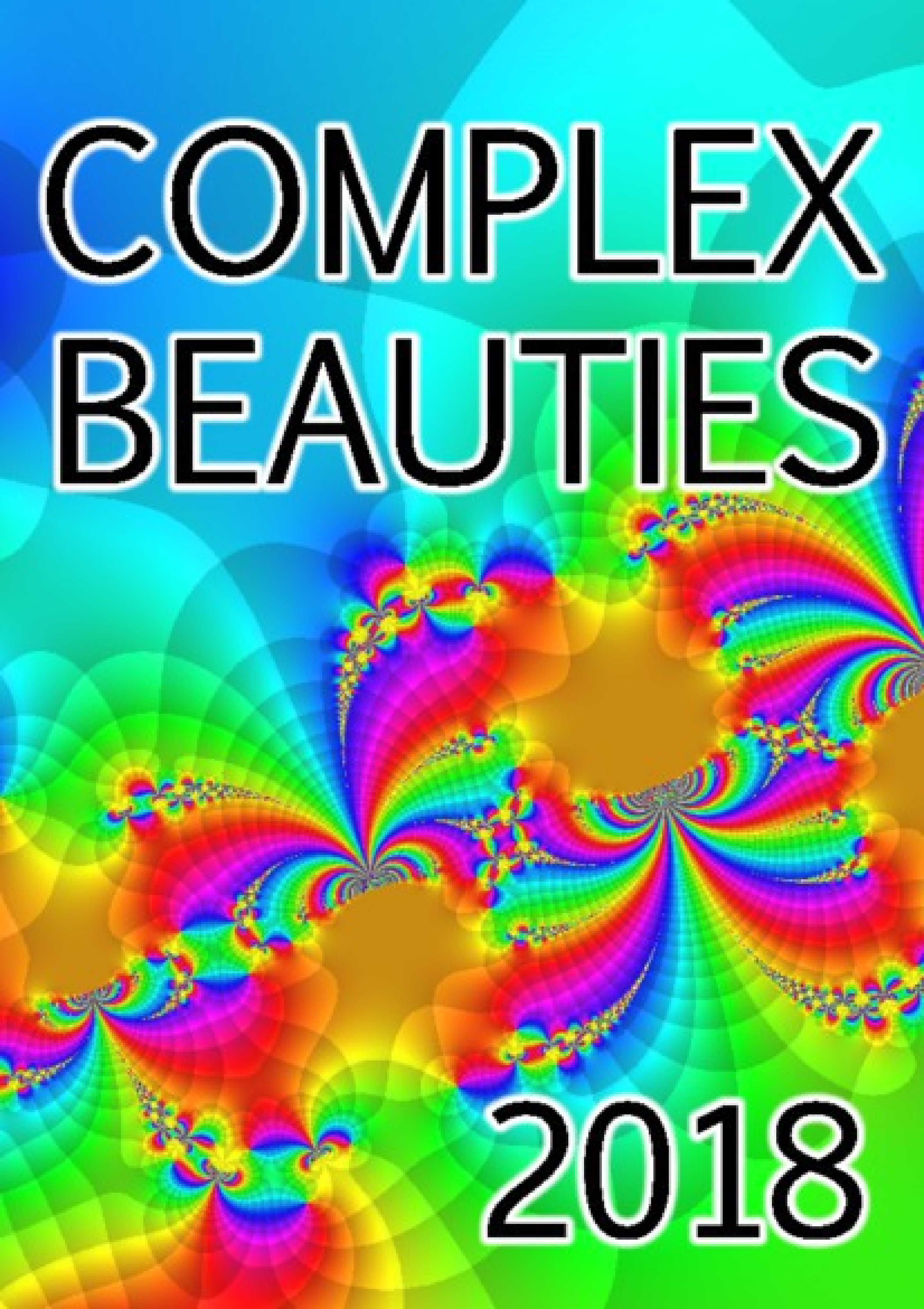
COMPLEX BEAUTIES



2018

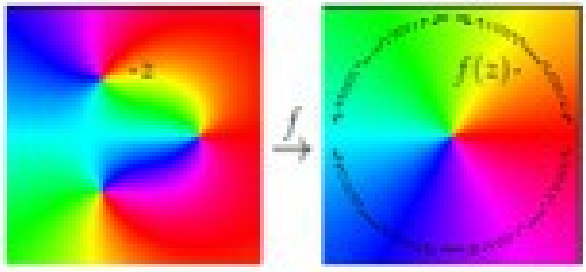
Комплексные числа и цвета

Это уже восьмой выпуск календаря „Complex Beauties" и, как всегда, в нем можно обнаружить новые и захватывающие изображения комплексных функций. На каждый месяц приходится также некоторое разъяснение математических основ. Мы пытались донести глубокие, по крайней мере в некоторых местах, результаты даже и до далеких от математики людей — что в некоторых случаях есть цель нерядовая и все-таки требует от читателя предварительных знаний. Эти объяснения дают представление об удивительном мире математических структур. Как всегда, рядом с картинками функций соседствуют биографические сведения о математиках, которые связаны с изображаемыми функциями.

Отдельная наша благодарность — приглашенному автору этого года, Альбрехту Бёттчеру, вклад которого, связанный с ядром Бергмана, освещает актуальную исследовательскую тему.

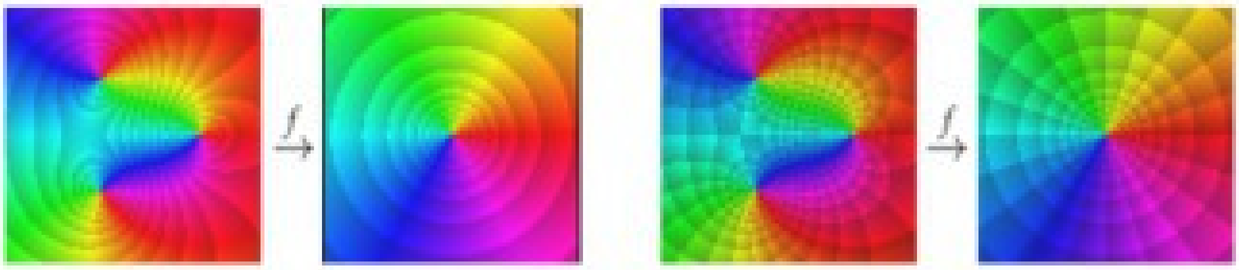
Чтобы понимать представленные на рисунках функции, надо знать, что комплексные числа z допускают интерпретацию точек на плоскости. Горизонтальную координату такой точки обозначают x и называют *вещественной частью* ($\operatorname{Re} z$); вертикальную координату обозначают y и называют *мнимой частью* ($\operatorname{Im} z$), и пишут $z = x + iy$. Положение точки z можно также задавать ее расстоянием от начала координат ($|z|$, *модуль* z) и азимутом ($\arg z$, *аргумент* z).

Фазовый портрет функции $f(z)$ комплексной переменной (на картинке слева) возникает, когда все точки z области определения f окрашиваются в соответствии с аргументом ее значения $w = f(z)$.



Можно представить это себе таким образом. Первым делом цвета из цветового круга переносятся по лучам, исходящим из начала координат, на точки плоскости w (картинка справа). Таким образом, точкам с равным аргументом (или равной „фазой" $w/|w|$) соответствует один и тот же цвет. Вторым шагом каждая точка z в области определения функции f окрашивается в тот же цвет, что и значение $f(z)$ в w-плоскости.

Фазовый портрет можно считать «отпечатками пальцев» функции. Хотя при этом остается только часть данных (аргумент), а другая часть (модуль) исчезает, функции важного класса („аналитические" или, более общо, „мероморфные") можно восстановить однозначно с точностью до нормировки.



Определенные модификации цветового кодирования позволяют нам легче увидеть свойства функции. В этом календаре мы используем в основном три различных схемы раскраски: фазовый портрет, описанный выше, и еще два варианта, показанные во втором ряду рисунков. Вариант слева добавляет к представлению модуль функции; версия справа кроме того подчеркивает сохранение углов при отображении.

Введение в теорию функций, проиллюстрированное фазовыми портретами, можно найти в книге E. Wegert, *Visual Complex Functions – An Introduction with Phase Portraits*, Springer Basel, 2012. Более подробная информация о календаре (в том числе и за предыдущие годы), как и о книге доступны на

www.mathe-kalender.de.   www.visual.wegert.com.

Мы благодарим всех наших верных читателей и *Verein der Freunde und Förderer der TU Bergakademie Freiberg e. V.* за их неоценимую поддержку этого проекта.

Январь

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31											

Производящая функция последовательности Фибоначчи

Благодаря вышедшей в 1200 г. *Книге абака*, автором которой был Леонардо Пизанский (известный также как Фибоначчи), в Европе стали популярны арабские цифры и современная арифметика. Книга эта содержит много задач с решениями, из которых наиболее известна задача о росте популяции кроликов:

Некто содержит в клетке пару новорожденных кроликов и хотел бы знать, сколько пар приплода возникнет за год, если каждая пара рождает ежемесячно новую пару, начиная со второго месяца своей жизни.

Для решения этой задачи обозначим символом F_n число пар кроликов в начале n-го месяца. Мы существуем без кроликов до месяца 1, с одной парой в начале второго месяца и двумя парами к началу третьего месяца. По условию, числа F_n удовлетворяют рекурсивному правилу

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad \text{и} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{при} \quad n \geq 2. \tag{1}$$

Первые члены определенной таким образом *последовательности Фибоначчи* легко считаются,

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ \ldots$$

Но как определить, например, F_{2018}? Леонард Эйлер рассматривал *степенные ряды*, коэффициенты которых суть члены последовательностей. Лаплас изобрел для этого название „производящая функция". Для вывода производящей функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ последовательности Фибоначчи заметим, что формальным исчислением из (1) следует (мы оставляем вопросы сходимости в стороне)

$$(1 - z - z^2)\, f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})\, z^n = z.$$

Производящая функция чисел Фибоначчи $f(z) = z/(1 - z - z^2)$, представленная на главной картинке этого месяца, имеет нуль $z_0 = 0$ и два полюса $z_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{5})/2$.

Чтобы найти явное представление для чисел Фибоначчи, требуется разложить f на элементарные дроби. Легко проверяется, что в обозначениях $a = (1 - 1/\sqrt{5})/2$ и $b = (1 + 1/\sqrt{5})/2$ верно

$$f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{a}{z_1 - z} + \frac{b}{z_2 - z} = \frac{a}{z_1} \frac{1}{1 - z/z_1} + \frac{b}{z_2} \frac{1}{1 - z/z_2}.$$

Если интерпретировать два последние члена как суммы геометрических рядов, получим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z_1^{n+1}} + \frac{b}{z_2^{n+1}} \right) z^n$$

и, после несложных преобразований, *формулу Муавра–Бине*

$$F_n = \frac{a}{z_1^{n+1}} + \frac{b}{z_2^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

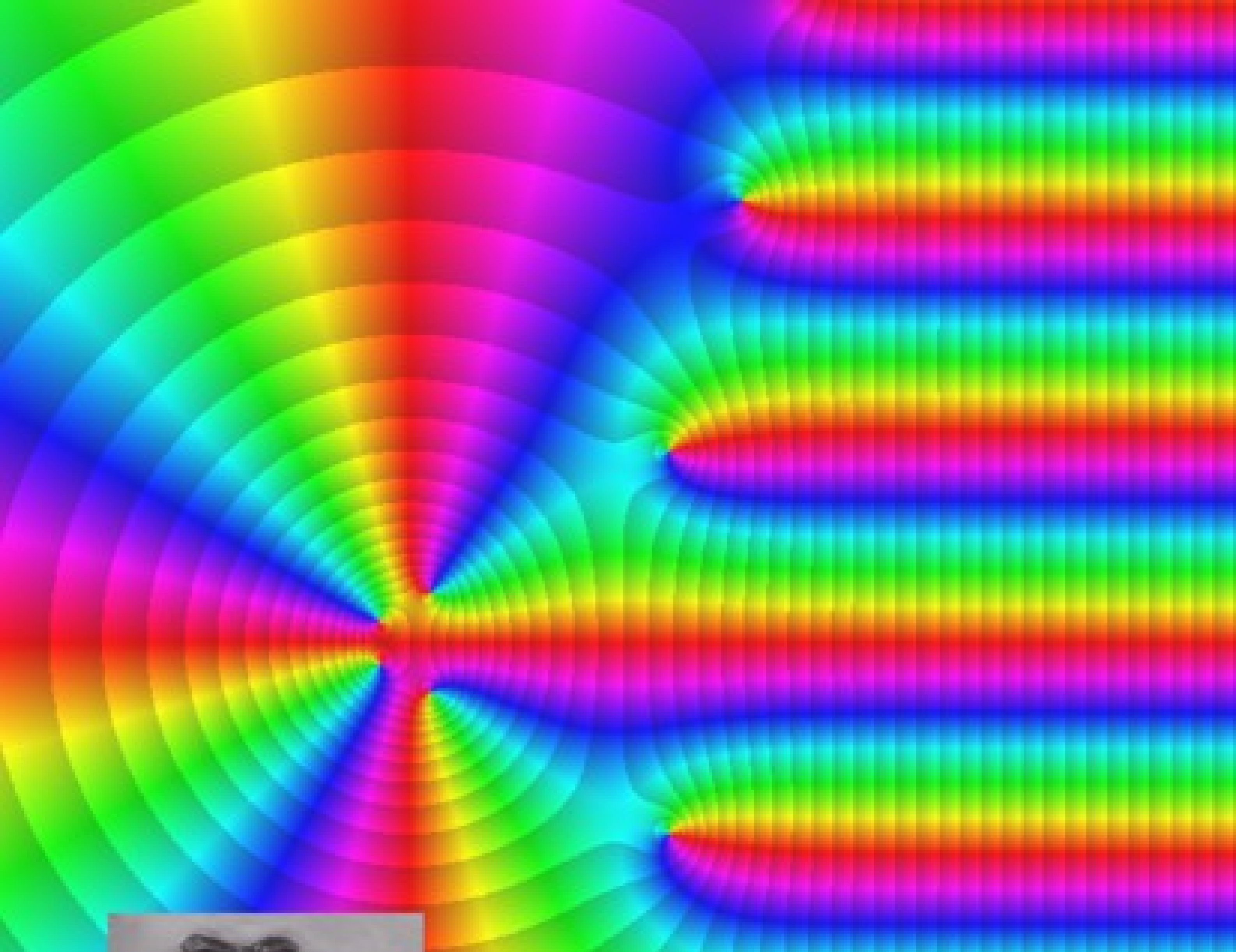
Появление числа $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ показывает тесную связь чисел Фибоначчи с золотым сечением: для больших n числа F_n весьма точно приближаются величинами $\varphi^n/\sqrt{5}$.

Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (ок. 1170 – ок. 1250)

был сыном купца и нотариуса из Пизы. Подростком он сопровождал своего отца в дипломатической миссии в Северной Африке, где он научился чтению и счету с использованием (возникших в Индии) арабских цифр. Возвратившись в Пизу, он сочинил ставший авторитетным учебник арифметики *Liber Abbaci*. В этой книге он назвал себя Леонардо Пизанский, „filius Bonacci" (сын Боначчи). Из этого разъяснения своего происхождения возникло популярное ныне имя *Fibonacci*. Помимо *Книги абака*, Фибоначчи был автором ряда других книг и математических сочинений, которые сохранились лишь частично.

О жизни Леонардо Пизанского мало что известно. В указе коммуны города Пизы упоминается, что Фибоначчи в последние годы получал (небольшое) содержание в знак признания его заслуг. Кроме того, известно, что портрет, помещенный на соседней странице, неизвестного происхождения и не является подлинным.

L. Sigler, Fibonacci's Liber Abaci. A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation, Springer, New York, 2002, p. 404.
K. Devlin, The Man of Numbers, In search of Leonardo Fibonacci, 2008, https://www.maa.org/[illegible]



Февраль

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28											

Тождество Софи Жермен

При исследовании делимости и при решении уравнений часто бывает полезно преобразовывать суммы в произведения. К числу простейших мультипликативных представлений такого рода принадлежат широко известные *биномиальные формулы*

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2, \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2, \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Менее очевидной, но, тем не менее, легко проверяемой является следующая факторизация, использованная Софи Жермен на пороге XIX столетия в оригинальном исследовании, связанном с гипотезой Ферма:

$$a^4 + 4\,b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2) = \big((a-b)^2 + b^2\big)\big((a+b)^2 + b^2\big). \tag{1}$$

Жермен, в частности, установила, что среди чисел вида $a^4 + 4$ имеется лишь одно простое, что немедленно следует из мультипликативного представления (1) при $b = 1$. Одним из менее очевидных применений этого тождества является доказательство того, что уравнение

$$3^a + 4^b = 5^c$$

имеет ровно одно решение в натуральных числах, именно, $a = b = c = 2$.

Тождество Жермен — популярный инструмент в математических конкурсах. Вот, например, известная задача: доказать, что число $a^4 + 4^a$ для всех целых $a \geq 2$ составное. С этой задачей связана картинка этого месяца, изображающая функцию

$$f(z) = z^4 + 4^z$$

в квадрате $-9 < \operatorname{Re} z < 17$, $-13 < \operatorname{Im} z < 13$. В левой части указанной области вклад экспоненты невелик, и определяющим является член z^4. В середине области мы видим четыре нуля, возникающих вследствие суперпозиции обоих членов. В области справа, где мы видим полосы, доминирует экспонента.

Софи Жермен (1776 – 1831)

росла в богатой парижской семье торговца. С юных лет она занималась чтением, против воли своих родителей, книг по математике из библиотеки своего отца. Поскольку женщин в университет не принимали, она училась по конспектам лекций студента по фамилии Леблан. После его смерти во время французской революции она стала использовать это имя как псевдоним. Когда же профессор Жозеф-Луи Лагранж назначил своему студенту Леблану встречу, Софи Жермен пришлось открыться. Для Лагранжа это оказалось приятным сюрпризом; с тех пор он открыто поддерживал Жермен.

Начиная с 1804 г., Жермен состояла в переписке (на этот раз как Огюст Антуан Ле Блан) с Карлом Фридрихом Гауссом. Последний также был весьма удивлен, когда в 1807 г. узнал о подлинном ее лице, и даже хлопотал в 1831 г. о присуждении Софи Жермен почетной степени доктора в университете Гёттингена. Однако незадолго до церемонии награждения Жермен умерла от рака.

Важнейшая часть математической работы Жермен посвящена доказательству гипотезы Ферма. Пьер де Ферма утверждал в 1637 г., что им найдено удивительное доказательство отсутствия решений в натуральных числах a, b, c уравнения $a^n + b^n = c^n$ при $n \geq 3$. К 1805 г. Жермен доказала, что для некоторого ряда простых чисел (которые впоследствии были названы *простыми числами Софи Жермен*) это в самом деле верно и, тем самым, оказалась с этим пионерским результатом на самом переднем крае исследований в этой области. Полное доказательство гипотезы Ферма было впервые получено в 1995 г. Эндрю Вайлсом в сотрудничестве с Ричардом Тейлором.

Начиная с 1809 г., Софи Жермен занималась, в связи с участием в конкурсе, колебаниями упругих пластин (звуковыми фигурами Хладни). Хотя ее работа содержала ошибки, Жермен в 1815 г. присудили приз Парижской академии. Из-за разочарования, вызванного тем, что некоторые математики не признали ее работу, она отсутствовала при вручении приза.

Жермен проявляла живой интерес к философии, психологии и социологии. Далеко опережая свое время, она пыталась внедрить систему правил в исследования по этим наукам.

Март

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31								

Логарифмическая гамма-функция

Гамма-функция, как обобщение факториала, памятна нам еще с листка нашего календаря за август 2012 г. На картинке ниже, слева мы еще раз публикуем ее фазовый портрет. Полюса ее расположены в неположительных целых числах, что видно из *мультипликативного представления Вейерштрасса*

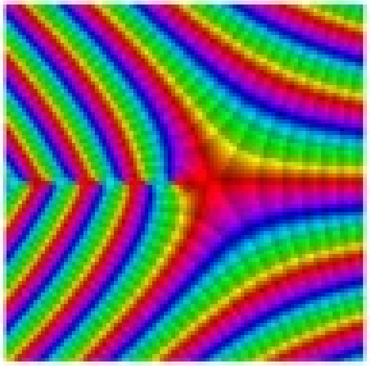
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}. \tag{1}$$

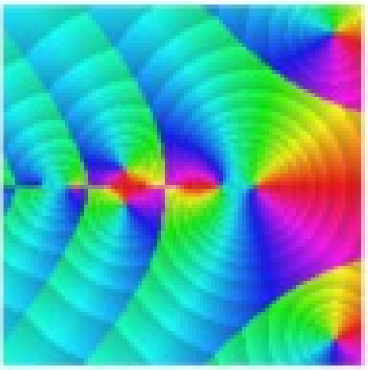
Здесь $\gamma = 0.57721\ldots$ есть *постоянная Эйлера–Маскерони*.

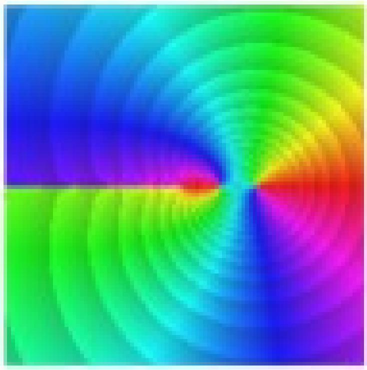
Если же потребуется вычислить логарифм гамма-функции, то здесь нужна осторожность, поскольку логарифм — многозначная функция (см. тж. календарь за май 2011 г.): уравнение $e^{\zeta} = w$ в обозначениях $w = re^{i\varphi}$ имеет решения $\zeta_n = \log r + i(\varphi + 2n\pi)$, где n — произвольное целое. Обычно множество решений сужают до ζ_0 с $n = 0$ и $-\pi < \varphi \leq \pi$, *главного значения логарифма*. Последнее имеет разрыв вдоль отрицательной полуоси. Если бездумно применить главное значение логарифма к соотношению $w = \Gamma(z)$, получится фазовый портрет, являющийся картинкой месяца и представленный ниже, посредине. Точки разрыва находятся всюду, где $\Gamma(z)$ принимает отрицательные значения, на фазовом портрете $\Gamma(z)$ это голубые линии. Задействовав шестое чувство, мы, однако, можем найти логарифм гамма-функции, который аналитичен на плоскости с разрезом вдоль вдоль отрицательной полуоси. Вследствие (1), такая функция представима в виде

$$\log \Gamma(z) = -\log z - \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n} - \log\left(1 + \frac{z}{n}\right)\right)$$

и называется *логарифмической гамма-функцией*. Ее фазовый портрет можно увидеть ниже, справа.







При $\mathrm{Re}\, z > 0$ существуют два независимых представления логарифмической гамма-функции, которые были найдены Жаком Филиппом Мари Бине:

$$\begin{aligned} \log \Gamma(z) &= \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right) \frac{e^{-tz}}{t}\, dt \\ &= \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + 2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{z}\right)}{e^{2\pi t} - 1}\, dt. \end{aligned}$$

Жак Филипп Мари Бине (1786 – 1856)

родился в Ренне в семье архитектора. Он и два его брата были математиками и учились в Политехнической школе в Париже. Позже он и сам преподавал там, а также в Коллеж де Франс. Из-за своих роялистских взглядов, которые он разделял со своим другом Коши, он потерял место профессора в Политехнической школе после июльской революции 1830 г.

Наследие Бине заметно в математике, механике и астрономии. Одновременно с Коши он открыл названную именами обоих математиков формулу в теории детерминантов. Однако, явная формула для чисел Фибоначчи (см. январь с.г.) была обнаружена и ранее, де Муавром и другими. Ему первому принадлежит математическое обоснование для периода обращения маятника в эксперименте Фуко, очевидцем которого он был. В 1843 г. он был выбран членом Академии наук. Кроме того, он стал и ее президентом, но вскоре после этого умер.

Апрель

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
						1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30						

Многочлены Литтлвуда

Многочлен $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, все коэффициенты которого равны либо $+1$, либо -1, называется *многочленом Литтлвуда*. Пример — многочлен, все коэффициенты которого равны 1:

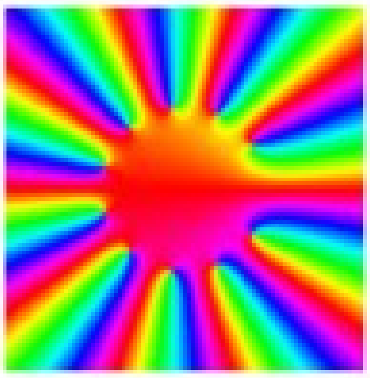
$$P(z) = z^n + \ldots + z + 1 = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1},$$

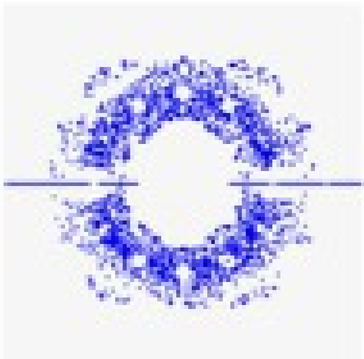
множество его нулей — корни $(n+1)$-й степени из единицы, кроме 1. Все они лежат на единичном круге (см. внизу слева). Теперь покажем, что нули произвольного многочлена Литтлвуда P лежат вблизи единичного круга; точнее, они принадлежат кольцу $1/2 < |z| < 2$. Итак, предположим, что z обнуляет P и лежит внутри единичного круга. Поскольку $P(z) = 0$, имеем

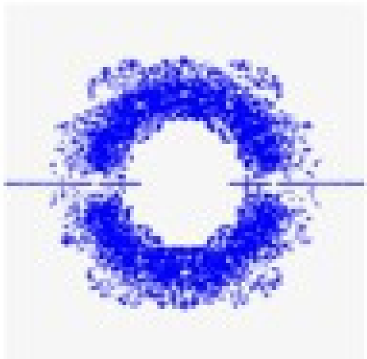
$$1 = |a_0| = |a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n| \leq |z| + |z|^2 + \ldots + |z|^n = |z|\,\frac{1 - |z|^n}{1 - |z|} < \frac{|z|}{1 - |z|}.$$

Значит, $1 - |z| < |z|$, что равносильно неравенству $|z| > 1/2$. С помощью похожих рассуждений доказывается и оценка в случае, когда z лежит вне единичного круга. Иллюстрация месяца — многочлен Литтлвуда степени 50, его коэффициенты подобраны случайным образом. Начало изучению таких многочленов было положено в 1960х годах Дж. И. Литтлвудом. Теперь нам известны многие их свойства. Например, П. Борвейн и Т. Эрдейи показали, что внутри любого многоугольника, вписанного в единичный круг, лежит не более $c\sqrt{n}$ корней; c — константа, зависящая только от многоугольника.

Поведение множества корней всех многочленов Литтлвуда также не вполне изучено и представляет интерес для дальнейшего исследования. Внизу посередине показано множество всех нулей всех многочленов Литтлвуда степени 11, справа — всех многочленов Литтлвуда степени не более 12.





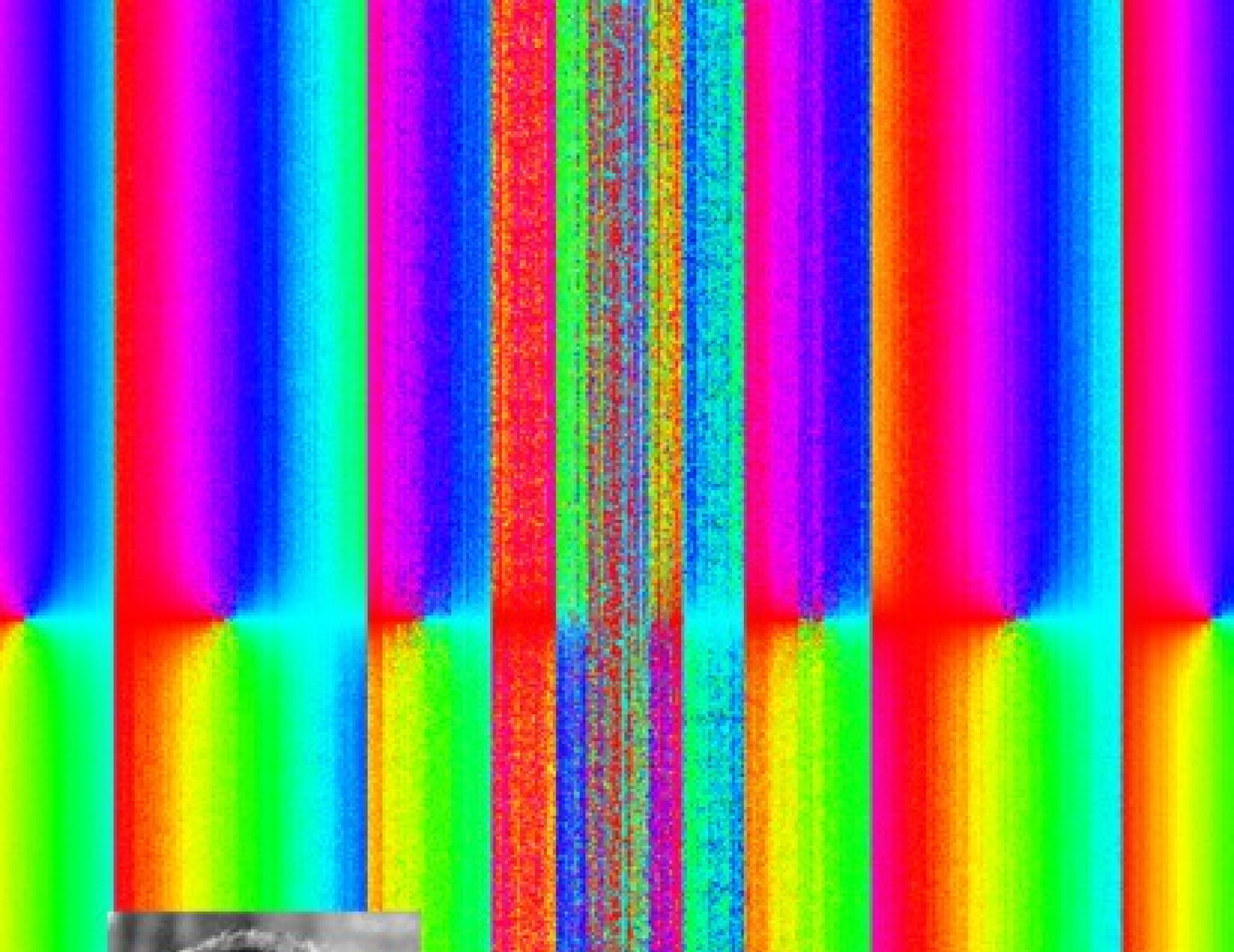


Джон Идензор Литтлвуд (1885 – 1977)

родился в городе Рочестер в юго-восточной Англии. Часть своего детства (1892–1900) он провел в Южной Африке, где его отец преподавал математику. По возвращении в Англию, он продолжает изучать математику в лондонской школе святого Павла. Затем он поступает в кембриджский Тринити-колледж, где показывает лучший среди своих сверстников результат на выпускных экзаменах. Он начинает научную работу под руководством Э.У. Барнса (см. июль 2017), который в качестве темы для исследования предлагает ему гипотезу Римана (см. ноябрь этого года). Литтлвуд обнаружил ее связь с теоремой о распределении простых чисел (хорошая иллюстрация изолированности британской научной школы — к тому времени математикам континентальной Европы этот факт был давно известен). Позднее Литтлвуд скажет, что можно многому научиться, работая над неразрешимыми задачами.

Приблизительно в 1910 году начинается их долгое и плодотворное сотрудничество с Г. Х. Харди (см. декабрь 2017). Им обоим принадлежит важнейшая роль в развитии британской математики первой половины XX века. Среди математиков даже бытовало мнение, что Литтлвуд — это псевдоним Харди. Также Литтлвуд сотрудничал с М. Картрайтом (см. апрель 2016), С. Рамануджаном (см. декабрь 2016 и июль 2013) и Р. Пэли. Хотя Литтлвуд активно занимался спортом и не оставлял занятий наукой до глубокой старости, почти всю свою жизнь он боролся с депрессией, и лишь начиная с 1957 г. сумел найти лечение, помогающее купировать ее симптомы. Он получил множество наград (среди них медали Сильвестра и де Моргана), и был избран членом множества академий.

P. Borwein and T. Erdélyi, On the zeros of polynomials with restricted coefficients, Illinois J. Math. 41 (1997), no. 4, 667–675.
R. Beyne and St. Damelin, On the structure of the Littlewood polynomials and their zero sets, arXiv:1504.08858 [math.CV]



Май

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31										

Конечно-разностный метод

Для моделирования многих прикладных задач используются дифференциальные уравнения. Среди таких задач — расчет распределения температуры тела или течения жидкости. Уравнения, которые приходится решать, содержат (полную или частную) производную искомой функции, и нередко так сложны, что их можно решить только приближенно с использованием численных методов.

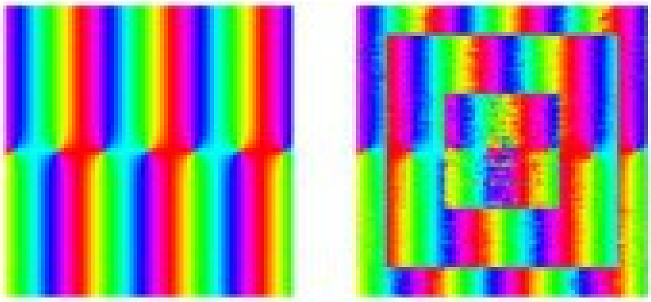
Начало теории *конечно-разностных методов* было положено пионерской работой Куранта *О теории линейных уравнений в частных производных* (1925). Основная идея метода состоит в том, чтобы вычислять значения искомой функции на *сетке*, а возникающие в дифференциальной задаче производные заменять конечными разностями. Например, производную $f'(x)$ можно аппроксимировать *правой*, *левой*, или *центральной разностью*

$$f_h^+(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad f_h^-(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \quad f_h^0(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Через h мы обозначили параметр дискретизации задачи — шаг сетки. Таким образом дифференциальное уравнение заменяется на «конечно-разностное», а оно, в свою очередь, превращается в систему уравнений с конечным (но очень большим) числом неизвестных.

Разные способы дискретизации задачи отличаются, среди прочего, точностью аппроксимации, которую они обеспечивают. Если для малых h ошибка аппроксимации пропорциональна h^k, говорят, что мы имеем дело с аппроксимацией порядка k. Правые и левые разностные производные f_h^+ и f_h^- дают порядок 1, в то время как центральная f_h^0 дает порядок 2.

На иллюстрации месяца показан фазовый портрет ошибки $f_h^0 - f'$ при приближении первой (комплексной) производной функции $f(z) = \cos z$ центральной разностью на сетке с шагом $h = 10^{-7}$.



Ошибка $f_h^0(z) - f'(z) \approx \frac{1}{6} h^2 \sin z$ настолько мала, что сравнима с ошибкой округления; именно из-за этого иллюстрация выглядит такой хаотичной. Для сравнения, фазовый портрет ошибки на сетке с $h = 10^{-3}$, показанный на врезной иллюстрации слева, не противоречит нашим ожиданиям. На той же иллюстрации справа показана ошибка при вычислении f' на сетке $h = 10^{-3}$ с использованием разностной производной четвертого порядка аппроксимации,

$$f_h^*(z) = \frac{1}{4h}\left(f(z+h) + \mathrm{i}\, f(z+\mathrm{i}h) - f(z-h) - \mathrm{i}\, f(z-\mathrm{i}h)\right).$$

Рихард Курант (1888 – 1972)

родился в Люблинце (Силезия). В 1906 году он начал изучать физику в университете Бреслау. Вскоре он переключился на математику, а затем уехал в Цюрих. После этого он отправился в Гёттинген, где стал ассистентом Давида Гильберта. В 1910 году под руководством Гильберта Курант пишет диссертационную работу о конформных отображениях, которую и защищает в 1912.

Во время Первой Мировой войны Курант вместе с Карлом Рунге, Петером Дебаем и Паулем Шеррером работает над проектом нового телеграфа. Затем он два года работает в Мюнстере, прежде чем вернуться в Гёттинген, куда его приглашают на позицию профессора, оставшуюся вакантной после ухода Феликса Клейна; позднее он получает пост директора математического института.

После прихода нацистов к власти Куранту приходится покинуть Германию. Проработав год в Кембридже, он получает место профессора в Нью-Йоркском университете. Вместе с Куртом Фридрихсом и Петером Лаксом он основывает математический институт, который в 1964 году назовут его именем.

Написанный Курантом и Гильбертом учебник *Методы математической физики*, увидевший свет в 1924 г. и опубликованная в 1941 г. статья *Что такое математика?*, написанная в соавторстве с Гербертом Роббинсом, стали классическими.

Июнь

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30								

Тёплицевы матрицы и циркулянты

Матрицей Тёплица называют матрицу, в которой на всех диагоналях, параллельных главной, стоят равные элементы. Частный пример такой матрицы — циркулянт, столбцы которого получаются перестановкой элементов n-мерного вектора. Внизу слева приведена тёплицева матрица, справа — циркулянт:

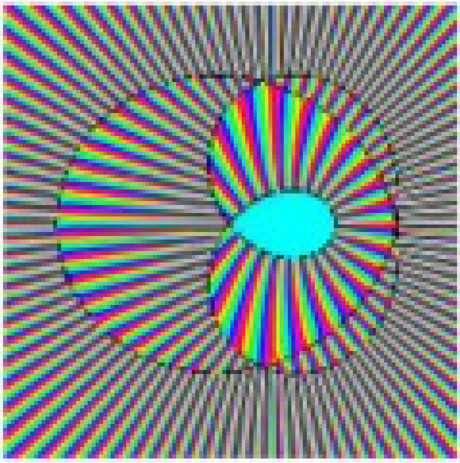
$$T = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{-2} & c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{1-n} & c_{2-n} & c_{3-n} & \cdots & c_0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{bmatrix}.$$

Собственными значениями матрицы M называют такие числа λ, для которых существует ненулевой вектор $\mathbf{x}$, такой, что $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Тёплиц рассматривал *ассоциированный* с циркулянтом C многочлен f, определяемый формулой

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1} z^{n-1},$$

и заметил, что собственные значения C совпадают со значениями $f(\omega)$, где ω пробегает множество корней n-й степени из единицы. Чтобы найти собственные значения матрицы, можно посмотреть на цветовую визуализацию ее характеристического многочлена как функции комплексного переменного (его нули находятся в точках, где фаза не определена и следовательно, все цвета встречаются), или отметить образы корней из единицы под действием f. Для решения задач, связанных с последовательностью тёплицевых матриц, удобно рассматривать асимптотически эквивалентную (в некотором смысле) последовательность циркулянтов.

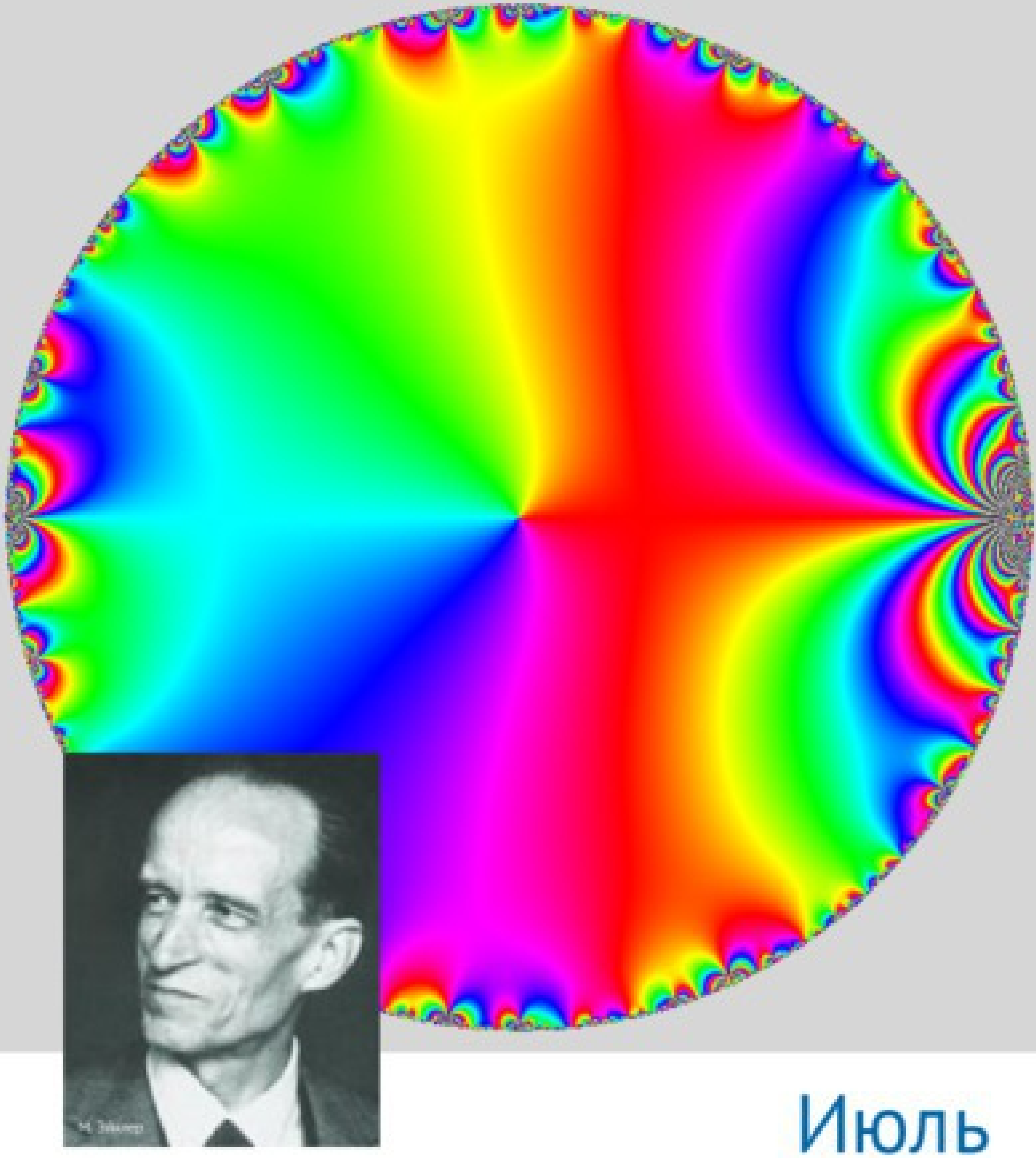
Для каждого значения n мы получаем тёплицеву матрицу, элементы k-й диагонали которой равны k-му коэффициенту f. Рассмотрим следующий разреженный циркулянт, для которого $c_2 = 2$, $c_3 = 3$ и $c_{99} = 1$, а все остальные $c_i = 0$. Следуя результату Тёплица, рассмотрим многочлен $f(z) = 2z^2 + 3z^3 + z^{99}$. На врезной иллюстрации показан характеристический многочлен циркулянта размером 100×100 и образ единичного круга под действием (видоизмененной) производящей функции $g(z) = z^{-1} + 2z^2 + 3z^3$. Поскольку $\omega^{100} = 1$, значения $f(\omega)$ и $g(\omega)$ совпадают, а значит, нули характеристического многочлена лежат на образе единичного круга под действием не только f, но и g (черная кривая).



Отто Тёплиц (1881 – 1940)

родился в еврейской семье в Бреслау (ныне Вроцлав, Польша). Там же он получил образование, а затем — научную степень в университете Бреслау. В 1906 г. Тёплиц отправился в Гёттинген, где написал докторскую работу. В то время в Гёттингене учились и работали Давид Гильберт, Феликс Клейн, Герман Минковский, Макс Борн, Рихард Курант и Эрнст Хеллингер. В Гёттингене Тёплиц занимался спектральной теорией операторов, развитой в отдельную дисциплину Давидом Гильбертом. В это время Тёплиц открыл то, что сегодня мы называем тёплицевыми операторами. Затем до 1928 г. он работал в университете Киля, после этого — в Боннском университете. Массовое увольнение лекторов еврейского происхождения из университетов в 1933 г. не затронуло тех, кто получил эту позицию до 1914 года. Тёплиц продолжал работать до 1935 г., когда были приняты Нюрнбергские законы, и ему пришлось покинуть свой пост. В 1939 г. он эмигрировал в британскую Палестину (ныне территория Израиля), где консультировал администрацию Еврейского университета в Иерусалиме. Менее года спустя он умер от туберкулеза.

Теплиц работал над теорией операторов в бесконечномерных пространствах. Во многих его статьях появляются бесконечные матрицы и соответствующие им квадратичные формы. Кроме этого, его интересовала история математики и математического образования, которой он посвятил две книги, *Опыты математического мышления*, совместно с Гансом Радемахером, и *Анализ: генетический подход*, опубликованную посмертно.



Июль

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
						1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30						

Модулярная арифметика и функция Эйхлера

Как известно, частное b/a двух натуральных чисел не всегда будет снова натуральным: для этого необходимо, чтобы b делилось на a. Удивительно, но этого неудобства можно избежать переходом к модулярной арифметике, в которой рассматриваются не все натуральные числа, а только остатки от деления на некоторое простое число p.

a\b	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Проиллюстрируем это на примере $p = 5$. В таблице слева показаны значения произведений $a \cdot b$ для всех остатков a и b по модулю 5. В каждой строке, за исключением строки $a \equiv 0 \pmod 5$, каждый остаток встречается ровно один раз. Отсюда следует, что уравнение $a \cdot x = b$ при $a \not\equiv 0$ имеет ровно одно решение. Этому решению x и равно частное b/a в модулярной арифметике. Например, как видно из таблицы, $3 \cdot 4 \equiv 2 \pmod 5$, следовательно $2/3 \equiv 4 \pmod 5$.

Поскольку существует лишь конечное число остатков по модулю p, а именно p штук, в модулярной арифметике уравнение любой сложности можно решить простым перебором всех вариантов. К примеру, перебором находим, что кубическое уравнение

$$y^2 + y = x^3 - x^2 \tag{1}$$

имеет ровно четыре решения по модулю 5: $(x, y) = (0,0), (0,4), (1,0)$, и $(1,4)$. По модулю 2019 существует 2636 решений, а по модулю 20183 — 20334 решений.

Интересно, что число a_p различных решений уравнения (1) по произвольному модулю p можно найти и без перебора — впервые формулу для a_p получил Мартин Эйхлер в 1954 году. Ключевую роль в его размышлении сыграла функция Эйхлера, фазовый портрет которой изображён на обложке месяца. Эта функция обладает следующим представлением в виде ряда:

$$f(q) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^2(1-q^{11n})^2 = q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + q^5 + 2q^6 - 2q^7 - 2q^9 - 2q^{10} + q^{11} - 2q^{12} + \ldots$$

Как доказал Эйхлер, $a_p = p - b_p$, где b_p — коэффициент перед q^p в разложении этой функции в ряд $f(q) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$, выписанный выше. Так, например, получаем $a_5 = 5 - 1 = 4$. Аналогично, $a_7 = 7 - (-2) = 9$ и $a_{11} = 11 - 1 = 10$.

Японские математики Ютака Танияма и Горо Шимура выдвинули гипотезу, что результат Эйхлера может быть обобщён на все кубические уравнения от двух переменных. В 1980-х в статье Герхарда Фрая, Жана-Пьера Серра и Кена Рибета было показано, что из гипотезы Таниямы-Шимуры выводится Великая теорема Ферма. Именно это обстоятельство использовалось Эндрю Уайлсом и Ричардом Тейлором в 1995 году для доказательства Великой теоремы Ферма (см. Февраль в этом календаре).

Мартин Эйхлер (1912 – 1992)

родился в Пиннове (недалеко от г. Анклам в Германии) в семье пастора. Поскольку поблизости не было подходящей школы, в 1923 г. родители отправили его в школу-интернат в г. Гютерсло, где Эйхлер проучился до 1930 г. Затем он изучал физику и математику в Кёнигсберге и один год провёл в Цюрихе, где благодаря Андреасу Шпейзеру окрепла его увлечённость математикой. Вернувшись в Германию, Эйхлер продолжил учёбу в Галле и в 1935 г. под руководством Генриха Брандта защитил диссертацию. Однако, из-за разногласий с местными нацистскими властями, вскоре потерял должность в университете. К счастью, Хельмут Хассе помог ему получить позицию редактора Энциклопедии математических наук, а затем — должность ассистента в Гёттингенском университете, где в 1938 г. Эйхлер становится доктором наук. В годы войны его вынуждают работать в военном исследовательском центре в Пенемюнде, в котором была создана первая в мире баллистическая ракета Фау-2. После войны Эйхлер возвращается в Гёттинген. Время с 1947 по 1949 гг. проводит в Королевском авиационном исследовательском центре в г. Фарнборо в Англии. В 1949 г. он становится профессором в Мюнстере, в 1956 — в Марбурге, и в 1959 — в старейшем университете Швейцарии в Базеле. Работы Эйхлера посвящены теории клиффордовых алгебр, теории модулярных форм, теореме Римана-Роха и теории квадратичных форм.

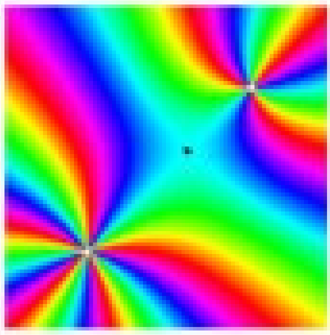
R. Taylor. Modular arithmetic: driven by inherent beauty and human curiosity. The Letter of the Institute for Advanced Study, 2012.
Э. Френкель. Любовь и математика. Сердце скрытой реальности. Питер, 2016.

Август

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31									

Критические точки многочленов

Критические точки аналитической функции — это нули её производной. Для иллюстрации этого понятия, рассмотрим многочлен $f(z) = (z-a)^n(z-b)^m$. На картинке справа изображён его фазовый портрет при следующем выборе параметров: $a = 0$, $b = 1 + i$, $n = 5$ и $m = 3$. У этого многочлена два нуля (на фазовом портрете они отмечены белым цветом): в точке a нуль кратности n и в точке b нуль кратности m. При указанном выборе параметров, оба нуля имеют кратность больше единицы, следовательно они будут критическими точками функции f. На фазовом портрете видно, что из этих точек выходит несколько изохроматических линий каждого цвета. Кроме того, у многочлена f есть критическая точка, в которой он не обращается в нуль: на фазовом портрете она отмечена чёрным цветом. В этой точке пересекаются две изохроматические линии некоторого цвета.



Для доказательства сказанного продифференцируем многочлен:

$$f'(z) = n(z-a)^{n-1}(z-b)^m + (z-a)^n m(z-b)^{m-1} = (z-a)^{n-1}(z-b)^{m-1}(n(z-b) + m(z-a)).$$

Из полученной формулы видно, что критическими для $f(z)$ будут следующие точки:

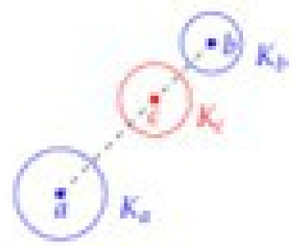
$z = a$ кратности $n-1$ (n изохроматических линий каждого цвета выходит из точки a),

$z = b$ кратности $m-1$ (m изохроматических линий каждого цвета выходит из точки b),

$z = \dfrac{ma+nb}{m+n}$ — простая критическая точка, лежащая на отрезке, соединяющем a и b (две изохроматические линии некоторого цвета пересекаются в этой точке).

Теорему Уолша можно рассматривать как обобщение этого примера. Пусть многочлен f степени $m+n$ имеет n нулей, расположенных близко к точке a, а именно лежащих в замкнутом круге K_a радиуса r_a с центром в точке a, и m нулей, лежащих в замкнутом круге K_b радиуса r_b с центром в точке b. Пусть, кроме того, K_c — это круг с центром в точке c радиуса r_c, где

$$c = \frac{ma+nb}{m+n}, \qquad r_c = \frac{mr_a+nr_b}{m+n}$$



(см. рисунок справа). Для простоты предположим, что все три круга расположены внешним образом по отношению друг к другу. Тогда теорема Уолша утверждает, что в K_a лежит $n-1$ критическая точка функции f, в K_b лежит $m-1$ критическая точка, и одна критическая точка расположена в круге K_c. Главная картинка месяца иллюстрирует теорему Уолша для многочлена степени 100 ($n = 60$ и $m = 40$).

Джозеф Леонард Уолш (1895 – 1973)

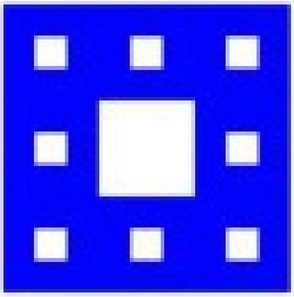
родился в Вашингтоне и до получения степени магистра успел поучиться в Колумбийском университете, в Гарвардском университете, Университете Чикаго и Висконсинском университете. В 1917 году Уолш начал работу над диссертацией под руководством Максима Бохера в Гарварде, однако началась Первая мировая, и он был призван в ряды ВМС США. К моменту его возвращения в Гарвард Бохер уже умер, поэтому Уолш заканчивал работу над диссертацией под руководством Джорджа Биркгофа и защитил её в 1920 году. После этого ему посчастливилось работать вместе с Полем Монтелем в течение года (1920/21), проведённого в Париже, а затем с Константином Каратеодори — в течение года в Мюнхене (1925/26). В 1937–42 годах Уолш был главой департамента математики в Гарварде, в 1942–46 годах он снова служил в ВМС США, а в 1949–50 — занимал пост президента Американского математического общества. С 1966 года и до самой смерти Уолш проработал в Мэрилендском университете. Главные труды Уолша посвящены теории аппроксимации и исследованию расположения нулей и критических точек многочленов, рациональных функций и конформных отображений; названные в его честь *функции Уолша* в настоящий момент находят широкие приложения при обработке сигналов.

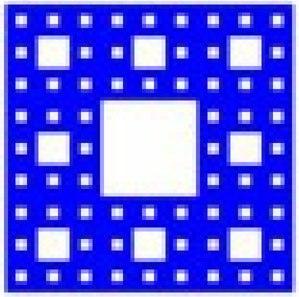
Сентябрь

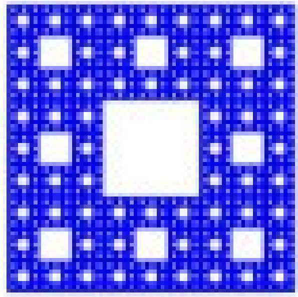
Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
					1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30							

Кривые Серпинского и множества Жюлиа

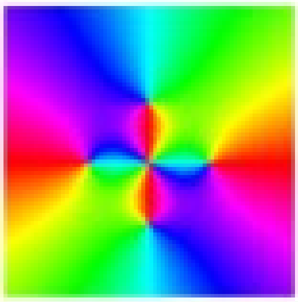
Разделим единичный квадрат $[0,1] \times [0,1]$ прямыми, параллельными его сторонам, на 9 равных квадратов, и удалим внутренность центрального квадрата, то есть множество $(1/3, 2/3) \times (1/3, 2/3)$. С каждым из оставшихся восьми квадратов проделаем то же самое: разделим на девять равных квадратов и удалим внутренность центрального (полученное на этом шаге множество изображено на левом рисунке). Если этот процесс продолжать бесконечно, то в пределе получится множество, которое называют *ковром Серпинского*. Любое множество на плоскости, гомеоморфное ковру Серпинского, называют *кривой Серпинского*.

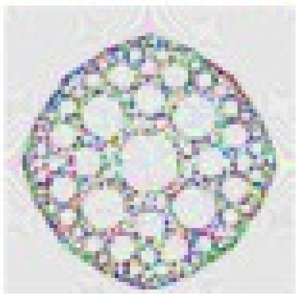






Интересно, что кривые Серпинского возникают также в голоморфной динамике. Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, и $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ — композиция n её копий. *Орбита* точки z — это последовательность $\{f^n(z)\}_{n=0}^{\infty}$. В зависимости от поведения орбиты, точку z относят к одному из двух множеств — *множеству Жюлиа* или *множеству Фату*. Говоря неформально, множество Фату состоит из тех точек, малое шевеление которых приводит к малому изменению орбиты; все остальные точки образуют множество Жюлиа. Оказывается, что множество Жюлиа некоторых рациональных функций является кривой Серпинского: например, это так для функции $f(z) = z^2 - (1/16)(1/z^2)$. На верхнем рисунке слева изображён фазовый портрет этой рациональной функции, на нижнем — её множество Жюлиа. При больших $|z|$ функция ведёт себя как $\tilde{f}(z) = z^2$, следовательно точки, далёкие от начала координат, быстро от него удаляются при итерациях $\{f^n(z)\}_{n=0}^{\infty}$. На обложке месяца изображён фазовый портрет пятой итерации — f^5. При больших $|z|$ функция $f^5(z)$ ведёт себя как z^{32}, что хорошо видно на фазовом портрете, а при меньших $|z|$ в нём можно распознать будущую кривую Серпинского. Если вместо функции $f(z)$ рассмотреть $g(z) = z^2 + \lambda/z$, где $\lambda \approx -0.593$, то множеством Жюлиа будет другая кривая Серпинского, которую называют *треугольником Серпинского*.





Вацлав Франциск Серпинский (1882 – 1969)

в годы обучения в Варшавском университете получил золотую медаль на конкурсе для студентов за работу в области теории чисел. В 1906 году Серпинский защитил диссертацию в Ягеллонском университете, с 1908 по 1914 — преподавал в Львовском университете, а годы Первой мировой войны провёл в Москве, где работал вместе с Лузиным. Вскоре после окончания войны Серпинский вернулся в Варшавский университет, где был назначен профессором. Во время советско-польской войны (1919–1921) он работал в криптологической службе Польши. В 1920 году совместно с Зигмунтом Янишевским и Стефаном Мазуркевичем он основал журнал Fundamenta Mathematicae. Во время Второй мировой войны, Серпинский попал в нацистский лагерь, а в октябре 1944 года вместе с его домом сгорела ценная библиотека, содержавшая книги, рукописи и личную переписку.

Серпинский был очень плодовитым учёным: за свою жизнь он опубликовал 50 книг и свыше 700 статей. Известность он получил за труды в области теории множеств, общей топологии и теории чисел.

Октябрь

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31											

Ядро Бергмана как аналитический элемент (Альбрехт Бёттчер)

Пространство Бергмана $A^2(\mathbb{D})$ является гильбертовым пространством всех функций f, аналитических в открытом единичном круге $\mathbb{D}$, и для которых $\|f\|^2 := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2\, dA(z) < \infty$, где $dA(z) = dx\,dy/\pi$ – нормированный элемент площади. Уравнение Тёплица в $A^2(\mathbb{D})$ имеет вид

$$(T(a)f)(z) := \int_{\mathbb{D}} a(w)(1 - z\overline{w})^{-2} f(w)\, dA(w) = g(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Здесь $g \in A^2(\mathbb{D})$ и $a \in L^\infty(\mathbb{D})$ – заданы, а $f \in A^2(\mathbb{D})$ нужно найти. Функция

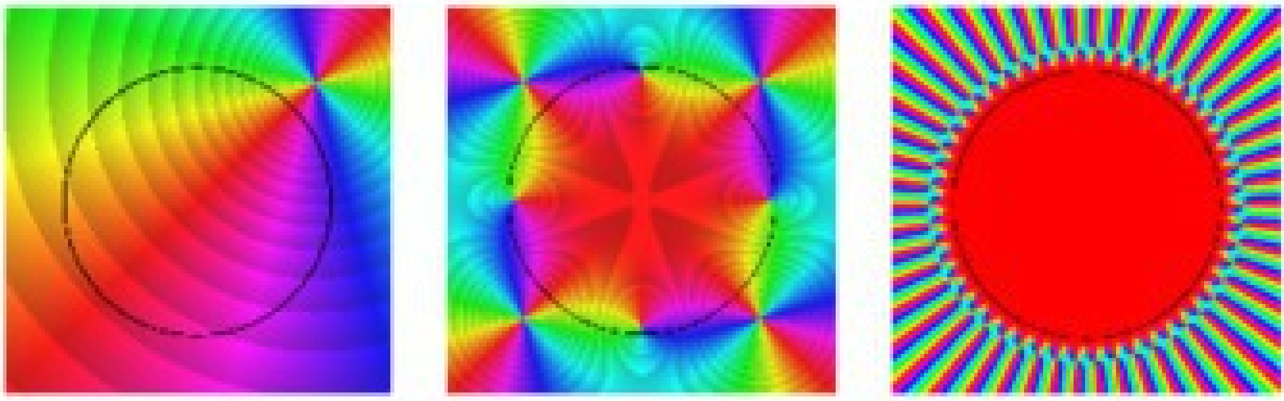
$$K_w(z) = (1 - z\overline{w})^{-2}, \quad w \in \mathbb{D},$$

называется *ядром Бергмана*. Она обладает воспроизводящим свойством: для каждой $f \in A^2(\mathbb{D})$ скалярное произведение f с K_w равно значению функции $f(w)$. Это ядро показано на левом рисунке внизу.

Уравнения с Тёплицевыми операторами пространства Харди можно решать с помощью разложения Винера-Хопфа. Это не работает в пространстве Бергмана, и приближённые методы – единственный известный нам способ решить интегральное уравнение в пространстве Бергмана. Один из таких методов – это *коллокация аналитическими элементами:* Ищем приближенное решение f_n, как линейную комбинацию $f_n = \sum_{j=1}^{n} x_j K_{z_j}$ „аналитических элементов“ K_{z_j} и определяем ее коэффициенты x_j, требуя чтобы

$$(T(a)f_n)(z_j) = g(z_j), \quad j = 1, \ldots, n,$$

что даёт систему из n уравнений для n неизвестных x_j. В совместной работе Хартмута Вольфа и автора было показано что метод сходится, если a непрерывна на $\overline{\mathbb{D}}$, оператор $T(a)$ обратим, и на n-м шаге, точки $z_1, \ldots, z_n$ выбираются корнями многочлена $z^n - r^n$ для некоторого фиксированого $r \in (0, 1)$.



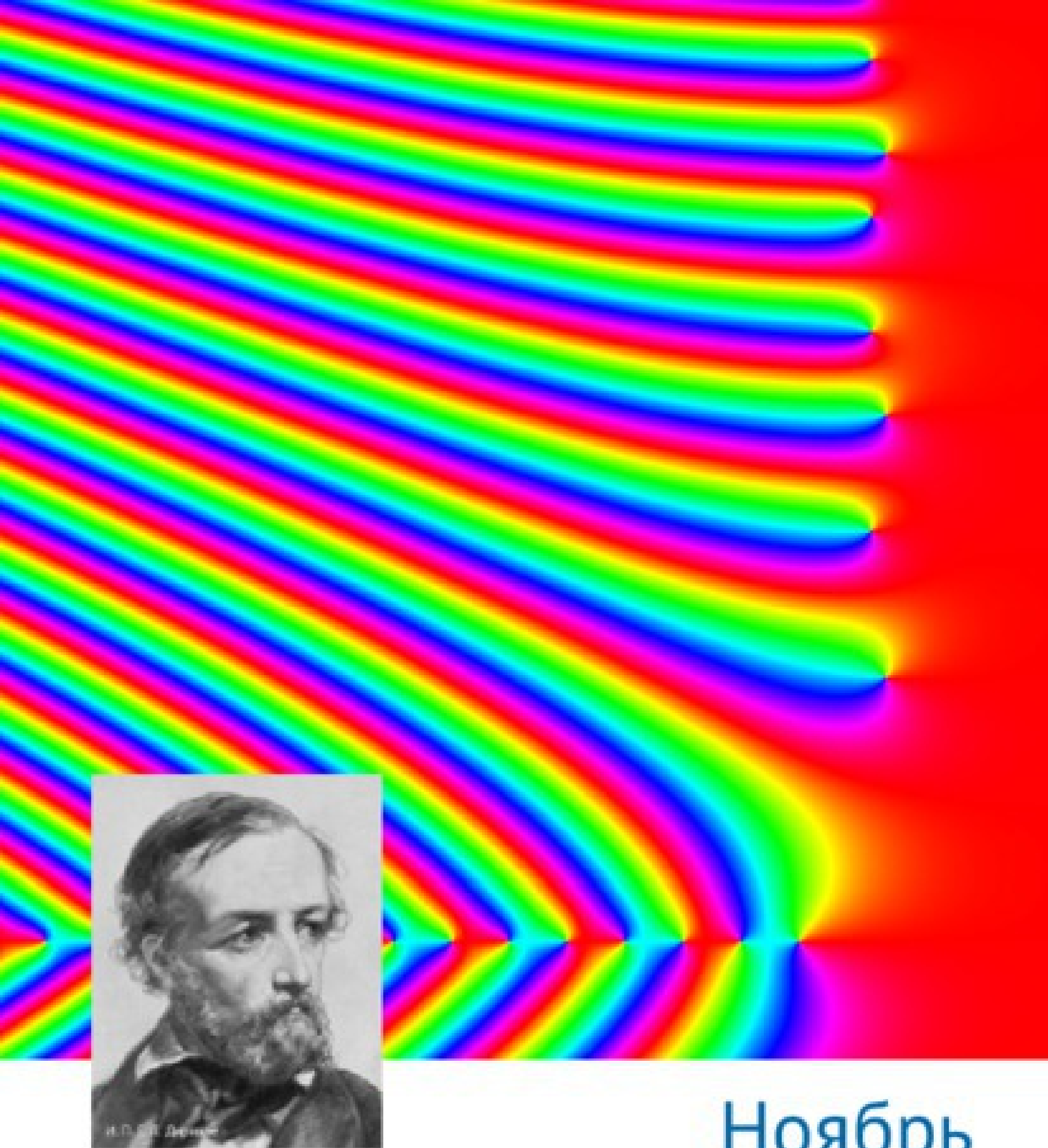
На рисунках в середине и справа мы видим сумму 4 и 50 ядер Бергмана. На картинке месяца показана линейная комбинация семи ядер Бергмана.

Стефан Бергман (1895 – 1977)

родился в городе Ченстохова в Царстве Польском, тогда части Российской империи. Он получил докторскую степень в университете Берлина в 1921 под руководством Рихарда фон Мизеса. В 1922 он ввел в рассмотрение ядро, позднее названное его именем. В 1933 году Бергман был уволен со своего поста в Берлинском университете из-за его еврейского происхождения. Он уехал в Россию, потом в Париж, и наконец в 1939 году эмигрировал в Соединенные Штаты. Бергман преподавал в Стэнфордском университете с 1952 до своей отставки в 1972. Умер в Пало Альто, Калифорния, в возрасте 82 лет.

Согласно математическому анекдоту, „всякий раз, когда кто-то доказывал новую теорему про ядро Бергмана или бергманову метрику, Бергман приглашал этого математика к себе на ужин. Бергман и его жена были очень радушными хозяевами и гость чувствовал себя желанным. Однако после ужина гость должен был расплатиться, прочитав без подготовки лекцию о важности ядра Бергмана“.

Стивен Г. Кранц, Математические анекдоты. Math. Intelligencer 12 (1990), No. 4, с. 32–38.



Ноябрь

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30									

η-функция Дирихле

Эта-функция Дирихле определяется *рядом Дирихле*:

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots .$$

Ряд сходится для всех комплексных чисел s с положительной вещественной частью. Сравните с *дзета-функцией Римана*, определенной как $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(1/n^s)$, и сходящейся для всех s с вещественной частью большей 1. (См. Complex Beauties за ноябрь 2011). Дзета-функция имеет мероморфное продолжение на всю плоскость $\mathbb{C}$ и простой полюс при $s = 1$. В действительности, эти две функции связаны уравнением

$$\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s). \tag{1}$$

Отсюда мы видим, что нули функции η включают и нули ζ-функции. Риман доказал, что дзета-функция не имеет нулей на множестве $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$ и показал, что ее единственными нулями в левой полуплоскости являются отрицательные чётные числа. Позднее Адамар (1896) и Валле-Пуссен (1896) независимо доказали, что ни один из нулей ζ не лежит на прямой $\mathrm{Re}(s) = 1$. Для так называемой *критической полосы* $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ Риман показал, что нули должны располагаться симметрично относительно прямой $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Поэтому все нетривиальные нули дзета-функции Римана должны лежать внутри критической полосы.

Гипотеза Римана состоит в предположении, что нули дзета-функции расположены в отрицательных чётных числах, а также в комплексных числах z, для которых вещественная часть равна $1/2$. Действительно, на обложке месяца мы видим нули эта-функции Дирихле, расположенные вдоль отрицательной вещественной полуоси (это *тривиальные нули* ζ), и на вертикальной прямой, состоящей из комплексных чисел с вещественной частью равной $1/2$. Конечно, эта-функция Дирихле имеет и другие нули – оставшийся множитель в (1) также может зануляться: $(1 - 2^{1-s}) = 0$, при $s = 1 + 2n\pi i/\log(2)$ для всякого целого n не равного нулю. Поэтому вещественная часть всех этих нулей равна 1, и следовательно они не лежат во внутренности критической полосы. Риманова дзета-функция и эта-функция Дирихле имеют одинаковые нули внутри критической полосы.

Петер Густав Лежён Дирихле (1805 – 1859)

родился в Дюрене, который тогда был частью Первой французской империи. Он посещал гимназию в Бонне и позднее в Кёльне. В 1822 Дирихле уехал в Париж, где работали Фурье и Пуассон. Его первая работа получила признание Фурье и фон Гумбольдта. В 1827 при поддержке Гумбольдта он получил работу в университете Бреславля (ныне Вроцлав), после присуждения ему докторской степени (honoris causa) университетом Бонна. В 1828 году его повысили до старшего лектора (ausserordentlicher Professor) и в этом же году позднее он получил должность в *Allgemeine Kriegsschule*, Общем военном училище. Параллельно он преподавал и в университете Берлина где в 1839 году получил должность полного профессора. Дирихле был женат на Ребекке Мендельсон, сестре Феликса Мендельсона-Бартольди.

Дирихле переехал в Гёттинген в 1855 году как преемник Гаусса. В 1858 он приехал в Швейцарию, чтобы произнести памятную речь о Гауссе, и здесь у него случился сердечный приступ. Умер он год спустя в возрасте 54 лет. Среди его студентов были Эйзенштейн, Кронекер, Риман и Дедекинд. В 1856-7 годах он читал курс теории потенциала, и записки курса были опубликованы в 1876. Возможно, он более всего известен работами в теории чисел. Дирихле использовал принцип ящиков при доказательстве теоремы о диофантовом приближении, сделал важное продвижение в последней теореме Ферма для случаев $n = 5$ and $n = 14$ (сравните с математиком из февральской статьи этого года), исследовал первую граничную задачу, а его основополагающие взгляды привели к развитию определения функции, которое мы используем сегодня. Дирихле не часто публиковался, и Гаусс говорил: „работы Густава Лежёна Дирихле — это драгоценности, и их нельзя взвешивать на бакалейных весах".

П. [illegible] и Дж. [illegible], Дирихле: [illegible]. *Math. Mag.* 78:4, 2005, стр. 285–294.

Декабрь

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
					1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31						

Канторов букет

В предыдущие месяцы различных выпусков календаря, включая Сентябрь этого года, мы рассматривали множества Жюлиа. Сейчас мы взглянем на другое множество Жюлиа, называемое *букетом Кантора*: множество гомеоморфное *прямой кисти*. Последнее является подмножеством B в $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0$ и $y \in \mathcal{T}\}$, где $\mathcal{T}$ – это некоторое плотное множество в иррациональных числах, причем множество B удовлетворяет таким трём свойствам:

Ворсистость. Для каждой точки $(x,y) \in B$ найдётся $t_y \in [0,\infty)$ такое что $\{t : (t,y) \in B\} = [t_y, \infty)$. Точка (t_y, y) является *конечной* для *ворсинки* задаваемой $[t_y, \infty) \times \{y\}$.

Плотность конечных точек. Для всякой $(x,y) \in B$, найдётся пара последовательностей (b_n) и (c_n) в $\mathcal{T}$, такие что $b_n \to y$ снизу, $c_n \to y$ сверху, и при этом $t_{b_n}, t_{c_n} \to x$.

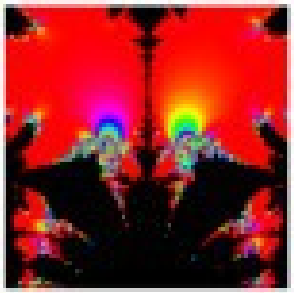
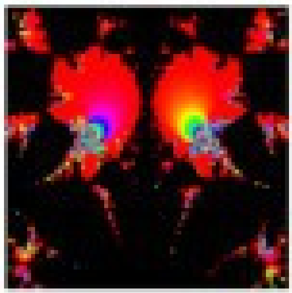
Замкнутость. Множество B являестя замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^2$.

Это довольно техническое определение приводит к топологически богатому множеству. Канторов букет можно получить как множество Жюлиа для показательной функции $f_\lambda(z) = \lambda e^z$, где $0 < \lambda < 1/e$.

По эстетическим причинам для этого месяца мы выбрали фазовый портрет 22 итераций показательной функции f_λ для $\lambda = 1/e + 1/50$. В этом случае орбита 0 стремится к ∞ и множество Жюлиа, как известно, совпадает со всем $\mathbb{C}$, но первые итерации все же показывают связь с букетом Кантора.

На нижеприведенных рисунках мы видим как фазовый портрет резко меняется при большом числе итераций. Слева направо использованные числа итераций равны: 17, 20, 23, и 42.



Георг Фердинанд Людвиг Филипп Кантор (1845 – 1918)

родился в Санкт-Петербурге, отец его был торговцем, а мать происходила из артистических кругов. Когда ему было 11, семья переехала во Франкфурт и Кантор пошел в Немецкую среднюю школу. Заниматься математикой он начал в ETH в Цюрихе, который потом сменил на университет Берлина, в котором написал диссертацию по теории чисел под руководством Вейерштрасса и Куммера. Докторскую работу (Habilitationsschrift) он сделал в Галле, где и оставался до конца жизни.

Кантор — основатель современной теории множеств. Даже сегодня его влияние в математике огромно. Но во времена своей работы он не всегда находил понимание. Некоторые влиятельные математики, в частности Кронеккер, выражали сомнения к его работе. Кантор вел обширную математическую переписку с Дедекиндом, Шварцем, Миттаг-Леффлером. Он был основателем и первым президентом Немецкого математического общества. У него и его преданной супруги Валли Гутман было шестеро детей и красивый дом на Хэндельштрассе в Галле. Однако в более старшем возрасте у Кантора были приступы глубокой депрессии и ему было трудно продолжать работать. В такое время он обращался к философии и религии. В перерывах между лечением он продолжал заниматься математикой. Кантор умер в возрасте 73 лет в лечебнице, в ужасных условиях во время первой мировой войны.

Р.Л. Девани, Кантор и Серпинский, Жюлиа и Фату: Комплексная топология встречает комплексную динамику, *Notices of the AMS*, 51-1, January 2004.
Х. Мешковский, Георг Кантор: Жизнь, работа и результаты, Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, 1983.