Если  $0 < \|f\| < \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}$ , то

$$r_* < \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}.$$

При  $\|f\| = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}$  имеем  $r_* = r^* = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}$ .

Таким образом, справедливо следующее утверждение [30]

**Утверждение 1.1.** *Если выполняется неравенство  $0 \leq \|f\| < \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}$ , то уравнение  $\|N\| r^3 + \|f\| = r$  имеет два неотрицательных решения*

$$\begin{aligned} r_* &= -2\sqrt{\frac{1}{3\|N\|}} \cos \left( \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \|f\| \sqrt{\|N\|} \right) - \frac{2\pi}{3} \right), \\ r^* &= -2\sqrt{\frac{1}{3\|N\|}} \cos \left( \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \|f\| \sqrt{\|N\|} \right) + \frac{2\pi}{3} \right), \end{aligned}$$

причем  $r_* < r^*$ .

**Утверждение 1.2.** *Если  $\|f\| \leq \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}$ , то уравнение (1.20) имеет, по крайней мере, одно решение и такое, что  $\|u\| \leq r^*$ .*

*Доказательство.* Используя принцип Шаудера [55]–[57], можно доказать, что для каждого  $f \in S_{\hat{\rho}}(0) \subset C[R_1, R_2]$ , где  $\hat{\rho} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}$ , существует решение  $u(\rho)$  уравнения (1.20) внутри шара  $S^* = S_{r^*}(0)$ .  $\square$

Действуя также как в [30] докажем существование и единственность решения уравнения (1.20) и непрерывную зависимость решения уравнения (1.20) от параметра.

**Утверждение 1.3.** Если  $\alpha \leq A^2$ , где

$$A = \frac{2}{3} \frac{1}{\|f\| \sqrt{3 \|N_1\|}}$$

и

$$\|N_1\| = \max_{R_1}^{R_2} \int |\rho G_E(\rho, s)| d\rho,$$

то уравнение (1.20) имеет единственное решение  $u$ , являющееся непрерывной функцией:  $u \in C[R_1, R_2]$  такое, что  $\|u\| \leq r_*$ .

*Доказательство.* Если  $u \in S_*$ , то

$$\|F(u)\| \leq \|N\| \cdot \|u\|^3 + \|f\| \leq \|N\| r_*^3 + \|f\| = r_*.$$

Если  $u_1, u_2 \in S_*$ , то

$$\|F(u_1) - F(u_2)\| = \left\| \int_{R_1}^{R_2} N(\rho, s; \lambda) (u_1^3(\rho) - u_2^3(\rho)) d\rho \right\| \leq 3 \|N\| r_*^2 \|u_1 - u_2\|.$$

Так как  $\alpha \leq A^2$ , то  $f(s)$  удовлетворяет условию  $0 \leq \|f\| < \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3 \|N\|}}$ .

Поэтому выполняется неравенство

$$r_* < \frac{1}{\sqrt{3 \|N\|}},$$

откуда  $3 \|N\| r_*^2 < 1$ .

Следовательно,  $F$  отображает  $S_*$  в себя и является сжимающим оператором на  $S_*$ . Поэтому уравнение (1.20) имеет единственное решение в  $S_*$ .  $\square$

Отметим, что  $A > 0$  и не зависит от  $\alpha$ .

## 1.7 Теорема о непрерывной зависимости решения от спектрального параметра

В дальнейшем нам понадобится теорема о зависимости решений интегрального уравнения (1.20) от параметра.

**Теорема 1.1.** Пусть ядро  $N$  и правая часть  $f$  интегрального уравнения (1.20) непрерывно зависят от параметра  $\lambda \in \Lambda_0$ ,  $N(\rho, s; \lambda) \in C([R_1, R_2] \times [R_1, R_2] \times \Lambda_0)$ ,  $f(s, \lambda) \in C([R_1, R_2] \times \Lambda_0)$ , на некотором отрезке  $\Lambda_0$  вещественной числовой оси. Пусть также

$$0 < \|f(\lambda)\| < \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3} \|N(\lambda)\|}. \quad (1.23)$$

Тогда решения  $u(\rho; \lambda)$  уравнения (1.20) при  $\lambda \in \Lambda_0$  существуют, единственны и непрерывно зависят от параметра  $\lambda$ ,  $u(\rho; \lambda) \in C([R_1, R_2] \times \Lambda_0)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим уравнение

$$u(s; \lambda) = \int_{R_1}^{R_2} N(\rho, s; \lambda) u^3(\rho; \lambda) d\rho + f(s; \lambda).$$

Существование и единственность решений  $u(\lambda)$  при условиях теоремы 1.1 следует из утверждения 1.3.

Докажем непрерывную зависимость этих решений от параметра  $\lambda$ .

Нетрудно видеть из формулы (1.22), что  $r_*(\lambda)$  непрерывно зависит от  $\lambda$  на отрезке  $\Lambda_0$ . Пусть  $r_0 = \max_{\lambda \in \Lambda_0} r_*(\lambda)$ , и максимум достигается в точке  $\lambda_0$ , то есть  $r_*(\lambda_0) = r_0$ .

Далее, пусть  $Q_0 = \max_{\lambda \in \Lambda_0} (3r_*^2(\lambda) \|N(\lambda)\|)$ , и максимум достигается в точке  $\hat{\lambda} \in \Lambda_0$ , то есть  $Q_0 = 3r_*^2(\hat{\lambda}) \|N(\hat{\lambda})\|$ . Тогда  $Q_0 < 1$  в силу условия (1.23) теоремы.

Предположим сначала, что  $\|u(\lambda)\| \geq \|u(\lambda + \Delta\lambda)\|$ . Тогда имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned}
|u(s; \lambda + \Delta\lambda) - u(s; \lambda)| &= \left| \int_{R_1}^{R_2} N(\rho, s; \lambda + \Delta\lambda) u^3(\rho; \lambda + \Delta\lambda) d\rho - \right. \\
&\quad \left. - \int_{R_1}^{R_2} N(\rho, s; \lambda) u^3(\rho; \lambda) d\rho + (f(s; \lambda + \Delta\lambda) - f(s; \lambda)) \right| \leq \\
&\leq \int_{R_1}^{R_2} |N(\rho, s; \lambda + \Delta\lambda) - N(\rho, s; \lambda)| \cdot |u(\lambda_0, \lambda, \Delta\lambda)|^3 d\rho + \\
&+ \int_{R_1}^{R_2} |N(\rho, s; \lambda)| \cdot |u^3(\rho; \lambda + \Delta\lambda) - u^3(\rho; \lambda)| d\rho + |f(s; \lambda + \Delta\lambda) - f(s; \lambda)| \leq \\
&\leq \|u(\lambda + \Delta\lambda)\|^3 \int_{R_1}^{R_2} |N(\rho, s; \lambda + \Delta\lambda) - N(\rho, s; \lambda)| d\rho + \\
&+ \|u(\lambda + \Delta\lambda) - u(\lambda)\| \left( \|u(\lambda + \Delta\lambda)\|^2 + \|u(\lambda + \Delta\lambda)\| \cdot \|u(\lambda)\| + \|u(\lambda)\|^2 \right) \times \\
&\quad \times \int_{R_1}^{R_2} |N(\rho, s; \lambda)| d\rho + \|f(\lambda + \Delta\lambda) - f(\lambda)\| \leq \\
&\leq r_0^3 \|N(\lambda + \Delta\lambda) - N(\lambda)\| + \\
&+ \|u(\lambda + \Delta\lambda) - u(\lambda)\| 3r_*^2(\lambda) \|N(\lambda)\| + \|f(\lambda + \Delta\lambda) - f(\lambda)\|.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\|u(\lambda + \Delta\lambda) - u(\lambda)\| \leq \frac{r_0^3 \|N(\lambda + \Delta\lambda) - N(\lambda)\| + \|f(\lambda + \Delta\lambda) - f(\lambda)\|}{1 - 3r_*^2(\lambda) \|N(\lambda)\|}$$

и

$$\begin{aligned}
\|u(\lambda + \Delta\lambda) - u(\lambda)\| &\leq \\
&\leq \frac{r_0^3 \|N(\lambda + \Delta\lambda) - N(\lambda)\| + \|f(\lambda + \Delta\lambda) - f(\lambda)\|}{1 - Q_0}, \quad (1.24)
\end{aligned}$$

где  $Q_0$  и  $r_0$  не зависят от  $\lambda$ .

Пусть теперь  $\|u(\lambda)\| < \|u(\lambda + \Delta\lambda)\|$ . Тогда все предыдущие оценки остаются в силе, если заменить аргументы  $\lambda$  на  $\lambda + \Delta\lambda$ , а  $\lambda + \Delta\lambda$  на

$\lambda$ . Таким образом, оценка (1.24) также остается в силе, откуда следует утверждение теоремы.  $\square$

## 1.8 Итерационный метод

Приближенные решения  $u_n$  интегрального уравнения (1.19), записанного в виде  $u = F(u)$ , могут быть определены итерационным процессом  $u_{n+1} = F(u_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \alpha \int_{R_1}^{R_2} G_E(\rho, s) \rho u_n^3 d\rho + f, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.25)$$

Последовательность  $u_n$  равномерно сходится к решению  $u$  уравнения (1.19) вследствие того, что  $F(u)$  – сжимающий оператор. Известна также оценка для скорости сходимости итерационного алгоритма (1.25). Сформулируем эти результаты в виде следующего утверждения [48].

**Утверждение 1.4.** *Последовательность приближенных решений  $u_n$  уравнения (1.19), определяемых посредством итерационного алгоритма (1.25), существует и сходится в норме пространства  $C[R_1, R_2]$  к (единственному) точному решению  $u$  этого уравнения, и верна оценка скорости сходимости:*

$$\|u_n - u\| \leq \frac{q^n}{1 - q} f(u_0), \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $q := 3 \|N\| r_*^2 < 1$  – коэффициент сжатия отображения  $F$ .

Из (1.25) следует, что  $u_n = u_n(\lambda)$  является непрерывной функцией по  $\lambda$ .

Заметим, что для приближенного определения собственных значений и собственных функций проще и эффективнее использовать метод задачи Коши (метод пристрелки), взяв начальные данные, например, в точке

$\rho = R_1$ . Разумеется, постоянной  $C_1$  при проведении вычислений необходимо придать определенное значение, фактически это означает задание значения собственной функции в точке  $\rho = R_1$ . Как уже говорилось выше, в рассматриваемой нелинейной задаче собственные значения зависят от начальных условий.

Описанный здесь итерационный алгоритм позволяет получить приближенное решение, но он слишком громоздок в реализации. Основное значение используемого здесь теоретического аппарата – это строгое доказательство существования собственных значений. Численные результаты, представленные в главе 4, получены с помощью метода задачи Коши.

## 1.9 Дисперсионное уравнение

Из уравнения (1.19) при  $s = R_1 + 0$  и  $s = R_2 - 0$  получаем следующую систему

$$\left\{ \begin{array}{l} u(R_1 + 0) = \alpha \int_{R_1}^{R_2} G_E(\rho, R_1) \rho u^3(\rho) d\rho + \\ \quad + R_2 u'(R_2 - 0) G_E(R_2, R_1) - R_1 u'(R_1 + 0) G_E(R_1, R_1), \\ \\ u(R_2 - 0) = \alpha \int_{R_1}^{R_2} G_E(\rho, R_2) \rho u^3(\rho) d\rho + \\ \quad + R_2 u'(R_2 - 0) G_E(R_2, R_2) - R_1 u'(R_1 + 0) G_E(R_1, R_2). \end{array} \right.$$

Используя условия сопряжения (1.14) и принимая во внимание решения (1.10), (1.12), из последнего получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 I_1(k_1 R_1) = \alpha \int_{R_1}^{R_2} G_E(\rho, R_1) \rho u^3(\rho) d\rho + \\ \quad + C_2 R_2 k_3 K'_1(k_3 R_2) G_E(R_2, R_1) - C_1 R_1 k_1 I'_1(k_1 R_1) G_E(R_1, R_1), \\ \\ C_2 K_1(k_3 R_2) = \alpha \int_{R_1}^{R_2} G_E(\rho, R_2) \rho u^3(\rho) d\rho + \\ \quad + C_2 R_2 k_3 K'_1(k_3 R_2) G_E(R_2, R_2) - C_1 R_1 k_1 I'_1(k_1 R_1) G_E(R_1, R_2). \end{array} \right.$$

Выразив постоянную  $C_2$  из первого и второго уравнений рассматриваемой системы, получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = \frac{1}{C_1 I_1(k_1 R_1)} \left( \alpha \int_{R_1}^{R_2} G(\rho, R_1) \rho u^3(\rho) d\rho + \right. \\ \quad \left. + R_2 K'_1(k_3 R_2) G(R_2, R_1) - R_1 C_1 I'_1(k_1 R_1) G(R_1, R_1) \right), \\ \\ C_2 = \frac{1}{K_1(k_3 R_2) - R_2 K'_1(k_3 R_2) G(R_2, R_2)} \alpha \int_{R_1}^{R_2} G(\rho, R_2) \rho u^3(\rho) d\rho + \\ \quad + R_1 C_1 I'_1(k_1 R_1) G(R_1, R_2). \end{array} \right.$$

Приравняв эти выражения, получаем дисперсионное уравнение в форме

$$C_1 g(\lambda) = \alpha P(\lambda), \quad (1.26)$$

где

$$\begin{aligned} g(\lambda) = & \left( I_1(k_1 R_1) + R_1 k_1 I'_1(k_1 R_1) G_E(R_1, R_1) \right) \times \\ & \times \left( K_1(k_3 R_2) - R_2 k_3 K'_1(k_3 R_2) G_E(R_2, R_2) \right) + \\ & + R_1 R_2 k_1 k_3 I'_1(k_1 R_1) K'_1(k_3 R_2) G_E(R_1, R_2) G_E(R_2, R_1) \end{aligned}$$

и



$$\begin{aligned}
P(\lambda) = & \left( K_1(k_3 R_2) - R_2 k_3 K_1'(k_3 R_2) G_E(R_2, R_2) \right) \times \\
& \times \int_{R_1}^{R_2} G_E(\rho, R_1; \lambda) \rho u^3(\rho) d\rho + \\
& + R_2 k_3 K_1'(k_3 R_2) G_E(R_2, R_1) \int_{R_1}^{R_2} G_E(\rho, R_2; \lambda) \rho u^3(\rho) d\rho.
\end{aligned}$$

## 1.10 Существование решений дисперсионного уравнения

Нули функции  $\Phi(\lambda) \equiv C_1 g(\lambda) - \alpha P(\lambda)$  – это значения  $\lambda$ , для которых существует нетривиальное решение задачи  $P_E$ . То есть, если  $\lambda = \tilde{\lambda}$  таково, что  $\Phi(\tilde{\lambda}) = 0$ , то собственные значения рассматриваемой задачи определяются из уравнения  $\tilde{\lambda} = \gamma^2$ .

Для исследования разрешимости задачи  $P_E$  необходимо исследовать линейную задачу (т.е. задачу  $P_E$  при  $\alpha = 0$ ). Вопрос о существовании решений дисперсионного уравнения для линейной задачи подробно рассмотрен в работе Ю.Г. Смирнова [31], приведем без доказательства утверждение, которое следует из теоремы доказанной в этой работе.

**Утверждение 1.5.** Пусть  $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \geq \varepsilon_0$ ,  $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \varepsilon_2^* = \min_{\rho \in [R_1, R_2]} \varepsilon_2(\rho)$  и пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  такие собственные значения задачи (1.15), что  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2^*)$  тогда задача  $P_E$  при  $\alpha = 0$  имеет по крайней мере  $p - 1$  решений (собственных значений)  $\tilde{\gamma}_j$ ,  $j = \overline{1, p - 1}$  таких, что  $\tilde{\gamma}_j^2 \in (\lambda_j, \lambda_{j+1})$ ,  $j = \overline{1, p - 1}$ .

*Замечание 1.3.* Всегда можно подобрать толщину  $R_2 - R_1$  оболочки волновода  $\Sigma$  так, что линейная задача будет иметь решение.

Смысл утверждения 1.5 заключается в том, что собственные значения задачи  $P_E$  при  $\alpha = 0$  (линейной задачи) лежат между собственными значениями задачи (1.15).

Переходим к решению нелинейной задачи сопряжения.

Теперь можно показать, что существуют решения уравнения

$$\Phi(\lambda) = 0.$$

Действительно, из утверждения 1.5 следует, что если существуют такие целые числа  $k \geq 1$  и  $l \geq 0$ , что справедливо

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \lambda_l < \lambda_{l+1} < \dots < \lambda_{l+k-1} < \lambda_{l+k} < \varepsilon_2^*,$$

где  $\varepsilon_2^* = \min_{\rho \in [R_1, R_2]} \varepsilon_2(\rho)$ , то существуют по крайней мере  $k$  корней  $\hat{\lambda}_i \in (\lambda_{l+i-1}, \lambda_{l+i})$ ,  $i = \overline{1, k}$  уравнения  $g(\lambda) = 0$ .

Выберем достаточно малые числа  $\delta_i > 0$ , такие, что на объединении

$$\Gamma := \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$$

отрезков

$$\Gamma_i := \left[ \sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1}, \sqrt{\lambda_i} - \delta_i \right], i = \overline{1, k}$$

функция Грина  $G_E(\rho, s; \lambda)$  существует и непрерывна. Кроме того, считаем  $\delta_i$  таковыми, что выполняется условие  $g(\sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1}) g(\sqrt{\lambda_i} - \delta_i) < 0$  (то есть  $\delta_i$  таковы, что условие существования решений линейной задачи не нарушается).

Ясно, что на отрезках  $\Gamma_i$  величина  $\Phi(\lambda)$  ограничена. Более того, за счет выбора  $\alpha$  произведение  $\alpha P(\lambda)$  может быть сделано достаточно малым. Функция  $g(\lambda)$  непрерывна и меняет знак при изменении  $\lambda$  от  $\lambda_{i-1} + \delta_{i-1}$  до  $\lambda_i - \delta_i$ . Поскольку величина  $P(\lambda)$  ограничена при изменении  $\lambda$  от  $\lambda_{i-1} + \delta_{i-1}$  до  $\lambda_i - \delta_i$ , то отсюда ясно, что за счет выбора  $\alpha$  всегда можно добиться того, что уравнение  $\Phi(\lambda) = 0$  будет иметь по крайней мере  $k$  корней  $\tilde{\lambda}_i$ , причем  $\tilde{\lambda}_i \in (\lambda_{i-1} + \delta_{i-1}, \lambda_i - \delta_i)$ ,  $i = \overline{1, k}$ .

Основным результатом этой главы является следующая

**Теорема 1.2.** Пусть числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_2^* = \min_{\rho \in [R_1, R_2]} \varepsilon_2(\rho)$  удовлетворяют условиям  $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \geq \varepsilon_0, \varepsilon_2^* > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) > 0$  и существуют целые числа  $k \geq 1$  и  $l \geq 0$ , что справедливо  $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \lambda_l < \lambda_{l+1} < \dots < \lambda_{l+k-1} < \lambda_{l+k} < \varepsilon_2^*$ , где  $\lambda_i$  собственные значения задачи (1.15). Тогда найдется число  $\alpha_0 > 0$  такое, что для всякого  $\alpha \leq \alpha_0$  существует по крайней мере  $k$  собственных значений  $\gamma_i$  задачи  $P_E$ , причем  $\gamma_i \in (\sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1}, \sqrt{\lambda_i} - \delta_i), i = \overline{1, k}$ .

*Доказательство.* Функция Грина существует для всех  $\gamma \in \Gamma$ . Также ясно, что функция  $A(\gamma) = \frac{2}{3\|f(\gamma)\|\sqrt{3\|N_1(\gamma)\|}}$  является непрерывной функцией при  $\gamma \in \Gamma$ . Пусть  $A_1 = \min_{\gamma \in \Gamma} A(\gamma)$  и пусть  $\alpha < A_1^2$ . В соответствии с утверждением 1.3 существует единственное решение  $u = u(\gamma)$  уравнения (1.20) для всякого  $\gamma \in \Gamma$ . Это решение является непрерывной функцией и  $\|u\| \leq r_* = r_*(\gamma)$ . Пусть  $r_{00} = \max_{\gamma \in \Gamma} r_*(\gamma)$ . Оценивая  $P(\lambda)$ , мы получаем  $|P(\lambda)| \leq Cr_{00}^3$ , где  $C$  – некоторая постоянная.

Функция  $g(\gamma)$  непрерывна и уравнение  $g(\gamma) = 0$  имеет по крайней мере один корень  $\tilde{\gamma}_i$  внутри отрезка  $\Gamma_i$ , то есть  $\sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1} < \tilde{\gamma}_i < \sqrt{\lambda_i} - \delta_i$ . Обозначим  $M_1 = \min_{l \leq i \leq l+k-1} |g(\sqrt{\lambda_i} + \delta_i)|, M_2 = \min_{l+1 \leq i \leq l+k} |g(\sqrt{\lambda_i} - \delta_i)|$ . Тогда, величина  $\tilde{M} = \min\{M_1, M_2\}$  положительна и не зависит от  $\alpha$ .

Если  $\alpha \leq \frac{\tilde{M}}{Cr_{00}^3}$ , тогда

$$\begin{aligned} & \left( C_1 g(\sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1}) - \alpha P(\sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1}) \right) \times \\ & \quad \times \left( C_1 g(\sqrt{\lambda_i} - \delta_i) - \alpha P(\sqrt{\lambda_i} - \delta_i) \right) < 0. \end{aligned}$$

Функция  $C_1 g(\lambda) - \alpha P(\lambda)$  является непрерывной, следовательно, уравнение  $C_1 g(\lambda) - \alpha P(\lambda) = 0$  имеет корень  $\hat{\gamma}_i$  внутри  $\Gamma_i$ , то есть  $\sqrt{\lambda_i} + \delta_i < \hat{\gamma}_i < \sqrt{\lambda_{i+1}} - \delta_{i+1}$ . Мы можем выбрать  $\alpha_0 = \min\left\{A_1^2, \frac{\tilde{M}}{Cr_{00}^3}\right\}$ .  $\square$

Из доказанной теоремы следует, что при условиях, сформулированных выше, существуют осесимметричные распространяющиеся ТЕ-

поляризованные волны без затухания в неоднородных цилиндрических диэлектрических волноводах кругового сечения, заполненных немагнитной, изотропной неоднородной средой с нелинейностью, выраженной законом Керра. Этот результат обобщает известное соответствующее утверждение как для однородных диэлектрических волноводов [17], так и для неоднородных диэлектрических волноводов [21] круглого сечения с заполнением линейной средой (при  $\alpha = 0$ ).

## Глава 2

# Нелинейная задача сопряжения на собственные значения, описывающая распространение ТМ-волн в двухслойных цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных неоднородной нелинейной средой

Глава посвящена распространению электромагнитных ТМ-волн в двухслойном цилиндрическом волноводе с нелинейной неоднородной диэлектрической проницаемостью. Проблема сводится к решению нелинейной задачи сопряжения на собственные значения для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказана теорема о существовании и локализации собственных значений рассматриваемой задачи.

Результаты главы опубликованы в [14, 15].

## 2.1 Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$  с цилиндрической системой координат  $O\rho\varphi z$ . Пространство заполнено изотропной средой без источников с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_3 \equiv \text{const}$ , где  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума. В  $\mathbb{R}^3$  помещен двухслойный цилиндрический диэлектрический волновод

$$\Sigma := \{(\rho, \varphi, z) : 0 \leq \rho < R_1, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \cup \\ \cup \{(\rho, \varphi, z) : R_1 \leq \rho \leq R_2, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

с образующей, параллельной оси  $Oz$ , и круговым поперечным сечением.

На рис. 2.1 представлена геометрия задачи. Волновод неограниченно продолжается в направлении  $z$ .

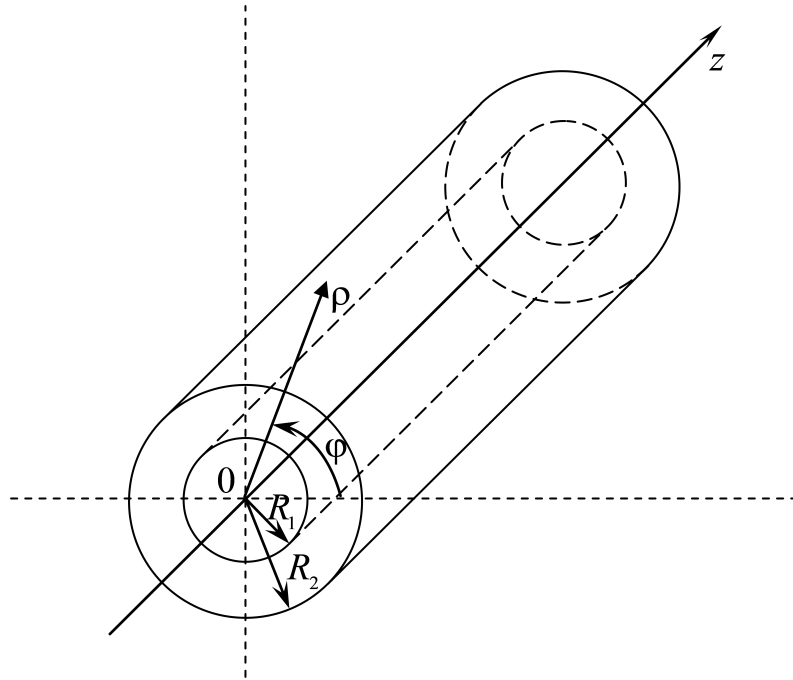


Рис. 2.1: Геометрия задачи.

Сечение волновода, перпендикулярное его оси, состоит из круга радиуса  $R_1$  и кольца с внутренним радиусом  $R_1$ , внешним радиусом  $R_2$  соответственно, то есть, волновод является двухслойным (см. рис. 2.1):

$R_1$  есть радиус внутреннего цилиндра,  $R_2 - R_1$  есть толщина внешней цилиндрической оболочки. Такие многослойные волноводы в случае линейных однородных сред исследовались в работе [17], одно из практических приложений указано в [46].

Запишем уравнения Максвелла в форме [34]

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} = \partial_t \tilde{\mathbf{D}}, \quad \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} = -\partial_t \tilde{\mathbf{B}}, \quad (2.1)$$

где  $\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}} = \mu \tilde{\mathbf{H}}$  и  $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ .

Ток проводимости  $\tilde{\mathbf{j}}$  в уравнениях (2.1) отсутствует, так как  $\tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\tilde{\mathbf{H}}$  образуют полное поле.

Из уравнений (2.1) получаем

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} = \partial_t (\varepsilon \tilde{\mathbf{E}}), \quad \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} = -\partial_t (\mu \tilde{\mathbf{H}}). \quad (2.2)$$

Электромагнитное поле  $\tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\tilde{\mathbf{H}}$  удовлетворяет системе уравнений Максвелла (2.2), условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границах раздела сред  $\rho = R_1$ ,  $\rho = R_2$  и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает, как  $O(|x|^{-1})$  при  $\rho \rightarrow \infty$  в области  $\rho > R_2$ .

Пусть электромагнитное поле гармонически зависит от времени [43]

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\rho, \varphi, z, t) &= \mathbf{E}^+(\rho, \varphi, z) \cos \omega t + \mathbf{E}^-(\rho, \varphi, z) \sin \omega t, \\ \tilde{\mathbf{H}}(\rho, \varphi, z, t) &= \mathbf{H}^+(\rho, \varphi, z) \cos \omega t + \mathbf{H}^-(\rho, \varphi, z) \sin \omega t, \end{aligned}$$

где  $\omega$  – круговая частота,  $\tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\mathbf{E}^+$ ,  $\mathbf{E}^-$ ,  $\tilde{\mathbf{H}}$ ,  $\mathbf{H}^+$ ,  $\mathbf{H}^-$  – действительные вектор-функции.

Легко видеть, что поля  $\tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\tilde{\mathbf{H}}$  выражаются следующим образом

$$\tilde{\mathbf{E}} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} e^{-i\omega t} \}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{H} e^{-i\omega t} \},$$

где величины

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + i\mathbf{E}^-, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^+ + i\mathbf{H}^-$$

носят название комплексных амплитуд и

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= (E_\rho, E_\varphi, E_z)^T, \\ \mathbf{H} &= (H_\rho, H_\varphi, H_z)^T;\end{aligned}$$

$(\cdot)^T$  обозначает операцию транспонирования. Каждая компонента полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  является функцией трех пространственных переменных.

Мы считаем, что при  $R_1 \leq \rho \leq R_2$ , диэлектрическая проницаемость имеет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_0 \varepsilon_2(\rho) + \varepsilon_0 \tilde{\alpha} \left( |(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_\rho)|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_0 |(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_\varphi)|^2 + \varepsilon_0 |(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_z)|^2 \right), \quad (2.3)\end{aligned}$$

где  $\mathbf{e}_k$  – ортонормированный вектор в направлении оси  $k$ ,  $(\cdot, \cdot)$  – евклидово скалярное произведение векторов,  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума,  $\varepsilon_2(\rho) \in C[R_1, R_2]$ ,  $\tilde{\alpha} > 0$  – вещественная постоянная.

При  $0 \leq \rho < R_1$ , диэлектрическая проницаемость есть  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_1 = \text{const}$ .

Поскольку  $|\mathbf{E}e^{-i\omega t}| = |\mathbf{E}|$ , то для полей  $\mathbf{E}e^{-i\omega t}$  и  $\mathbf{H}e^{-i\omega t}$  и диэлектрической проницаемости (2.3) зависимость уравнений Максвелла (2.2) от времени такая же как и в линейном случае (то есть, когда  $\varepsilon$  постоянная). Это позволяет доказать справедливость уравнений Максвелла (2.2) для комплексных амплитуд  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ .

Действительно, подставив комплексные амплитуды  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  в систему уравнений Максвелла (2.2) убеждаемся, что  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{H} &= -i\omega \varepsilon \mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= i\omega \mu \mathbf{H},\end{aligned} \quad (2.4)$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границах раздела сред  $\rho = R_1$ ,  $\rho = R_2$  и условию излучения на беско-



нечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при  $\rho \rightarrow \infty$  в области  $\rho > R_2$ .

Диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}\varepsilon_0$  во всем пространстве имеет вид

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \leq \rho < R_1, \\ \varepsilon_2(\rho) + \tilde{\alpha}|\mathbf{E}|^2, & R_1 \leq \rho \leq R_2, \\ \varepsilon_3, & \rho > R_2, \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_3$  – вещественные положительные постоянные ,

$$|\mathbf{E}|^2 = |(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_\rho)|^2 + |(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_\varphi)|^2 + |(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_z)|^2.$$

Среда также предполагается изотропной и немагнитной. Во всем пространстве полагаем  $\mu = \mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума.

Разыскиваются поверхностные волны, распространяющиеся вдоль образующей волновода. Решение уравнений Максвелла ищется во всем пространстве.

## 2.2 ТМ-волны

Рассмотрим ТМ волны в гармоническом режиме

$$\mathbf{E}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} (E_\rho, 0, E_z)^T, \mathbf{H}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} (0, H_\varphi, 0)^T,$$

где  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  – комплексные амплитуды и  $E_\rho = E_\rho(\rho, \varphi, z)$ ,  $E_z = E_z(\rho, \varphi, z)$ ,  $H_\varphi = H_\varphi(\rho, \varphi, z)$ .

Подставив поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в уравнения Максвелла (2.4), получим

$$\begin{cases} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = i\omega\varepsilon E_\rho, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = i\omega\mu H_\varphi, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\varphi)}{\partial \rho} = -i\omega\varepsilon E_z. \end{cases}$$

Из второго и четвертого уравнений этой системы видно, что  $E_z$  и  $E_\rho$  не зависят от  $\varphi$ ; поскольку  $H_\varphi$  выражается через  $E_z$  и  $E_\rho$ , то  $H_\varphi$  также не зависит от  $\varphi$ .

*Замечание 2.1.* Выбирая для компонент зависимость  $e^{in\varphi}$  по переменной  $\varphi$ , где  $n$  – целое число и взяв  $n = 0$ , получим волны, не зависящие от  $\varphi$ .

Поверхностные волны, распространяющиеся вдоль образующей  $Oz$  волновода  $\Sigma$ , гармонически зависят от  $z$ . Значит, компоненты полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  имеют представление

$$E_\rho = E_\rho(\rho) e^{i\gamma z}, E_z = E_z(\rho) e^{i\gamma z}, H_\varphi = H_\varphi(\rho) e^{i\gamma z}. \quad (2.6)$$

где  $\gamma$  – неизвестный вещественный спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

Рассмотренная выше система принимает вид

$$\begin{cases} i\gamma E_\rho(\rho) - E'_z(\rho) = i\omega\mu H_\varphi(\rho), \\ i\gamma H_\varphi(\rho) = i\omega\varepsilon E_\rho(\rho), \\ \frac{1}{\rho}(\rho H_\varphi(\rho))' = -i\omega\varepsilon E_z(\rho), \end{cases} \quad (2.7)$$

где  $(\cdot)' \equiv \frac{d\cdot}{d\rho}$ .

Из первого уравнения системы (2.7) находим

$$H_\varphi(\rho) = \frac{1}{i\omega\mu} (i\gamma E_\rho(\rho) - E'_z(\rho)). \quad (2.8)$$

Подставляя выражение (2.8) в оставшиеся два уравнения системы (2.7), получаем

$$\begin{cases} -\gamma (iE_z)' = (\gamma^2 - \omega^2\varepsilon\mu) E_\rho, \\ -\gamma \frac{1}{\rho}(\rho E_\rho)' - \frac{1}{\rho}(\rho (iE_z)')' = \omega^2\varepsilon\mu (iE_z). \end{cases} \quad (2.9)$$

Пусть  $k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$ . Обозначив  $u_1(\rho, \gamma) := E_\rho(\rho, \gamma)$ ,  $u_2(\rho, \gamma) := iE_z(\rho, \gamma)$ , получим из (2.9)

$$\begin{cases} \gamma u_2' + (\gamma^2 - k_0^2\tilde{\varepsilon}) u_1 = 0, \\ -\gamma \frac{1}{\rho}(\rho u_1)' - \frac{1}{\rho}(\rho u_2')' - k_0^2\tilde{\varepsilon} u_2 = 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

где производная обозначает дифференцирование по  $\rho$  и  $u_1(\rho, \gamma)$ ,  $u_2(\rho, \gamma)$  – вещественные функции, и

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \leq \rho < R_1, \\ \varepsilon_2(\rho) + \tilde{\alpha}(|u_1|^2 + |u_2|^2) & R_1 \leq \rho \leq R_2, \\ \varepsilon_3, & \rho > R_2, \end{cases}$$

Считаем, что функции  $u_1, u_2$  дифференцируемы так, что

$$u_1 \in C[0, R_1] \cap C[R_1, R_2] \cap C[R_2, +\infty) \cap \\ \cap C^1[0, R_1] \cap C^1[R_1, R_2] \cap C^1[R_2, +\infty), \quad (2.11)$$

$$u_2 \in C[0, R_1] \cap C[R_1, R_2] \cap C[R_2, +\infty) \cap \\ \cap C^1[0, R_1] \cap C^1[R_1, R_2] \cap C^1[R_2, +\infty) \cap \\ \cap C^2(0, R_1) \cap C^2(R_1, R_2) \cap C^2(R_2, +\infty). \quad (2.12)$$

Принадлежность функции  $u_1$  или  $u_2$  указанному пересечению множеств означает, что сужение функции на выбранный отрезок (интервал или полуинтервал) принадлежат соответствующему функциональному классу.

Считаем, что  $\gamma^2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ .

## 2.3 Дифференциальные уравнения задачи

При  $0 \leq \rho < R_1$  имеем  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1$ , тогда система (2.10) примет вид

$$\begin{cases} \gamma u_2' + k_1^2 u_1 = 0, \\ -\gamma \frac{1}{\rho} (\rho u_1)' - \frac{1}{\rho} (\rho u_2)' - k_0^2 \varepsilon_1 u_2 = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

где  $k_1^2 = \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_1$ . Выражая функцию  $u_1$  из первого уравнения и подставляя ее во второе уравнение системы, получаем уравнение

$$\frac{\gamma^2}{k_1^2} \frac{1}{\rho} (\rho u_2)' - \frac{1}{\rho} (\rho u_2)' - k_0^2 \varepsilon_1 u_2 = 0.$$

Это уравнение является уравнением Бесселя, после упрощения оно принимает вид

$$\frac{1}{\rho} (\rho u_2')' - k_1^2 u_2 = 0.$$

Решение системы (2.13) имеет вид

$$\begin{cases} u_1(\rho) = -\frac{\gamma}{k_1} \left( C_1 I_0'(k_1 \rho) + \tilde{C}_1 K_0'(k_1 \rho) \right), \\ u_2(\rho) = C_1 I_0(k_1 \rho) + \tilde{C}_1 K_0(k_1 \rho). \end{cases} \quad (2.14)$$

Функции  $I_0$  и  $K_0$  – функции Бесселя мнимого аргумента (модифицированные функции Бесселя). Известно [26], что функция  $K_0(\rho)$  стремится к бесконечности при  $\rho \rightarrow 0$ , а функция  $I_0(\rho)$  стремится к единице при  $\rho \rightarrow 0$ . Принимая во внимание условие ограниченности поля во всякой конечной области и учитывая то, что  $I_0'(\rho) = I_1(\rho)$ , получаем, что  $\tilde{C}_1 = 0$  и

$$\begin{cases} u_1(\rho) = -\frac{\gamma}{k_1} C_1 I_1(k_1 \rho), \\ u_2(\rho) = C_1 I_0(k_1 \rho). \end{cases} \quad (2.15)$$

При  $\rho > R_2$  имеем  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_3$ , тогда система (2.10) примет вид

$$\begin{cases} \gamma u_2' + k_3^2 u_1 = 0, \\ -\gamma \frac{1}{\rho} (\rho u_1)' - \frac{1}{\rho} (\rho u_2)' - k_0^2 \varepsilon_3 u_2 = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

где  $k_3^2 = \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_3$ .

Решение системы (2.16) имеет вид

$$\begin{cases} u_1(\rho) = -\frac{\gamma}{k_3} \left( \tilde{C}_2 I_0'(k_3 \rho) + C_2 K_0'(k_3 \rho) \right), \\ u_2(\rho) = \tilde{C}_2 I_0(k_3 \rho) + C_2 K_0(k_3 \rho). \end{cases} \quad (2.17)$$

Известно [26], что функция  $I_0(\rho)$  стремится к бесконечности при  $\rho \rightarrow +\infty$ , а функция  $K_0(\rho)$  стремится к нулю при  $\rho \rightarrow +\infty$ . Принимая во внимание условие на бесконечности и учитывая то, что  $K_0'(\rho) = -K_1(\rho)$ , получаем, что  $\tilde{C}_2 = 0$  и

$$\begin{cases} u_1(\rho) = \frac{\gamma}{k_3} C_2 K_1(k_3 \rho), \\ u_2(\rho) = C_2 K_0(k_3 \rho). \end{cases} \quad (2.18)$$

В оболочке волновода  $R_1 \leq \rho \leq R_2$  имеем  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_2(\rho) + \tilde{\alpha}(|u_1|^2 + |u_2|^2)$ .

Тогда система (2.10) примет вид

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{k_2^2(\rho)} (\gamma u_2' - \alpha f_1), \\ -\gamma \frac{1}{\rho} (\rho u_1)' - \frac{1}{\rho} (\rho u_2')' - k_0^2 \varepsilon_2(\rho) u_2 = \alpha f_2, \end{cases} \quad (2.19)$$

где

$$f_1 := (|u_1|^2 + |u_2|^2) u_1, \quad f_2 := (|u_1|^2 + |u_2|^2) u_2, \\ \alpha = \tilde{\alpha} k_0^2, \quad k_2^2(\rho) = k_0^2 \varepsilon_2(\rho) - \gamma^2.$$

## 2.4 Условия сопряжения и задача сопряжения

Как известно, касательные составляющие электромагнитного поля непрерывны на границе раздела сред. В рассматриваемом случае касательными составляющими являются компоненты  $E_z$  и  $H_\varphi$ . Из этого условия получаем

$$E_z(R_1 + 0) = E_z(R_1 - 0), \quad H_\varphi(R_1 + 0) = H_\varphi(R_1 - 0), \\ E_z(R_2 + 0) = E_z(R_2 - 0), \quad H_\varphi(R_2 + 0) = H_\varphi(R_2 - 0).$$

Далее

$$H_\varphi(\rho) = \frac{1}{i\omega\mu} (i\gamma E_\rho(\rho) + E_z'(\rho)).$$

Из непрерывности  $H_\varphi$  получаем, что величина  $\gamma E_\rho + iE_z'$  на границе раздела сред непрерывна. Из сказанного получаем условия сопряжения для функций  $u_1(\rho)$ ,  $u_2(\rho)$

$$\begin{aligned} [\gamma u_1 + u_2']|_{\rho=R_1} &= 0, & [u_2]|_{\rho=R_1} &= 0, \\ [\gamma u_1 + u_2']|_{\rho=R_2} &= 0, & [u_2]|_{\rho=R_2} &= 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где  $[v]|_{\rho=s} = \lim_{\rho \rightarrow s-0} v(\rho) - \lim_{\rho \rightarrow s+0} v(\rho)$  – скачок предельных значений функции в точке  $s$ , определенных в силу (2.11), (2.12).

Принимая во внимание решения (2.15), (2.18) системы уравнений (2.10), в которых учтены условие ограниченности поля во всякой конеч-

ной области и условие излучения на бесконечности сформулируем задачу  $P_M$ :

*Задача  $P_M$ : требуется доказать существование вещественных значений  $\gamma$  таких, что при заданном значении  $C_1 \neq 0$  (или  $C_2 \neq 0$ ) существует ненулевые функции  $u_1(\rho)$ ,  $u_2(\rho)$ , которые при  $\rho < R_1$  и  $\rho > R_2$  определяются формулами (2.15), (2.18) соответственно, а при  $R_1 \leq \rho \leq R_2$  являются решением системы уравнений (2.19), причем, определенные таким образом при  $\rho \in [0, +\infty)$  функции  $u_1(\rho)$ ,  $u_2(\rho)$  удовлетворяют условиям сопряжения (2.20).*

Значения  $\gamma$ , являющиеся решением задачи  $P_M$  называются собственными значениями, а соответствующие им функции  $u_1(\rho)$ ,  $u_2(\rho)$  – собственными функциями. Такое определение собственного значения было дано в [10] и неоднократно использовалось в дальнейшем (см., например, [6, 8]).

В рассматриваемой задаче собственное значение  $\gamma$  зависит от значения собственной функции на одной из границ волновода.

*Замечание 2.2.* Можно задать значение  $C_2$  вместо  $C_1$ .

## 2.5 Система нелинейных интегральных уравнений

Рассмотрим систему нелинейных уравнений (2.19). Из первого уравнения системы получаем:

$$u_1 = \frac{1}{k_2^2(\rho)} (\gamma u_2' - \alpha f_1), \quad (2.21)$$

и подставляя это выражение во второе уравнение последовательно получаем:

$$-\gamma \frac{1}{\rho} \left( \rho \frac{1}{k_2^2(\rho)} (\gamma u_2' - \alpha f_1) \right)' - \frac{1}{\rho} (\rho u_2')' - k_0^2 \varepsilon_2(\rho) u_2 = \alpha f_2,$$

откуда

$$-\gamma \frac{1}{\rho} \left( \rho \frac{\gamma u_2'}{k_2^2(\rho)} \right)' - \frac{1}{\rho} (\rho u_2')' - k_0^2 \varepsilon_2(\rho) u_2 = \alpha \left( f_2 - \gamma \frac{1}{\rho} \left( \rho \frac{f_1}{k_2^2(\rho)} \right)' \right),$$

далее

$$\frac{1}{\rho} \left( \rho \frac{\gamma^2 u_2'}{k_2^2(\rho)} + \rho u_2' \right)' + k_0^2 \varepsilon_2(\rho) u_2 = \alpha \left( \gamma \frac{1}{\rho} \left( \rho \frac{f_1}{k_2^2(\rho)} \right)' - f_2 \right),$$

наконец

$$\frac{1}{\rho} \left( \rho u_2' \left( \frac{\gamma^2 + k_0^2 \varepsilon_2(\rho) - \gamma^2}{k_2^2(\rho)} \right) \right)' + k_0^2 \varepsilon_2(\rho) u_2 = \alpha \left( \gamma \frac{1}{\rho} \left( \rho \frac{f_1}{k_2^2(\rho)} \right)' - f_2 \right).$$

Окончательно получаем

$$\left( \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} u_2' \right)' + \rho \varepsilon_2(\rho) u_2 = \frac{\alpha}{k_0^2} \left( \gamma \left( \rho \frac{f_1}{k_2^2(\rho)} \right)' - \rho f_2 \right) \quad (2.22)$$

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение (2.22), записанное в виде

$$L_M u_2 \equiv \left( \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} u_2' \right)' + \rho \varepsilon_2(\rho) u_2 = \alpha W(\rho) \quad (2.23)$$

где  $W(\rho) := \frac{1}{k_0^2} \left( \gamma \left( \rho \frac{f_1}{k_2^2(\rho)} \right)' - \rho f_2 \right)$ .

Пусть  $\lambda := \gamma^2$ . Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \left( \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} v_n' \right)' + \rho \varepsilon_2(\rho) v_n &= 0, R_1 \leq \rho \leq R_2 \\ v_n|_{\rho=R_1} &= v_n|_{\rho=R_2} = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Поскольку оператор  $L_M$  имеет непрерывные коэффициенты (не обращающиеся в нуль)  $\rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} \in C^1[R_1, R_2]$ ,  $\rho \varepsilon_2(\rho) \in C[R_1, R_2]$  следовательно

для уравнения  $L_M u_2$  существуют два линейно независимых решения. Тогда существует функция Грина (или может быть построена обобщенная функция Грина)  $G_M(\rho, s; \lambda)$  краевой задачи (см., например, [23])

$$L_M G_M = -\delta(\rho - s), G_M|_{\rho=R_1} = G_M|_{\rho=R_2} = 0 \quad (R_1 \leq s \leq R_2). \quad (2.25)$$

Функция Грина  $G_M(\rho, s; \lambda)$  в окрестности собственного значения  $\lambda_i$  может быть представлена в виде (см., например, [25])

$$G_M(\rho, s; \lambda) = -\frac{v_i(\rho)v_i(s)}{\lambda - \lambda_i} + G_1(\rho, s; \lambda), \quad (2.26)$$

где  $G_1(\rho, s; \lambda)$  регулярна в окрестности точки  $\lambda_i$ , а  $\lambda_n, v_n(\rho)$  уже упомянутые системы собственных чисел и собственных функций.

Все собственные значения рассматриваемой краевой задачи (2.24) являются простыми [35].

Используя вторую формулу Грина [45], получаем

$$\begin{aligned} & \int_{R_1}^{R_2} (vL_M u - uL_M v) d\rho = \\ & = \int_{R_1}^{R_2} \left[ v \left( \left( \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} u' \right)' + \rho \varepsilon_2(\rho) u \right) - u \left( \left( \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} v' \right)' + \rho \varepsilon_2(\rho) v \right) \right] d\rho = \\ & = \int_{R_1}^{R_2} \left[ v \left( \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} u' \right)' - u \left( \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} v' \right)' \right] d\rho = \\ & = \int_{R_1}^{R_2} v \left( \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} u' \right)' d\rho - \int_{R_1}^{R_2} u \left( \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} v' \right)' d\rho. \quad (2.27) \end{aligned}$$

Упростим выражение (2.27), используя интегрирование по частям



$$\begin{aligned}
\int_{R_1}^{R_2} v \left( \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} u' \right)' d\rho &= \\
&= \left| \begin{array}{l} \bar{u} = v \quad d\bar{u} = v' dv \\ d\bar{v} = \left( \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} u' \right)' d\rho \quad \bar{v} = \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} u' \end{array} \right| = \\
&= \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} u' v \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} u' v' d\rho.
\end{aligned}$$

Аналогично для второго слагаемого, получаем:

$$\int_{R_1}^{R_2} u \left( \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} v' \right)' d\rho = \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} u v' \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} v' u' d\rho$$

Тогда (2.27) примет вид:

$$\begin{aligned}
\int_{R_1}^{R_2} (v L_M u - u L_M v) d\rho &= \\
&= \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} u' v \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} u' v' d\rho - \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} u v' \Big|_{R_1}^{R_2} + \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} u' v' d\rho = \\
&= \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} (u' v - u v') \Big|_{R_1}^{R_2} \quad (2.28)
\end{aligned}$$

Полагая  $v = G_M$ , получаем

$$\begin{aligned}
\int_{R_1}^{R_2} (G_M(\rho, s) L_M u - u L_M G_M(\rho, s)) d\rho &= \\
&= \rho \frac{\varepsilon_2(\rho)}{k_2^2(\rho)} (u' G_M(\rho, s) - u \partial_\rho G_M(\rho, s)) \Big|_{R_1}^{R_2} = \\
&= R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \left( u'(R_2 - 0) G_M(R_2, s) - u(R_2 - 0) \partial_\rho G_M(\rho, s) \Big|_{\rho=R_2} \right) - \\
&\quad - R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} \left( u'(R_1 + 0) G_M(R_1, s) - u(R_1 + 0) \partial_\rho G_M(\rho, s) \Big|_{\rho=R_1} \right) \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Используя (2.25), находим:

$$\begin{aligned}
& \int_{R_1}^{R_2} (G_M(\rho, s) L_M u - u L_M G_M(\rho, s)) d\rho = \\
& = R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} u(R_1 + 0) \partial_\rho G_M(\rho, s)|_{\rho=R_1} - \\
& \quad - R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} u(R_2 - 0) \partial_\rho G_M(\rho, s)|_{\rho=R_2} \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Из уравнения (2.23), получаем, что

$$\int_{R_1}^{R_2} G_M(\rho, s) L_M u_2 d\rho = \alpha \int_{R_1}^{R_2} G_M(\rho, s) W(\rho) d\rho.$$

Снова используя (2.25) получаем,

$$\int_{R_1}^{R_2} u_2(\rho) L_M G_M(\rho, s) d\rho = - \int_{R_1}^{R_2} u_2(\rho) \delta(\rho - s) d\rho = -u_2(s)$$

Теперь, применяя полученные результаты, из (2.23) получаем интегральное представление решения  $u_2(s)$  уравнения (2.22) при  $s \in [R_1, R_2]$ :

$$\begin{aligned}
u_2(s) = & -\alpha \int_{R_1}^{R_2} G_M(\rho, s) W(\rho) d\rho + R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} u_2(R_1 + 0) \partial_\rho G_M(\rho, s)|_{\rho=R_1} - \\
& - R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} u_2(R_2 - 0) \partial_\rho G_M(\rho, s)|_{\rho=R_2}. \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Используя (2.21), находим

$$\begin{aligned}
u_1(s) = & -\alpha \frac{\gamma}{k_2^2(s)} \frac{\partial}{\partial s} \int_{R_1}^{R_2} G_M(\rho, s) W(\rho) d\rho - \frac{\alpha f_1(s)}{k_2^2(s)} + \\
& + \frac{\gamma R_1 \varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(s) k_2^2(R_1)} u_2(R_1 + 0) \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\rho=R_1} - \\
& - \frac{\gamma R_2 \varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(s) k_2^2(R_2)} u_2(R_2 - 0) \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\rho=R_2}, \quad (2.32)
\end{aligned}$$

где  $R_1 \leq \rho, s \leq R_2$ .

Из условий сопряжения (2.20) и решений (2.15), (2.18) получаем

$$\begin{aligned}
u_2(R_1 + 0) &= C_1 I_0(k_1 R_1), \\
u_2(R_2 - 0) &= C_2 K_0(k_3 R_2).
\end{aligned}$$

Подставляя значения  $u_2(R_1 + 0)$  и  $u_2(R_2 - 0)$  в (2.31) и (2.32), получим систему

$$\left\{ \begin{aligned}
u_1(s) &= -\alpha \frac{\gamma}{k_2^2(s)} \frac{\partial}{\partial s} \int_{R_1}^{R_2} G_M(\rho, s) W(\rho) d\rho - \alpha \frac{f_1(s)}{k_2^2(s)} + \\
& + \gamma R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(s) k_2^2(R_1)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\rho=R_1} C_1 I_0(k_1 R_1) - \\
& - \gamma R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(s) k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\rho=R_2} C_2 K_0(k_3 R_2), \\
u_2(s) &= -\alpha \int_{R_1}^{R_2} G_M(\rho, s) W(\rho) d\rho + \\
& + R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} \partial_{\rho} G_M(\rho, s) \Big|_{\rho=R_1} C_1 I_0(k_1 R_1) - \\
& - R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_{\rho} G_M(\rho, s) \Big|_{\rho=R_2} C_2 K_0(k_3 R_2)
\end{aligned} \right. \quad (2.33)$$

Отметим, что в системе (2.33) все функции определены только на отрезке  $[R_1, R_2]$  и могут быть найдены независимо от условий сопряжения и дисперсионного соотношения.

Ниже будет показано, что при определенных условиях система (2.33) имеет единственное решение и будет указан способ его нахождения.

Преобразуем систему (2.33) к более удобному виду, не содержащему производных под интегралом от неизвестных функций. Для этого сна-

чала преобразуем слагаемые в правых частях уравнений системы (2.33), используя формулу интегрирования по частям и учитывая, что

$$W(\rho) = \frac{1}{k_0^2} \left( \gamma \left( \rho \frac{f_1}{k_2^2(\rho)} \right)' - \rho f_2 \right);$$

получаем (далее использованы условия (2.25))

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{k_0^2} \int_{R_1}^{R_2} G_M(\rho, s) \left( \rho \frac{f_1}{k_2^2(\rho)} \right)' d\rho &= \\ &= \frac{\gamma}{k_0^2 k_2^2(\rho)} \rho G_M(\rho, s) f_1 \Big|_{R_1}^{R_2} - \frac{\gamma}{k_0^2} \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{f_1}{k_2^2(\rho)} \partial_\rho G_M(\rho, s) d\rho = \\ &= -\frac{\gamma}{k_0^2} \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{f_1}{k_2^2(\rho)} \partial_\rho G_M(\rho, s) d\rho. \end{aligned}$$

Используя (2.25) окончательно получаем

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} G_M(\rho, s) W(\rho) d\rho &= \\ &= -\frac{\gamma}{k_0^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho f_1}{k_2^2(\rho)} \partial_\rho G_M(\rho, s) d\rho - \frac{1}{k_0^2} \int_{R_1}^{R_2} \rho f_2 G_M(\rho, s) d\rho. \end{aligned}$$

В дальнейшем нам потребуется следующее выражение:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial s} \int_{R_1}^{R_2} G_M(\rho, s) W(\rho) d\rho = \\
& = -\frac{\gamma}{k_0^2} \frac{\partial}{\partial s} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho f_1}{k_2^2(\rho)} \partial_\rho G_M(\rho, s) d\rho - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial}{\partial s} \int_{R_1}^{R_2} \rho f_2 G_M(\rho, s) d\rho = \\
& = -\frac{\gamma}{k_0^2} \frac{\partial}{\partial s} \left( \int_{R_1}^{s-0} \frac{\rho f_1}{k_2^2(\rho)} \partial_\rho G_M(\rho, s) d\rho + \int_{s+0}^{R_2} \frac{\rho f_1}{k_2^2(\rho)} \partial_\rho G_M(\rho, s) d\rho \right) - \\
& \quad - \frac{1}{k_0^2} \int_{R_1}^{R_2} \rho f_2 \partial_s G_M(\rho, s) d\rho = \\
& = -\frac{\gamma}{k_0^2} \frac{\partial}{\partial s} \int_{R_1}^{s-0} \frac{\rho f_1}{k_2^2(\rho)} \partial_\rho G_M(\rho, s) d\rho - \frac{\gamma}{k_0^2} \frac{\partial}{\partial s} \int_{s+0}^{R_2} \frac{\rho f_1}{k_2^2(\rho)} \partial_\rho G_M(\rho, s) d\rho - \\
& \quad - \frac{1}{k_0^2} \int_{R_1}^{R_2} \rho f_2 \partial_s G_M(\rho, s) d\rho = \\
& = -\frac{\gamma}{k_0^2} \int_{R_1}^{s-0} \frac{\rho f_1}{k_2^2(\rho)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) d\rho - \frac{\gamma}{k_0^2} \int_{s+0}^{R_2} \frac{\rho f_1}{k_0^2 k_2^2(\rho)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) d\rho - \\
& - \frac{\gamma}{k_0^2} \frac{s f_1}{k_2^2(s)} \partial_\rho G_M(s-0, s) + \frac{\gamma}{k_0^2} \frac{s f_1}{k_2^2(s)} \partial_\rho G_M(s+0, s) - \frac{1}{k_0^2} \int_{R_1}^{R_2} \rho f_2 \partial_s G_M(\rho, s) d\rho = \\
& \quad = -\frac{\gamma}{k_0^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho f_1}{k_2^2(\rho)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) d\rho + \\
& + \frac{\gamma}{k_0^2} \frac{s f_1}{k_2^2(s)} (\partial_\rho G_M(s+0, s) - \partial_\rho G_M(s-0, s)) - \frac{1}{k_0^2} \int_{R_1}^{R_2} \rho f_2 \partial_s G_M(\rho, s) d\rho = \\
& = -\frac{\gamma}{k_0^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho f_1}{k_2^2(\rho)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) d\rho + \frac{\gamma}{k_0^2} \frac{f_1(s)}{\varepsilon_2(s)} - \frac{1}{k_0^2} \int_{R_1}^{R_2} \rho f_2 \partial_s G_M(\rho, s) d\rho.
\end{aligned}$$

Используя полученные формулы, преобразуем систему (2.33):

$$\left\{ \begin{array}{l}
u_1(s) = \alpha \frac{\gamma^2}{k_0^2 k_2^2(s)} \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{f_1}{k_2^2(\rho)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) d\rho + \\
+ \alpha \frac{\gamma}{k_0^2 k_2^2(s)} \int_{R_1}^{R_2} \partial_s G_M(\rho, s) \rho f_2 d\rho - \\
- \frac{\alpha f_1(s)}{k_2^2(s)} - \alpha \frac{\gamma^2 f_1(s)}{k_0^2 k_2^2(s) \varepsilon_2(s)} + \gamma R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(s) k_2^2(R_1)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\rho=R_1} C_1 I_0(k_1 R_1) - \\
- \gamma R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(s) k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\rho=R_2} C_2 K_0(k_3 R_2), \\
u_2(s) = \alpha \frac{\gamma}{k_0^2} \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{f_1}{k_2^2(\rho)} \partial_\rho G_M(\rho, s) d\rho + \alpha \frac{1}{k_0^2} \int_{R_1}^{R_2} G_M(\rho, s) \rho f_2 d\rho + \\
+ R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} \partial_\rho G_M(\rho, s) \Big|_{\rho=R_1} C_1 I_0(k_1 R_1) - \\
- R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_\rho G_M(\rho, s) \Big|_{\rho=R_2} C_2 K_0(k_3 R_2)
\end{array} \right. \quad (2.34)$$

или,

$$\left\{ \begin{array}{l}
u_1(s) = \alpha \frac{\gamma^2}{k_2^2(s)} \int_{R_1}^{R_2} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \frac{\rho}{k_2^2(\rho)} |\mathbf{u}|^2 u_1 d\rho + \\
+ \alpha \frac{\gamma}{k_2^2(s)} \int_{R_1}^{R_2} \partial_s G_M(\rho, s) \rho |\mathbf{u}|^2 u_2 d\rho - \alpha \tilde{f}(s) + h_1(s), \\
u_2(s) = \alpha \gamma \int_{R_1}^{R_2} \partial_\rho G_M(\rho, s) \frac{\rho}{k_2^2(\rho)} |\mathbf{u}|^2 u_1 d\rho + \\
+ \alpha \int_{R_1}^{R_2} G_M(\rho, s) \rho |\mathbf{u}|^2 u_2 d\rho + h_2(s),
\end{array} \right. \quad (2.35)$$

где

$$\tilde{f}(s) = \frac{f_1(s)}{k_2^2(s)} \left[ 1 + \frac{\gamma^2}{k_0^2 \varepsilon_2(s)} \right]$$

$$\begin{aligned}
h_1(s) = & \gamma R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(s) k_2^2(R_1)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\rho=R_1} C_1 I_0(k_1 R_1) - \\
& - \gamma R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(s) k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\rho=R_2} C_2 K_0(k_3 R_2), \quad (2.36)
\end{aligned}$$

$$h_2(s) = R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} \partial_\rho G_M(\rho, s)|_{\rho=R_1} C_1 I_0(k_1 R_1) - \\ - R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_\rho G_M(\rho, s)|_{\rho=R_2} C_2 K_0(k_3 R_2). \quad (2.37)$$

Для дальнейшего необходимо переписать систему (2.35) в виде операторного уравнения.

Введем матрицу ядер:

$$\mathbf{K}(\rho, s) = \{K_{nm}(\rho, s)\}_{n,m=1}^2 = \rho \begin{pmatrix} \frac{\gamma^2}{k_2^2(s)} \frac{\partial_{\rho s} G_M}{k_2^2(\rho)} & \frac{\gamma}{k_2^2(s)} \partial_s G_M \\ \gamma \frac{\partial_\rho G_M}{k_2^2(\rho)} & G_M \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

где индексы у  $\partial$  обозначают частные производные, а также матричный линейный интегральный оператор:

$$\mathbf{K} \mathbf{g} = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{K}(\rho, s) \mathbf{g}(\rho) d\rho, \quad (2.39)$$

где  $\mathbf{g} = (g_1, g_2)^T$ .

Тогда система (2.35) может быть записана в операторном виде

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{K}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \alpha \mathbf{J}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \mathbf{h}, \quad (2.40)$$

где  $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T$ , определен формулами (2.36), (2.37), а оператор  $\mathbf{J}$  определяется формулой

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{k_2^2(s)} \left[ 1 + \frac{\gamma^2}{k_0^2 \varepsilon_2(s)} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Отметим, что операторы  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{J}$  являются линейными.

Будем рассматривать уравнение (2.40) в пространстве непрерывных функций  $\mathbf{C}[R_1, R_2] = C[R_1, R_2] \times C[R_1, R_2]$  с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_C^2 = \|u_1\|_C^2 + \|u_2\|_C^2,$$

где  $\|u\|_C = \max_{x \in [R_1, R_2]} |u(x)|$ .

## 2.6 Исследование операторного уравнения

Для изучения интегрального оператора (2.39) рассмотрим ядра соответствующих интегральных операторов.

Пусть  $\Pi = (R_1, R_2) \times (R_1, R_2)$ . Из общих свойств функции Грина, следует, что функции  $K_{ij}$  являются кусочно-непрерывными в (замкнутом) квадрате  $\bar{\Pi} = [R_1, R_2] \times [R_1, R_2]$ .

Указанные свойства ядер позволяют утверждать ограниченность оператора  $\mathbf{K} : \mathbf{C}[R_1, R_2] \rightarrow \mathbf{C}[R_1, R_2]$ . Очевидно что оператор  $\mathbf{J} : \mathbf{C}[R_1, R_2] \rightarrow \mathbf{C}[R_1, R_2]$  также ограничен.

Оценим нормы интегральных операторов в пространстве  $\mathbf{C}[R_1, R_2]$ , которые потребуются в дальнейшем.

Рассмотрим сначала скалярный случай. Пусть интегральный оператор задан формулой

$$\mathbf{K}\varphi = \int_{R_1}^{R_2} K(x, y) \varphi(y) dy \quad (2.42)$$

с ограниченным, кусочно-непрерывным в квадрате  $[R_1, R_2] \times [R_1, R_2]$  ядром  $K(x, y)$ , тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{R_1}^{R_2} K(x, y) \phi(y) dy \right| &\leq \int_{R_1}^{R_2} |K(x, y)| |\phi(y)| dy \leq \\ &\leq \max_{x \in [R_1, R_2]} |\phi(x)| \int_{R_1}^{R_2} |K(x, y)| dy \leq \|\phi\|_C \max_{x \in [R_1, R_2]} \int_{R_1}^{R_2} |K(x, y)| dy. \end{aligned}$$

Следовательно,



$$\|\mathbf{K}\varphi\|_C = \max_{x \in [R_1, R_2]} \left| \int_{R_1}^{R_2} \varphi(x) K(x, y) dy \right| \leq M_0 \|\varphi\|_C,$$

где  $M_0 = \max_{x \in [R_1, R_2]} \int_{R_1}^{R_2} |K(x, y)| dy$ . Таким образом, для нормы оператора  $\mathbf{K} : C[R_1, R_2] \rightarrow C[R_1, R_2]$  имеем оценку  $\|\mathbf{K}\|_{C \rightarrow C} \leq M_0$ . Отметим, что если ядро интегрального оператора  $K(x, y)$  непрерывно в квадрате  $[R_1, R_2] \times [R_1, R_2]$ , то имеет место равенство  $\|\mathbf{K}\|_{C \rightarrow C} = M_0$  [22]. Итак, верно

**Утверждение 2.1.** Пусть  $\mathbf{K} : C[R_1, R_2] \rightarrow C[R_1, R_2]$  – интегральный оператор, заданный формулой (2.42) с кусочно-непрерывным в квадрате  $[R_1, R_2] \times [R_1, R_2]$  ядром  $K(x, y)$ . Тогда он ограничен и верна оценка для его нормы

$$\|\mathbf{K}\|_{C \rightarrow C} \leq M_0,$$

где

$$M_0 = \max_{x \in [R_1, R_2]} \int_{R_1}^{R_2} |K(x, y)| dy.$$

Рассмотрим векторный случай. Пусть матричный линейный интегральный оператор  $\mathbf{K} : \mathbf{C}[R_1, R_2] \rightarrow \mathbf{C}[R_1, R_2]$ , задан формулой

$$\mathbf{K}\varphi = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{K}(x, y) \varphi(y) dy, \quad (2.43)$$

где  $\mathbf{K}(x, y) = \{K_{nm}(x, y)\}_{n,m=1}^2$ , ядра  $K_{nm}(x, y)$  ограничены и кусочно-непрерывны в квадрате  $[R_1, R_2] \times [R_1, R_2]$ .

Тогда имеют место оценки

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{K}\varphi\|_{\mathbf{C}}^2 &= \|K_{11}\varphi_1 + K_{12}\varphi_2\|_{\mathbf{C}}^2 + \|K_{21}\varphi_1 + K_{22}\varphi_2\|_{\mathbf{C}}^2 \leq \\
&\leq (\|K_{11}\varphi_1\|_{\mathbf{C}} + \|K_{12}\varphi_2\|_{\mathbf{C}})^2 + (\|K_{21}\varphi_1\|_{\mathbf{C}} + \|K_{22}\varphi_2\|_{\mathbf{C}})^2 \leq \\
&\leq (\|K_{11}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}} \|\varphi_1\|_{\mathbf{C}} + \|K_{12}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}} \|\varphi_2\|_{\mathbf{C}})^2 + \\
&+ (\|K_{21}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}} \|\varphi_1\|_{\mathbf{C}} + \|K_{22}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}} \|\varphi_2\|_{\mathbf{C}})^2 \leq \\
&\leq 2\|K_{11}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}^2 \|\varphi_1\|_{\mathbf{C}}^2 + 2\|K_{12}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}^2 \|\varphi_2\|_{\mathbf{C}}^2 + \\
&+ 2\|K_{21}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}^2 \|\varphi_1\|_{\mathbf{C}}^2 + 2\|K_{22}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}^2 \|\varphi_2\|_{\mathbf{C}}^2 \leq \\
&\leq 2\max\left(\|K_{11}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}^2, \|K_{12}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}^2\right) \cdot \|\varphi\|_{\mathbf{C}}^2 + \\
&\quad + 2\max\left(\|K_{21}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}^2, \|K_{22}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}^2\right) \cdot \|\varphi\|_{\mathbf{C}}^2 = M^2 \|\varphi\|_{\mathbf{C}}^2,
\end{aligned}$$

где  $M^2 = 2\left(\max_{j=1,2}\|K_{1j}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}^2 + \max_{j=1,2}\|K_{2j}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}^2\right)$ .

Итак,  $\|\mathbf{K}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}} \leq M$ . Таким образом, верно

**Утверждение 2.2.** Пусть  $\mathbf{K} : \mathbf{C}[R_1, R_2] \rightarrow \mathbf{C}[R_1, R_2]$  – интегральный оператор, заданный формулой (2.43) с ограниченными и кусочно-непрерывными в квадрате  $[R_1, R_2] \times [R_1, R_2]$  ядрами  $K_{nm}(x, y)$ , заданными формулами (2.38). Тогда он ограничен и верна оценка для его нормы

$$\|\mathbf{K}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}} \leq M,$$

где  $M^2 = 2\left(\max_{j=1,2}\|K_{1j}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}^2 + \max_{j=1,2}\|K_{2j}\|_{\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}}^2\right)$ .

Введем также два линейных оператора

$$\mathbf{N} = \alpha(\mathbf{K} + \mathbf{J}), \mathbf{N}_1 = \mathbf{K} + \mathbf{J}.$$

Тогда уравнение (2.40) примет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\left(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}\right) + \mathbf{h}. \quad (2.44)$$

Основные свойства уравнения

$$\|\mathbf{N}\| r_0^3 + \|\mathbf{h}\| = r_0, \quad (2.45)$$

были изложены в главе 1 (п.1.6). На основе рассуждений, проведенных в главе 1 (п.1.6) сформулированы следующие результаты:

Утверждение 1.1 главы 1 гласит, что если выполняется неравенство

$$0 \leq \|\mathbf{h}\| < \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3} \|\mathbf{N}\|}, \quad (2.46)$$

то уравнение (2.44) имеет два неотрицательных решения  $r_*$  и  $r^*$ . Решения  $r_*$  и  $r^*$  могут быть вычислены по формулам в утверждении 1.1, с.24.

Докажем, что если выполняется условие (2.46), то уравнение (2.44) имеет единственное решение в шаре  $B_{r_*} \equiv \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq r_*\}$ .

**Утверждение 2.3.** Если  $\alpha \leq A^2$ , где

$$A = \frac{2}{3} \frac{1}{\|\mathbf{h}\| \sqrt{3} \|\mathbf{N}_1\|}$$

и  $\|\mathbf{N}_1\| = \|\mathbf{K} + \mathbf{J}\|$ , то уравнение (2.44) имеет единственное решение в шаре  $B_{r_*} \equiv \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq r_*\}$ , являющееся непрерывной функцией:  $\mathbf{u} \in \mathbf{C}[R_1, R_2], \|\mathbf{u}\| \leq r_*$ .

*Доказательство.* Рассмотрим уравнение  $\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{u})$  в пространстве  $\mathbf{C}[R_1, R_2]$ , с нелинейным оператором

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) \equiv \alpha \mathbf{N}_1(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \mathbf{h}.$$

Если  $\mathbf{u} \in B_{r_*}$ , то

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{u})\| = \left\| \alpha \mathbf{K}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \alpha \mathbf{J}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \mathbf{h} \right\| \leq \alpha r_*^3 \|\mathbf{K} + \mathbf{J}\| + \|\mathbf{h}\| = r_*.$$

Если  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in B_{r_*}$ , то

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}(\mathbf{u}) - \mathbf{A}(\mathbf{v})\| &= \alpha \left\| \mathbf{K}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}) - \mathbf{J}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}) \right\| \leq \\ &\leq 3\alpha \|\mathbf{K} - \mathbf{J}\| r_*^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

Так как  $\alpha \leq A^2$ , то  $\|\mathbf{h}\|$  удовлетворяет условию (2.46). Поэтому выполняется неравенство

$$r_* < \frac{1}{\sqrt{3} \|\mathbf{N}\|},$$

откуда получаем, что

$$q := 3\alpha r_*^2 \|\mathbf{K} + \mathbf{J}\| = 3 \|\mathbf{N}\| r_*^2 < 1.$$

Таким образом,  $\mathbf{A}$  отображает  $B_{r_*}$  в себя и является сжимающим оператором на  $B_{r_*}$ . Поэтому уравнение (2.39) имеет единственное решение в  $B_{r_*}$ .  $\square$

Заметим, что здесь оператор  $\mathbf{N}$  не совпадает с одноименным оператором  $\mathbf{N}$  первой главы. По этой причине утверждение 2.3 не является простым повторением аналогичного утверждения из главы 1.

Отметим, что  $A > 0$  и не зависит от  $\alpha$ .

## 2.7 Теорема о непрерывной зависимости решения от спектрального параметра

В дальнейшем нам понадобится утверждение о зависимости решений операторного уравнения (2.40) от параметра. Перепишем уравнение (2.40) в форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \left( |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \right) + \mathbf{h},$$

где оператор

$$\mathbf{N} = \alpha (\mathbf{K} + \mathbf{J})$$

с матричными ядрами

$$\mathbf{N}(\rho, s) := \alpha (\mathbf{K}(\rho, s) + \mathbf{J}(\rho, s))$$

определен формулами (2.35)–(2.41).

**Теорема 2.1.** Пусть ядра матричного оператора  $\mathbf{N}$  и правая часть  $\mathbf{h}$  уравнения (2.40) непрерывно зависят от параметра  $\gamma \in \Gamma_0$ ,  $\mathbf{N}(\gamma) \subset \mathbf{C}(\Gamma_0)$ ,  $\mathbf{h}(\gamma) \subset \mathbf{C}(\Gamma_0)$ , на некотором отрезке  $\Gamma_0$  вещественной числовой оси. Пусть также

$$\|\mathbf{h}(\gamma)\| < \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3} \|\mathbf{N}(\gamma)\|}. \quad (2.47)$$

Тогда решения  $\mathbf{u}(\rho; \gamma)$  уравнения (2.40) при  $\gamma \in \Gamma_0$  существуют, единственны и непрерывно зависят от параметра  $\gamma$ ,  $\mathbf{u}(\rho; \gamma) \subset \mathbf{C}([R_1, R_2] \times \Gamma_0)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим уравнение (2.40). Существование и единственность решений  $\mathbf{u}(\rho; \gamma)$  при условиях теоремы следует из утверждения 2.3. Докажем непрерывную зависимость этих решений от спектрального параметра  $\gamma$ .

Нетрудно видеть из формулы (см. глава 1, с.25)

$$r_* = -\frac{2}{\sqrt{3\|\mathbf{N}\|}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \|\mathbf{h}\| \sqrt{\|\mathbf{N}\|}\right) - \frac{2\pi}{3}\right),$$

что  $r_*(\gamma)$  непрерывно зависит от  $\gamma$  на отрезке  $\Gamma_0$ . Пусть  $r_0(\gamma) = \max_{\gamma \in \Gamma_0} r_*(\gamma)$  и максимум достигается в точке  $\gamma_0$ , то есть  $r_*(\gamma_0) = r_0$ . Выберем  $\gamma + \Delta\gamma \in \Gamma_0$ , тогда  $r_*(\gamma) \leq r_0$  и  $r_*(\gamma + \Delta\gamma) \leq r_0$ .

Далее, пусть  $Q_0 = \max_{\gamma \in \Gamma_0} (3r_*^2(\gamma) \|\mathbf{N}(\gamma)\|)$  и максимум достигается в точке  $\bar{\gamma} \in \Gamma_0$ , то есть  $Q_0 = 3r_*^2(\bar{\gamma}) \|\mathbf{N}(\bar{\gamma})\|$ . Тогда  $Q_0 < 1$  в силу условия (2.47) теоремы.

Предположим сначала, что

$$\|\mathbf{u}(\rho; \gamma)\| \geq \|\mathbf{u}(\rho; \gamma + \Delta\gamma)\|. \quad (2.48)$$

Тогда имеет место следующие оценки:

$$\begin{aligned}
& |\mathbf{u}(s; \gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{u}(s; \gamma)| = \\
& = \left| \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{N}(\rho, s; \gamma + \Delta\gamma) |\mathbf{u}(\rho; \gamma + \Delta\gamma)|^2 \mathbf{u}(\rho; \gamma + \Delta\gamma) d\rho - \right. \\
& \left. - \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{N}(\rho, s; \gamma) |\mathbf{u}(\rho; \gamma)|^2 \mathbf{u}(\rho; \gamma) d\rho + \mathbf{h}(s; \gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{h}(s; \gamma) \right| \leq \\
& \leq \left| \int_{R_1}^{R_2} (\mathbf{N}(\rho, s; \gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{N}(\rho, s; \gamma)) |\mathbf{u}(\rho; \gamma + \Delta\gamma)|^2 \mathbf{u}(\rho; \gamma + \Delta\gamma) d\rho - \right. \\
& \left. - \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{N}(\rho, s; \gamma) \left( |\mathbf{u}(\rho; \gamma + \Delta\gamma)|^2 \mathbf{u}(\rho; \gamma + \Delta\gamma) - |\mathbf{u}(\rho; \gamma)|^2 \mathbf{u}(\rho; \gamma) \right) d\rho \right| \\
& \quad + |\mathbf{h}(s; \gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{h}(s; \gamma)|,
\end{aligned}$$

Здесь было использовано условие (2.48).

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}(\gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{u}(\gamma)\| & \leq \\
& \leq \frac{r_*^3(\gamma) \|\mathbf{N}(\gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{N}(\gamma)\| + \|\mathbf{h}(\gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{h}(\gamma)\|}{1 - 3r_*^2(\gamma) \|\mathbf{N}(\gamma)\|}
\end{aligned}$$

и

$$\|\mathbf{u}(\gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{u}(\gamma)\| \leq \frac{r_{**}^3 \|\mathbf{N}(\gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{N}(\gamma)\| + \|\mathbf{h}(\gamma + \Delta\gamma) - \mathbf{h}(\gamma)\|}{1 - Q_0}, \quad (2.49)$$

где  $Q_0$  и  $r_0$  не зависят от  $\gamma$ .

Пусть теперь  $\|\mathbf{u}(\gamma)\| \leq \|\mathbf{u}(\gamma + \Delta\gamma)\|$ . Тогда все предыдущие оценки остаются в силе, если заменить аргументы  $\gamma$  на  $\gamma + \Delta\gamma$ , а  $\gamma + \Delta\gamma$  на  $\gamma$ . Таким образом, оценка (2.49) также остается в силе, откуда следует утверждение теоремы.  $\square$

## 2.8 Итерационный метод

Приближенные решения  $\mathbf{u}^n(r) = (u_1^n(r), u_2^n(r))^T$ ,  $r \in [R_1, R_2]$  системы интегральных уравнений (2.35) могут быть определены с помощью итерационного процесса метода сжимающих отображений:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \alpha \mathbf{K} \left( |\mathbf{u}^n|^2 \mathbf{u}^n \right) + \alpha \mathbf{J} \left( |\mathbf{u}^n|^2 \mathbf{u}^n \right) + \mathbf{h} \quad (2.50)$$

Докажем, что последовательность  $\mathbf{u}^n(r)$  равномерно сходится к решению системы уравнений (2.40) вследствие того, что правая часть уравнения (2.40) определяет сжимающий оператор. Ниже при записи норм операторов не будем писать индекс, поскольку из контекста ясно о каком – векторном или скалярном – пространстве идет речь.

**Утверждение 2.4.** Пусть  $B_{r_0} \equiv \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq r_0\}$  – шар радиуса  $r_0$  с центром в нуле и выполнены два условия:

$$q := 3\alpha r_0^2 \|\mathbf{K} + \mathbf{J}\| < 1, \quad (2.51)$$

$$\alpha r_0^3 \|\mathbf{K} + \mathbf{J}\| + \|\mathbf{h}\| < r_0. \quad (2.52)$$

Тогда существует и единственно решение  $\mathbf{u} \in B_{r_0}$  уравнения (2.40) (или системы (2.35)), и последовательность приближенных решений  $\mathbf{u}^n \in B_{r_0}$  уравнения (2.40) (или системы (2.35)), определяемых посредством итерационного алгоритма

$$\mathbf{u}^{n+1} = \alpha \mathbf{K} \left( |\mathbf{u}^n|^2 \mathbf{u}^n \right) + \alpha \mathbf{J} \left( |\mathbf{u}^n|^2 \mathbf{u}^n \right) + \mathbf{h}$$

(или (2.50)), сходится в норме пространства  $\mathbf{C}[R_1, R_2]$  к (единственному) точному решению  $\mathbf{u} \in B_{r_0}$  уравнения (2.40) (или системы (2.35)) при любом начальном приближении  $\mathbf{u}^0 \in B_{r_0}$  со скоростью геометрической прогрессии с показателем  $q$ .

*Доказательство.* Рассмотрим уравнение  $\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{u})$  в пространстве  $\mathbf{C}[R_1, R_2]$ , с нелинейным оператором

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) \equiv \alpha \mathbf{K}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \alpha \mathbf{J}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \mathbf{h}.$$

Пусть  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in B_{r_0}$ ;  $\|\mathbf{u}\| \leq r_0$ ,  $\|\mathbf{v}\| \leq r_0$ , тогда

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}(\mathbf{u}) - \mathbf{A}(\mathbf{v})\| &= \\ &= \alpha \left\| \mathbf{K}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}) + \mathbf{J}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}) \right\| \leq \\ &\leq 3\alpha \|\mathbf{K} + \mathbf{J}\| r_0^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \quad (2.53) \end{aligned}$$

Докажем оценку (2.52). Действительно,

$$\begin{aligned} \left\| |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right\| &= \left\| (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{u}) + (|\mathbf{v}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}) \right\| \leq \\ &\leq \left\| |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{u} \right\| + \left\| |\mathbf{v}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right\| \leq \\ &\leq \left\| |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2 \right\| \cdot \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \cdot \left\| |\mathbf{v}|^2 \right\| = \\ &= \left\| |\mathbf{u}| - |\mathbf{v}| \right\| \cdot \left( \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \right) \cdot \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \\ &\leq \left\| |\mathbf{u}| - |\mathbf{v}| \right\| \cdot (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|) \cdot \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$|\mathbf{u}| \leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}| + |\mathbf{v}|, \quad |\mathbf{u}| - |\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$$

и, аналогично,

$$|\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}| + |\mathbf{u}|, \quad |\mathbf{v}| - |\mathbf{u}| \leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}|,$$

получаем, что

$$\left\| |\mathbf{u}| - |\mathbf{v}| \right\| \leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|,$$



ПОЭТОМУ

$$\left| \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \right| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \right| \cdot (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|) \cdot \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| &\leq \\ &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \cdot (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|) \cdot \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \\ &\leq \left( (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|) \cdot \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \\ &= \left( \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \\ &\leq 3r_0^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

Получаем, что

$$\left\| |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right\| \leq 3r_0^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \quad (2.54)$$

Отсюда следует оценка (2.53). Так как

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \left\| \alpha \mathbf{K} \left( |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \right) - \alpha \mathbf{J} \left( |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \right) + \mathbf{h} \right\| \leq \alpha r_0^3 \|\mathbf{K} - \mathbf{J}\| + \|\mathbf{h}\|.$$

то при выполнении условия (2.52) оператор  $\mathbf{A}$  отображает шар  $B_{r_0}$  в себя. Из оценок (2.51) и (2.52) следует, что оператор  $\mathbf{A}$  является сжимающим в шаре  $B_{r_0}$ . Тогда все утверждения теоремы следуют из принципа сжимающих отображений [36].  $\square$

Нетрудно видеть, что выбрав достаточно большой радиус шара  $r_0$ , чтобы выполнялась оценка  $\|\mathbf{h}\| < r_0$ , а потом выбрав достаточно малое  $\alpha$ , можно удовлетворить оценкам (2.51) и (2.52). Известна также оценка для скорости сходимости итерационного алгоритма [36]. В частности, если выбрать в качестве начального приближения  $\mathbf{u}^0(s) = (0, 0)^T$ , то

получаем следующую оценку скорости сходимости итерационного процесса.

Описанный здесь итерационный алгоритм позволяет получить приближенное решение, но он слишком громоздок в реализации. Основное значение используемого здесь теоретического аппарата – это строгое доказательство существования собственных значений. Численные результаты, представленные в главе 4, получены с помощью метода задачи Коши.

## 2.9 Дисперсионное уравнение

Из второго уравнения системы (2.34) дифференцированием по  $s$ , при  $s = R_1 + 0$  и  $s = R_2 - 0$  получаем следующую систему

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u_1(R_1 + 0) = \alpha \frac{\gamma^2}{k_2^2(R_1+0)} \int_{R_1}^{R_2} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{s=R_1+0} \frac{\rho}{k_2^2(\rho)} |\mathbf{u}|^2 u_1 d\rho + \\
 + \alpha \frac{\gamma}{k_2^2(R_1+0)} \int_{R_1}^{R_2} \partial_s G_M(\rho, s) \Big|_{s=R_1+0} \rho |\mathbf{u}|^2 u_2 d\rho - \alpha \tilde{f}(R_1 + 0) + \\
 + \gamma R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1+0)k_2^2(R_1)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1+0 \\ \rho=R_1+0}} C_1 I_0(k_1 R_1) - \\
 - \gamma R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_1+0)k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1+0 \\ \rho=R_2-0}} C_2 K_0(k_3 R_2), \\
 \\
 \frac{\partial u_2}{\partial s}(R_1 + 0) = \alpha \gamma \int_{R_1}^{R_2} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{s=R_1+0} \frac{\rho}{k_2^2(\rho)} |\mathbf{u}|^2 u_1 d\rho + \\
 + \alpha \int_{R_1}^{R_2} \partial_s G_M(\rho, s) \Big|_{s=R_1+0} \rho |\mathbf{u}|^2 u_2 d\rho - \alpha \frac{\gamma f_1(R_1+0)}{k_0^2 \varepsilon_2(R_1+0)} + \\
 + R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1+0 \\ \rho=R_1+0}} C_1 I_0(k_1 R_1) - \\
 - R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1+0 \\ \rho=R_2-0}} C_2 K_0(k_3 R_2), \\
 \\
 u_1(R_2 - 0) = \alpha \frac{\gamma^2}{k_2^2(R_2-0)} \int_{R_1}^{R_2} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{s=R_2-0} \frac{\rho}{k_2^2(\rho)} |\mathbf{u}|^2 u_1 d\rho + \\
 + \alpha \frac{\gamma}{k_2^2(R_2-0)} \int_{R_1}^{R_2} \partial_s G_M(\rho, s) \Big|_{s=R_2-0} \rho |\mathbf{u}|^2 u_2 d\rho - \alpha \tilde{f}(R_2 - 0) + \\
 + \gamma R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_2-0)k_2^2(R_1)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_2-0 \\ \rho=R_1+0}} C_1 I_0(k_1 R_1) - \\
 - \gamma R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2-0)k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_2-0 \\ \rho=R_2-0}} C_2 K_0(k_3 R_2), \\
 \\
 \frac{\partial u_2}{\partial s}(R_2 - 0) = \alpha \gamma \int_{R_1}^{R_2} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{s=R_2-0} \frac{\rho}{k_2^2(\rho)} |\mathbf{u}|^2 u_1 d\rho + \\
 + \alpha \int_{R_1}^{R_2} \partial_s G_M(\rho, s) \Big|_{s=R_2-0} \rho |\mathbf{u}|^2 u_2 d\rho - \alpha \frac{\gamma f_1(R_2-0)}{k_0^2 \varepsilon_2(R_2-0)} + \\
 + R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_2-0 \\ \rho=R_1+0}} C_1 I_0(k_1 R_1) - \\
 - R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_2-0 \\ \rho=R_2-0}} C_2 K_0(k_3 R_2).
 \end{array} \right.$$

Введем, следующие обозначения:

$$H_1(s) := \frac{\gamma^2}{k_2^2(s)} \int_{R_1}^{R_2} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \frac{\rho}{k_2^2(\rho)} |\mathbf{u}|^2 u_1 d\rho + \\ + \frac{\gamma}{k_2^2(s)} \int_{R_1}^{R_2} \partial_s G_M(\rho, s) \rho |\mathbf{u}|^2 u_2 d\rho - \tilde{f}(s),$$

$$H_2(s) := \gamma \int_{R_1}^{R_2} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \frac{\rho}{k_2^2(\rho)} |\mathbf{u}|^2 u_1 d\rho + \\ + \int_{R_1}^{R_2} \partial_s G_M(\rho, s) \rho |\mathbf{u}|^2 u_2 d\rho - \frac{\gamma f_1(s)}{k_0^2 \varepsilon_2(s)}.$$

Система примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(R_1 + 0) = \alpha H_1(R_1 + 0) + \gamma R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)k_2^2(R_1)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1 \\ \rho=R_1}} C_1 I_0(k_1 R_1) - \\ - \gamma R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_1)k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1 \\ \rho=R_2}} C_2 K_0(k_3 R_2), \\ u_2'(R_1 + 0) = \alpha H_2(R_1 + 0) + R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1 \\ \rho=R_1}} C_1 I_0(k_1 R_1) - \\ - R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1 \\ \rho=R_2}} C_2 K_0(k_3 R_2), \\ u_1(R_2 - 0) = \alpha H_1(R_2 - 0) + \gamma R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_2)k_2^2(R_1)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1 \\ \rho=R_2}} C_1 I_0(k_1 R_1) - \\ - \gamma R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_2 \\ \rho=R_2}} C_2 K_0(k_3 R_2), \\ u_2'(R_2 - 0) = \alpha H_2(R_2 - 0) + R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_2 \\ \rho=R_1}} C_1 I_0(k_1 R_1) - \\ - R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_2 \\ \rho=R_2}} C_2 K_0(k_3 R_2). \end{array} \right.$$

Из (2.15) и (2.18) следует, что

$$\begin{aligned} u_1(R_1 - 0) &= -C_1 \frac{\gamma}{k_1} I_1(k_1 R_1), \\ u_2'(R_1 - 0) &= C_1 k_1 I_1(k_1 R_1), \\ u_1(R_2 + 0) &= C_2 \frac{\gamma}{k_3} K_1(k_3 R_2), \\ u_2'(R_2 + 0) &= -C_2 k_3 K_1(k_3 R_2). \end{aligned}$$

Используя условия сопряжения (2.20), и вводя обозначения

$$\begin{aligned}\tilde{k}_1 &= \frac{\gamma^2}{k_1} + k_1; \\ \tilde{k}_3 &= \frac{\gamma^2}{k_3} + k_3; \\ \tilde{k}_2(R_1) &= \frac{\gamma^2}{k_2^2(R_1)} - 1; \\ \tilde{k}_2(R_2) &= \frac{\gamma^2}{k_2^2(R_2)} - 1;\end{aligned}$$

получаем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} -C_1 I_1(k_1 R_1) \tilde{k}_1 = \alpha H(R_1) + \\ \quad + C_1 R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1 \\ \rho=R_1}} I_0(k_1 R_1) \tilde{k}_2(R_1) - \\ \quad - C_2 R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1 \\ \rho=R_2}} K_0(k_3 R_2) \tilde{k}_2(R_1), \\ \\ C_2 K_1(k_3 R_2) \tilde{k}_3 = \alpha H(R_2) + \\ \quad + C_1 R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_2 \\ \rho=R_1}} I_0(k_1 R_1) \tilde{k}_2(R_2) - \\ \quad - C_2 R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_2 \\ \rho=R_2}} K_0(k_3 R_2) \tilde{k}_2(R_1), \end{array} \right.$$

где,

$$\begin{aligned}H(s) &:= \gamma H_1(s) + H_2(s) = \\ &= \gamma \frac{k_0^2 \varepsilon_2(s)}{k_2^2(s)} \int_{R_1}^{R_2} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \frac{\rho}{k_2^2(\rho)} |\mathbf{u}|^2 u_1 d\rho + \\ &\quad + \frac{k_0^2 \varepsilon_2(s)}{k_2^2(s)} \int_{R_1}^{R_2} \partial_s G_M(\rho, s) \rho |\mathbf{u}|^2 u_2 d\rho - \gamma \frac{2}{k_2^2(s)} f_1(s).\end{aligned}$$

Далее, выражаем константу  $C_2$  из каждого уравнения рассматриваемой системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = \frac{\alpha H(R_1) + C_1 R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1 \\ \rho=R_1}} I_0(k_1 R_1) \tilde{k}_2(R_1) + C_1 I_1(k_1 R_1) \tilde{k}_1}{R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1 \\ \rho=R_2}} K_0(k_3 R_2) \tilde{k}_2(R_1)} \\ C_2 = \frac{\alpha H(R_2) + R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_2 \\ \rho=R_1}} C_1 I_0(k_1 R_1) \tilde{k}_2(R_2)}{K_1(k_3 R_2) \tilde{k}_3 + R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_2 \\ \rho=R_2}} K_0(k_3 R_2) \tilde{k}_2(R_2)} \end{array} \right.$$

и приравняв эти выражения, получаем

$$\begin{aligned} & \alpha H(R_2) R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1 \\ \rho=R_2}} K_0(k_3 R_2) \tilde{k}_2(R_1) + \\ & + R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_2 \\ \rho=R_1}} C_1 I_0(k_1 R_1) \tilde{k}_2(R_2) \times \\ & \times R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1 \\ \rho=R_2}} K_0(k_3 R_2) \tilde{k}_2(R_1) = \\ & = \alpha H(R_1) K_1(k_3 R_2) \tilde{k}_3 + \\ & + \alpha H(R_1) R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_2 \\ \rho=R_2}} K_0(k_3 R_2) \tilde{k}_2(R_2) + \\ & + C_1 \left( R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1 \\ \rho=R_1}} I_0(k_1 R_1) \tilde{k}_2(R_1) + I_1(k_1 R_1) \tilde{k}_1 \right) \times \\ & \times \left( K_1(k_3 R_2) \tilde{k}_3 + R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_2 \\ \rho=R_2}} K_0(k_3 R_2) \tilde{k}_2(R_2) \right). \end{aligned}$$

Соберем все слагаемые, не содержащие параметр нелинейности  $\alpha$ , в левой части уравнения, а остальные слагаемые – в правой части. Получаем дисперсионное уравнение в форме

$$C_1 g(\lambda) = \alpha P(\lambda), \quad (2.55)$$

где

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= H(R_2) R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1 \\ \rho=R_2}} K_0(k_3 R_2) \tilde{k}_2(R_1) - \\
&\quad - H(R_1) K_1(k_3 R_2) \tilde{k}_3 - \\
&\quad - H(R_1) R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_2 \\ \rho=R_2}} K_0(k_3 R_2) \tilde{k}_2(R_2), \\
g(\lambda) &= \left( I_1(k_1 R_1) \tilde{k}_1 + R_1 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1 \\ \rho=R_1}} I_0(k_1 R_1) \tilde{k}_2(R_1) \right) \times \\
&\quad \times \left( K_1(k_3 R_2) \tilde{k}_3 + R_2 \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_2 \\ \rho=R_2}} K_0(k_3 R_2) \tilde{k}_2(R_2) \right) - \\
&\quad - R_1 R_2 \frac{\varepsilon_2(R_1)}{k_2^2(R_1)} \frac{\varepsilon_2(R_2)}{k_2^2(R_2)} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_2 \\ \rho=R_1}} \partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, s) \Big|_{\substack{s=R_1 \\ \rho=R_2}} \times \\
&\quad \times I_0(k_1 R_1) K_0(k_3 R_2) \tilde{k}_2(R_2) \tilde{k}_2(R_1).
\end{aligned}$$

## 2.10 О разрешимости линейной задачи сопряжения на собственные значения

Из второго и третьего уравнений системы (2.7) находим

$$E_z(\rho) = -\frac{1}{i\omega\varepsilon\rho} (\rho H_\varphi(\rho))', \quad E_\rho(\rho) = \frac{\gamma}{\omega\mu} H_\varphi(\rho). \quad (2.56)$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение системы (2.7) получаем

$$\varepsilon \left( \frac{1}{\varepsilon\rho} (\rho H_\varphi(\rho))' \right)' + (\omega^2 \mu \varepsilon - \gamma^2) H_\varphi(\rho) = 0.$$

Обозначив  $u_3(\rho) := \rho H_\varphi(\rho)$  и  $k_0^2 := \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$  получаем

$$\tilde{\varepsilon}\rho \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}\rho} (u_3)' \right)' + (k_0^2 \tilde{\varepsilon} - \gamma^2) u_3 = 0, \quad (2.57)$$

где производная обозначает дифференцирование по  $\rho$  и  $u_3(\rho, \gamma)$  – вещественная функция, и

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \leq \rho < R_1, \\ \varepsilon_2(\rho), & R_1 \leq \rho \leq R_2, \\ \varepsilon_3, & \rho > R_2. \end{cases}$$

Считаем, что функция  $u_3$  дифференцируема так, что

$$u_3 \in C^1[0, +\infty) \cap C^2(0, R_1) \cap C^2(R_1, R_2) \cap C^2(R_2, +\infty). \quad (2.58)$$

Принадлежность функции  $u_3$  указанному пересечению множеств означает, что сужение функции на выбранный интервал (или полуинтервал) принадлежит соответствующему функциональному классу. В дальнейшем нам потребуется утверждение о существовании решений линейной задачи.

При  $0 \leq \rho < R_1$ , имеем  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1$ , тогда из (2.57) получаем уравнение Бесселя

$$u_3'' - \rho^{-1}u_3' - k_1^2 u_3 = 0, \quad (2.59)$$

где  $k_1^2 = \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_1$ .

Решение уравнения (2.59) имеет вид

$$u_3 = C_1^* \rho I_1(k_1 \rho) + \tilde{C}_1^* \rho K_1(k_1 \rho), \quad \rho < R_1,$$

где функции  $I_1$  и  $K_1$  – модифицированные функции Бесселя,  $C_1^*$  и  $\tilde{C}_1^*$  – постоянные. Известно [26], что функция  $K_1(\rho)$  неограниченно возрастает при  $\rho \rightarrow 0$ , а функция  $I_1(\rho)$  стремится к нулю при  $\rho \rightarrow 0$ . Принимая во внимание условие ограниченности поля во всякой конечной области получаем, что  $\tilde{C}_1^* = 0$  и

$$u_3 = C_1^* \rho I_1(k_1 \rho), \quad \rho < R_1. \quad (2.60)$$

При  $\rho > R_2$ , имеем  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_3$ , тогда из (2.57) получаем так же уравнение Бесселя

$$u_3'' - \rho^{-1}u_3' - k_3^2 u_3 = 0, \quad (2.61)$$



где  $k_3^2 = \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_3$ .

Решение уравнения (2.61) имеет вид

$$u_3 = \tilde{C}_2^* \rho I_1(k_3 \rho) + C_2^* \rho K_1(k_3 \rho), \quad \rho > R_2,$$

где  $C_2^*$  и  $\tilde{C}_2^*$  – постоянные. Известно [26], что функция  $I_1(\rho)$  стремится к бесконечности при  $\rho \rightarrow +\infty$ , а функция  $K_1(\rho)$  стремится к нулю при  $\rho \rightarrow +\infty$ . Принимая во внимание условие на бесконечности получаем, что  $\tilde{C}_2^* = 0$  и

$$u_3 = C_2^* \rho K_1(k_3 \rho), \quad \rho > R_2. \quad (2.62)$$

В оболочке волновода  $R_1 \leq \rho \leq R_2$  имеем  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_2(\rho)$ . Тогда, из (2.57) получаем дифференциальное уравнение второго порядка:

$$u_3'' - \frac{\varepsilon_2'(\rho) \rho + \varepsilon_2(\rho)}{\varepsilon_2(\rho) \rho} u_3' + k_2^2(\rho) u_3 = 0, \quad (2.63)$$

где  $k_2^2(\rho) = k_0^2 \varepsilon_2(\rho) - \gamma^2$ .

Как известно, касательные составляющие электромагнитного поля непрерывны на границе раздела сред. В рассматриваемом случае касательными составляющими являются компоненты  $H_\varphi$  и  $E_z$ . Из этого условия получаем

$$\begin{aligned} H_\varphi(R_1 + 0) &= H_\varphi(R_1 - 0), \quad E_z(R_1 + 0) = E_z(R_1 - 0), \\ H_\varphi(R_2 + 0) &= H_\varphi(R_2 - 0), \quad E_z(R_2 + 0) = E_z(R_2 - 0). \end{aligned}$$

Далее

$$E_z(\rho) = -\frac{1}{i\omega\varepsilon} \left( \frac{1}{\rho} H_\varphi(\rho) + H_\varphi'(\rho) \right).$$

Но так как  $H_\varphi(\rho)$  и  $E_z(\rho)$  непрерывны при  $\rho = R_1$  и  $\rho = R_2$ , то, значит, и  $H_\varphi'(\rho)$  непрерывна при  $\rho = R_1$  и  $\rho = R_2$ . Из сказанного получаем условия сопряжения для функций  $u_3(\rho)$  и  $u_3'(\rho)$

$$[u_3]|_{\rho=R_1} = [u_3]|_{\rho=R_2} = 0, \quad [u_3']|_{\rho=R_1} = [u_3']|_{\rho=R_2} = 0 \quad (2.64)$$

где  $[v]|_{\rho=s} = \lim_{\rho \rightarrow s-0} v(\rho) - \lim_{\rho \rightarrow s+0} v(\rho)$  – скачок предельных значений функции в точке  $s$ , определенный в силу (2.58).

Сформулируем линейную задачу сопряжения на собственные значения.

*Задача  $P_M^*$* : требуется доказать существование вещественных значений  $\gamma$  таких, что при заданном значении  $C_1^* \neq 0$  (или  $C_2^* \neq 0$ ) существует ненулевая функция  $u_3(\rho)$ , которая при  $\rho < R_1$  и  $\rho > R_2$  определяется формулами (2.60), (2.62) соответственно, а при  $R_1 \leq \rho \leq R_2$  является решением уравнения (2.63), причем, определенная таким образом при  $\rho \in [0, +\infty)$  функция  $u_3(\rho)$  удовлетворяет условиям сопряжения (2.64).

*Замечание 2.3.* Существует связь между константами  $C_1, C_2$  в задаче  $P_M$  и константами  $C_1^*, C_2^*$  в задаче  $P_M^*$  :

$$\begin{aligned} C_1^* &= -\frac{\gamma}{k_1} \omega \mu_0 C_1, \\ C_2^* &= -\frac{\gamma}{k_3} \omega \mu_0 C_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение (2.63), записанное в виде

$$\left( \frac{1}{\varepsilon_2(\rho) \rho} u_3' \right)' + \frac{k_0^2}{\rho} u_3 - \frac{1}{\varepsilon_2(\rho) \rho} \gamma^2 u_3 = 0, R_1 \leq \rho \leq R_2$$

Перепишем последнее уравнение в операторной форме:

$$L u_3 = 0, \quad L = \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{\varepsilon_2(\rho) \rho} \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{k_0^2}{\rho} - \frac{1}{\varepsilon_2(\rho) \rho} \gamma^2, R_1 \leq \rho \leq R_2.$$

Пусть  $\lambda := \gamma^2$ . Рассмотрим на отрезке  $[R_1; R_2]$  задачу Штурма-Лиувилля с краевыми условиями 2-го рода:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\varepsilon_2(\rho) \rho} v_n' \right)' + \frac{k_0^2}{\rho} v_n - \frac{1}{\varepsilon_2(\rho) \rho} \lambda v_n, R_1 \leq \rho \leq R_2, \\ v_n' |_{\rho=R_1} = v_n' |_{\rho=R_2} = 0. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Пусть  $\lambda_n, v_n(\rho)$  – полная система ортонормированных (в  $L_2[R_1, R_2]$ ) вещественных собственных чисел и собственных функций этой краевой задачи. Эта система существует, так как  $\rho \in C^1[R_1, R_2]$ ,  $k_2^2(\rho) - \rho^{-1} \in C^1[R_1, R_2]$  [35, 45]. Известно, что

все собственные значения вещественные и простые (кратности 1). При этом существует лишь конечное число (или не существует совсем) положительных собственных значений, и бесконечное число – отрицательных, и  $\lambda_n \rightarrow -\infty$ , при  $n \rightarrow \infty$ . Упорядочим собственные значения в порядке убывания:  $\dots < \lambda_{i+1} < \lambda_i < \dots < \lambda_2 < \lambda_1$ .

Ответ на вопрос о разрешимости задачи (2.65) дается следующим утверждением, которое следует из теоремы доказанной в работе Ю.Г. Смирнова [31].

**Утверждение 2.5.** Пусть  $(\varepsilon_2(\rho) \rho)'$  не обращается в нуль и  $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \geq \varepsilon_0$ ,  $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \varepsilon_2^* = \min_{\rho \in [R_1, R_2]} \varepsilon_2(\rho)$  и пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  такие собственные значения задачи (2.65), что  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2^*)$  тогда задача  $P_M^*$  имеет по крайней мере  $p - 1$  решений (собственных значений)  $\tilde{\gamma}_j$ ,  $j = \overline{1, p-1}$  таких, что  $\tilde{\gamma}_j^2 \in (\lambda_j, \lambda_{j+1})$ ,  $j = \overline{1, p-1}$ .

*Замечание 2.4.* Всегда можно подобрать толщину  $R_2 - R_1$  оболочки волновода  $\Sigma$  так, что линейная задача будет иметь решение.

Смысл утверждения 2.1 заключается в том, что собственные значения задачи  $P_M^*$  (линейной задачи) лежат между собственными значениями задачи (2.65).

В силу (2.56) справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 2.6.** Если  $\tilde{\gamma}, u_1, u_2$  решения задачи  $P_M$  (при  $\alpha = 0$ ), то  $\tilde{\gamma}, u_3$  – решения задачи  $P_M^*$ . Наоборот, если  $\tilde{\gamma}, u_3$  решения задачи  $P_M^*$ , то  $\tilde{\gamma}, u_1, u_2$  – решения задачи  $P_M$  (при  $\alpha = 0$ ). Причем кратность корней задачи  $P_M$  (при  $\alpha = 0$ ) совпадает с кратностью корней задачи  $P_M^*$

## 2.11 Существование решений дисперсионного уравнения

Нули функции  $\Phi(\lambda) \equiv C_1 g(\lambda) - \alpha P(\lambda)$  – это значения  $\lambda$ , для которых существует нетривиальное решение задачи  $P_M$ . То есть, если  $\lambda = \tilde{\lambda}$  таково, что  $\Phi(\tilde{\lambda}) = 0$ , то собственные значения рассматриваемой задачи определяются из уравнения  $\tilde{\lambda} = \gamma^2$ .

Покажем, что существуют решения уравнения

$$\Phi(\lambda) = 0.$$

Действительно, пусть существуют такие целые числа  $k \geq 1$  и  $l \geq 0$ , что справедливо

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \lambda_l < \lambda_{l+1} < \dots < \lambda_{l+k-1} < \lambda_{l+k} < \varepsilon_2^*,$$

где  $\varepsilon_2^* = \min_{\rho \in [R_1, R_2]} \varepsilon_2(\rho)$ . Тогда существует по крайней мере  $k$  корней  $\hat{\lambda}_i \in (\lambda_{l+i-1}, \lambda_{l+i})$ ,  $i = \overline{1, k}$  уравнения  $g(\lambda) = 0$ .

Выберем отрезки  $\Gamma_i$ , такие что каждый отрезок содержит ровно одно собственное значение  $\gamma_i$  задачи  $P_M$ , кроме того на объединении

$$\Gamma := \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$$

отрезков  $\Gamma_i$ ,  $i = \overline{1, k}$  функция Грина  $G_M(\rho, s; \lambda)$  существует и непрерывна. Кроме того, считаем  $\Gamma_i$  таковыми, что выполняется условие  $g(\underline{\Gamma}_i) g(\overline{\Gamma}_i) < 0$ , где  $\underline{\Gamma}_i, \overline{\Gamma}_i$  – концы отрезков  $\Gamma_i$ .

Ясно, что на отрезках  $\Gamma_i$  величина  $\Phi(\lambda)$  ограничена. Более того, за счет выбора  $\alpha$  произведение  $\alpha P(\lambda)$  может быть сделано достаточно малым. Рассмотрим дисперсионное уравнение  $\Phi(\lambda) = 0$ . Ясно, что функция  $g(\lambda)$  непрерывна и меняет знак при изменении  $\lambda$  от  $\underline{\Gamma}_i$  до  $\overline{\Gamma}_i$ . Поскольку величина  $P(\lambda)$  ограничена при изменении  $\lambda$  от  $\underline{\Gamma}_i$  до  $\overline{\Gamma}_i$ , то отсюда ясно, что за счет выбора  $\alpha$  всегда можно добиться того, что уравнение

$\Phi(\lambda) = 0$  будет иметь по крайней мере  $k$  корней  $\tilde{\lambda}_i$ , причем  $\tilde{\lambda}_i \in (\underline{\Gamma}_i, \overline{\Gamma}_i)$ ,  $i = \overline{1, k}$ .

Основным результатом этой главы является следующая

**Теорема 2.2.** Пусть числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_2^* = \min_{\rho \in [R_1, R_2]} \varepsilon_2(\rho)$  удовлетворяют условиям  $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \geq \varepsilon_0, \varepsilon_2^* > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) > 0$  и существуют целые числа  $k \geq 1$  и  $l \geq 0$ , что справедливо  $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \lambda_l < \lambda_{l+1} < \dots < \lambda_{l+k-1} < \lambda_{l+k} < \varepsilon_2^*$ , где  $\lambda_i$  собственные значения краевой задачи (2.24). Тогда найдется число  $\alpha_0 > 0$  такое, что для всякого  $\alpha \leq \alpha_0$  существует по крайней мере  $k$  собственных значений  $\gamma_i$  задачи  $P_M$ , причем  $\gamma_i \in (\sqrt{\underline{\Gamma}_i}, \sqrt{\overline{\Gamma}_i})$ ,  $i = \overline{1, k}$ .

*Доказательство.* Функция Грина существует для всех  $\gamma \in \Gamma$ . Также ясно, что функция  $A(\gamma) = \frac{2}{3\|f(\gamma)\|\sqrt{3\|\mathbf{N}_1(\gamma)\|}}$  является непрерывной функцией при  $\gamma \in \Gamma$ . Пусть  $A_1 = \min_{\gamma \in \Gamma} A(\gamma)$  и пусть  $\alpha < A_1^2$ . В соответствии с утверждением 2.3 существует единственное решение  $u = u(\gamma)$  уравнения (2.40) (или системы (2.35)) для всякого  $\gamma \in \Gamma$ . Это решение является непрерывной функцией и  $\|u\| \leq r_* = r_*(\gamma)$ . Пусть  $r_0 = \max_{\gamma \in \Gamma} r_*(\gamma)$ . Оценивая  $P(\lambda)$ , мы получаем  $|P(\lambda)| \leq Cr_0^3$ , где  $C$  – некоторая постоянная.

Функция  $g(\gamma)$  непрерывна и уравнение  $g(\gamma) = 0$  имеет по крайней мере один корень  $\tilde{\gamma}_i$  внутри отрезка  $\Gamma_i$ ,  $\sqrt{\underline{\Gamma}_i} < \tilde{\gamma}_i < \sqrt{\overline{\Gamma}_i}$ . Обозначим  $M_1 = \min_{\lambda \in \Gamma} |g(\lambda)|, M_2 = \min_{\lambda \in \Gamma} |g(\lambda)|$ . Тогда, величина  $\tilde{M} = \min\{M_1, M_2\}$  положительна и не зависит от  $\alpha$ .

Если  $\alpha \leq \frac{\tilde{M}}{Cr_0^3}$ , тогда

$$(C_1g(\underline{\Gamma}_i) - \alpha P(\underline{\Gamma}_i)) \times (C_1g(\overline{\Gamma}_i) - \alpha P(\overline{\Gamma}_i)) < 0.$$

Функция  $C_1g(\lambda) - \alpha P(\lambda)$  является непрерывной, следовательно, уравнение  $C_1g(\lambda) - \alpha P(\lambda) = 0$  имеет корень  $\hat{\gamma}_i$  внутри  $\Gamma_i$ , то есть  $\sqrt{\underline{\Gamma}_i} < \hat{\gamma}_i < \sqrt{\overline{\Gamma}_i}$ . Мы можем выбрать  $\alpha_0 = \min\left\{A_1^2, \frac{\tilde{M}}{Cr_0^3}\right\}$ .  $\square$

Из доказанной теоремы следует, что при условиях, сформулированных выше, существуют осесимметричные распространяющиеся ГМ-

поляризованные волны без затухания в неоднородных цилиндрических диэлектрических волноводах кругового сечения, заполненных немагнитной, изотропной неоднородной средой с нелинейностью, выраженной законом Керра. Этот результат обобщает известное соответствующее утверждение как для однородных диэлектрических волноводов [17], так и для неоднородных диэлектрических волноводов [21] круглого сечения с заполнением линейной средой (при  $\alpha = 0$ ).

## Глава 3

# Численный метод определения приближенных постоянных распространения

В главе предложены достаточные условия существования и локализации по крайней мере одного собственного значения. На основе этих условий предложен метод нахождения приближенных собственных значений рассматриваемых нелинейных задач сопряжения на собственные значения. Предложенный метод применен к исследованию конкретных типов нелинейностей, как для ТЕ-, так и для ТМ-волн.

Результаты главы опубликованы в [14, 33, 49].

### 3.1 Метод задачи Коши для решения нелинейной задачи сопряжения на собственные значения для ТЕ-волн

#### 3.1.1 Существование постоянных распространения

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$u'' = -\rho^{-1}u' + \rho^{-2}u - k_2^2(\rho)u - \alpha u^3 \quad (3.1)$$

с начальными условиями

$$u(R_1) := u(R_1 + 0), u'(R_1) := u'(R_1 + 0), \quad (3.2)$$

где  $u(R_1 + 0)$  и  $u'(R_1 + 0)$  определяются из решений (2.60), (2.62) и имеют вид

$$\begin{aligned} u(R_1 + 0) &= C_1 I_1(k_1 R_1), \\ u'(R_1 + 0) &= C_1 k_1 \left( I_0(k_1 R_1) - \frac{I_0(k_1 R_1)}{k_1 R_1} \right), \end{aligned}$$

где  $C_1$  – заданная постоянная.

При расчетах необходимо задавать значение одной из постоянных:  $C_1$  или  $C_2$ . Можно задавать значение постоянной на любой из границ волновода. Заметим, что в отличие от задач для линейных сред постоянные распространения (собственные значения) в задачах для нелинейных сред зависят от амплитуды поля на одной из границ волновода.

Считая постоянной  $C_1$  заданной и равной единице из (2.62) и условия сопряжения на границе  $R_2$  (2.64) получаем дисперсионное уравнение

$$\Delta(\gamma) \equiv u'(R_2) K_1(k_3 R_2) + k_3 u(R_2) \left( K_0(k_3 R_2) + \frac{K_1(k_3 R_2)}{k_3 R_2} \right). \quad (3.3)$$

Воспользуемся классическими результатами теории обыкновенных дифференциальных уравнений о существовании и единственности решения задачи Коши и о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметра.

Пусть  $\sqrt{\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)} < \gamma_* < \gamma^* < \infty$  и  $b_\gamma < \infty$  – некоторая постоянная. Определим множество

$$\Pi_\gamma := \{(\rho, u; \gamma) : \rho \leq R_1 + \tilde{\rho}, |u - u(R_1)| \leq b_\gamma, \gamma \in [\gamma_*, \gamma^*]\},$$

и число  $M_\gamma$  такое, что  $M_\gamma \geq \max_{\Pi_\gamma} |P|$ , где  $P$  – правая часть уравнения (3.1). При этом имеет место следующее утверждение.



**Утверждение 3.1.** *Решение  $u(\rho; \gamma)$  задачи Коши для уравнения (3.1) с начальными условиями (3.2) непрерывное, дифференцируемое относительно  $\rho$ , единственное и существует при всех  $\rho \in (R_1, R_2)$ , где  $R_2 \leq \min(\tilde{\rho}, b_\gamma/M_\gamma)$ , и непрерывно зависит от  $\gamma$  для всех  $\gamma \in [\gamma_*, \gamma^*]$ .*

Утверждение 3.1 есть применение теоремы о непрерывной зависимости от параметра решения задачи Коши ([20], стр.183 – 185).

*Примечание.* Поскольку мы рассматриваем случай  $R_1 = \delta > 0$ , то ясно, что утверждение 3.1 имеет нелокальный характер, т.е. мы всегда можем выбрать такое  $R_2$  и такие  $\gamma_*, \gamma^*$ , при которых решение  $u(\rho; \gamma)$  существует и непрерывно при  $R_1 \leq \rho \leq R_2$  для всех  $\gamma \in [\gamma_*, \gamma^*]$ .

Рассмотрим функцию

$$F(R_2; \gamma) := u(R_2 - 0; \gamma) - u(R_2 + 0; \gamma).$$

Используя условия сопряжения на границе  $\rho = R_2$ (2.62) и решения  $\rho > R_2$ (2.64) получаем, что  $F(R_2; \gamma) \equiv \Delta(\gamma)$ .

Из формулы (3.3) ясно, что значение  $F(R_2; \gamma)$  выражается только через значения решения задачи Коши.

Величины  $u(R_2 - 0; \gamma)$  и  $u'(R_2 - 0; \gamma)$  определяются из решения задачи Коши.

Пусть  $\gamma = \tilde{\gamma}$  таково, что  $F(R_2; \gamma) = 0$ , тогда ясно, что число  $\tilde{\gamma}$  является решением (постоянной распространения) задачи  $P_E$ .

Сформулируем критерий существования по крайней мере одного собственного значения.

**Утверждение 3.2.** *Пусть выполняются условия утверждения 3.1 и отрезок  $[\underline{\gamma}, \bar{\gamma}] \in [\gamma_*, \gamma^*]$  такой, что  $F(R_2; \underline{\gamma}) F(R_2; \bar{\gamma}) < 0$ . Тогда, существует, по крайней мере, одна постоянная распространения (одно собственное значение)  $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$  задачи  $P_E$ .*

*Доказательство.* Функция  $F$  о которой говорится в теореме, является линейной функцией от  $u(R_2)$  и  $u'(R_2)$ , где  $u(R_2)$  и  $u'(R_2)$  – решения рассматриваемой задачи Коши. В силу выполнения условий утверждения 3.1 это решение задачи Коши является непрерывной функцией параметра  $\gamma$ . В то же время функции  $k_3 = \sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_3}$ ,  $K_1(k_3 R_2)$  и  $K_0(k_3 R_2)$  входящие в определение функции  $F$ , также являются непрерывными функциями параметра  $\gamma$ . Отсюда следует, что функция  $F$  является непрерывной функцией параметра  $\gamma$ . Поскольку отрезок  $[\underline{\gamma}_*, \gamma^*]$  таков, что  $F(R_2; \underline{\gamma}) F(R_2; \bar{\gamma}) < 0$ , то, по теореме Вейерштрасса, существует по крайней мере одно значение  $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$  такое, что  $F(R_2; \tilde{\gamma}) = 0$ . Это значение  $\tilde{\gamma}$ , по определению функции  $F$ , является собственным значением задачи  $P_E$ .  $\square$

*Замечание 3.1.* Условие  $F(R_2; \underline{\gamma}) F(R_2; \bar{\gamma}) < 0$  является только достаточным условием существования постоянной распространения  $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$  задачи  $P_E$ .

### 3.1.2 Метод вычисления собственных значений

Рассматриваемый метод позволяет построить графики зависимости постоянной распространения (нормированной)  $\gamma$  от толщины  $\Delta R = R_2 - R_1$  (тоже нормированной). Дисперсионными кривыми в таких задачах называют кривые  $\gamma = \gamma(\omega)$ , где  $\omega$  – круговая частота. Если же кривая  $\gamma(\omega)$  зависит от амплитуды поля (что имеет место в рассматриваемой нами задаче), то такие кривые называют энергетическими дисперсионными кривыми [3]. Поскольку используем нормированные переменные, то будем называть нормированной дисперсионной кривой (или энергетической дисперсионной кривой) график зависимости  $\gamma = \gamma(\Delta R)$ .

Будем рассматривать задачу Коши для уравнения (3.1) с начальными условиями (3.2).

Пусть  $0 < \Delta R_* < \Delta R^* < \infty$  и  $\sqrt{\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)} < \gamma_* < \gamma^* < \infty$  – некоторые числа. Будем считать, что

$$\Delta R \in [\Delta R_*, \Delta R^*], \gamma \in [\gamma_*, \gamma^*].$$

Разбиваем отрезки  $[\Delta R_*, \Delta R^*]$  и  $[\gamma_*, \gamma^*]$  на  $n$  и  $m$  частей соответственно. Тогда имеем  $\{\Delta R_i, \gamma_j\}, i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$ ; причем  $\Delta R_0 = \Delta R_*$ ,  $\Delta R_n = \Delta R^*$ ,  $\gamma_0 = \gamma_*$ ,  $\gamma_m = \gamma^*$ . Тогда для каждой пары индексов  $(i, j)$  будем иметь пару начальных значений  $(u_{ij}(R_1), u'_{ij}(R_1))$ , где  $u_{ij}(R_1) := u(R_1 + 0; \gamma_j)$  и  $u'_{ij}(R_1) := u'(R_1 + 0; \gamma_j)$ , которые определяются при помощи условий сопряжения (2.62) следующим образом

$$\begin{cases} u(R_1 - 0) = u(R_1 + 0), \\ u'(R_1 - 0) = u'(R_1 + 0), \end{cases}$$

(несмотря на то, что начальные значения не зависят от  $\Delta R_i$ , нам удобно оставить двойную индексацию).

Теперь можно поставить задачу Коши для уравнения (3.1) с начальным условием  $u_{ij}(R_1), u'_{ij}(R_1)$ . Решив указанную задачу Коши, получаем значения  $u_{ij}(R_2 - 0) := u(\Delta R_i; \gamma_j)$  и  $u'_{ij}(R_2 - 0) := u'(\Delta R_i; \gamma_j)$ .

Построим функцию  $F(\Delta R_i; \gamma_j) := u_{ij}(R_2 - 0) - u_{ij}(R_2 + 0)$ . Пусть для заданного  $\Delta R_i$  существуют такие  $\gamma_j$  и  $\gamma_{j+1}$ , при которых  $F(\Delta R_i; \gamma_j) F(\Delta R_i; \gamma_{j+1}) < 0$ . Отсюда следует, что существует значение  $\tilde{\gamma}_j \in (\gamma_j, \gamma_{j+1})$ , являющееся собственным значением рассматриваемой задачи о распространении волн; этому собственному значению соответствует толщина слоя  $\Delta R_i$ . Значение  $\tilde{\gamma}_j$  может быть найдено с любой степенью точности, например, методом дихотомии.

На основе метода дихотомии построим метод нахождения приближенного значения постоянной распространения.

Зададим  $\delta > 0$  – погрешность нахождения значения постоянной распространения  $\tilde{\gamma}$ . Пусть отрезок  $[\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1]$  такой, что

$F(\Delta R_i, \underline{\gamma}_1)F(\Delta R_i, \bar{\gamma}_1) < 0$ . Искомое собственное значение  $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1)$  и приближенное собственное значение  $\tilde{\gamma}_1 \in (\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1)$ .

Определим середину отрезка  $\gamma_1 = 0.5(\underline{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_1)$  и вычислим  $F(\Delta R_i; \gamma_1)$ . Проверяем следующие условия.

1. Если  $|F(\Delta R_i; \gamma_1)| < \delta$ , то  $\gamma_1$  – искомое приближенное собственное значение.

2. Если  $F(\Delta R_i; \underline{\gamma}_1)F(\Delta R_i; \gamma_1) < 0$ , то  $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}_1, \gamma_1)$ . Тогда полагаем  $\underline{\gamma}_2 := \underline{\gamma}_1$  и  $\bar{\gamma}_2 := \gamma_1$ , следовательно,  $\tilde{\gamma}_2 \in (\underline{\gamma}_2, \bar{\gamma}_2)$ .

3. Если  $F(\Delta R_i; \gamma_1)F(\Delta R_i; \bar{\gamma}_1) < 0$ , то  $\tilde{\gamma} \in (\gamma_1, \bar{\gamma}_1)$ . Тогда полагаем  $\underline{\gamma}_2 := \gamma_1$  и  $\bar{\gamma}_2 := \bar{\gamma}_1$ , следовательно,  $\tilde{\gamma}_2 \in (\underline{\gamma}_2, \bar{\gamma}_2)$ .

Продолжая процесс половинного деления  $n$  раз получаем, что искомое приближенное значение  $\tilde{\gamma}_n \in (\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n)$ . Ясно, что  $|\bar{\gamma}_n - \underline{\gamma}_n| = 2^{-n}|\bar{\gamma}_1 - \underline{\gamma}_1|$ . Выберем число  $n$  таким образом, чтобы выполнялось неравенство  $2^{-n}|\bar{\gamma}_1 - \underline{\gamma}_1| < \delta$ . Тогда за приближенное значение  $\tilde{\gamma}_n$  постоянной распространения  $\tilde{\gamma}$  можно принять, например, середину отрезка  $[\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n]$ , т.е.  $\tilde{\gamma}_n = 0.5(\bar{\gamma}_n + \underline{\gamma}_n)$ .

Можно показать [12], что справедлива следующая

**Теорема 3.1.** Пусть выполняются условия утверждения 3.2 и пусть  $\{\tilde{\gamma}_n\}$  – последовательность приближенных значений постоянной распространения  $\tilde{\gamma}$ , полученная методом дихотомии, тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}_n = \tilde{\gamma}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность чисел  $\tilde{\gamma}_i = 0.5(\bar{\gamma}_i + \underline{\gamma}_i)$ , являющихся приближенными значениями собственного значения  $\tilde{\gamma}$  на  $i$ -й итерации.

Последовательность  $\{\tilde{\gamma}_i\}_{i=1}$  является фундаментальной на отрезке  $[\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1]$ . Действительно, пусть  $p > k > 0$  – целые числа, тогда  $|\bar{\gamma}_k - \underline{\gamma}_p| \leq 2^{-k}|\bar{\gamma}_1 - \underline{\gamma}_1|$ . Но при  $k \leq n$  выполняется  $2^{-k}|\bar{\gamma}_1 - \underline{\gamma}_1| < \delta$ . Тогда пусть  $\gamma^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}_n$ . Но для любого номера  $n$  выполняются соотношения  $\tilde{\gamma}_n \in (\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n)$  и  $\gamma^* \in (\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n)$ .

Из вышесказанного следует, что  $\gamma^* = \tilde{\gamma}$ . Этим завершается доказательство.  $\square$

## 3.2 Метод задачи Коши для решения нелинейной задачи сопряжения на собственные значения для ТМ-волн

### 3.2.1 Существование постоянных распространения

Рассмотрим задачу Коши для системы

$$\begin{cases} u_1' = \frac{2\alpha\gamma u_1^2 u_2 - (\rho^{-1}u_1 + \gamma u_2 + 2\alpha\gamma^{-1}k_0^2 u_1^2 u_2)(\varepsilon_2(\rho) + \alpha(u_1^2 + u_2^2)) + \varepsilon_2'(\rho)u_1}{2\alpha u_1^2 + \varepsilon_2(\rho) + \alpha(u_1^2 + u_2^2)}, \\ u_2' = -\frac{\gamma^2 - k_0^2(\varepsilon_2(\rho) + \alpha(u_1^2 + u_2^2))}{\gamma} u_1, \end{cases} \quad (3.4)$$

с начальными условиями

$$u_1(R_1) := u_1(R_1 + 0), u_2(R_1) := u_2(R_1 + 0) \quad (3.5)$$

где значение  $u_1(R_1 + 0)$  определяется из уравнения

$$\varepsilon_1 u_1(R_1 - 0) = (\varepsilon_2(R_1 + 0) + \alpha(u_1^2(R_1 + 0) + u_2^2(R_1 + 0))) u_1(R_1 + 0).$$

Из условий сопряжения получаем, что  $u_2(R_1 + 0) = C_1 I_0(k_1 R_1)$ , где  $C_1$  – амплитуда поля (заданная постоянная).

При расчетах необходимо задавать значение одной из постоянных:  $C_1$  или  $C_2$ . Можно задавать значение постоянной на любой из границ волновода. Заметим, что в отличие от задач для линейных сред постоянные распространения (собственные значения) в задачах для нелинейных сред зависят от амплитуды поля на одной из границ волновода.

Считая постоянной  $C_1$  заданной и равной единице из (2.18) и условия сопряжения на границе  $R_2$  (2.20) получаем дисперсионное уравнение

$$\Delta(\gamma) \equiv (\varepsilon_2(R_2 - 0) + \alpha(u_1^2(R_2 - 0) + u_2^2(R_2 - 0)))u_1(R_2 - 0) - \gamma \frac{\varepsilon_3 K_1(k_3 R_2)}{k_3 K_0(k_3 R_2)} u_2(R_2 - 0). \quad (3.6)$$

Воспользуемся классическими результатами теории обыкновенных дифференциальных уравнений о существовании и единственности решения задачи Коши и о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметра.

Пусть  $\sqrt{\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)} < \gamma_* < \gamma^* < \infty$  и  $b_\gamma < \infty$  – некоторая постоянная. Определим множество

$$\Pi_\gamma := \{(\rho, u_1, u_2; \gamma) : \rho \leq R_1 + \tilde{\rho}, |u_1 - u_1(R_1)| \leq b_\gamma, |u_2 - u_2(R_1)| \leq b_\gamma, \gamma \in [\gamma_*, \gamma^*]\},$$

и число  $M_\gamma$  такое, что  $M_\gamma \geq \max_{\Pi_\gamma} |P|$ ,  $M_\gamma \geq \max_{\Pi_\gamma} |Q|$ , где  $P$  и  $Q$  – правые части уравнений (3.4). При этом имеет место следующее утверждение.

**Утверждение 3.3.** *Решение  $u_1(\rho; \gamma)$  и  $u_2(\rho; \gamma)$  задачи Коши для системы (3.4) с начальными условиями (3.5) непрерывное, дифференцируемое относительно  $\rho$ , единственное и существует при всех  $\rho \in (R_1, R_2)$ , где  $R_2 \leq \min(\tilde{\rho}, b_\gamma/M_\gamma)$ , и непрерывно зависит от  $\gamma$  для всех  $\gamma \in [\gamma_*, \gamma^*]$ .*

Утверждение 3.4 есть применение теоремы о непрерывной зависимости от параметра решения задачи Коши ([20], стр.183–185)

*Замечание 3.2.* Поскольку мы рассматриваем случай  $R_1 = \delta > 0$ , то ясно, что утверждение 3.4 имеет нелокальный характер, т.е. мы всегда можем выбрать такое  $R_2$  и такие  $\gamma_*, \gamma^*$ , при которых решение  $u_1(\rho; \gamma)$  и  $u_2(\rho; \gamma)$  существует и непрерывное при  $R_1 \leq \rho \leq R_2$  для всех  $\gamma \in [\gamma_*, \gamma^*]$ .

Рассмотрим функцию

$$F(R_2; \gamma) := u_1(R_2 - 0; \gamma) - u_1(R_2 + 0; \gamma).$$

Используя условия сопряжения на границе  $\rho = R_2$  (2.20) и решения при  $\rho > R_2$  (2.18) получаем, что  $F(R_2; \gamma) \equiv \Delta(\gamma)$ .

Из формулы (3.6) ясно, что значение  $F(R_2; \gamma)$  выражается только через значения решения задачи Коши.

Величины  $u_1(R_2 - 0; \gamma)$  и  $u_2(R_2 - 0; \gamma)$  определяются из решения задачи Коши.

Пусть  $\gamma = \tilde{\gamma}$  таково, что  $F(R_2; \gamma) = 0$ , тогда ясно, что  $\tilde{\gamma}$  является решением (постоянной распространения) задачи  $P_M$ .

Сформулируем критерий существования по крайней мере одного собственного значения.

**Утверждение 3.4.** Пусть выполняются условия утверждения 3.4 и отрезок  $[\underline{\gamma}, \bar{\gamma}] \in [\gamma_*, \gamma^*]$  такой, что  $F(R_2; \underline{\gamma}) F(R_2; \bar{\gamma}) < 0$ . Тогда, существует, по крайней мере, одна постоянная распространения (одно собственное значение)  $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$  задачи  $P_M$ .

*Доказательство.* Функция  $F$  которой говорится в теореме, является линейной функцией от  $u_1(R_2)$  и  $u_2(R_2)$ , где  $u_1(R_2)$  и  $u_2(R_2)$  – решения рассматриваемой задачи Коши. В силу выполнения условий утверждения 3.4 это решение задачи Коши является непрерывной функцией параметра  $\gamma$ . В то же время функции  $k_3 = \sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_3}$ ,  $K_1(k_3 R_2)$  и  $K_0(k_3 R_2)$  входящие в определение функции  $F$ , также являются непрерывными функциями параметра  $\gamma$ . Отсюда следует, что функция  $F$  является непрерывной функцией параметра  $\gamma$ . Поскольку отрезок  $[\gamma_*, \gamma^*]$  таков, что  $F(R_2; \underline{\gamma}) F(R_2; \bar{\gamma}) < 0$ , то, по теореме Вейерштрасса, существует по крайней мере одно значение  $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$  такое, что  $F(R_2; \tilde{\gamma}) = 0$ . Это значение  $\tilde{\gamma}$ , по определению функции  $F$ , является собственным значением задачи  $P_M$ .  $\square$

*Замечание.* Условие  $F(R_2; \underline{\gamma})F(R_2; \overline{\gamma}) < 0$  является только достаточным условием существования постоянной распространения  $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}, \overline{\gamma})$  задачи  $P_M$ .

### 3.2.2 Метод вычисления собственных значений

Рассматриваемый метод позволяет построить графики зависимости постоянной распространения (нормированной)  $\gamma$  от толщины  $\Delta R = R_2 - R_1$  (тоже нормированной). Дисперсионными кривыми в таких задачах называют кривые  $\gamma = \gamma(\omega)$ , где  $\omega$  – круговая частота. Если же кривая  $\gamma(\omega)$  зависит от амплитуды поля (что имеет место в рассматриваемой нами задаче), то такие кривые называют энергетическими дисперсионными кривыми [3]. Поскольку используем нормированные переменные, то будем называть нормированной дисперсионной кривой (или энергетической дисперсионной кривой) график зависимости  $\gamma = \gamma(\Delta R)$ .

Будем рассматривать задачу Коши для системы (3.4) с начальными условиями (3.5).

Пусть  $0 < \Delta R_* < \Delta R^* < \infty$  и  $\sqrt{\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)} < \gamma_* < \gamma^* < \infty$  – некоторые числа. Будем считать, что

$$\Delta R \in [\Delta R_*, \Delta R^*], \gamma \in [\gamma_*, \gamma^*].$$

Разбиваем отрезки  $[\Delta R_*, \Delta R^*]$  и  $[\gamma_*, \gamma^*]$  на  $n$  и  $m$  частей соответственно. Тогда имеем  $\{\Delta R_i, \gamma_i\}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $j = \overline{0, m}$ ; причем  $\Delta R_0 = \Delta R_*$ ,  $\Delta R_n = \Delta R^*$ ,  $\gamma_0 = \gamma_*$ ,  $\gamma_m = \gamma^*$ . Тогда для каждой пары индексов  $(i, j)$  будем иметь пару начальных значений  $(u_{1,ij}(R_1), u_{2,ij}(R_1))$ , где  $u_{1,ij}(R_1) := u_1(R_1 + 0; \gamma_j)$  и  $u_{2,ij}(R_1) := u_2(R_1 + 0; \gamma_j)$ , которые определяются при помощи условий сопряжения (2.20) следующим образом

$$\begin{cases} \varepsilon_1 u_1(R_1 - 0) = (\varepsilon_2(R_1 + 0) + \alpha(u_1^2(R_1 + 0) + u_2^2(R_1 + 0))) u_1(R_1 + 0), \\ u_2(R_1 - 0) = u_2(R_1 + 0), \end{cases}$$



(несмотря на то, что начальные значения не зависят от  $\Delta R_i$ , нам удобно оставить двойную индексацию).

Теперь можно поставить задачу Коши для уравнения (3.4) с начальным условием  $u_{1,ij}(R_1), u_{2,ij}(R_1)$ . Решив указанную задачу Коши, получаем значения  $u_{1,ij}(R_2 - 0) := u_1(\Delta R_i; \gamma_j)$  и  $u_{2,ij}(R_2 - 0) := u_2(\Delta R_i; \gamma_j)$ .

Построим функцию  $F(\Delta R_i; \gamma_j) := u_{1,ij}(R_2 - 0) - u_{1,ij}(R_2 + 0)$ . Пусть для заданного  $\Delta R_i$  существуют такие  $\gamma_j$  и  $\gamma_{j+1}$ , при которых  $F(\Delta R_i; \gamma_j) F(\Delta R_i; \gamma_{j+1}) < 0$ . Отсюда следует, что существует значение  $\tilde{\gamma}_j \in (\gamma_j, \gamma_{j+1})$ , являющееся собственным значением рассматриваемой задачи о распространении волн; этому собственному значению соответствует толщина слоя  $\Delta R_i$ . Значение  $\tilde{\gamma}_j$  может быть найдено с любой степенью точности, например, методом дихотомии.

На основе метода дихотомии построим метод нахождения приближенного значения постоянной распространения.

Зададим  $\delta > 0$  – погрешность нахождения значения постоянной распространения  $\tilde{\gamma}$ . Пусть интервал  $(\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1)$  такой, что  $F(\Delta R_i, \underline{\gamma}_1) F(\Delta R_i, \bar{\gamma}_1) < 0$ . Искомое собственное значение  $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1)$  и приближенное собственное значение  $\tilde{\gamma}_1 \in (\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1)$ .

Определим середину отрезка  $\gamma_1 = 0.5(\underline{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_1)$  и вычислим  $F(\Delta R_i; \gamma_1)$ . Проверяем следующие условия.

1. Если  $|F(\Delta R_i; \gamma_1)| < \delta$ , то  $\gamma_1$  – искомое приближенное собственное значение.

2. Если  $F(\Delta R_i; \underline{\gamma}_1) F(\Delta R_i; \gamma_1) < 0$ , то  $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}_1, \gamma_1)$ . Тогда полагаем  $\underline{\gamma}_2 := \underline{\gamma}_1$  и  $\bar{\gamma}_2 := \gamma_1$ , следовательно,  $\tilde{\gamma}_2 \in (\underline{\gamma}_2, \bar{\gamma}_2)$ .

3. Если  $F(\Delta R_i; \gamma_1) F(\Delta R_i; \bar{\gamma}_1) < 0$ , то  $\tilde{\gamma} \in (\gamma_1, \bar{\gamma}_1)$ . Тогда полагаем  $\underline{\gamma}_2 := \gamma_1$  и  $\bar{\gamma}_2 := \bar{\gamma}_1$ , следовательно,  $\tilde{\gamma}_2 \in (\underline{\gamma}_2, \bar{\gamma}_2)$ .

Продолжая процесс половинного деления  $n$  раз получаем, что искомое приближенное значение  $\tilde{\gamma}_n \in (\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n)$ . Ясно, что  $|\bar{\gamma}_n - \underline{\gamma}_n| = 2^{-n} |\bar{\gamma}_1 - \underline{\gamma}_1|$ . Выберем число  $n$  таким образом, чтобы выполнялось неравенство  $2^{-n} |\bar{\gamma}_1 - \underline{\gamma}_1| < \delta$ . Тогда за приближенное значение  $\tilde{\gamma}_n$  постоянной распространения  $\tilde{\gamma}$  можно принять, например, середину отрезка  $[\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n]$ , т.е.  $\tilde{\gamma}_n = 0.5 (\bar{\gamma}_n + \underline{\gamma}_n)$ .

Можно показать, что справедлива следующая

**Теорема 3.2.** Пусть выполняются условия утверждения 3.5 и пусть  $\{\tilde{\gamma}_n\}$  – последовательность приближенных значений постоянной распространения  $\tilde{\gamma}$ , полученная методом дихотомии, тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}_n = \tilde{\gamma}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность чисел  $\tilde{\gamma}_i = 0.5 (\bar{\gamma}_i + \underline{\gamma}_i)$ , являющихся приближенными значениями собственного значения  $\tilde{\gamma}$  на  $i$ -й итерации.

Последовательность  $\{\tilde{\gamma}_i\}_{i=1}$  является фундаментальной на отрезке  $[\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1]$ . Действительно, пусть  $p > k > 0$  – целые числа, тогда  $|\bar{\gamma}_k - \underline{\gamma}_p| \leq 2^{-k} |\bar{\gamma}_1 - \underline{\gamma}_1|$ . Но при  $k \leq n$  выполняется  $2^{-k} |\bar{\gamma}_1 - \underline{\gamma}_1| < \delta$ . Тогда пусть  $\gamma^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}_n$ . Но для любого номера  $n$  выполняются соотношения  $\tilde{\gamma}_n \in (\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n)$  и  $\gamma^* \in (\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n)$ .

Из вышесказанного следует, что  $\gamma^* = \tilde{\gamma}$ . Этим завершается доказательство. □

## Глава 4

# Комплекс программ и численные результаты.

В главе представлены краткие описания комплексов программ для расчета приближенных собственных значений и собственных функций в задачах распространения ТЕ- и ТМ-волн в в двухслойном цилиндрическом волноводе с нелинейной неоднородной диэлектрической проницаемостью; представлены результаты расчетов.

Результаты главы опубликованы в [13, 14, 15, 33, 49, 54].

### 4.1 Комплекс программ для численного решения задачи $P_E$

Блок-схемы алгоритмов вычисления собственных значений и собственных функций для ТЕ-волн представлены на рис. 4.1–4.2.

Входными данными являются:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha, k_0, C_1, R_1, R_2, \gamma_*, \gamma^*$  (тип:real). Выходными данными в случае собственных значений является массив  $[\rho; \gamma^2]$ ; в случае собственных функций – массив  $[\rho; u(\rho)]$ .

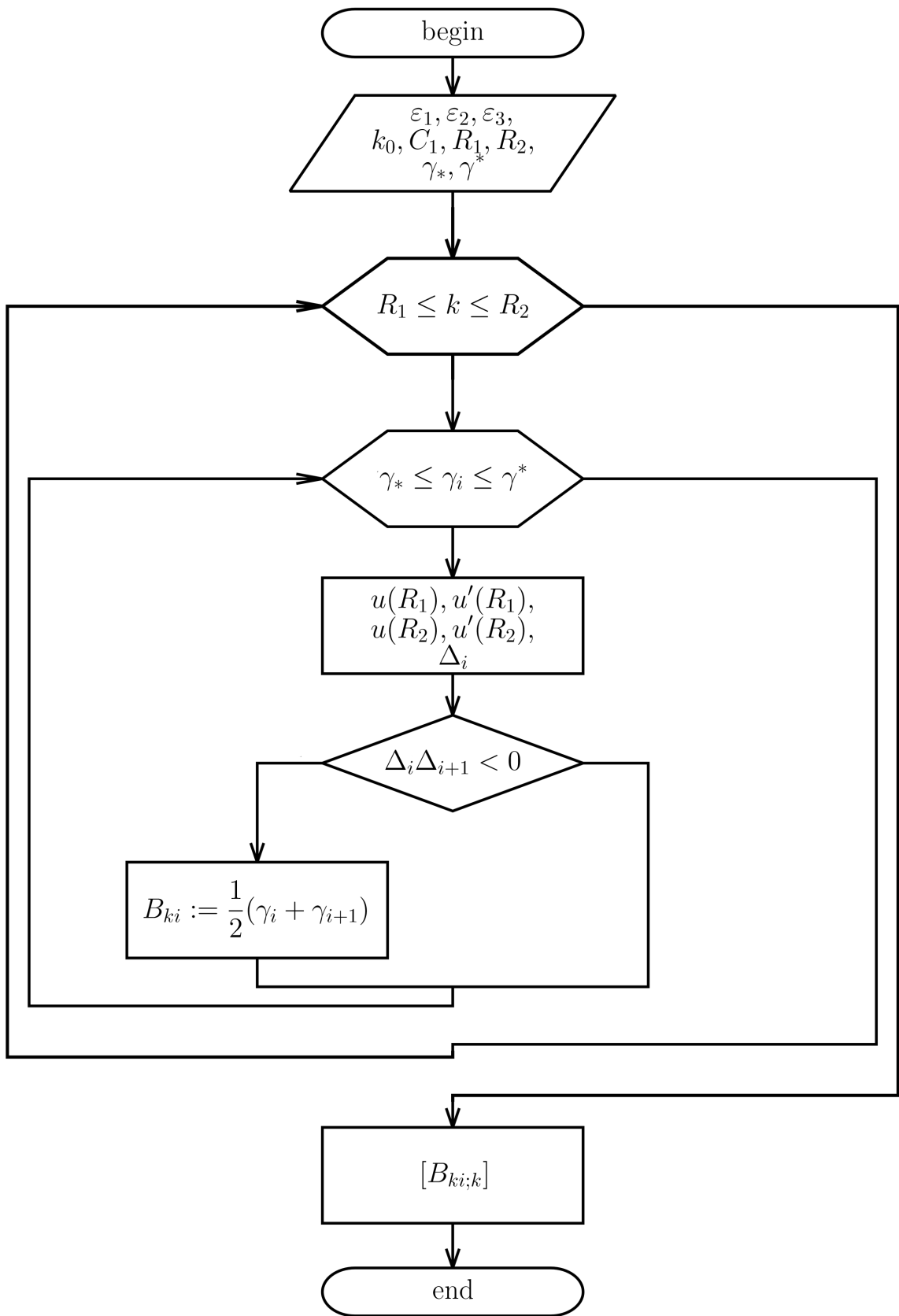


Рис. 4.1: Блок-схема алгоритма вычисления собственных значений для ТЕ-волн

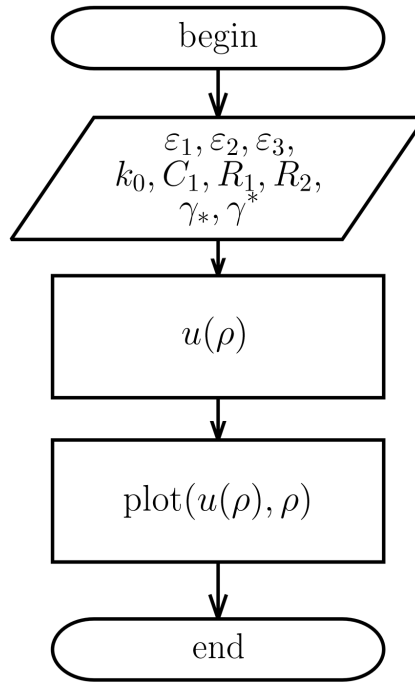


Рис. 4.2: Блок-схема алгоритма вычисления собственных функций для ТЕ-волн

## 4.2 Численные результаты для задачи $P_E$

Численные результаты получены для следующих функции  $\varepsilon_2(\rho)$ , задающих диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon = \varepsilon_2(\rho) + \alpha u^2$  в слое  $R_1 < \rho < R_2$ :

1.  $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2 + \frac{1}{\rho}$ ;
2.  $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2$ ;
3.  $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2 + \rho$ ;

где  $\varepsilon_2$  – вещественная положительная постоянная.

Дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\Delta(\gamma) \equiv u'(R_2) I_1(k_3 R_2) + k_3 u(R_2) \left( K_0(k_3 R_2) + \frac{K_1(k_3 R_2)}{k_3 R_2} \right);$$

Результаты расчетов представлены на рис. 4.3–4.8. При расчете использовались следующие значения параметров:  $\varepsilon_1 = 4$ ,  $\varepsilon_2 = 9$ ,  $\varepsilon_3 = 1$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $R_1 = 2$ ,  $2 < R_2 < 8$ ,  $k_0 = 1$ ,  $C_1 = 1$ .

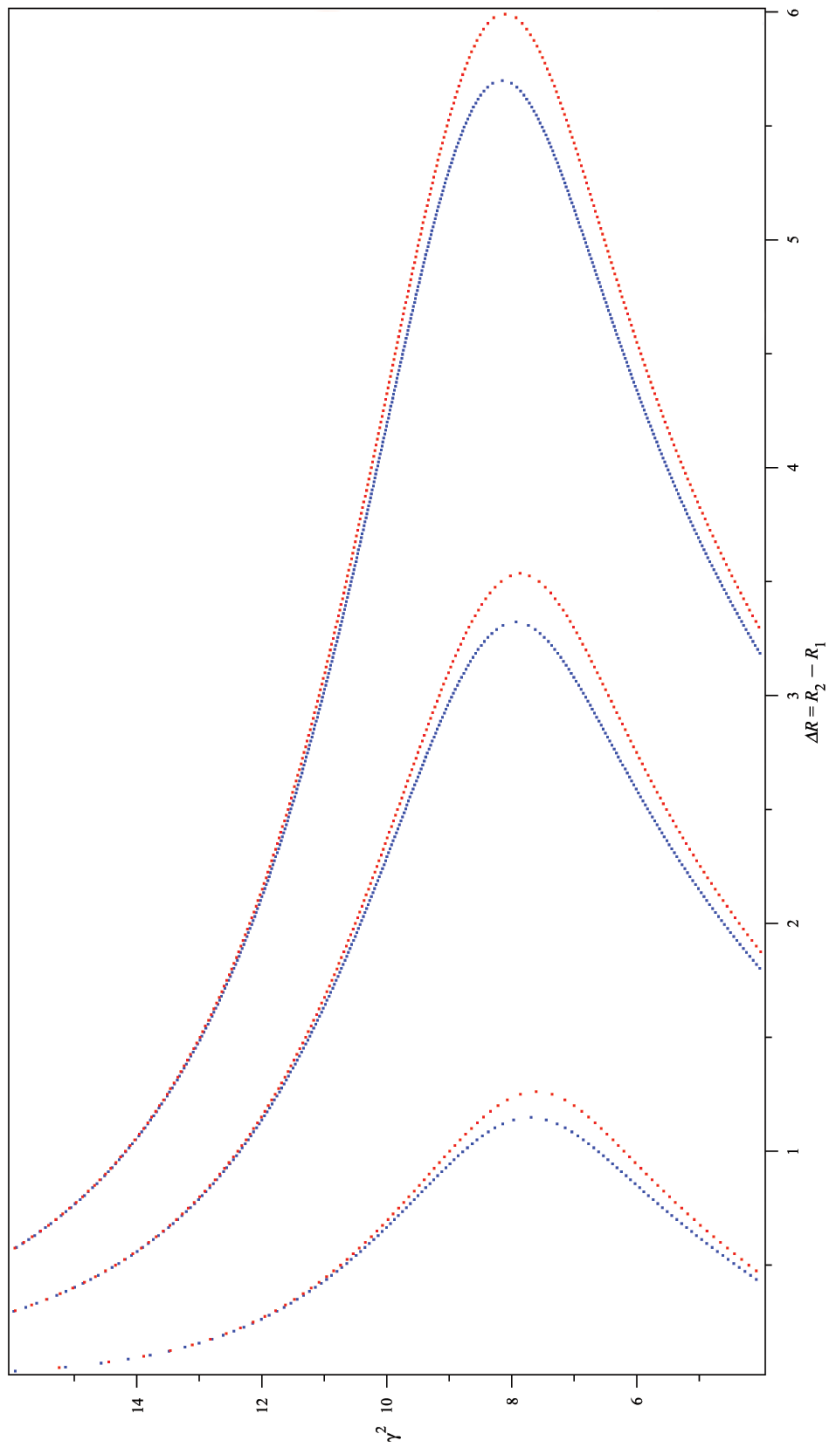


Рис. 4.3: Зависимость квадрата постоянной распространения  $\gamma^2$  (вертикальная ось) от толщины слоя  $\Delta = R_2 - R_1$  (горизонтальная ось); красная линия соответствует  $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2$ , синяя линия соответствует  $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2 + \frac{1}{\rho}$ .

Поскольку неоднородность в слое мала  $\frac{1}{8} \leq \frac{1}{\rho} \leq \frac{1}{2}$  дисперсионные кривые (неоднородный и однородный случаи) близко расположены друг к другу.

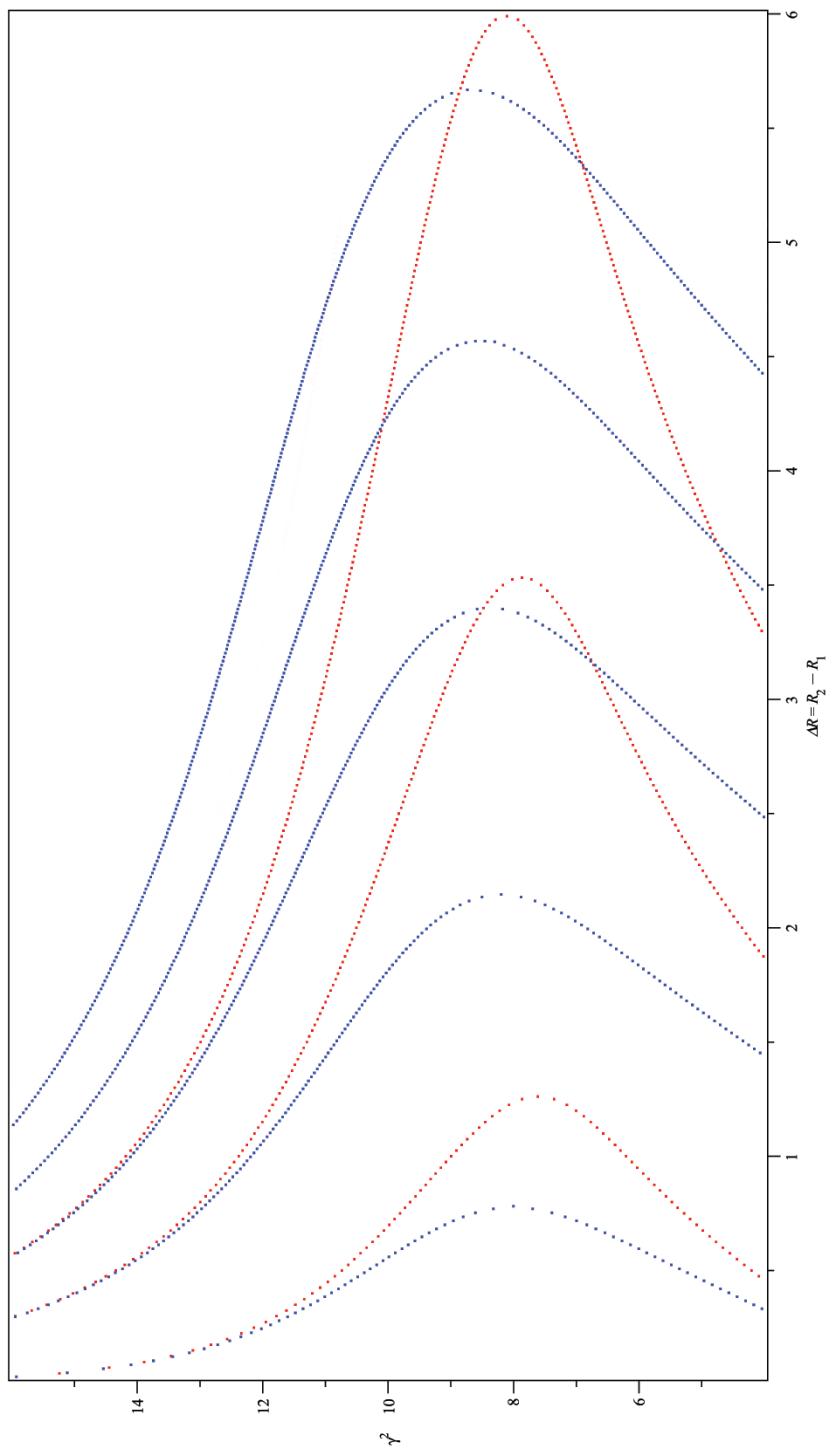


Рис. 4.4: Зависимость квадрата постоянной распространения  $\gamma^2$  (вертикальная ось) от толщины слоя  $\Delta = R_2 - R_1$  (горизонтальная ось); красная линия соответствует  $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2$ , синяя линия соответствует  $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2 + \rho$ .

Поскольку неоднородность в слое велика  $2 \leq \rho \leq 8$  дисперсионные кривые (неоднородный и однородный случаи) значительно отличаются друг от друга.



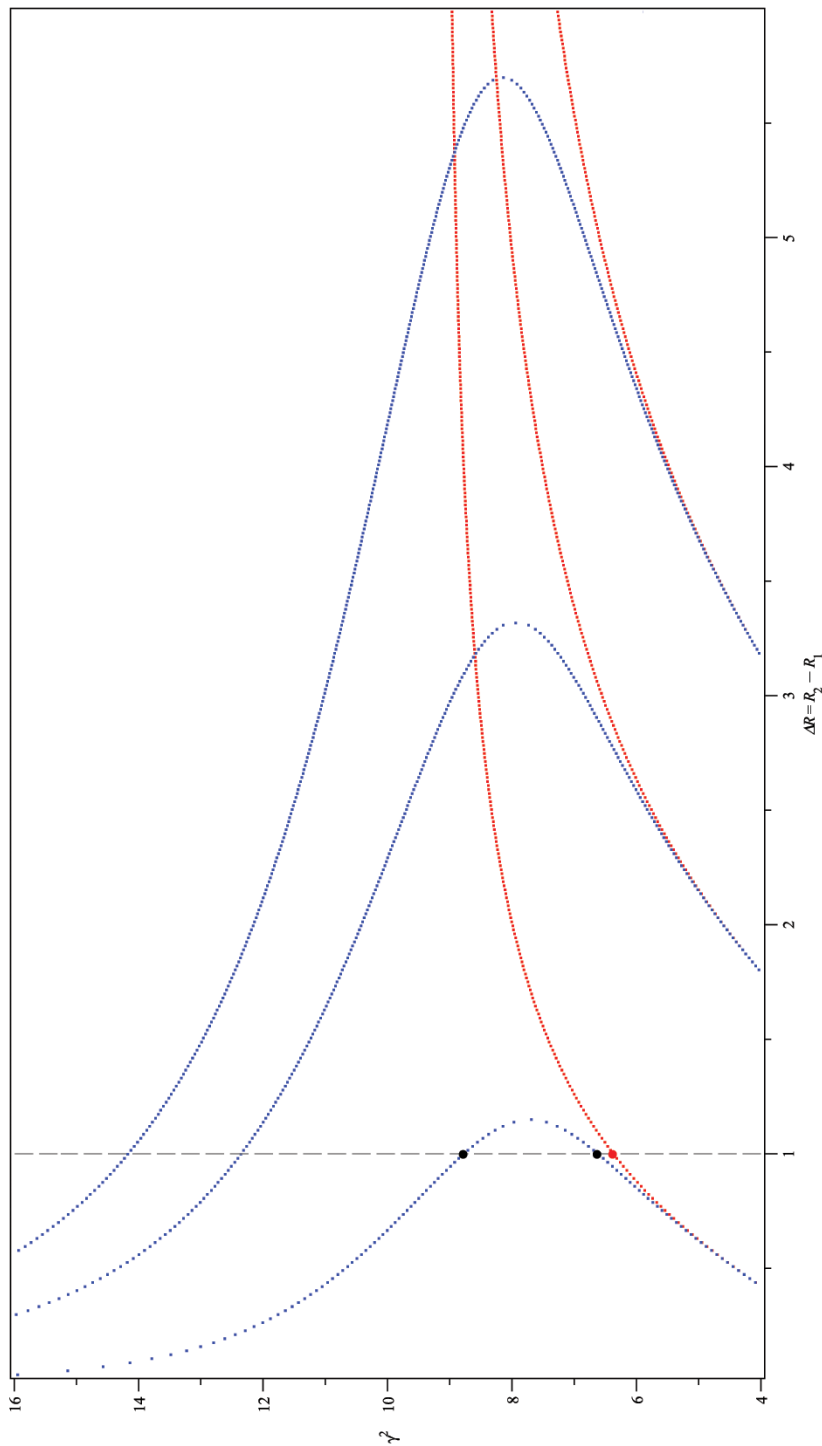


Рис. 4.5: Зависимость квадрата постоянной распространения  $\gamma^2$  (вертикальная ось) от толщины слоя  $\Delta = R_2 - R_1$  (горизонтальная ось; линейный (красная линия) и нелинейный случаи (синяя линия),  $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2 + \frac{1}{\rho} \cdot (\bullet)$ ).

При значениях  $\gamma^2 < 6$  дисперсионные кривые (линейный и нелинейный случаи) практически совпадают. При  $\Delta R = 1$  в линейном случае имеем только одно собственное значение  $\gamma_1 = 2.52$  ( $\bullet$ ), в нелинейном случае – несколько:  $\gamma_2 = 2.57$ ,  $\gamma_3 = 2.96$

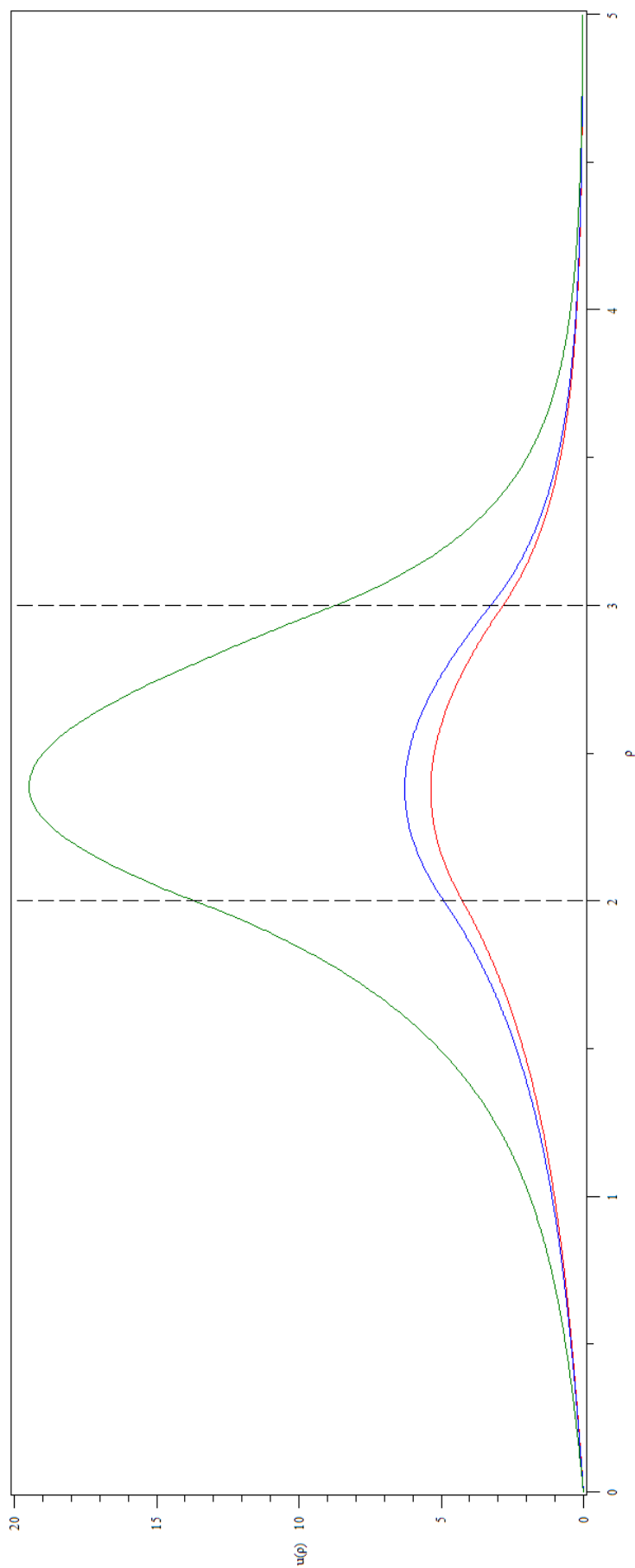


Рис. 4.6: Собственная функция  $u$  изображенная красной линией соответствует линейному случаю  $\alpha = 0$ ,  $\gamma_1 = 2.52$ , синяя линия соответствует нелинейному случаю  $\alpha = 0.01$ ,  $\gamma_2 = 2.57$ , зеленая линия соответствует нелинейному случаю  $\alpha = 0.01$ ,  $\gamma_3 = 2.96$ .

Компоненты  $E_\varphi$  и  $E'_\varphi$  непрерывны на границе раздела сред (см. главу 1, п. 1.4 (стр. 21)), данный рисунок это демонстрирует.

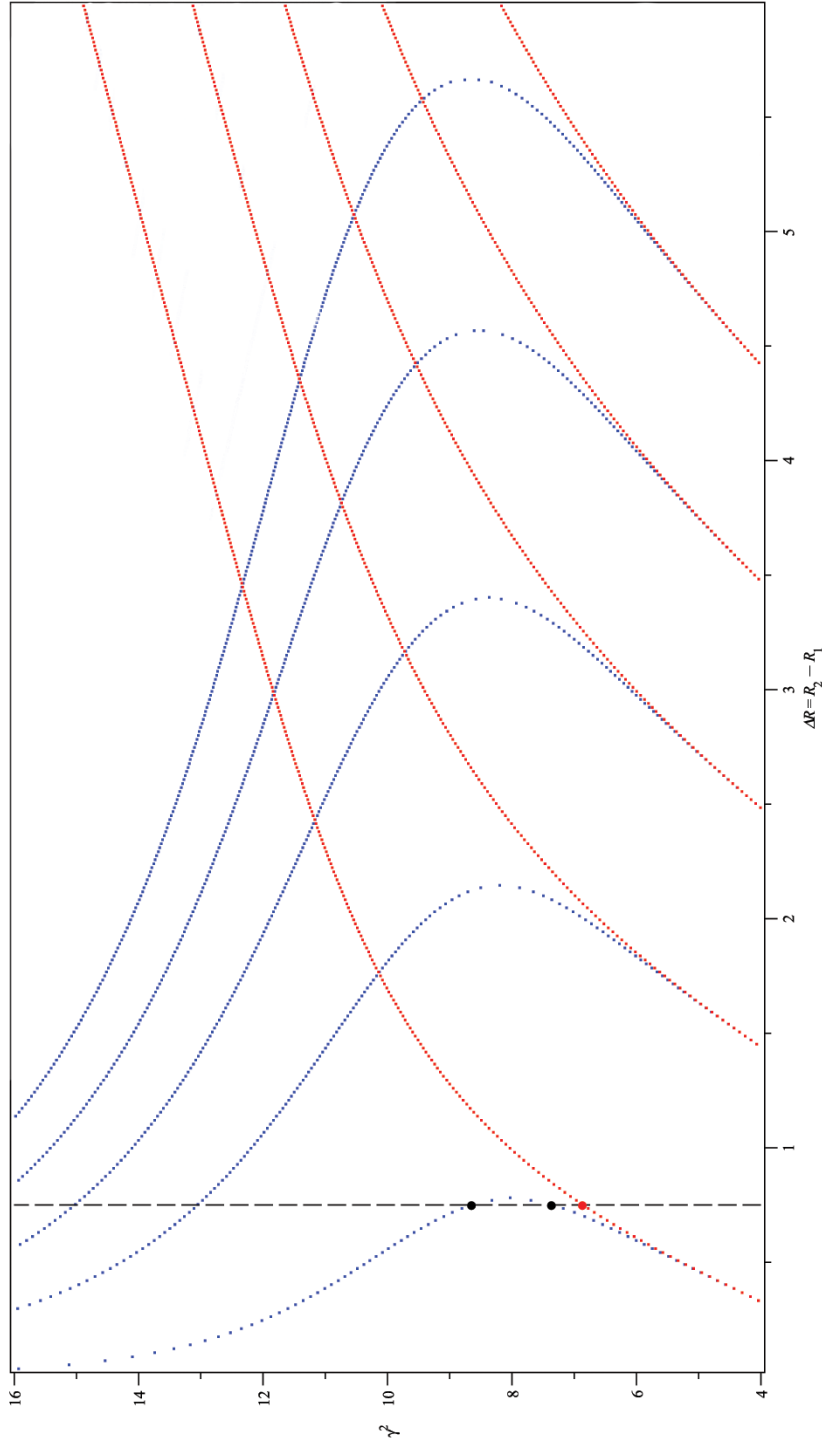


Рис. 4.7: Зависимость квадрата постоянной распространения  $\gamma^2$  (вертикальная ось) от толщины слоя  $\Delta = R_2 - R_1$  (горизонтальная ось); линейный (красная линия) и нелинейный случаи (синяя линия),  $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2 + \rho$ .

При значениях  $\gamma^2 < 6$  дисперсионные кривые (линейный и нелинейный случаи) практически совпадают. При  $\Delta R = 0.75$  в линейном случае имеем только одно собственное значение  $\gamma_1 = 2.61$  (●), в нелинейном случае – несколько:  $\gamma_2 = 2.71$ ,  $\gamma_3 = 2.94$  (●).

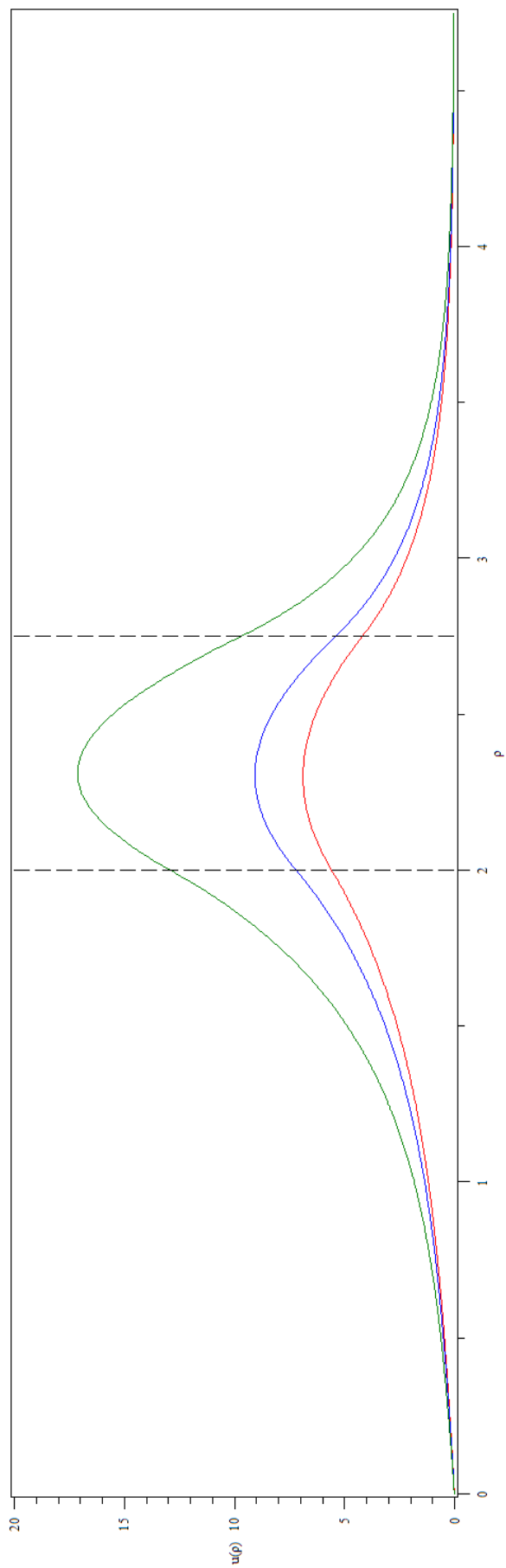


Рис. 4.8: Собственная функция  $u$  изображена красной линией соответствует линейному случаю  $\alpha = 0$ ,  $\gamma_1 = 2.61$ , синяя линия соответствует нелинейному случаю  $\alpha = 0.01$ ,  $\gamma_2 = 2.71$ , зеленая линия соответствует нелинейному случаю  $\alpha = 0.01$ ,  $\gamma_3 = 2.94$ .

Компоненты  $E_\varphi$  и  $E'_\varphi$  непрерывны на границе раздела сред (см. главу 1, п. 1.4 (стр. 21)), данный рисунок это демонстрирует.

### 4.3 Комплекс программ для численного решения задачи $P_M$

Блок-схемы алгоритмов вычисления собственных значений и собственных функций для ТМ-волн представлены на рис. 4.9–4.10.

Входными данными являются:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha, k_0, C_1, R_1, R_2, \gamma_*, \gamma^*$  (тип:real). Выходными данными в случае собственных значений является массив  $[\rho; \gamma^2]$ ; в случае собственных функций – массивы  $[\rho; u_1(\rho)], [\rho; u_2(\rho)]$ .

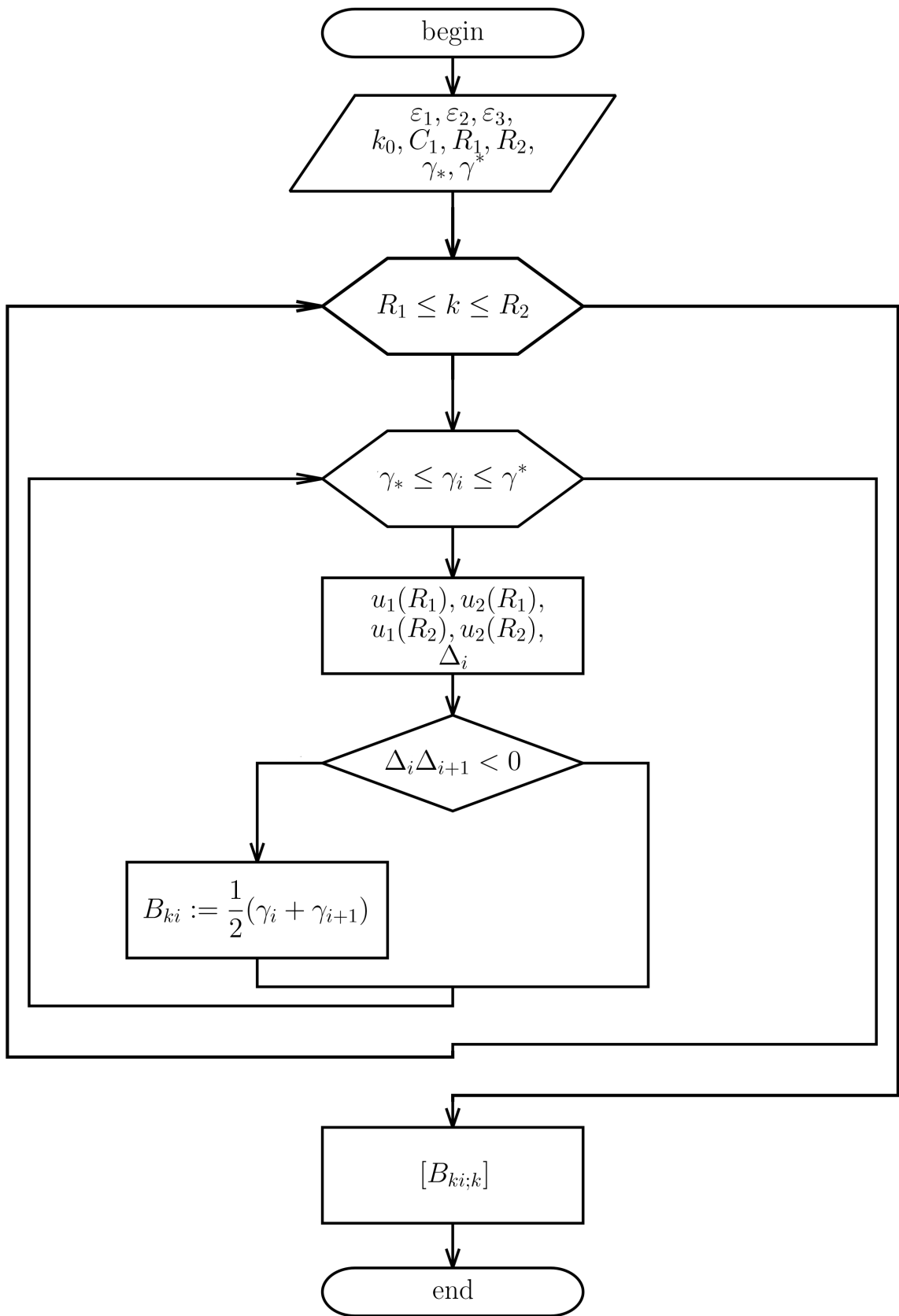


Рис. 4.9: Блок-схема алгоритма вычисления собственных значений для ТМ-волн

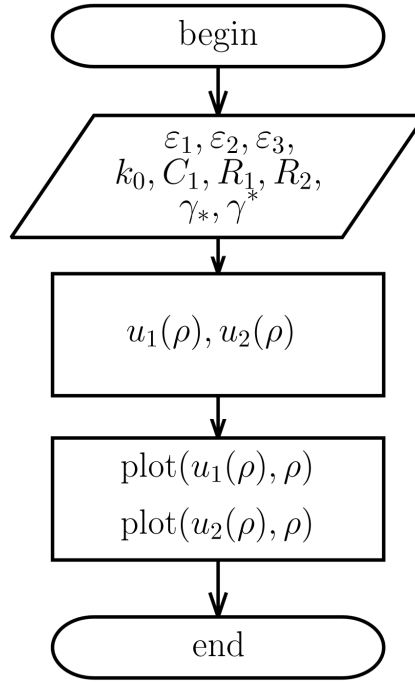


Рис. 4.10: Блок-схема алгоритма вычисления собственных функций для ТМ-волн

#### 4.4 Численные результаты для задачи $P_M$

Численные результаты получены для следующих функции  $\varepsilon_2(\rho)$ , задающих диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon = \varepsilon_2(\rho) + \alpha(u_1^2 + u_2^2)$  в слое  $R_1 < \rho < R_2$ :

1.  $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2 + \frac{1}{\rho}$ ;
2.  $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2$ ;
3.  $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2 + \rho$ ,

где  $\varepsilon_2$  – вещественная положительная постоянная.

Дисперсионные уравнения для различных  $\varepsilon_2(\rho)$  имеют вид:

1.  $\Delta(\gamma) \equiv \left( \varepsilon_2 + \frac{1}{R_2} + \alpha(u_1^2(R_2) + u_2^2(R_2)) \right) u_1(R_2) - \gamma \frac{\varepsilon_3}{k_3} \frac{K_1(k_3 R_2)}{K_0(k_3 R_2)} u_2(R_2)$ ;

$$2. \Delta(\gamma) \equiv (\varepsilon_2 + \alpha (u_1^2(R_2) + u_2^2(R_2))) u_1(R_2) - \gamma \frac{\varepsilon_3}{k_3} \frac{K_1(k_3 R_2)}{K_0(k_3 R_2)} u_2(R_2);$$

$$3. \Delta(\gamma) \equiv (\varepsilon_2 + R_2 + \alpha (u_1^2(R_2) + u_2^2(R_2))) u_1(R_2) - \gamma \frac{\varepsilon_3}{k_3} \frac{K_1(k_3 R_2)}{K_0(k_3 R_2)} u_2(R_2).$$

Результаты расчетов представлены на рис. 4.11–4.18. При расчете использовались следующие значения параметров:  $\varepsilon_1 = 4$ ,  $\varepsilon_2 = 9$ ,  $\varepsilon_3 = 1$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $R_1 = 2$ ,  $2 < R_2 < 8$ ,  $k_0 = 1$ ,  $C_1 = 1$ .



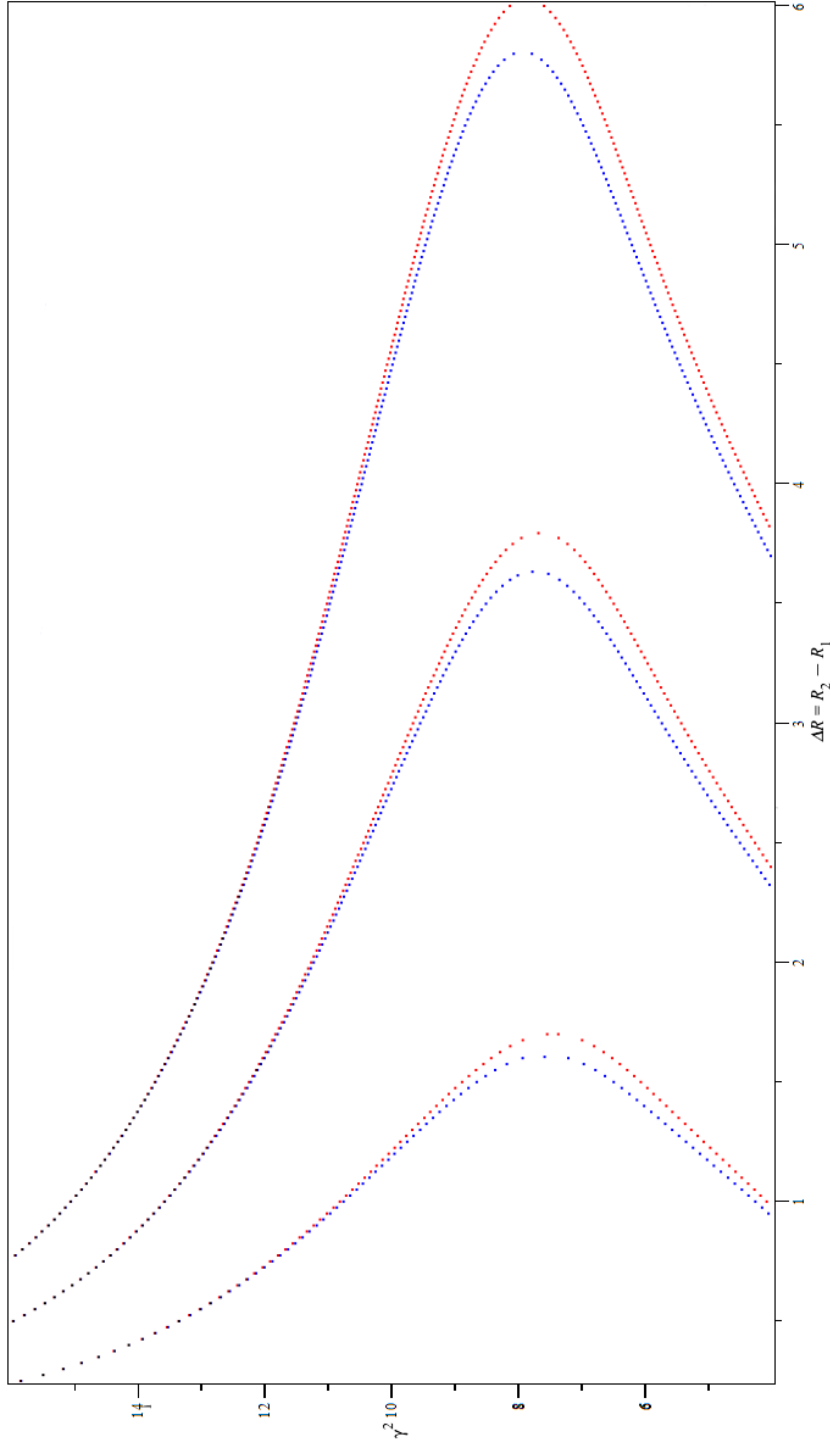


Рис. 4.11: Зависимость квадрата постоянной распространения  $\gamma^2$  (вертикальная ось) от толщины слоя  $\Delta = R_2 - R_1$  (горизонтальная ось); красная линия соответствует  $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2$ , синяя линия соответствует  $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2 + \frac{1}{\rho}$ .

Поскольку неоднородность в слое мала  $\frac{1}{8} \leq \frac{1}{\rho} \leq \frac{1}{2}$  дисперсионные кривые (неоднородный и однородный случаи) близко расположены друг к другу.

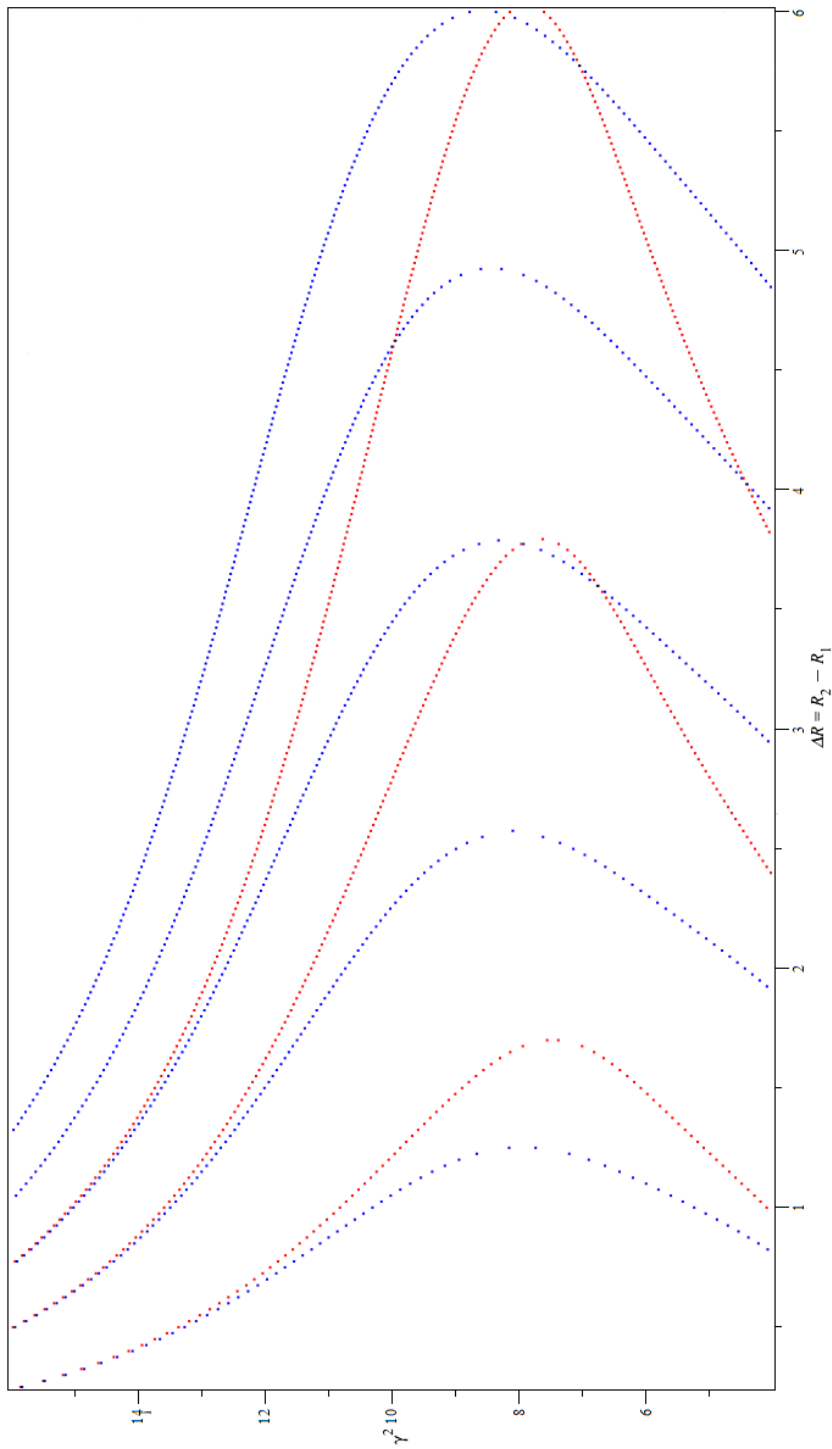


Рис. 4.12: Зависимость квадрата постоянной распространения  $\gamma^2$  (вертикальная ось) от толщины слоя  $\Delta = R_2 - R_1$  (горизонтальная ось); красная линия соответствует  $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2$ , синяя линия соответствует  $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2 + \rho$ .

Поскольку неоднородность в слое велика  $2 \leq \rho \leq 8$  дисперсионные кривые (неоднородный и однородный случаи) значительно отличаются друг от друга.

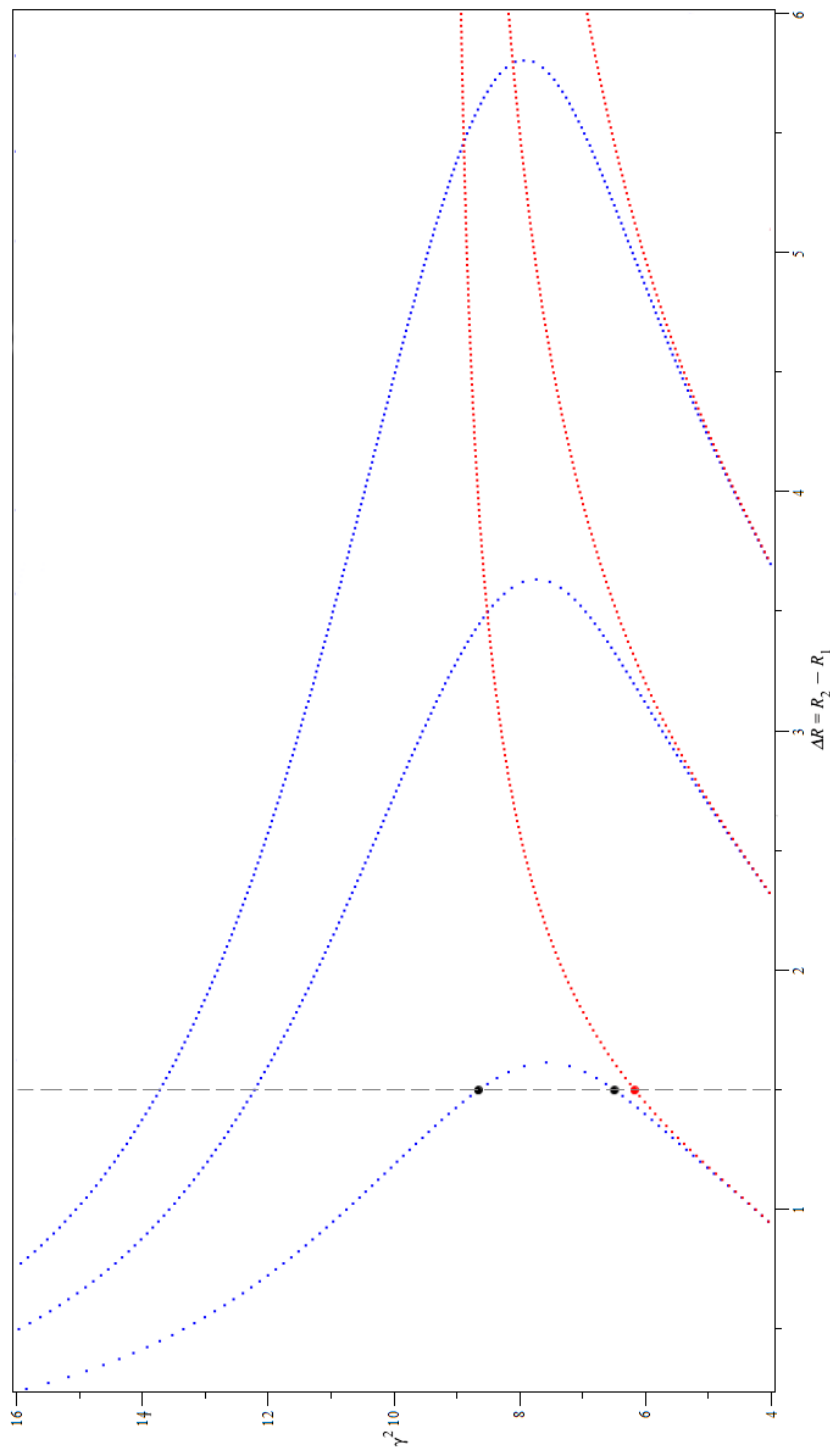


Рис. 4.13: Зависимость квадрата постоянной распространения  $\gamma^2$  (вертикальная ось) от толщины слоя  $\Delta = R_2 - R_1$  (горизонтальная ось); линейный (красная линия) и нелинейный случаи (синяя линия),  $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2 + \frac{1}{\rho}$ .

При значениях  $\gamma^2 < 5$  дисперсионные кривые (линейный и нелинейный случаи) практически совпадают. При  $\Delta R = 1.5$  в линейном случае имеем только одно собственное значение  $\gamma_1 = 2.48$  (●), в нелинейном случае – несколько:  $\gamma_2 = 2.545$ ,  $\gamma_3 = 2.9$  (●).

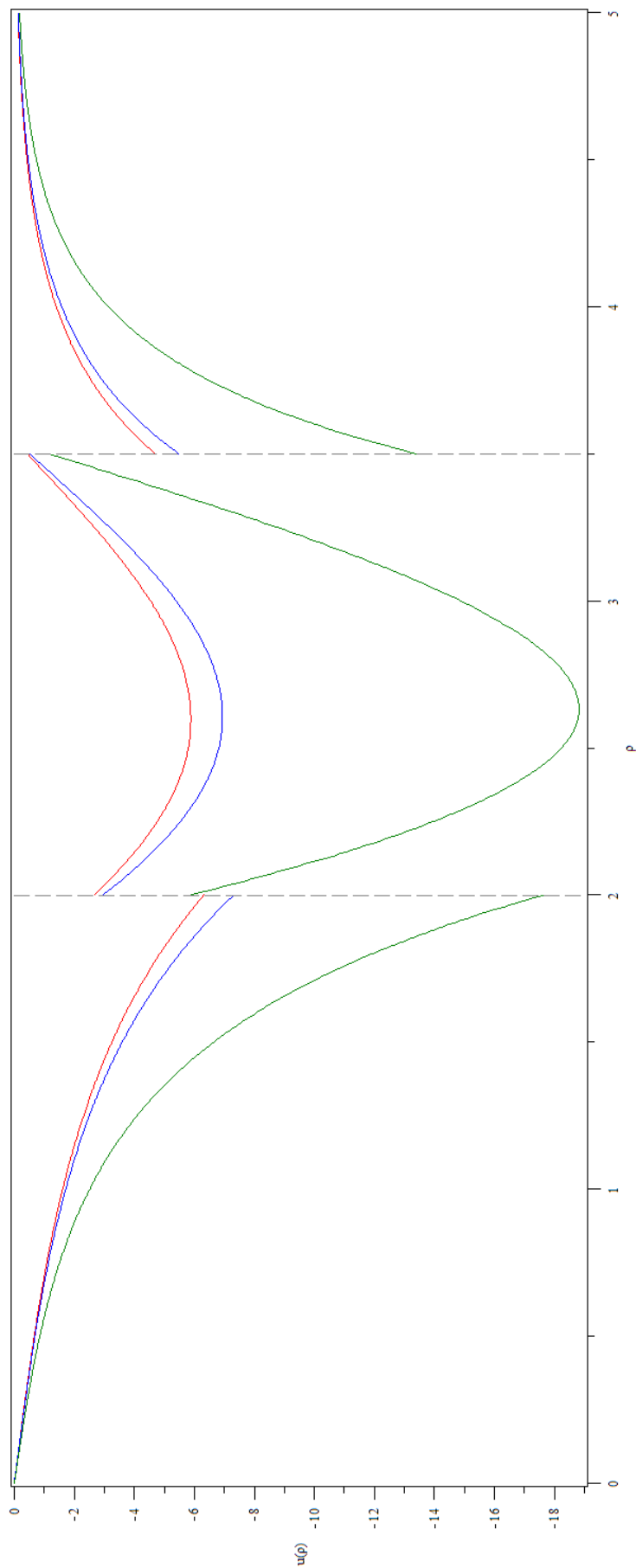


Рис. 4.14: Собственная функция  $u_1$  изображена красной линией соответствует линейному случаю  $\alpha = 0$ ,  $\gamma_1 = 2.482$ , синяя линия соответствует нелинейному случаю  $\alpha = 0.01$ ,  $\gamma_2 = 2.546$ , зеленая линия соответствует нелинейному случаю  $\alpha = 0.01$ ,  $\gamma_3 = 2.940$ .

Компонента  $E_\rho$  является нормальной компонентой поля. Нормальные компоненты имеют конечный скачок на границе раздела сред (см. главу 2, п. 2.4 стр.48), данный рисунок это иллюстрирует.

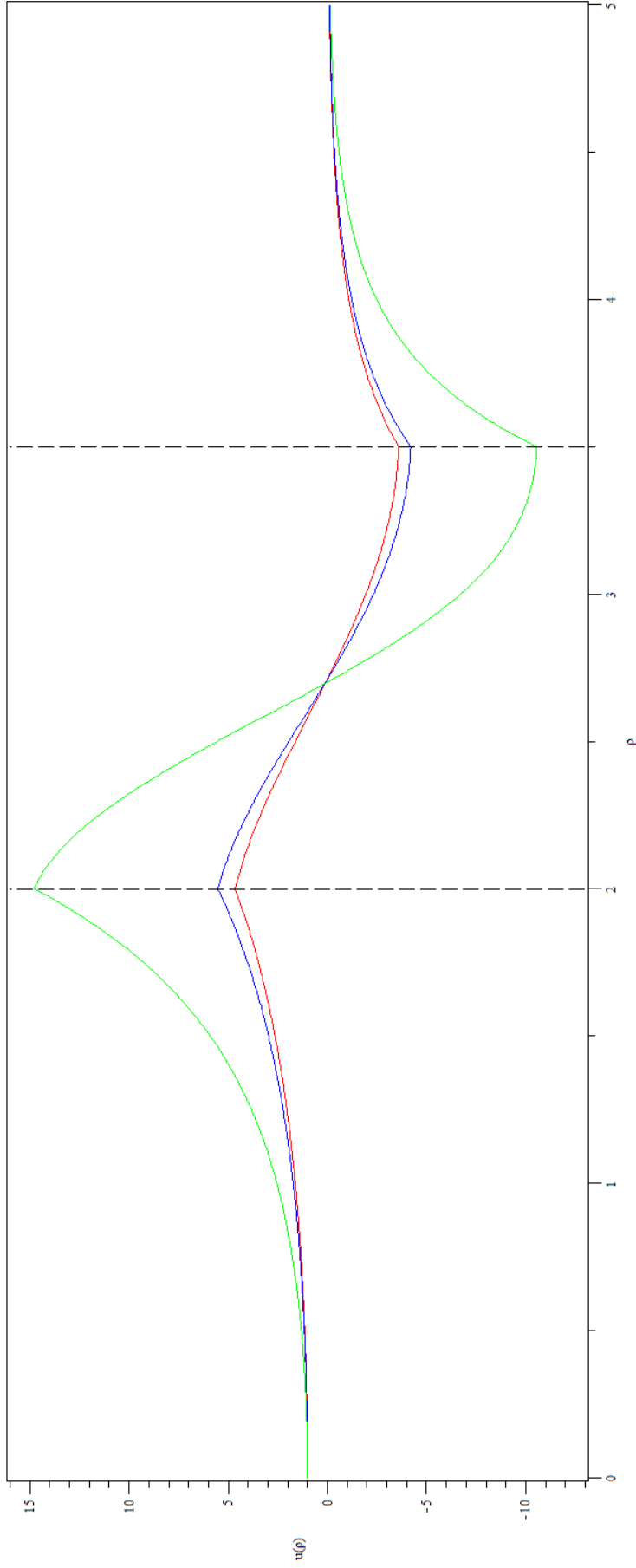


Рис. 4.15: Собственная функция  $u_2$  изображенная красной линией соответствует линейному случаю  $\alpha = 0$ ,  $\gamma_1 = 2.482$ , синяя линия соответствует нелинейному случаю  $\alpha = 0.01$ ,  $\gamma_2 = 2.546$ , зеленая линия соответствует нелинейному случаю  $\alpha = 0.01$ ,  $\gamma_3 = 2.940$ .

Компонента  $E_z$  непрерывна на границе раздела сред (см. главу 2, п. 2.4 (стр. 47)), данный рисунок это иллюстрирует.

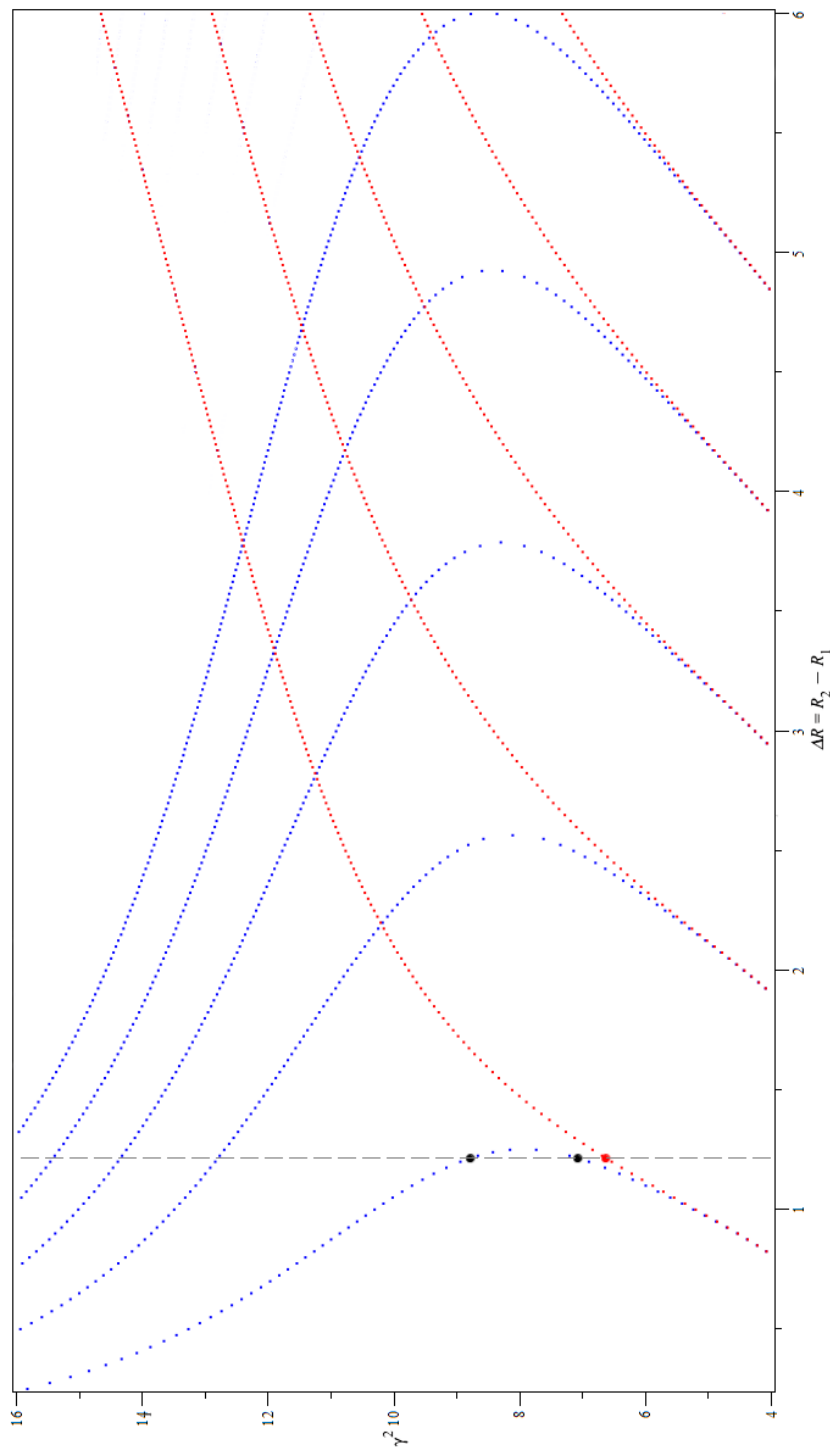


Рис. 4.16: Зависимость квадрата постоянной распространения  $\gamma^2$  (вертикальная ось) от толщины слоя  $\Delta = R_2 - R_1$  (горизонтальная ось); линейный (красная линия) и нелинейный случаи (синяя линия),  $\varepsilon_2(\rho) = \varepsilon_2 + \rho$ .

При значениях  $\gamma^2 < 6$  дисперсионные кривые (линейный и нелинейный случаи) практически совпадают. При  $\Delta R = 1.215$  в линейном случае имеем только одно собственное значение  $\gamma_1 = 2.573$  (●), в нелинейном случае – несколько:  $\gamma_2 = 2.658$ ,  $\gamma_3 = 2.962$  (●).

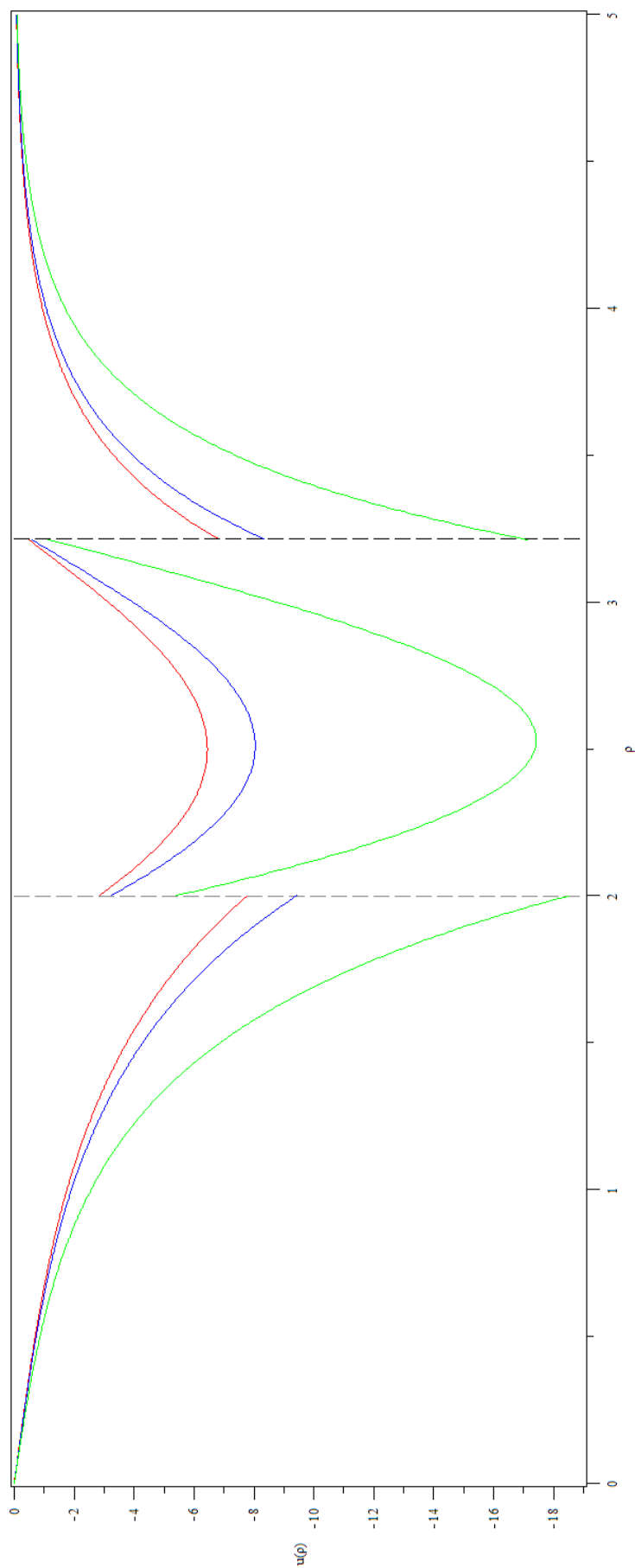


Рис. 4.17: Собственная функция  $u_1$  изображенная красной линией соответствует линейному случаю  $\alpha = 0$ ,  $\gamma_1 = 2.573$ , синяя линия соответствует нелинейному случаю  $\alpha = 0.01$ ,  $\gamma_2 = 2.658$ , зеленая линия соответствует нелинейному случаю  $\alpha = 0.01$ ,  $\gamma_3 = 2.962$ .

Компонента  $E_\rho$  является нормальной компонентой поля. Нормальные компоненты имеют конечный скачок на границе раздела сред (см. главу 2, п. 2.4 стр.48), данный рисунок это иллюстрирует.

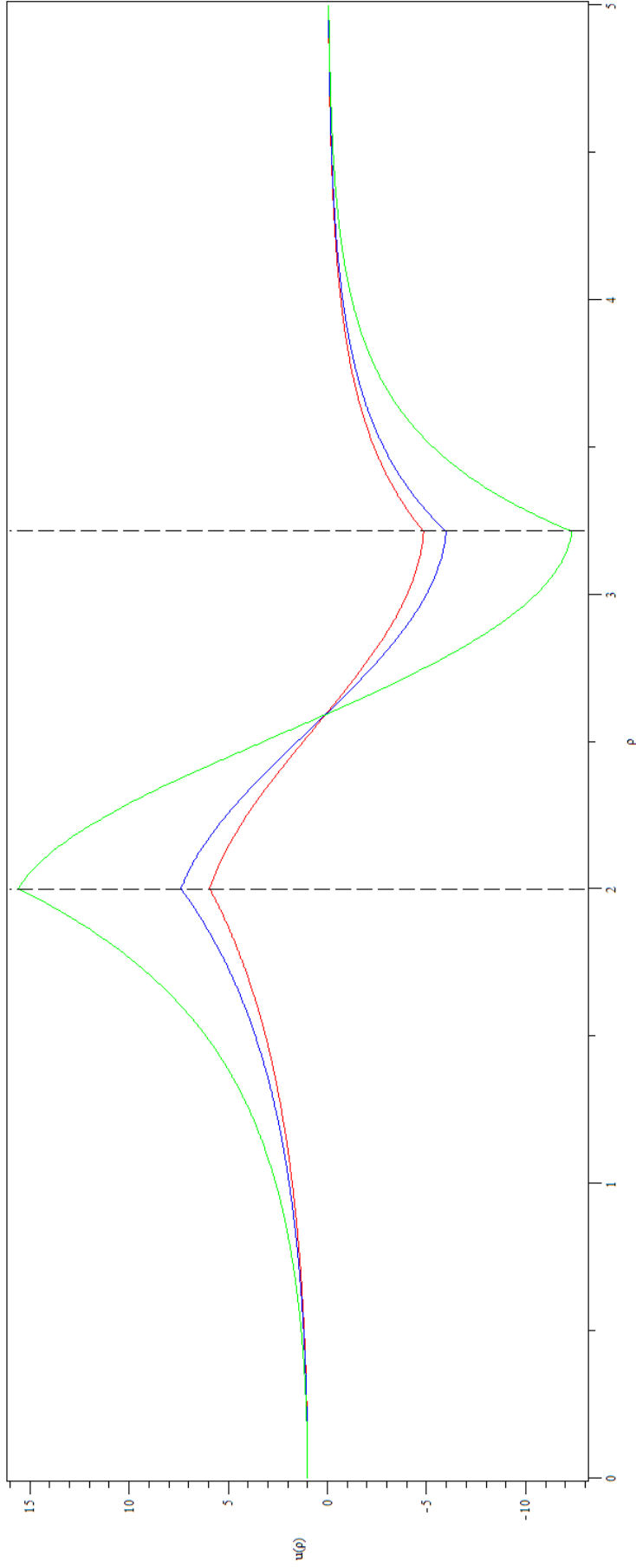


Рис. 4.18: Собственная функция  $u_2$  изображенная красной линией соответствует линейному случаю  $\alpha = 0$ ,  $\gamma_1 = 2.573$ , синяя линия соответствует нелинейному случаю  $\alpha = 0.01$ ,  $\gamma_2 = 2.658$ , зеленая линия соответствует нелинейному случаю  $\alpha = 0.01$ ,  $\gamma_3 = 2.962$ .

Компонента  $E_z$  непрерывна на границе раздела сред (см. главу 2, п. 2.4 (стр. 47)), данный рисунок это иллюстрирует.



# Литература

- [1] **Адамс М.** Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984
- [2] **Ахманов С.А., Хохлов Р.В.** Проблемы нелинейной оптики. М.: ВИНТИ, 1964
- [3] **Ахмедиев Н.Н., Анкевич А.** Солитоны. М.: Физматлит, 2003
- [4] **Бломберген Н.** Нелинейная оптика. М.: Мир, 1966
- [5] **Вайнштейн Л.А.** Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988
- [6] **Валовик Д.В.** Задача о распространении электромагнитных ТМ-волн в слое с произвольной нелинейностью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51 №9. С. 1729–1739.
- [7] **Валовик Д.В.** Распространение электромагнитных ТЕ-волн в слое из нелинейного метаматериала // Радиотехника и электроника, Т. 56, № 5, С. 587–599, 2011
- [8] **Валовик Д.В., Зарембо Е.В.** Метод задачи Коши для решения нелинейной задачи сопряжения на собственные значения для ТМ-волн, распространяющихся в слое с произвольной нелинейностью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. №1. С. 74–89

- [9] **Валовик Д.В., Зарембо Е.В.** Решение нелинейной краевой задачи на собственные значения для электромагнитных ТМ-волн, распространяющихся в слое с керровской нелинейностью, методом задачи Коши // Радиотехника и электроника. – 2013. – Т. 58. – № 1. – С. 69–72
- [10] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** О распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. №12. С. 2186–2194
- [11] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Нелинейные эффекты в задаче о распространении электромагнитных ТМ-волн в слое с керровской нелинейностью // Радиотехника и электроника, Т. 56, № 3, С. 309–314, 2011
- [12] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Распространение электромагнитных волн в нелинейных слоистых средах. - Пенза: Изд-во ПГУ, 2010. – 264 с
- [13] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г., Смолькин Е.Ю.** Нелинейная задача сопряжения на собственные значения, описывающие распространение ТЕ-волн в двухслойных цилиндрических диэлектрических волноводах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53, № 7, с. 1150–1161
- [14] **Валовик Д.В., Смолькин Е.Ю.** Численное решение задачи о распространении электромагнитных ТМ-волн в круглом диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой // Изв. вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки, 2012. №3. С. 49–58

- [15] **Валовик Д.В., Смолькин Е.Ю.** Расчет постоянных распространения неоднородных нелинейных двухслойных круглых цилиндрических волноводов методом задачи Коши // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58, № 8, С. 759–767, 2013
- [16] **Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.** Теория волн. М: Наука, 1979
- [17] **Веселов Г.И., Раевский С.Б.** Слоистые металлодиэлектрические волноводы. М.: Радио и связь, 1988
- [18] **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М: Наука, 1981
- [19] **Даутов Р.З., Карчевский Е.М.** Метод интегральных уравнений и точные нелокальные граничные условия в теории диэлектрических волноводов, Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2009
- [20] **Еругин Н.П.** Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1979
- [21] **Зильбергейт А.С., Копилевич Ю.И.** Спектральная теория регулярных волноводов. Л.: ФТИ, 1983
- [22] **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989
- [23] **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971
- [24] **Лизоркин П.И.** Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами математического анализа. М.: Наука, 1981

- [25] **Наймарк М.А.** Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969
- [26] **Никифоров А.Ф., Уваров В.Б** Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978
- [27] **Никольский В.В.** Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1978
- [28] **Санчес-Паленсия Э.** Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984
- [29] **Смирнов Ю.Г., Куприянова С.Н., Валовик Д.В.** О распространении электромагнитных волн в цилиндрических неоднородных диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой // Изв. вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки, 2012. №3
- [30] **Смирнов Ю.Г., Куприянова С.Н.** Распространение электромагнитных волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. №10. С. 1850–1860
- [31] **Смирнов Ю.Г.** Задачи сопряжения на собственные значения, описывающие распространение ТЕ– и ТМ– волн в двухслойных неоднородных анизотропных цилиндрических и плоских волноводах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. XX.
- [32] **Смирнов Ю.Г., Хорошева Э.А.** О разрешимости нелинейной краевой задачи на собственные значения для распространяющихся ТМ-волн в круглом нелинейном волноводе // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, 2010 № 3, с. 55–70

- [33] **Смолюкин Е.Ю.** Метод задачи коши для решения нелинейной задачи сопряжения на собственные значения для ТМ-волн, распространяющихся в круглом двухслойном диэлектрическом волноводе с керровской нелинейностью // Изв. вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки, 2012, №4. С. 49
- [34] **Стрэттон Дж.А.** Теория электромагнетизма. М., Л.: ГИТТЛ, 1948
- [35] **Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.** Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980
- [36] **Треногин В.А.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1980
- [37] **Шен И.Р.** Принципы нелинейной оптики. М.: Наука, 1989
- [38] **Bartling, J.Q.** Propagation of an electromagnetic wave in an infinite rectangular dielectric waveguide // Journal of the Franklin. 1969.– Vol. 287. №5. - P.303-305
- [39] **Boardman A.D., Egan P., Lederer F., Langbein U., and Mihalache D.** Third-order nonlinear electromagnetic TE and TM guided waves, in Nonlinear Surface Electromagnetic Phenomena, Ed. by Ponath H.E. and Stegeman G.I. North Holland, Amsterdam, 1991, P.P. 73-287
- [40] **Borgnis F., Papas, Stratton J.A.** Electromagnetic Theory C. Electromagnetic Waveguides // Handbuch der Physik №16, Editor Flugge
- [41] **Chatterton J. D. , Shohet J. L.** Guided modes and loss in a plasma-filled Bragg waveguide // J. Appl. Phys. 102, 063304 (2007)
- [42] **Chiao R. Y., Garmire E., Townes C.** Self-trapping of optical beams // Phys. Rev. Lett. - 1964. №13. - P. 479

- [43] **Eleonskii P.N., Ogan'es'yants L.G., Silin V.P.** Cylindrical Nonlinear Waveguides // Soviet Physics JETP. 1972. Vol. 35. No. 1. P. 44–47
- [44] **Eleonskii V.M., Silin V.P.** Propagation of electromagnetic waves in an inhomogeneous nonlinear medium // Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters 1974 Vol. 39, No. 1, p. 67–70
- [45] **Joannopoulos J.D., Johnson S.G., Winn J.N., Meade R.D.** Photonic Crystals. Molding the flow of light. Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2008
- [46] **Rapoport Yu., Boardman A., Grimalsky V. et al.** Metamaterials for space physics and the new method for modeling isotropic and hyperbolic nonlinear concentrators // MMET'2012 Pro-ceeding. P. 76–79
- [47] **Schürmann H.W., Serov V.S., Shestopalov Yu.V.** TE-polarized waves guided by a lossless nonlinear three-layer structure // Phys. Rev. E, 1998, Vol. 58, №1, p. 1040-1050
- [48] **Schürmann H.W., Smirnov Yu.V., Shestopalov Yu.V.** Propagation of TE-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides // Phys. Rev. E, 2005, Vol. 71, №1, p. 016614-1–016614-10
- [49] **Smirnov Yu. G., Smol'kin E. Yu., Valovik D.V.** Nonlinear Double-Layer Bragg Waveguide: Analytical and Numerical Approaches to Investigate Waveguiding Problem //Advances in Numerical Analysis, 2014, Vol. 2014, Article ID 231498.
- [50] **Smirnov Yu. G., Valovik D.V.** Electromagnetic Wave Propagation in Nonlinear Layered Waveguide Structures. Penza: PSU Press, 2011

- [51] **Smirnov Yu. G., Valovik D.V.** Coupled electromagnetic TE-TM wave propagation in a layer with Kerr nonlinearity // J. Math. Phys. 53, 123530, 2012
- [52] **Smirnov Yu. G., Valovik D.V.** On the problem of electromagnetic waves propagating along a nonlinear inhomogeneous cylindrical waveguide // ISRN Mathematical Physics, Vol. 2013, p. 1–7, 2013
- [53] **Smirnov Yu. G., Valovik D.V.** Nonlinear effects of electromagnetic TM wave propagation in anisotropic layer with Kerr nonlinearity // Advances in Mathematical Physics, V. 2012, P. 1–21, 2012
- [54] **Smolkin, E.Yu. Valovik, D.V.** Numerical solution of the problem of propagation of TM-polarized electromagnetic waves in a nonlinear two-layered dielectric cylindrical waveguide // MMET'2012 Pro-ceeding, P. 68 - 71
- [55] **Stakgold I.** Green's Functions and Boundary Value Problems. Wiley, New York, 1979
- [56] **Valovik D.V.** Electromagnetic wave propagation in nonlinear layered waveguide structures. Computational approach to determine propagation constants // Springer Proceeding in Mathematics & Statistics, Volume 52: Inverse Problems and Large Scale computations (Proceedings of the Workshop on Large Scale Modeling, Sunne, Sweden, May 1–6), 2013, P. 71–91
- [57] **Zeidler E.** Applied Functional Analysis. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1995