

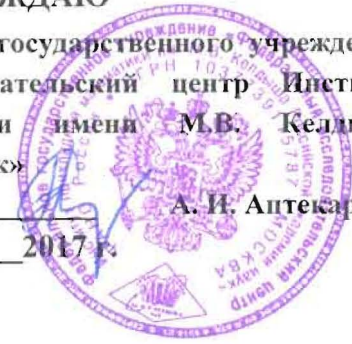
## УТВЕРЖДАЮ

Директор Федерального государственного учреждения  
«Федеральный исследовательский центр Институт  
прикладной математики имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук»

Член-корр. РАН

« 5 » октября 2017 г.

А. И. Аптекарев



## ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук» на диссертацию Сушниковой Дарьи Алексеевны «Методы факторизации и решения линейных систем с блочно-малоранговыми матрицами», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Численное решение систем линейных уравнений является одной из самых распространённых процедур в практике вычислений. Определенные трудности вызывают системы уравнений, возникающие при дискретизации дифференциальных уравнений. Это связано с их размером и специфическими свойствами. Основными методами являются итерационные методы с использованием факторизации исходной матрицы. При этом матрицы-факторы оказываются заполненными, несмотря на разреженность исходной матрицы. Возникает проблема: как достичь экономии памяти, сократив число ненулевых элементов, и одновременно сохранить хорошие предобуславливающие свойства факторизованной матрицы. Несмотря на большое количество алгоритмов приближенной факторизации, проблему в целом нельзя признать решенной. Поэтому научная задача разработки методов приближенной факторизации и решение линейных систем с блочно-малоранговыми матрицами, поставленная в диссертации, лежит на магистральном направлении развития вычислительных методов и математического моделирования. Предпосылками для неуклонного расширения работ данного направления являются, с одной стороны, бурное развитие вычислительной техники с усложнением суперкомпьютерных архитектур, а с другой – все возрастающая роль вычислительного эксперимента в научных исследованиях. По мере расширения сферы применения численного моделирования и возрастания его возможностей, возрастают сложность и масштабность задач. Поэтому возможности численных методов зачастую оказываются недостаточными, и требуется их радикальное усовершенствование. В этом отношении результаты, содержащиеся в диссертации Д.А. Сушниковой, несомненно, представляются весьма важными и актуальными.

**Актуальность** темы диссертационного исследования не вызывает сомнения и хорошо раскрыта в автореферате и диссертации, где также достаточно полно формулируется цель и приводится обоснование основных положений и достижений исследования.

**Научная новизна работы.** В диссертации предложен новый метод приближённой факторизации разреженных матриц (метод компрессии и исключения), также предложены два метода разреженной факторизации матриц, представленных в специальном малоранговом формате. Дополнительно к теоретическим исследованиям создан новый программный комплекс, реализующий данные малоранговые технологии. Показана работоспособность предложенных алгоритмов и программ в задачах моделирования процессов диффузии, электростатики, гидромеханики и также прикладной статистики.

**Практическая ценность результатов диссертации.** Предложенный автором метод приближенной факторизации разреженных матриц может быть использован для решения больших разреженных положительно-определённых матриц, в частности, матриц, полученных при дискретизации многомерных дифференциальных уравнений. Метод обоснован для матриц со свойствами блочной малоранговости, которое выполняется для определённого, но достаточно содержательного, класса дискретизаций. На практике методы приближённой факторизации блочно-малоранговых матриц могут быть применены для численного решения и предобуславливания систем линейных уравнений с плотными матрицами для широкого класса дискретизаций дифференциальных уравнений.

#### **Анализ содержания работы**

В **главе 1** дан обзор по иерархическим блочно-малоранговым представлениям матриц и задачам математического моделирования, для решения которых возможно успешно использовать блочно-малоранговые представления.

В **главе 2** описывается новый метод приближённой факторизации разреженных матриц (алгоритм компрессии и исключения), разработанный автором, и приводится оценка вычислительных затрат метода.

В **главе 3** автором разработаны два алгоритма приведения матриц, представленных в специальном малоранговом формате, к разреженному виду.

**Глава 4** содержит описание программного комплекса для факторизации и решения систем с блочно-малоранговыми матрицами и результатов проведённых численных экспериментов.

В **главе 5** описано применение методов, разработанных автором, в математическом моделировании регрессии на основе гауссовских процессов.

**Высокая степень достоверности результатов работы** подтверждена корректностью использованного математического аппарата, серией проведённых расчетов и сравнениями с

результатами других методов. Список публикаций в рецензируемых научных изданиях, в том числе рекомендованных ВАК, и активное участие диссертанта в конференциях говорит о том, что научная общественность ознакомлена с результатами диссертации.

**Работа обладает следующими недостатками.**

1. Предложенный в главе 2 алгоритм компрессии и исключения может испытывать трудности с реализацией на параллельных традиционных и гибридных архитектурах. В принципе, это характерно для многих методов прямого решения линейных систем, основанных на треугольных факторизациях. Тем не менее, следовало бы кратко обсудить возможности параллельной реализации данного алгоритма, так как это крайне важный аспект для его практического использования.
2. Неясно, возможно ли показать линейность вычислительных затрат алгоритма компрессии и исключения (глава 2) относительно размерности матрицы для более широкого класса матриц.
3. Вычислительная сложность алгоритмов разреженной факторизации иерархических матриц показана только на практических примерах. Возможно ли получить теоретическую оценку сложности расширенной и нерасширенной факторизаций?
4. Текст диссертации не лишен ряда опечаток. Например, на странице 4 после фразы “Ряд плотных матриц” требуется запятая, после фразы “разнесённых в пространстве групп элементов” также требуется запятая, и проч.

Развивается новое, актуальное направление вычислительной линейной алгебры, со специфическими трудоёмкими задачами и современной техникой их решения, поэтому указанные недостатки не снижают общей ценности диссертационной работы.

Результаты диссертации могут быть использованы в институтах Российской академии наук (Институте прикладной математики, Вычислительном центре, Институте проблем механики, Институте физики Земли им. О.Ю. Шмидта, Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН и др. организациях РАН и её Сибирского Отделения), МГУ им. М.В. Ломоносова и Московского физико-технического института.

**Диссертационная работа в автореферате отражена всесторонне. Несомненно, что диссертация выполнена на высоком научном уровне, она соответствует требованиям ВАК о порядке присуждения учёных степеней и является законченной научно-квалификационной работой. Автор диссертационного исследования Дарья Алексеевна Сушникова заслуживает присуждения степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 - математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.**

Диссертационная работа **Дарьи Алексеевны Сушниковой** и отзыв на неё обсуждены и одобрены на заседании научного семинара им. К.И. Бабенко Федерального государственного учреждения "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук" (ученый секретарь В.Т. Жуков), включающего научных сотрудников отдела «Прикладные задачи механики сплошных сред», 5 октября 2017 года, протокол № 1.

Отзыв подготовили:

5 октября 2017 г.

Зав. отделом «Прикладные задачи механики сплошных сред» Федерального Государственного Учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики имени М.В.Келдыша Российской академии наук», учёный секретарь семинара

доктор физико-математических наук  Виктор Тимофеевич Жуков

Россия, 125047, Москва, Миусская площадь, д.4  
тел.: +7(499) 978-13-14, факс: +7(499)972-07-37 эл. почта: [office@keldysh.ru](mailto:office@keldysh.ru), Web-сайт организации: <http://www.keldysh.ru/>

Старший научный сотрудник Федерального Государственного Учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша Российской академии наук»

кандидат физико-математических наук  Михаил Александрович Бочев

Россия, 125047, Москва, Миусская площадь, д.4  
тел.: +7(499) 220-73-15, факс: +7(499)972-07-37 эл. почта: [botchev@kiam.ru](mailto:botchev@kiam.ru), Web-сайт организации: <http://www.keldysh.ru/>