COMPLEX BEAUTIES

2017

Комплексные числа и цвета

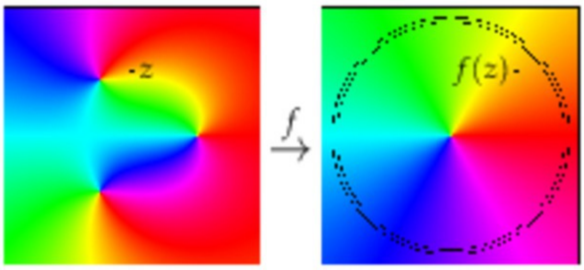
Вот уже седьмой год календарь "Complex Beauties" дает нам возможность взглянуть на удивительный мир функций комплексных переменных, а также на жизнь и работу математиков, которые внесли свой вклад в наше понимание этой области науки. Как всегда, мы намерены охватить самую широкую аудиторию: Хотя большинство объяснений и требуют от читателя некоторого математического образования, мы надеемся, что и не математиков захватят наши "фазовые портреты" и они смогут оценить богатство и красоту мира функций комплексных переменных.

В особенности, мы хотим поблагодарить наших приглашенных авторов: вклад Вальтера Бергвайлера (Февраль) – о комплексной динамике, а Штефан Гюттель (Март) предоставил описание приближений Паде. В этом году основной темой календаря являются дифференциальные уравнения. Для численных расчетов многих решений, мы использовали пакет `Chebfun`, который в 2002 году начали разрабатывать Захари Бэтлз и Ник Трефетен в Оксфорде. Многие другие также внесли свой вклад в его более поздние версии. См. `www.chebfun.org`.

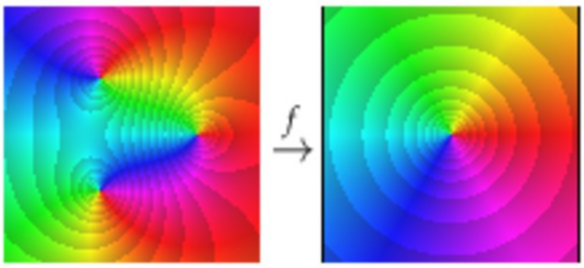
Построение *фазовых портретов* основано на интерпретации комплексных чисел z в виде точек на *гауссовой плоскости*. Горизонтальная координата точки, представляющей z, называется *вещественной частью* z или $\mathrm{Re}\, z$, а вертикальная координата y точки, представляющей z, называется *мнимой частью* z или $\mathrm{Im}\, z$; мы записываем $z = \ + \mathrm{i}$. По-другому точка, представляющая z, определяется ее расстоянием от начала координат ($|z|$, *модуль* z) и азимутом ($\arg z$, *аргумент* z).

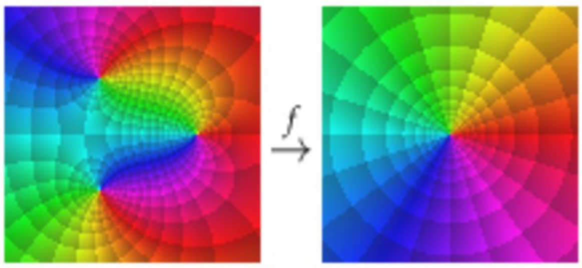
Фазовый портрет функции f комплексной переменной (на картинке слева) возникает, когда все точки z области определения f окрашиваются в соответствии с аргументом (или "фазой") ее значения $w = f(z)$.

Точнее, на первом этапе используется колесо цветов для назначения цветов на комплексной плоскости w: все точки луча, исходящего из начала координат окрашены в один цвет, как на картинке справа. Таким образом, точкам с одинаковым аргументом присваивается один и тот же цвет. На втором этапе каждая точка z в области определения функции f окрашивается в тот же цвет, что и значение $f(z)$ в W-плоскости.



Фазовый портрет можно считать отпечатками пальцев функции. Хотя при этом остается только часть данных (аргумент), а другая часть (модуль) исчезает, функции важного класса ("аналитические" или, более общо, "мероморфные") можно восстановить однозначно с точностью до нормировки. Определенные модификации цветового кодирования позволяют нам легче увидеть свойства функции



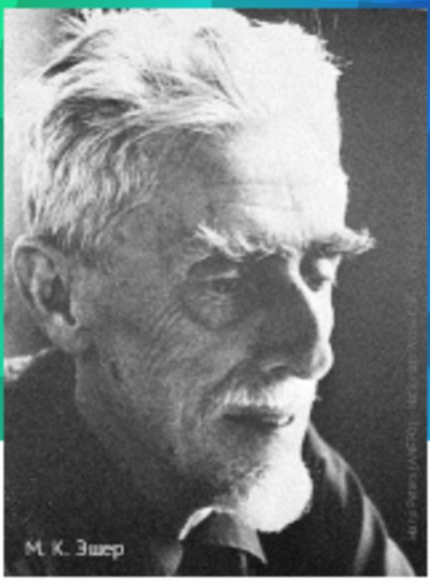


В этом календаре мы используем в основном три различных схемы раскраски: фазовый портрет, описанный выше, и еще два варианта, показанные во втором ряду рисунков. Вариант слева добавляет к представлению модуль функции; версия справа кроме того подчеркивает сохранение углов при отображении.

Введение в теорию функций, проиллюстрированное фазовыми портретами, можно найти в книге E. Wegert, *Visual Complex Functions – An Introduction with Phase Portraits*, Springer Basel 2012. Более подробная информация о календаре (в том числе и за предыдущие годы), как и о книге доступны на

www.mathcalendar.net, www.visual.wegert.com.

Мы благодарим всех наших верных читателей и *Verein der Freunde und Förderer der TU Bergakademie Freiberg e. V.* за их неоценимую поддержку этого проекта.



Январь

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
						1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31					

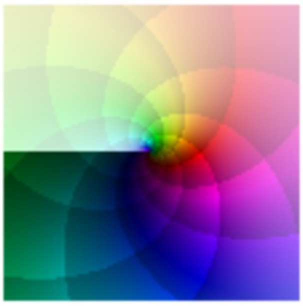
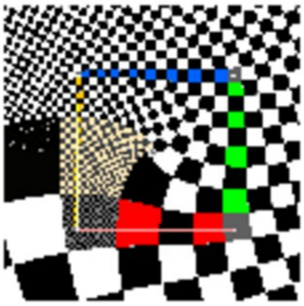
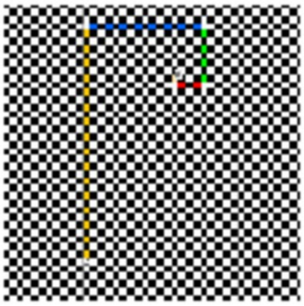
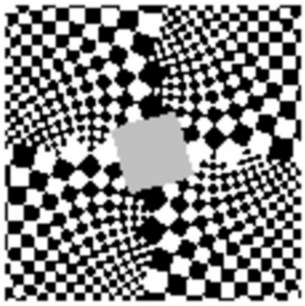
Степенная функция комплексного переменного

Как читатель этого календаря, вы наверняка знаете, что $\mathrm{i}^2 = -1$. А задумывались ли вы когда-нибудь чему равно i^i? В общем случае, степень с комплексным основанием z и комплексным показателем a определяется по формуле

$$z^a = \mathrm{e}^{a \log z},$$

где $\log z = \ln|z| + \mathrm{i} \arg z$ – комплексный логарифм. Поскольку аргумент комплексного числа принимает множество значений, то и степень z^a не будет определена однозначно. Если в качестве аргумента i выбрать его главное значение $\arg \mathrm{i} = \pi/2$, тогда будем иметь $\mathrm{i}^\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{i}\pi/2)} = \mathrm{e}^{-\pi/2}$. Главная ветвь аргумента $\arg z$ терпит разрыв (величиной 2π) вдоль отрицательной полуоси действительной оси. Кроме случая, когда a – целое число, этот разрыв передается и функции z^a. Рисунок на обратной стороне страницы изображает фазовый портрет этой функции при $a = 1 - \mathrm{i}\,(\log 256)\,/\,(2\pi)$. Такой выбор показателя степенной функции приводит к тому, что ее фаза непрерывна на всей плоскости (поэтому скачка на рисунке нет), однако ее модуль изменяется на множитель 256 при переходе через отрицательную полуось. Это отражено на модифицированных фазовых портретах, представленных ниже, на которых серые значения используются для изображения модуля.

Два средних рисунка визуализируют функцию $w = z^a$ с помощью шахматной раскраски w-плоскости (третий рисунок) и её обратного образа на z-плоскость (второй рисунок). Если проследить за покрашенными плитками вдоль сторон специально выбранного квадрата на плоскости переменной z и образами этих сторон на плоскость переменной w, станет очевидным непрерывное изменение масштаба. При $a = 1 - \mathrm{i}(\log 16)\,/\,(2\pi)$ масштаб изменяется вдоль каждой из сторон квадрата на множитель 2. Таким образом, после возвращения в исходную точку общий множитель будет равен 16. Мы выбирали непрерывную ветвь аргумента в окрестности желтой стороны. Серой точкой отмечено положение начала координат.

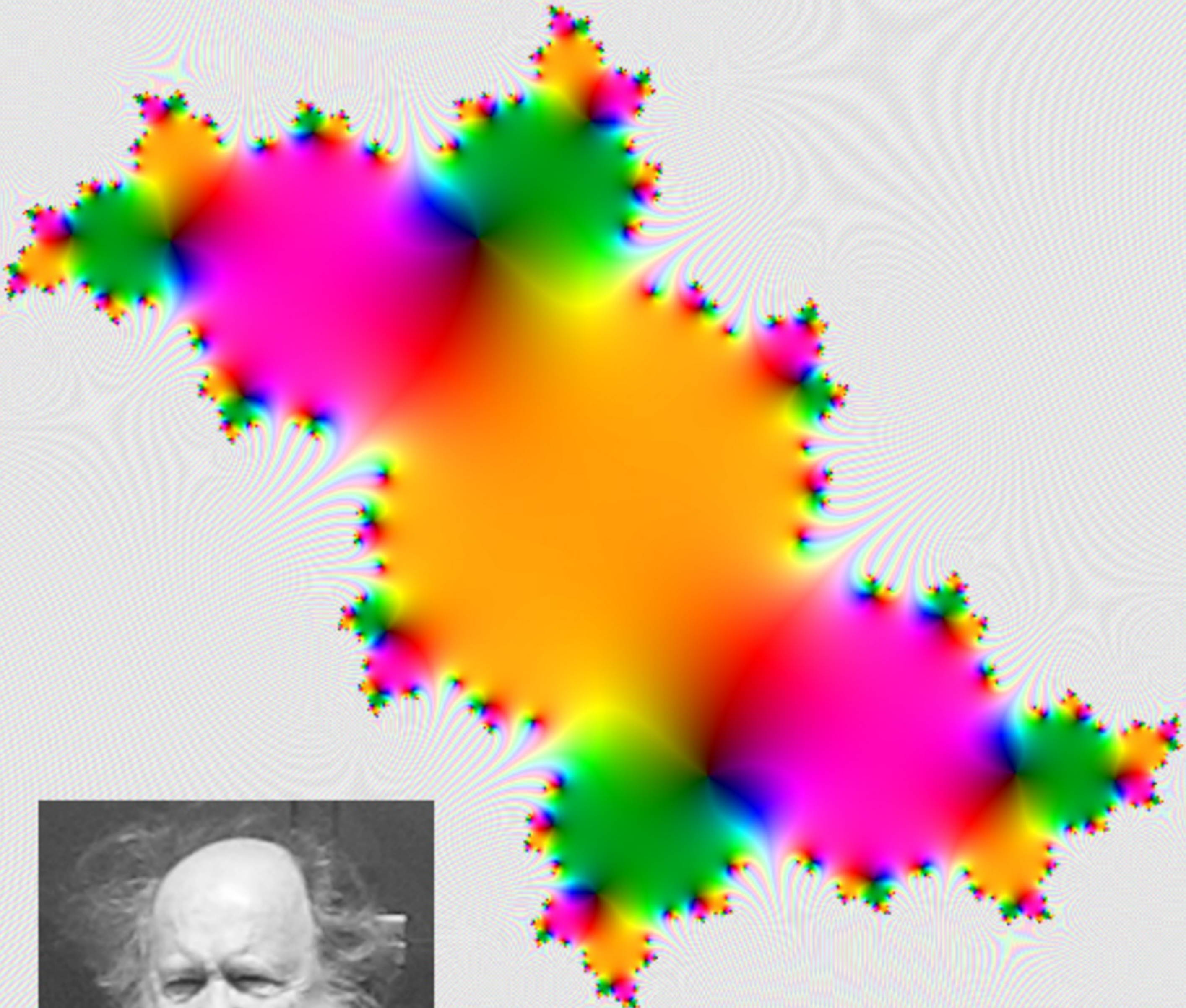
В 1958 Эшером была создана литография *Картинная галерея*[1]. На ней изображен человек, разглядывающий картину портового города, на которой изображена галерея, где он сам и находится. Следуя за его взглядом на картине, можно заметить, что масштаб изменяется на множитель $4^4 = 256$, также как с модулем функции z^a – на конце взгляда мы видим ту же самую картину. Эта конструкция может быть проинтерпретирована как обратный образ изображения (с w-плоскости на z-плоскость) при отображении z^a. Для того, чтобы путь был замкнут, исходная картинка должна быть самоподобна с коэффициентом 256 ("эффект Дросте").

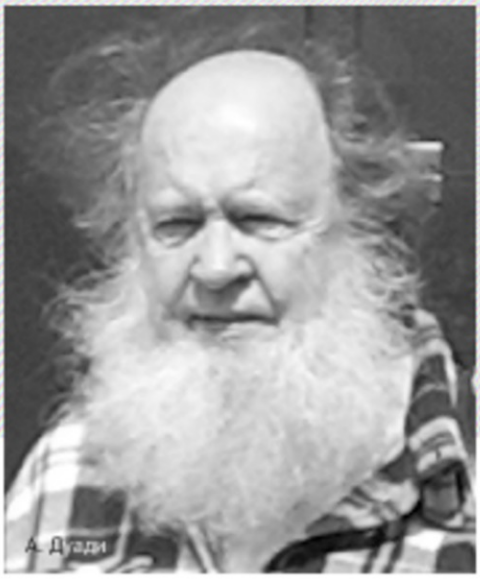
Мауриц Корнелис Эшер (1898 – 1972)

следуя воле отца, начинает учиться архитектуре в Харлеме в 1919 году, однако очень скоро переключается на графические искусства. Во время длительного путешествия по Италии и Испании он был потрясен декоративными замощениями, увиденными в архитектурном комплексе Альгамбра в Гранаде. Несмотря на отсутствие математического образования, Эшер читает статью Пойа о плоских группах симметрий и начинает использовать в своих рисунках и гравюрах все 17 групп симметрий орнаментов. После знакомства с Кокстером, ведущим геометром того времени, Эшер переключает внимание на гиперболические замощения и создает большое количество интересных с математической точки зрения рисунков и гравюр. Он проводил собственные математические исследования, используя свои обозначения. Пораженный раком, Эшер был вынужден начиная с 1964 года сокращать рабочие часы. Его последняя гравюра появилась в 1969 году, и через три года он умер.

B. de Smit and H.W. Lenstra Jr., The Mathematical Structure of Escher's Print Gallery, AMS Notices 2003, Vol. 50, No. 4, pp. 446–451. J.J. O'Connor and E.F. Robertson, M.C. Escher, MacTutor History of Mathematics, (University of St Andrews, Scotland, May 2000) http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Escher.html (accessed August 2016).

[1] см. `http://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/print-gallery/`





Февраль

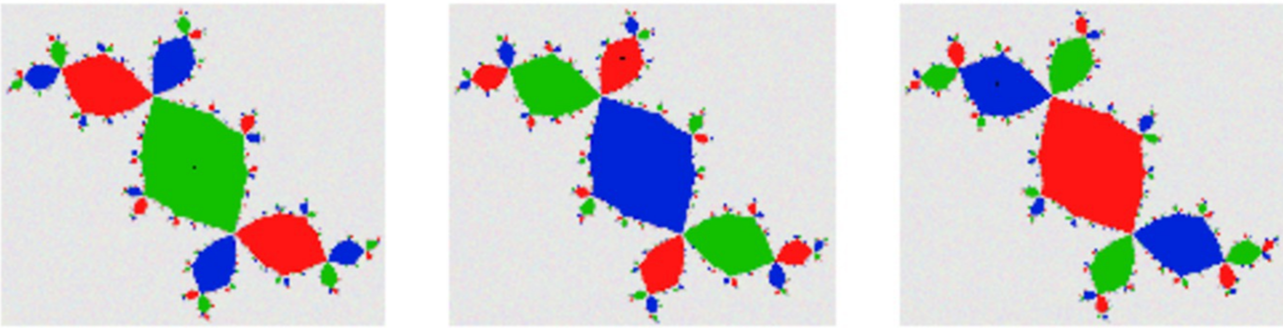
Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28												

Голоморфная динамика (статья Вальтера Бергвайлера)

Голоморфная динамика изучает итерации рациональных (или целых) функций. Пусть задана такая функция f и выбрана точка z_0, тогда объектом изучения является последовательность (z_n), определяемая рекурсивным соотношением $z_{n+1} = f(z_n)$. Начало исследования этих последовательностей было положено в 19 веке Эрнстом Шрёдером, Габриэлем Кёнигсом и другими математиками, однако принято считать, что рождение голоморфной динамики в 1918-20 годах связано с блестящими работами Пьера Фату (Complex Beauties, Февраль 2016) и Гастона Жюлиа (Complex Beauties, Июль 2012). Они независимо друг от друга догадались, что комплексная плоскость (или сфера Римана) распадается на два непересекающихся множества, которые сейчас называют в их честь множеством Фату и множеством Жюлиа. Во множестве Фату итерации устойчивы, что означает, что малое изменение начальной точки z_0 приводит к малому изменению последовательности (z_n). На множестве Жюлиа, напротив, последовательность демонстрирует значительную чувствительность к изменению начального значения: возникает "эффект хаоса".

После центрального вклада в эту область, сделанного Фату и Жюлиа, появились работы Губерта Кремера, Карла Людвига Зигеля, Ирвина Ноэль Бейкера и других, однако, в целом последовало относительно небольшое количество исследований в этой области. Ситуация кардинально изменилась в 1980-ых, когда компьютерная графика зажгла интерес к ней у нематематиков, а математики, в числе которых были Деннис Салливан, Адриен Дуади и Джон Хаббард, привнесли в эту область совершенно новые методы исследования.

Заполняющее множество Жюлиа многочлена f – это множество всех начальных точек z_0, для которых итерационная последовательность (z_n) ограничена. Граница этого множества называется множеством Жюлиа.



На этих трех картинках визуализируются функции f^{100}, f^{101} и f^{102} для $f(z) = z^2 + c$ с константой $c \approx 0.122561 + 0.744861\mathrm{i}$. При таком выборе c, точка 0 (темная точка в зеленой области) является периодической точкой с периодом 3: после трех итераций функции f точка возвращается в свое изначальное положение. (Для целей визуализации мы сдвинули функции f^n на величину $s = 0.3 - 0.5\mathrm{i}$ – строили графики функций $f^n + s$ при $n = 100, 101$ и 102.)

В честь Адриена Дуади это заполняющее множество Жюлиа называют *"кроликом Дуади"*. Главная картинка месяца изображает (модифицированный) фазовый портрет девятой итерации f^9 функции $f(z) = z^2 + c$ с константой $c = -0.11 + 0.6557\mathrm{i}$. Маленькие полосы в светлой области показывают, что функция быстро возрастает при движении аргумента от множества Жюлиа.

Адриен Дуади (1935 – 2006)

учился в Высшей нормальной школе в Париже, где защитил докторскую диссертацию под руководством Анри Картана, решив задачу, связанную с геометрией комплексных многообразий. Позднее начал заниматься голоморфной динамикой, где проделал новаторскую работу, например, описал итерации квадратных трехчленов и множество Мандельброта – большей частью вместе с его студентом Джоном Хаббардом.

Дуади был членом легендарного авторского коллектива Бурбаки, который в 1934 году поставил своими целями реорганизацию всех существующих математических знаний и их строгое изложение. Помимо того, что Дуади был блестящим математиком, он был ярким и веселым человеком, о котором ходило множество анекдотов.

Март

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31									

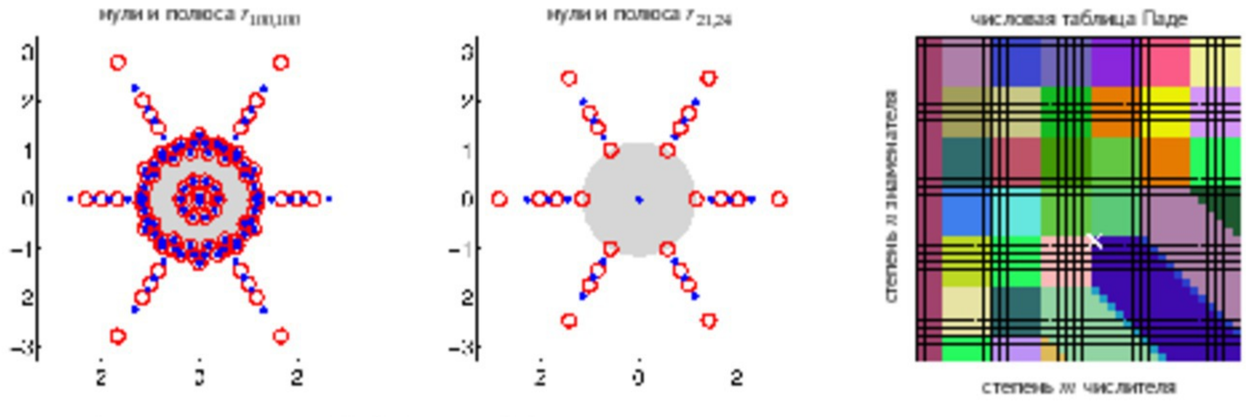
Аппроксимация Паде (статья Штефана Гюттеля)

Классическое *приближение Паде* – это рациональная функция, ряд Тейлора которой (в нуле) совпадает с рядом Тейлора приближаемой функции на как можно большем числе первых членов. Формально, приближением Паде порядка $[m,n]$ функции f называется рациональная функция $r_{m,n}(z) = p_m(z)/q_n(z)$, где p_m и q_n – такие многочлены степеней m и n соответственно, что $f^{(j)}(0) = r_{m,n}^{(j)}(0)$ для как можно большего числа последовательных целых индексов $j = 0, 1, \ldots$. Если у функции f существуют производная нужного порядка в нуле, то такая рациональная функция $r_{m,n}$ существует и определена однозначно.

Стандартный подход к численному поиску $r_{m,n}$ использует линеаризацию $p_m(z) = f(z)q_n(z) + O(z^{m+n+1})$, которая сводит этот поиск к решению системы линейных уравнений. Однако на практике получаемая система часто оказывается плохо обусловленной, что приводит к большим численным ошибкам. Кроме этого, приближения Паде могут иметь нежелательные пары нулей и полюсов, даже при использовании точной арифметики (хотя в последнем случае они являются общими множителями числителя и знаменателя, и могут быть сокращены). Такие пары, называемые *дуплетами Фруассара*, весьма мало способствуют достижению хорошей точности аппроксимации и всегда представляют собой проблему при численном поиске $r_{m,n}(z)$.

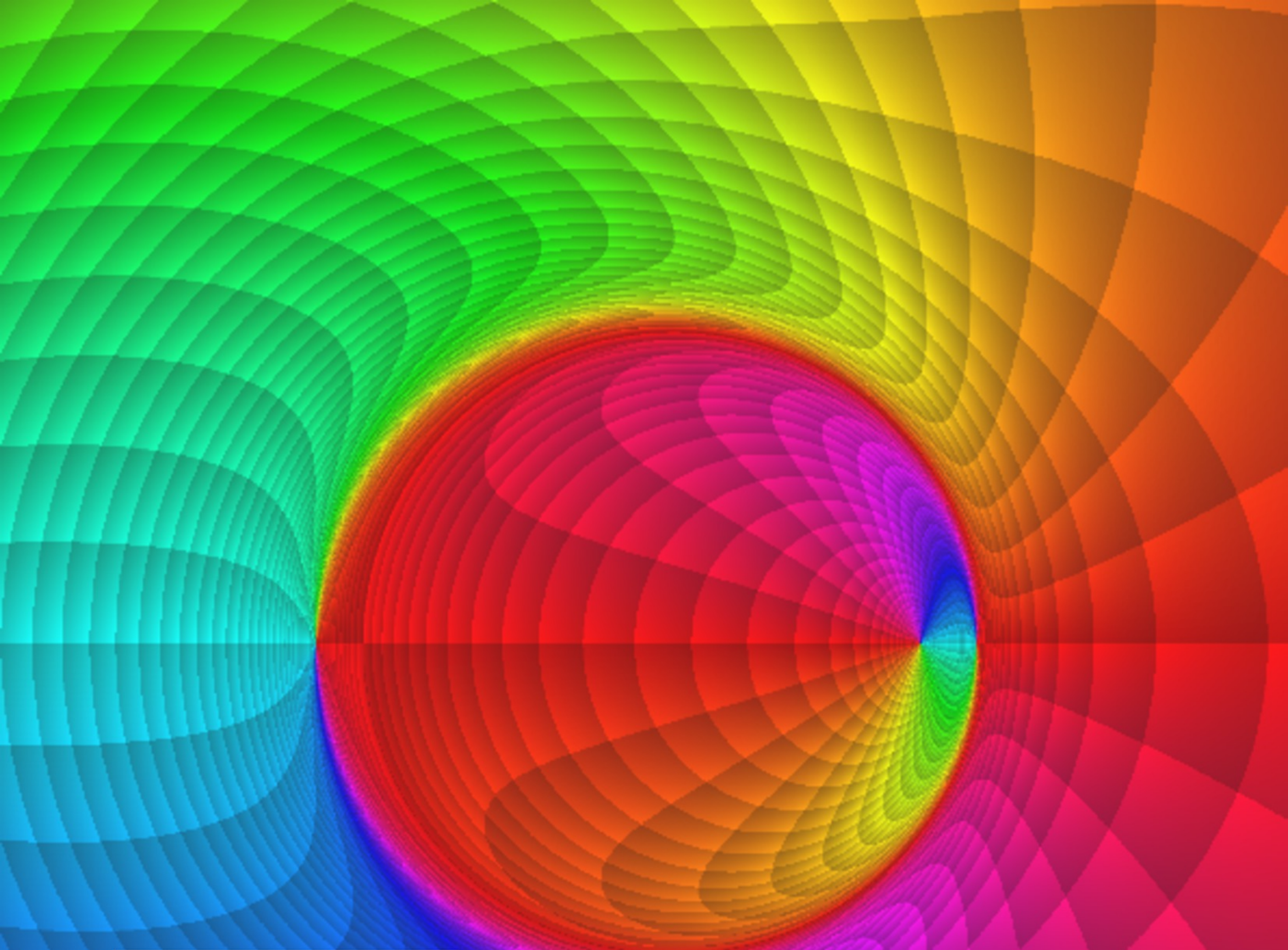
Мы проиллюстрируем эти сложности на примере аппроксимации функции $f(z) = \tan(z^3)$. На рисунке внизу и слева изображены все нули и полюса приближения Паде $r_{100,100}$ (синие точки и красные кружки, соответственно), которые были посчитаны стандартным численным методом. Можно увидеть, что присутствует множество лишних нулей и полюсов; в частности, большое их количество находится внутри круга $|z| < \sqrt[3]{\pi/2}$, закрашенного серым цветом, в котором сама функция f имеет ровно один нуль в точке $z = 0$. Вычислить приближение Паде точнее можно, используя *регуляризацию*, при которой степени числителя и знаменателя уменьшаются в зависимости от величины ошибки. Этот метод использует сингулярное разложение теплицевой матрицы, и результат его применения проиллюстрирован на средней картинке, где изображены нули и полюса регуляризованного приближения порядка $[21, 24]$. Так же, как у самой функции f, нули и полюса регуляризованного приближения $r_{21,24}$ располагаются на лучах, выходящих из нуля и проходящих через корни шестой степени из единицы. Фазовый портрет функции $r_{21,24}$ приведен на главной картинке месяца.

В 1892, Паде показал, что приближения $r_{m,n}$, будучи упорядоченными в таблицу по индексам m и n, входят в неё квадратными блоками, внутри которых приближения разных порядков совпадают. Единственным исключением может быть бесконечный блок на левой границе таблицы, соответствующий приближению, тождественно равному нулю. Числовая таблица Паде показана на рисунке снизу справа. Точкам одного цвета соответствует одно и то же приближение Паде. Приближение порядка $[21, 24]$ отмечен белым крестиком. Диагональные границы появились благодаря специфичному для метода, основанного на сингулярном разложении, автоматическому понижению порядка.



Анри Эжен Паде (1863 – 1953)

родился в городе Абвиль на севере Франции. Начиная с 1883 года учился в Высшей нормальной школе в Париже, где в 1886 году сдал сертификационный экзамен преподавателя. В 1892 под руководством Шарля Эрмита в Сорбонне Паде защитил докторскую диссертацию, которая включала упомянутый выше результат о блочной структуре таблицы Паде. Начиная с 1893 года он преподавал в Университете Лилль, где в 1897 году получил должность преподавателя, сменив Эмиля Бореля. В 1902 году был назначенным профессором механики в Университете Пуатье, и в 1903 году – в Университете Бордо. В 1906 году за работы, посвященные рациональной аппроксимации, Паде был награжден гран-при Французской Академии наук.



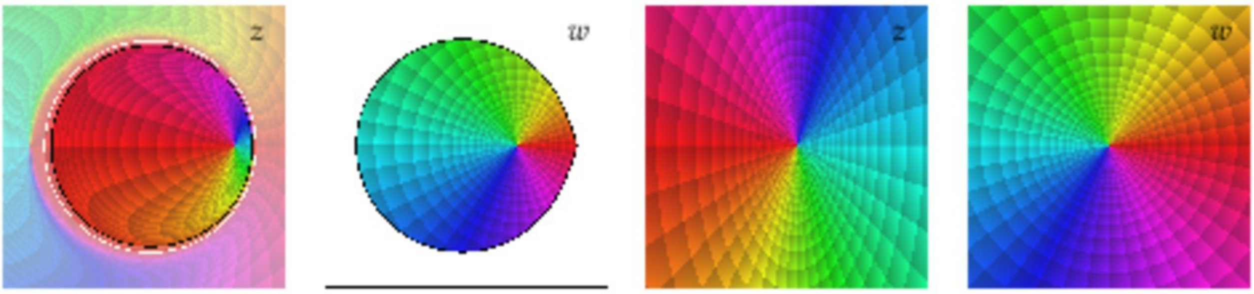
Апрель

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
					1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30							

Квазиконформные отображения

Отображение f, действующее из подмножества комплексной z-плоскости в комплексную плоскость переменной w, называется *конформным* в точке z_0, если оно сохраняет углы между гладкими кривыми, проходящими через точку z_0. Определяя угол между двумя кривыми как угол между их касательными векторами в точке пересечения, эти отображения сохраняют как величину, так и ориентацию угла. Аналитическая функция сохраняет углы в точках, которые не являются критическими, то есть, где $f'(z) \neq 0$: например, аналитическая функция $f(z) = z^2$ сохраняет углы везде за исключением $z = 0$, где она удваивает углы. *Квазиконформные отображения* являются "почти конформными": хотя они могут не сохранять углы, их "искажение" равномерно ограничено во всей области, на которой определяется отображение. Более точно, квазиконформное отображение f является гомеоморфизмом (удовлетворяющем некоторому условию дифференцируемости), при котором отношение максимального отклонения к минимальному на бесконечно малой окружности с центром в z_0 ограничено для всех z_0 в рассматриваемой области.

Картинка этого месяца показывает отображение, полученное сочетанием аналитического с "анти-аналитическим" отображением (сопряженным аналитическим отображением). Аналитическая функция доминирует внутри единичного круга, в то время как анти-аналитическая функция доминирует в области за его пределами. Общая граница двух областей показана на вставке слева в виде белой линии. Внутри этой линии картинка сохраняет ориентацию, снаружи – обращает.



Если ограничить функцию на область внутри черной кривой, мы получим квазиконформное отображение на область во второй слева вставке, с обычной окраской. Если бы это было конформное отображение, малые "плитки"слева должны были бы быть "примерно"квадратными. Искажение наиболее четко проявляется рядом с границей. Две картинки справа показывают поведение функция f в малой окрестности нуля.

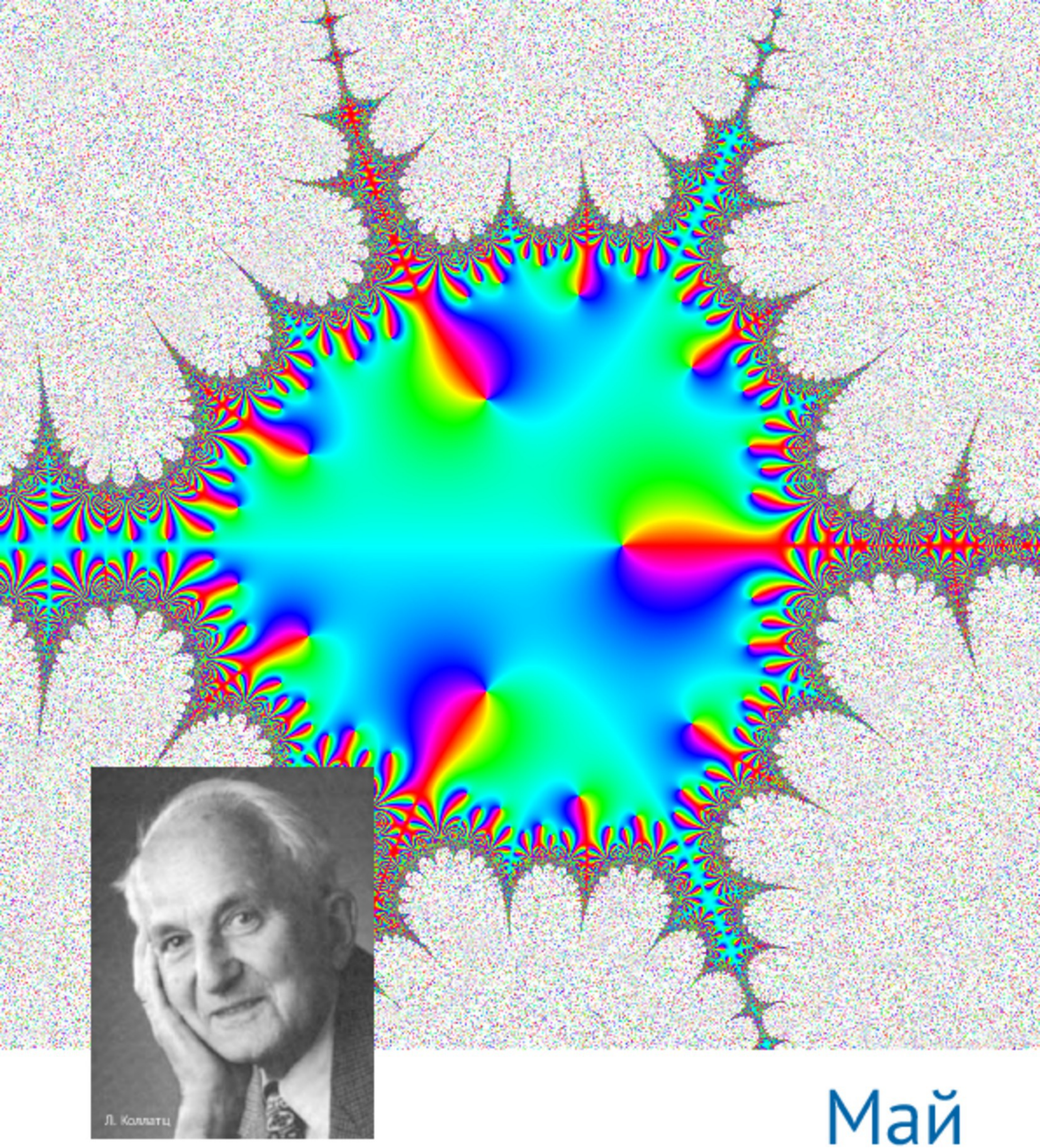
Квазиконформные отображения были впервые изучены Грётчем в 1928 году. Альфорс и Тайхмюллер осознали важность этих отображений и Альфорс первым использовал термин "квазиконформный"в 1935 году.

Камилло Герберт Грётч (1902 – 1993)

вырос в Дёбельне (Саксония). Его отец тоже был математиком. Грётч изучал математику в Йене и занимался у Поля Кёбе в Лейпциге, где он закончил свою докторскую диссертацию в 1929 году. Он завершил свою абилитацию в Гессене, и остался там в качестве приват-доцента, но под давлением нацистской партии был уволен в 1935 году. После этого, Грётч работал в издательстве до 1939 года, когда он был призван в армию. Грётч затем работал в Институте аэродинамики Гёттингена. После нескольких лет в Марбурге, в 1948 году он обеспечил себе должность в университете Халле, куда он был назначен профессором в 1965 году.

До 1935 года Грётч работал в геометрической теории функций (конформные и квазиконформные отображения, экстремальные задачи, неравенство Грётча). Во время и после войны он посвятил себя в основном теории графов. Поскольку Грётч был замкнутым и мало общался с коллегами-математиками, его работа не имела большого влияния и, как писал Альфорс: "Грётч не получил признания, которого он заслуживает."

Reiner Kühnau, Herbert Grötzsch zum Gedächtnis, Jahresbericht der DMV, **99**, 122–145 (1997).
Lars V. Ahlfors, Extremalprobleme der Funktionentheorie, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A **249** (1958).



Май

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31											

$3n+1$ Задача Лотара Коллатца

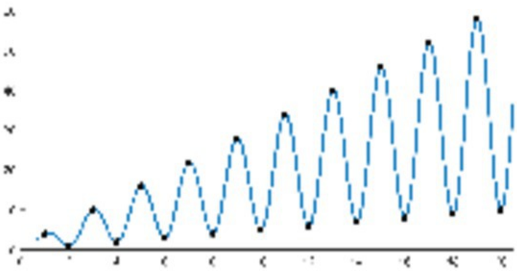
Начнем с произвольного натурального n и разделим его на 2, если оно четное, или заменим его на $3n+1$, если оно нечетное. Повторим этот процесс. Какую последовательность положительных чисел мы получим? Давайте попробуем с $n = 11$:

$$11,\ 34,\ 17,\ 52,\ 26,\ 13,\ 40,\ 20,\ 10,\ 5,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1, \ldots.$$

После того, как мы достигнем 1, последовательность будет просто циклически повторять фрагмент $4, 2, 1$ до бесконечности.

В 1937 году Коллатц поставил вопрос о том, будет ли последовательность рано или поздно достигать 1 для любого начального значения n. Компьютерные расчеты показали, что хотя это может занять много времени, все последовательности с начальным значением $n \leq 5.7 \cdot 10^{18}$ достигают 1. Несмотря на приложенные усилия (и многие заявления о "доказательстве"), сегодня проблема все еще открыта. Как следствие ее сложности, задача Коллатца привела к прогрессу во многих сферах, включая теорию чисел, динамические системы, теорию графов, стохастические модели, эргодическую теорию, логику, теорию алгоритмов, компьютерные науки и научные расчеты.

Более формально, $3n+1$ проблема спрашивает о долгосрочном поведении рекурсивно определенной
последовательности (x_k), где $x_0 = n$, $x_{k+1} = f(x_k)$, и



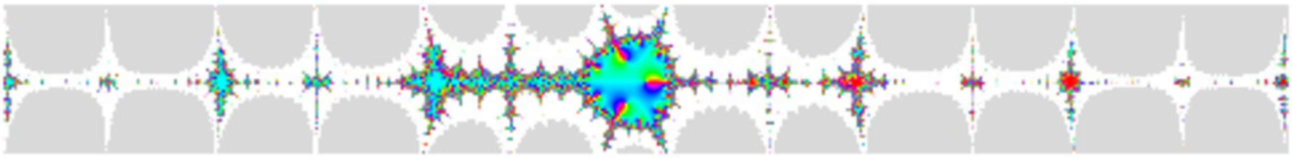
$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{если } x \text{ чётно} \\ 3x+1 & \text{если } x \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Есть много возможных путей доопределить функцию f для действительных чисел x; одним из самых простых способов является

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(2 + 7x - (2+5x)\cos(\pi x)\right).$$

График этой функции (синий цвет) со значениями в целых числах (черный) показан выше.

Поскольку функция f также хорошо определена для комплексных чисел, задачу Коллатца можно изучать с помощью методов динамических систем (см. Февраль). На рисунке ниже показан фазовый портрет четвертой итерации нашей функции f в окрестности действительной оси. Титульный лист этого месяца показывает крупным планом центральную часть этого фазового портрета.



Лотар Коллатц (1910 – 1990)

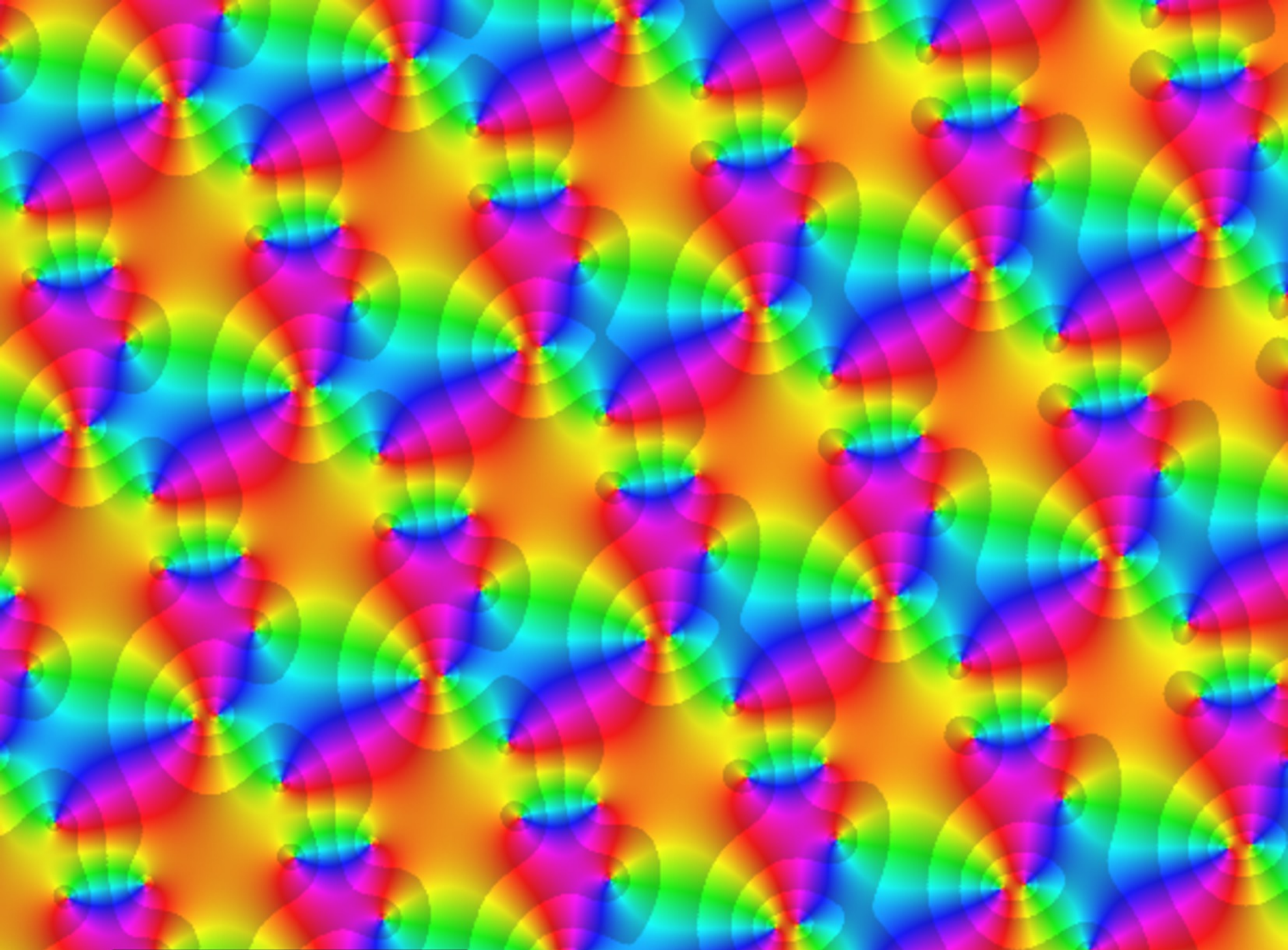
учился в университетах Берлина, Мюнхена, Грайфсвальда и Гёттингена. В 1933 году он получил диплом по математике и физике, работая под руководством фон Мизеса и Шрёдингера. Два года спустя он получил докторскую степень, защитив диссертацию по численному анализу. Его научными руководителями были Альфред Клозе и Эрхард Шмидт, потому что фон Мизес был вынужден покинуть Германию в связи с ростом нацистских настроений.

Коллатц завершил свою абилитацию в Техническом Институте Карлсруэ и оставался там, работая в качестве преподавателя. В 1943 году он был назначен профессором в Технический университет Ганновера и в 1952 он перешел в Гамбургский университет, где занимал должность профессора прикладной математики.

Будучи одним из самых плодовитых прикладных математиков, Коллатц внес вклад в теорию и применение дифференциальных и интегральных уравнений, функциональный анализ, задачи на собственные значения, сплайны, теорию бифуркаций и теорию графов. Его популярные книги по численному анализу стали отраслевым стандартом и были переведены на несколько языков. Благодаря высокой международной репутации, он был удостоен семи званий почетного доктора и был выбран почетным членом шести академий и научных обществ.

Коллатц умер от сердечного приступа в 1990 году в болгарском портовом городе Варна во время участия в конференции. В его честь премии Коллатца присуждается каждые четыре года.

Фрактал Коллатца http://yozh.org/2012/01/12/the_collatz_fractal (Август 2016)



К. Вейерштрасс

Июнь

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30									

Сигма-функция Вейерштрасса

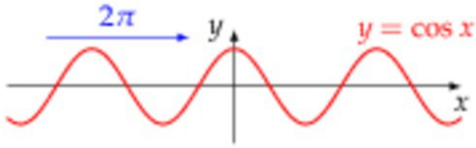
Для вещественной функции периодичность легко увидеть на графике - при сдвиге на длину периода получается тот же самый график. Широко известный пример - (вещественная) функция косинус $f(x) = \cos x$, имеющая период 2π (см. верхнюю иллюстрацию ниже).

Для функции комплексного аргумента мы можем рассматривать сдвиги в различных направлениях. Тем не менее можно показать, что все периоды мероморфной функции f, не равной тождественно константе, порождаются не более чем двумя комплексными периодами ω_1 и ω_2, где $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$, такие что

$$f(z+\omega_1) = f(z) \;\text{ и }\; f(z+\omega_2) = f(z).$$

Все периоды такой *эллиптической функции* образуют *решетку* $\Omega := \{n\omega_1 + m\omega_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$, изображенную на втором рисунке снизу синими точками. *Сигма-функцию Вейерштрасса*, соответствующую решетке Ω, можно получить с помощью бесконечного произведения,

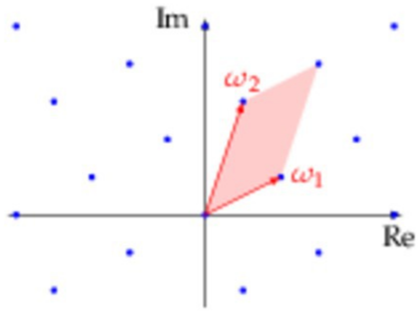
$$\sigma(z) := z \prod_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \mathrm{e}^{\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right).$$



Функция σ обращается в ноль ровно в точках решетки Ω (см. фазовый портрет на нижнем рисунке).

Для точек $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$, лежащих в комплексной плоскости, для которых

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k \in \Omega, \tag{1}$$



функция f, определенная равенством

$$f(z) := \frac{\sigma(z-a_1)\cdots\sigma(z-a_n)}{\sigma(z-b_1)\cdots\sigma(z-b_n)}$$

является эллиптической относительно решетки Ω, с нулями в точках $a_1, \ldots, a_n$, и полюсами в $b_1, \ldots, b_n$.

Интересно, что существуют мероморфные функции, не являющиеся эллиптическими, фазовый портрет которых двоякопериодичен. Для выбранного специальным образом значения a функция

$$g(z) := \mathrm{e}^{az}\, f(z)$$

имеет двояко-периодический относительно решетки Ω фазовый портрет, не удовлетворяя при этом условию (1). В этом случае, однако, модуль функции – который не отображен на фазовом портрете – не является двояко-периодическим. На лицевой стороне этой страницы изображен такой пример.

Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 – 1897)

родился в Остенфельде (Мюнстерланд). Обучался юриспруденции в Бонне, но забросил учебу, чтобы сосредоточиться на своих любимых предметах: математике и физике, чем он и занялся в Мюнстере в 1838-1840 годах. После этого он преподавал в нескольких средних школах, попутно работая над теорией абелевых функций. Лишь после того, как его работы были опубликованы в журнале Крелля в 1854 и 1856 годах он добился признания и начал свою академическую карьеру с должности профессора в Берлине – будучи уже сорокалетним. Его влияние на современный анализ сложно переоценить, как из-за его беспрецедентной требовательности к строгости доказательств, так и благодаря его крайне популярным лекциям, а также множеству его учеников, среди которых были Георг Кантор, Адольф Гурвиц, Германн Шварц и Софья Ковалевская.

Marius B. Stefan: On doubly periodic phases, Proc. Amer. Math. Soc. **142** (2014), no. 9, 3149–3152.

Июль

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
					1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31						

G-функция Барнса

В календаре 2012 года мы посвятили август гамма-функции Γ. Она определяется двумя соотношениями $\Gamma(1) = 1$ и

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

для $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. Таким образом $\Gamma(n+1) = n!$, где n - положительное целое число. В серии работ, написанных с 1899 по 1904 гг., Эрнест Барнс ввел функцию, названную впоследствии его именем. Она определяется равенством $G(1) = 1$ и уравнением

$$G(z+1) = \Gamma(z)\, G(z)$$

для произвольного комплексного z. Когда n - положительное целое число, $G(n+1) = \prod_{k=1}^{n} \Gamma(k) = \prod_{k=1}^{n-1} k!$.

Используя представление Вейерштрасса для гамма-функции в виде бесконечного произведения и константу Эйлера-Маскерони,

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(-\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \approx 0.57721566,$$

можно показать, что

$$G(z+1) = (2\pi)^{z/2} \exp\left(-\frac{z + z^2(1+\gamma)}{2} \right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{z}{k}\right)^k \exp\left(\frac{z^2}{2k} - z \right) \right).$$

Это - одна из нескольких эквивалентных форм записи этой функции; часто ее принимают за определение G-функции Барнса. Функция Барнса находит приложения в математической физике, теории чисел и L-функций Гекке, а также в вычислении определителей матриц Ганкеля. Она также играет центральную роль в формуле, описывающей асимптотическое поведение определителей тёплицевых матриц, впервые описанное в виде гипотезы Фишером и Хартвигом. В переформулированном виде гипотеза была доказана различными математиками, в том числе Видомом, Базором, Бёттчером, Зильберманном и Эрхардтом.

На иллюстрации, которой посвящен этот месяц, изображена G-функция Барнса. Ее равноотстоящие нули (в неположительных целых числах) можно увидеть на левой стороне картинки, в точках, где встречаются все цвета.

Эрнест Уильям Барнс (1874 – 1953)

был старшим из четырех детей. Получил образование в Тринити Колледже (Кембридж), где в 1898 году выиграл премию Смита. В 1902 стал преподавателем математики, в 1907 получил докторскую степень, с 1906 по 1908 был младшим деканом. В 1909 году стал членом Королевского общества. В 1902 году Барнс был посвящен в дьяконы епископом Лондона, в 1915 году оставил занятия математикой и был назначен мастером церкви Темпл. К 1910 году Барнс написал 29 математических статей, в последних пяти из которых он рассматривал гипергеометрические функции. В 1906 году стал научным руководителем Джона Литтлвуда. Литтлвуд быстро решил первую задачу, которую Барнс дал ему; второй задачей было доказательство гипотезы Римана.

В 1918 Барнс получил должность каноника в Вестминстере, а в 1924 стал епископом Бирмингема. Его деятельность в сане епископа получила противоречивые оценки. Консервативные священнослужители критиковали взгляды, которые он изложил в своей книге *Восход христианства*, и ставшие результатом применяемого им научного подхода к христианству. Согласно Quodlibet Journal, в 1927 году Барнс сказал в эфире BBC:

> Я хотел бы совершенно четко заявить, что многие верования, которые раньше ассоциировались с христианством, должны быть отброшены. Они сталкиваются с прямо противоречащими им научными фактами, и думаю, не будет преувеличением сказать, что со времен Возрождения из каждого такого столкновения наука выходила победителем.

Ухудшающееся самочувствие заставило Барнса оставить должность епископа в 1952 году. Год спустя он скончался в своем доме в Суссексе.

Adamchik, V.S. *On the Barnes function*. Proceedings of the 2001 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, 15 – 20 (electronic), ACM, New York, 2001.
Barnes, E.W.; *The Asymptotic Expansion of Integral Functions of Finite Non-Zero Order*. Proc. London Math. Soc. S2-3 no. 1, 273.
Quodlibet Journal, `http://www.quodlibet.net/articles/bishop-barnes.shtml`.

Август

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31										

Теорема Коши-Ковалевской

В 1842 году Коши доказал теорему о существовании решения для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. В 1875 году Ковалевская обобщила результат на общие нелинейные аналитические системы дифференциальных уравнений. Для обыкновенных дифференциальных уравнений мы имеем

$$\frac{du}{dt} = F(t, u), \ u(0) = u_0,$$

где F - функция двух переменных, а неизвестным является решение, $u(t)$. В случае, если F аналитична в $(0, u_0)$, она допускает разложение в (сходящийся к ней) ряд Тейлора в окрестности этой точки. В такой ситуации, теорема Коши-Ковалевской утверждает, что задача Коши, сформулированная выше, допускает решение, определенное в окрестности точки $t = 0$ и аналитичное в ней. Для уравнений в частных производных, задача принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad u(0, x) = f(x),$$

где f определена в открытой окрестности 0. Теперь мы ищем решение, зависящее от двух переменных: $u = u(t, x)$.

Чтобы решить эту задачу, Коши использовал теорию мажорант, которую он называл "calcul de limites." Ковалевская усовершенствовала его метод для решения нелинейной задачи. Изданная в 1875 году статья Ковалевской ссылается на работу Дарбу, вышедшую в том же году, и обобщает результаты Коши на системы порядка r, содержащие производные по времени порядка r. Согласно А. Пуанкаре, "Ковалевская значительно упростила доказательство и придала теореме ее окончательный вид". Именно эту теорему о существовании и единственности решений уравнений в частных производных мы называем сегодня теоремой Коши-Ковалевской.

На иллюстрации для этого месяца, мы видим решение $u(t, x, y)$ следующей задачи Коши для уравнения в частных производных в момент времени $t = 1$ в квадрате $|x| < 150$, $|y| < 150$

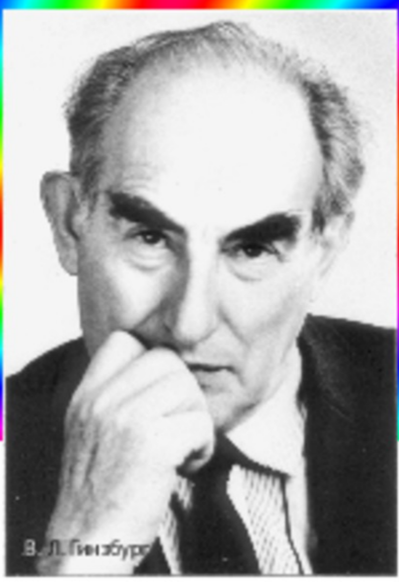
$$\frac{\partial u}{\partial t} = u - \triangle u + (1 + iu)|u|^2; \qquad u(0, x, y) = \cos\frac{\pi x}{50} - i\cos\frac{\pi x}{150}.$$

Софья Васильевна Ковалевская (1850 – 1891)

родилась в Москве в дворянской семье. Получила домашнее образование и с ранних лет проявляла интерес к математике. В *Воспоминаниях о детстве*, она описывает противодействие отца ее "новым"идеям, а также вспоминает, что стены в ее комнате были оклеены записками лекций по математическому анализу. Для того, чтобы уехать за границу, Ковалевской необходимо было выйти замуж; она вступила в фиктивный брак с палеонтологом Владимиром Ковалевским. Молодожены отправились в Гейдельберг, где Софья начала обучение, затем она переехала в Берлин и продолжила свои исследования под руководством Вейерштрасса. Будучи женщиной, Ковалевская не имела возможности обучаться в университете; Вейерштрасс давал ей частные уроки в течение четырех лет. Содержание этих уроков частично отражено в 41 письме, написанном ей Вейерштрассом. Под его руководством, она написала три исследовательских работы, за которые и получила докторскую степень (in absentia) в университете Гёттингена: одна из статей была посвящена уравнениям в частных производных (см. выше), одна - абелевым интегралам, и одна - кольцам Сатурна. Она стала первой женщиной в современной Европе, получившей докторскую степень по математике.

Несмотря на ее выдающиеся работы и рекомендации Вейерштрасса, Ковалевской не удалось найти позицию в Европе, и она вернулась в Россию, воссоединившись с мужем. У пары был один ребенок – дочь – родившаяся в 1878 году. Работая в Московском университете, Владимир не смог обеспечивать семью, и, будучи вовлеченным в сомнительное финансовое предприятие и страдая от резких перемен настроения, он покончил с собой в 1883 году. Ковалевская переезжает в Берлин и с помощью Миттаг-Леффлера получает позицию в университете Стокгольма. Она становится редактором *Acta Mathematica*, получает премию Бордена и премию Шведской Академии наук в 1889 году. Кроме того, она пишет несколько романов. На пике карьеры Ковалевская сильно простудилась. Простуда перешла в воспаление легких, от которого она умерла в 1891 году.

http://www.encyclopedia.com/topic/Sonya_Kovalevsky.aspx (accessed August 8, 2016)
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Kovalevskaya.html (accessed August 5, 2016)



Сентябрь

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30								

Уравнение Гинзбурга-Ландау: образование паттернов

При определенных условиях, некоторые физические, химические и биологические системы качественно меняются. Например, при 0°C вода превращается в лёд. Другой пример - переход проводника в *сверхпроводящее* состояние, обнаруженный Хейке Камерлинг-Оннесом в 1911 году.

Математическая модель сверхпроводимости была впервые разработана примерно в 1950 году. Один из основных ее ингредиентов - одномерное *уравнение Гинзбурга-Ландау*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda\, u - |u|^2\, u.$$

Оказывается, что внезапный переход системы в другое состояние обусловлен бифуркацией решения в точке $\lambda = 0$: при $\lambda > 0$ существуют решения отличные от тривиального $u(t, x) = 0$.

В 1960-х годах было обнаружено, что уравнение Гинзбурга-Ландау и его обобщения можно использовать для моделирования и других ситуаций, в которых система переходит из одного устойчивого состояния в другое в результате появления определенных "мод". Например, эффект *распространения нелинейных волн* объясняется с помощью модели, использующей комплексное (двух или трёхмерное) уравнение Гинзбурга-Ландау

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1 + \mathrm{i}\alpha)\,\Delta u + \lambda\, u - (1 + \mathrm{i}\beta)\,|u|^2\, u. \tag{1}$$

Здесь через Δ обозначен оператор Лапласа, а константы α и β описывают зависимость свойств волн от частот.

На сегодня уравнение Гинзбурга-Ландау - одно из наиболее исследуемых нелинейных уравнений математической физики. Помимо вышеупомянутых явлений, уравнение используют для описания протекающих в колебательном режиме химических реакций, бозе-эйнштейновского конденсата, жидких кристаллов, образования паттернов и самоорганизующихся систем.

На картинке этого месяца показан фазовый портрет комплексного решения $u = u(t, x, y)$ уравнения (1). Начальное условие при $t = 0$ выбирается произвольно, значения параметров выбраны как $\alpha = 0$ и $\beta = 1.5$; u - функция $z = x + \mathrm{i}y$ в момент времени $t = 100$, определенная в области $|x| < 100$ and $|y| < 100$. После фазы установления режима, мы видим спиральную картину, которая сохраняется качественно, эволюционируя при этом. Вычисления были проделаны с помощью программного пакета Chebfun (`www.chebfun.org`).

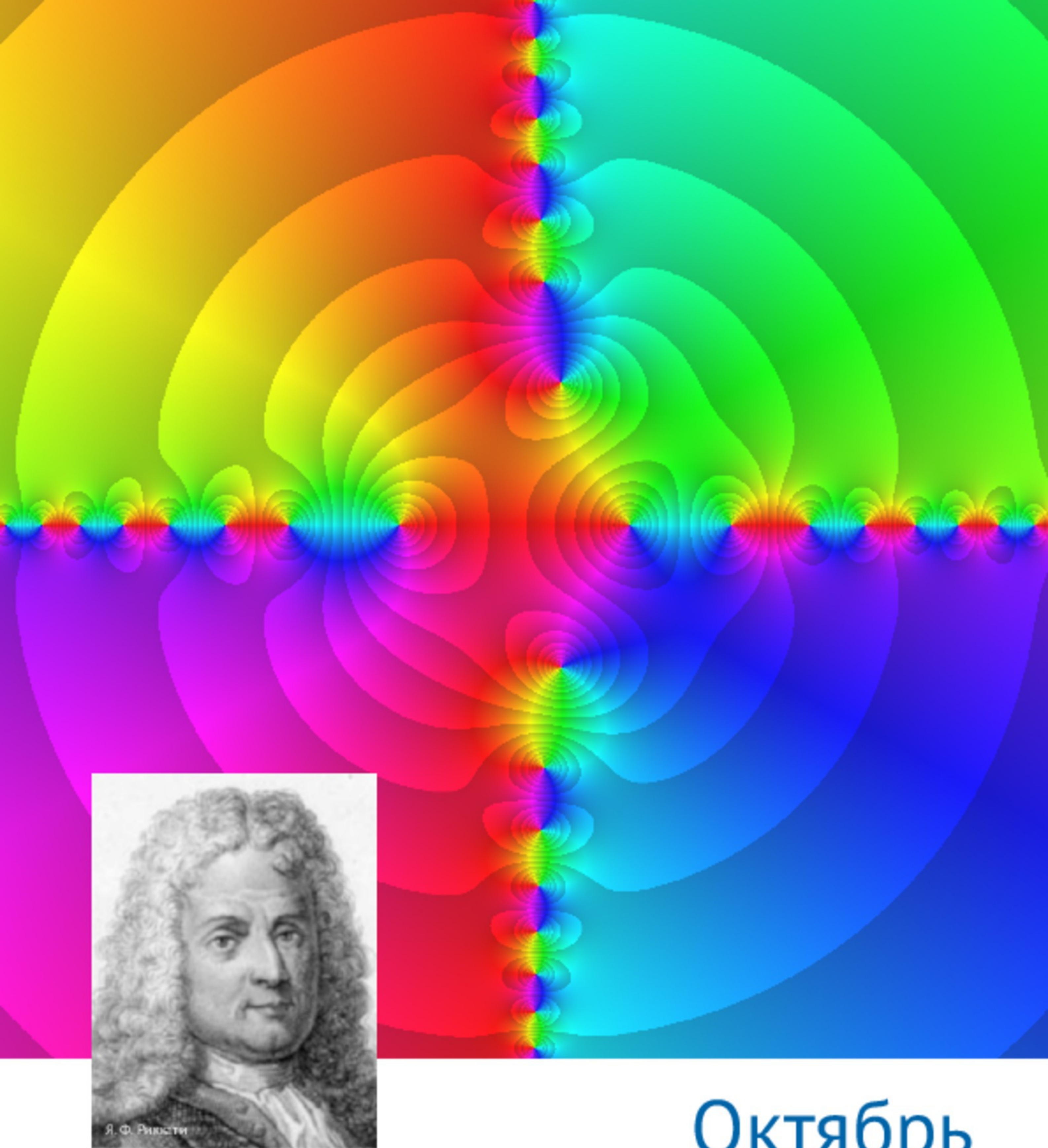
Виталий Лазаревич Гинзбург (1916 – 2009)

начал обучение в московской школе в возрасте 11 лет и оставил занятия после седьмого класса. Проработав некоторое время лаборантом в рентгенологической лаборатории, он подал документы в Московский государственный университет. В своей автобиографии, он пишет "На вступительных экзаменах на физфак МГУ в 1933 году я ни на чем не провалился, но в целом сдал без блеска". В результате, он не был принят, но был зачислен на заочное отделение, с которого смог перевестись на очное на второй год. В этот момент он почувствовал, что наконец нагнал других студентов.

Гинзбург защитил свою кандидатскую диссертацию в 1940 году, а докторскую - в 1942. В условиях растущего антисемитизма после войны академическая карьера Гинзбурга из-за его еврейского происхождения оказалась под угрозой. Ему удалось продолжить занятия наукой, участвуя в разработке водородной бомбы (совместно со его руководителем Игорем Таммом, Андреем Сахаровым и другими).

После смерти Сталина в 1953 году, обстановка в стране стала для Гинзбурга благоприятнее. Он был избран в Российскую Академию наук и занимал пост главы отделения теоретической физики в Физическом институте им. Лебедева в Москве с 1971 по 1988 годы. В 2003 году он (вместе с Алексеем Алексеевичем Абрикосовым и Энтони Джеймсом Леггеттом) был награжден Нобелевской премией за "прорывные работы по теории сверхпроводимости и сверхтекучести".

I.S. Aranson and L. Kramer, The World of the Complex Ginzburg-Landau Equation, Rev. Mod. Phys. 74 99 (2002).
https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2003/ginzburg-bio.html (accessed August 2016).



Октябрь

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
						1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31					

Дифференциальное уравнение Риккати

Дифференциальное уравнение Риккати — это квадратичное обыкновенное уравнение первого порядка вида

$$y'(x) = f(x)\,y^2 + g(x)\,y + h(x). \tag{1}$$

Первым уравнение такого типа, именно, $y'(x) = y^2 + x^2$, описал в 1694 г. Иоганн Бернулли, но решить его он не смог. После многолетних неудачных попыток его брату Якобу в 1702 г. удалось найти решение (см. Complex Beauties, ноябрь 2012). Он использовал подстановку $y = -u'/u$, чтобы преобразовать уравнение в линейное, но второго порядка: $u'' + x^2u = 0$, которое уже можно решать с помощью степенных рядов. Дифференциальное уравнение $u'' + x^2u = 0$ также может быть решено с использованием функций Бесселя первого рода, рационального порядка α, обозначаемых J_α (см. Complex Beauties, октябрь 2012). Таким образом можно показать, что общее решение уравнения $y'(x) = y^2 + x^2$ имеет вид

$$y(x) = x\,\frac{C\,J_{-3/4}\left(x^2/2\right) + J_{3/4}\left(x^2/2\right)}{J_{-1/4}\left(x^2/2\right) - C\,J_{1/4}\left(x^2/2\right)},$$

где C — вещественная константа, подобрав которую, можно удовлетворить начальному условию для y. Например, если $y(0) = 1$, то $C = \Gamma(1/4)/(2\Gamma(3/4))$. Картинка этого месяца — фазовый портрет продолжения этого решения на комплексную плоскость.

Начиная примерно с 1715 г., Якопо Риккати проанализировал другие специальные случаи (1), в частности,

$$y'(x) = a\,x^p y^2 + b\,x^m \quad \text{и} \quad y'(x) = a\,y^2 + b\,x^m.$$

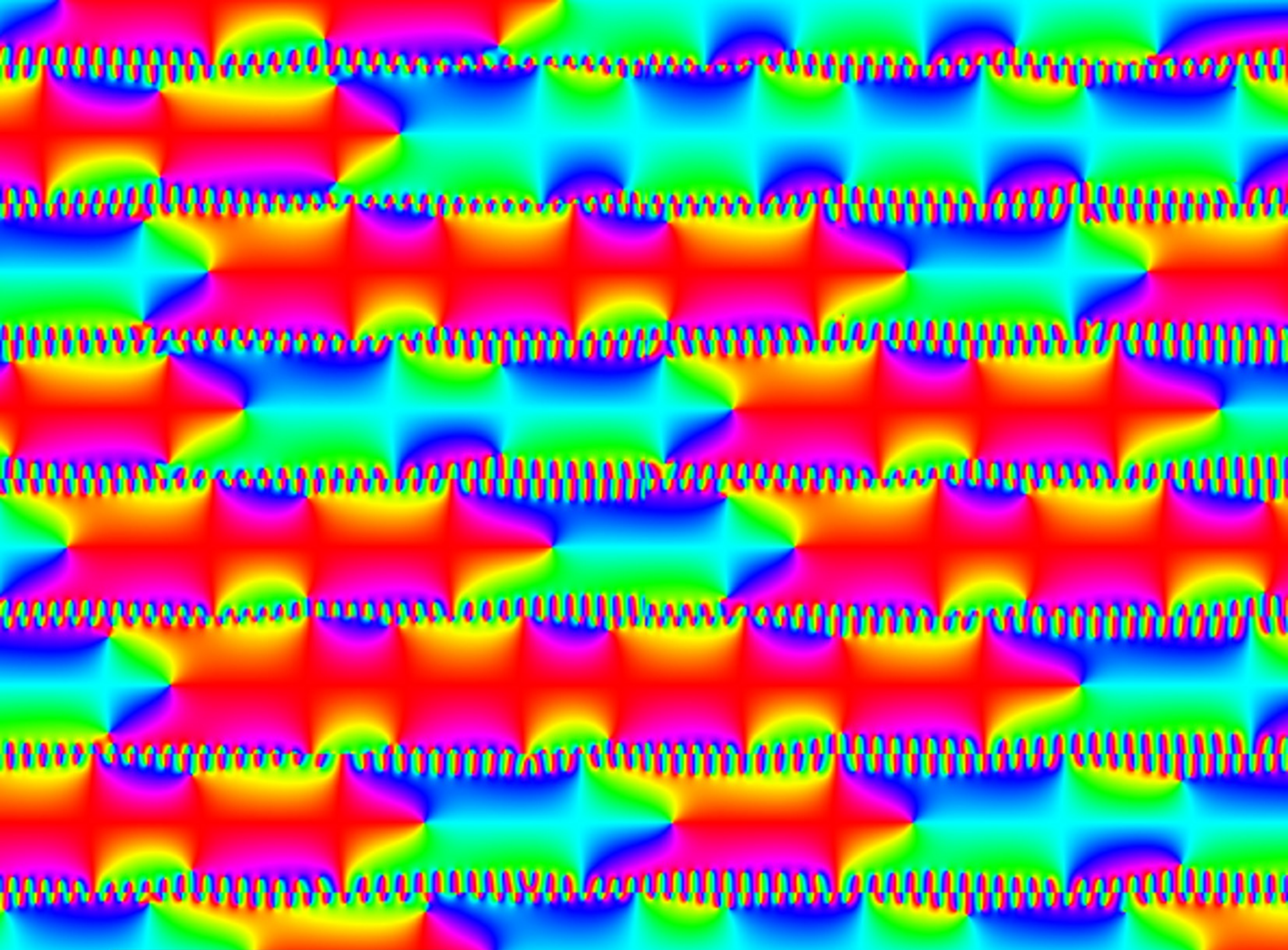
В основном его интересовал вопрос, какие значения показателей p и m позволяют использовать метод разделения переменных. Риккати обнаружил, что для первого уравнения разделение переменных возможно при $m = -3p - 4$ или при $m = (-p-4)/3$. Позднее Николай Бернулли привел достаточное условие к виду $m = (-2kp - 4k \pm p)/(2k \pm 1)$, где k целое. Для второго уравнения студент Риккати, Джузеппе Суцци, и Даниил Бернулли нашли, что условие $m = -4k/(2k \pm 1)$ позволяет разделить переменные. Лишь в 1841 г. Жозеф Лиувилль доказал, что условия на m являются также и необходимыми для разделения переменных в этих дифференциальных уравнениях.

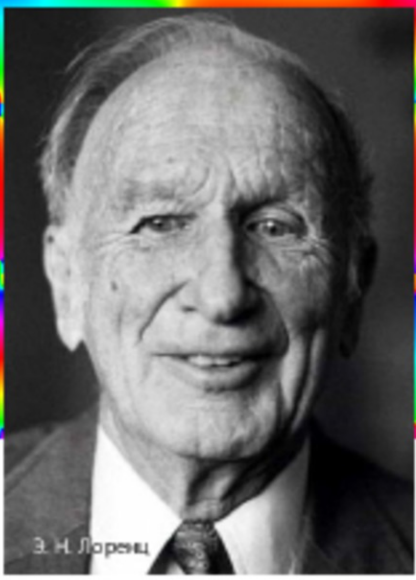
Существенное продвижение в изучении общего дифференциального уравнения (1) связано с именем Леонарда Эйлера. Название *уравнение Риккати* впервые использовано в *Энциклопедии, или Толковом словаре наук, искусств и ремесел*, изданной под редакцией д'Аламбера и Дидро. Обобщения дифференциального уравнения Риккати, включающие матричнозначные функции, играют важную роль в теории управления и систем, и интенсивно изучаются с 1960-х.

Якопо Франческо Риккати (1676 – 1754)

родился в Венеции, в дворянской семье. После безвременной смерти отца Риккати был отдан в иезуитскую школу в Брешиа. Он изучал право в Падуе; в качестве побочного интереса, посещал лекции по астрономии Стефано дельи Анджели, ученика Кавальери. Этот же ученый познакомил его с Ньютоновыми *Математическими началами натуральной философии*. Риккати женился в 1696 г., у него была очень большая семья (9 из 18 детей достигли зрелого возраста). Он проводил время в уходе за ними и двумя своими имениями в Кастельфранко Венето и Тревизо. Он был градоначальником Кастельфранко Венето в течение девяти лет, а также консультировал венецианский Сенат касательно строительства дамб.

Риккати получил разностороннее образование путем самообучения и благодаря переписке и беседам с ведущими учеными, в том числе членами семьи Бернулли. Помимо работ по математике и физике, он публиковал также тексты по философии и литературе. Ради своей любимой работы в домашних условиях Риккати отвергал предложения должностей Президента Академии наук и художеств в Санкт-Петербурге, придворного советника суда в Вене и профессора в университете г. Падуя. В его честь назван астероид 14074.





Ноябрь

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30										

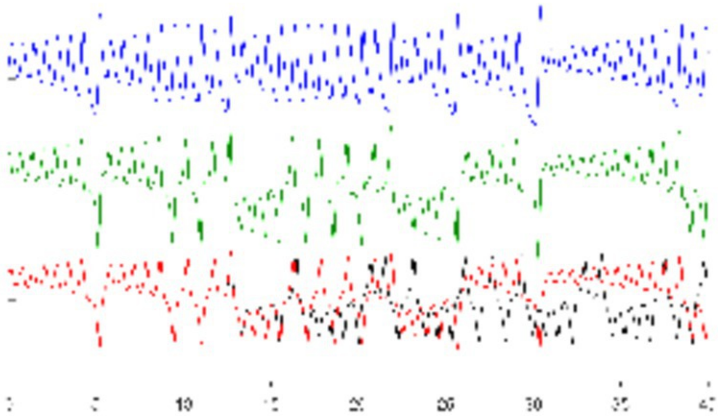
Уравнения Лоренца: хаотические решения

В начале 1960-х математик и метеоролог Эдвард Лоренц занимался изучением течений в атмосфере Земли, вызванных перепадами температуры. В своей упрощенной модели 1963 г. Лоренц описал атмосферную конвекцию при помощи системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma\,(y - x), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x\,(\rho - z) - y, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - \beta z.$$

Переменные x, y и z зависят от времени и описывают состояние системы. Параметры σ, ρ и β зависят от геометрии и природы системы. В своей знаменитой работе Лоренц взял $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ и $\rho = 28$.

Решения уравнений Лоренца полностью определяются начальным условием и существуют для всех моментов времени t, но в некоторых случаях принимают весьма сложную („хаотическую") форму. Рисунок ниже содержит типичные графики функций x (нарисован красным), y (зеленым) и z (голубым). Сколь угодно малые возмущения начальных данных могут вызывать большие изменения в решении в будущем („эффект бабочки"), что делает долгосрочные прогнозы сомнительными. Черная кривая, возникающая из красной, иллюстрирует этот эффект на решении x при возмущении начальных данных на 0.001%.



Несмотря на кажущуюся случайность решений, в них проявляются определенные структуры. Лучше всего это видно на графике траекторий в системе координат x-y-z (рисунок справа). Большинство траекторий концентрируются около объекта странного вида, именуемого „аттрактором Лоренца" и напоминающего нам крылья бабочки.

На сегодняшний день, система Лоренца хранит еще много тайн. Один из способов лучше это понять — распространить временную переменную t на комплексную плоскость. Картинка месяца изображает фазовый портрет комплексного решения $x = x(z)$. Эти решения были получены с помощью численного аналитического продолжения вещественного решения в окрестность оси вещественного времени. Каждая горизонтальная полоса содержит временной интервал длины 2. Полосы упорядочены снизу вверх. „Зубчики" на границе суть артефакты, обусловленные приближенным продолжением. Численные расчеты были сделаны с помощью пакета Chebfun.

Эдвард Нортон Лоренц (1917 – 2008)

родился в Западном Хартфорде (Коннектикут) и изучал математику в Дартмутском колледже (Нью-Гэмпшир) и Гарвардском университете. В 1942–1946 гг. служил метеорологом в армии США. После окончания второй мировой войны он получил докторскую степень в области метеорологии в Массачусетском технологическом институте, где он в дальнейшем работал в должности профессора. Он был болен раком и умер в возрасте 90 лет.

Лоренц достиг мирового признания благодаря работе „Детерминистские непериодические течения", которая появилась в 1963 г. и ныне считается важной вехой в теории хаоса. В своей легендарной работе 1969 г. Лоренц описал эффект бабочки — резкое изменение долгосрочного поведения (хаотической) системы, порожденное малым возмущением.

Marcus Webb and Lloyd N. Trefethen: Computing complex singularities of differential equations with Chebfun. SIAM Undergraduate Research Online, Vol. 6, June 24, 2013 http://www.siam.org/students/siuro/vol6/S01152.pdf (accessed August 2016)
D. Viswanath and S. Sahutoglu, Complex singularities and the Lorenz attractor, SIAM J. Sci Comput. (2012)

Декабрь

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31							

Тэта-функции

Год назад в этом календаре мы поместили Рамануджана и его „мнимые“ тэта-функции. Они были введены в его известном последнем письме к Харди и были мотивированы следующей „подлинной“ *тэта-функцией:*

$$g(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)^2(1-q^2)^2 \cdots (1-q^n)^2}.$$

Здесь $p(n)$ обозначает число разбиений положительного целого числа n, то есть, число различных способов записать n в виде суммы положительных целых чисел без учета порядка суммирования; например,

$$5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1,$$

так что $p(5) = 7$. Фазовый портрет этого месяца — портрет *тэта-функции* g. Полюса членов ряда g — корни n-й степени из единицы для каждого положительного целого n — образуют плотное множество особенностей на единичной окружности. Глядя на портрет, мы видим, что некоторые особенности „хуже“ прочих.

В статье, которая считается одной из самых значимых совместных работ Харди и Рамануджана, два этих математика создали „*круговой метод*“ с целью нахождения асимптотической формулы для $p(n)$. В то время использование аналитических методов для изучения алгебраических и комбинаторных функций еще не было распространено. Отправной точкой им послужила интегральная формула Коши

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(q)}{q^{n+1}} dq,$$

где Γ — замкнутый контур, обходящий начало ровно один раз в направлении против часовой стрелки и полностью лежащий внутри единичного круга. Новизна их идеи была связана с продвижением контура Γ к единичной окружности и аппроксимацией эффекта наиболее заметных особенностей. Этот метод, ныне известный как *круговой метод Харди-Рамануджана-Литтлвуда*, был только началом. Харди и Литтлвуд, а также и многие другие математики, расширили его и применили к другим задачам. В случае нашей тэта-функции, Харди и Рамануджан использовали его для вывода асимптотической формулы

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}} \text{ при } n \to \infty.$$

Годфри Харольд Харди (1877 – 1947)

получил образование в Винчестере и Тринити-колледже в Кембридже. Он преуспел в своей работе и был избран членом Тринити. В 1919 г. он принял кафедру как савильский профессор геометрии в Оксфорде и стал членом Нью-колледжа. Он провел год в Принстоне, в рамках обмена с Освальдом Вебленом, отправившемся в Оксфорд. В 1931 г. Харди вернулся в Тринити в Кембридже в качестве сэдлеровского профессора. Эта кафедра, возможно, является самой престижной математической кафедрой в Великобритании; на ней он оставался до самой своей смерти.

У Харди было две выдающихся научных связи. Одна из них, с Дж. И. Литтлвудом, продолжалась в течение 35 лет. Они создали вместе много весьма значительных работ по теории функций, неравенствам, дзета-функции Римана и другим вопросам анализа. Вторая связь была с Рамануджаном. Харди весьма быстро осознал математический гений Рамануджана, пригласил его в Кембридж, руководил им, и в соавторстве с ним создавал жемчужины математики вплоть до безвременной кончины Рамануджана, прервавшей сотрудничество.

В 1941 г. Харди пишет *Апологию математика*, описание мыслительного процесса математика и оду чистой математике. Вот его слова: „Создаваемые математиком образы, подобно образам художника или поэта, должны обладать красотой; подобно краскам или словам, идеи должны сочетаться гармонически. Красота служит первым критерием: в мире нет места безобразной математике“. До сего дня этот памфлет остается часто цитируемым и классическим текстом, описывающим работу математика.