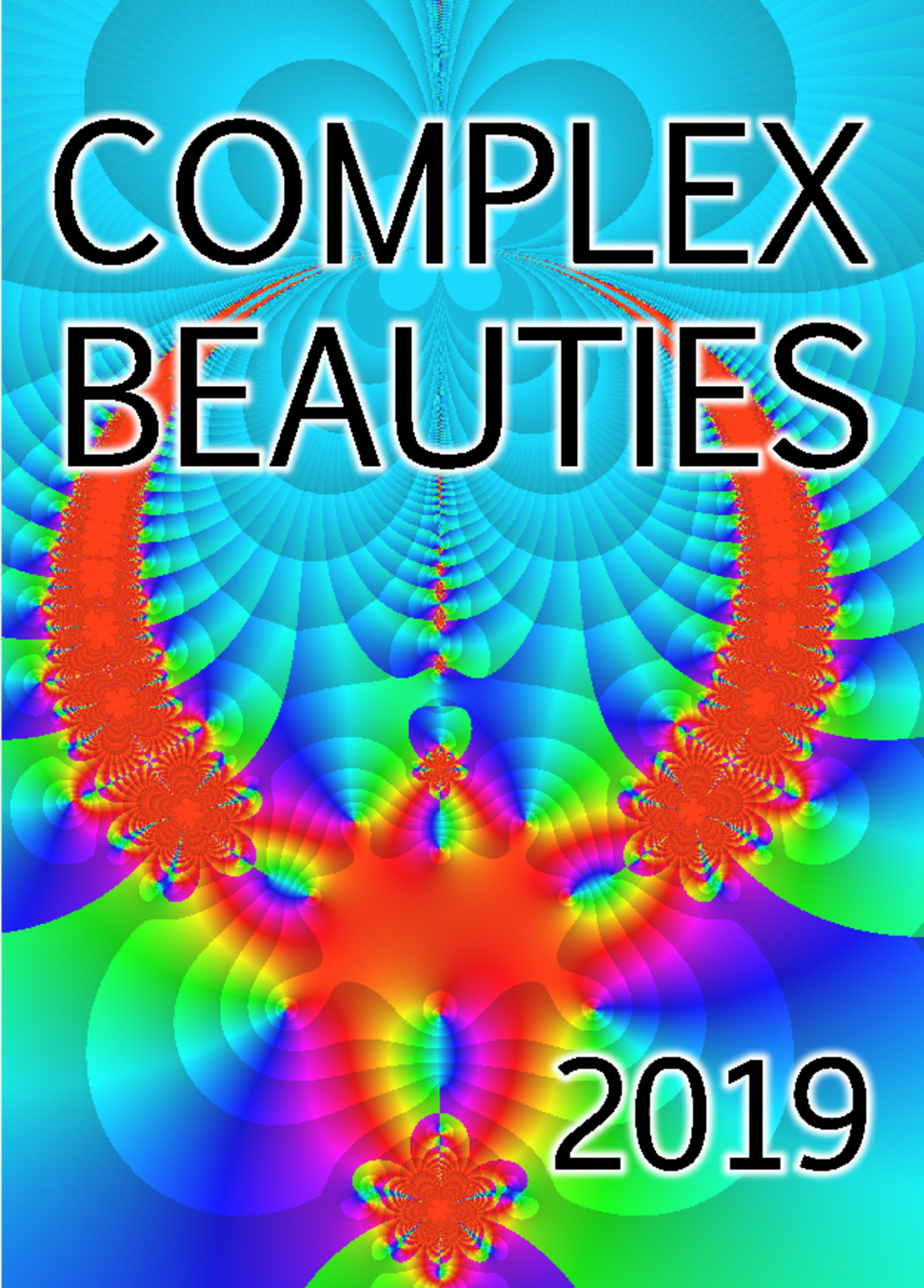
COMPLEX BEAUTIES

2019



Многочлены Фабера

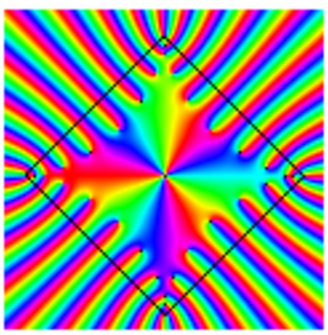
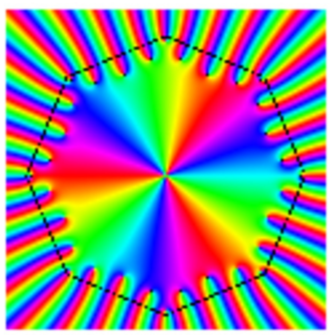
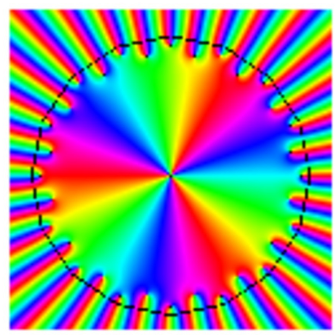
На рубеже XIX и XX столетий интерес к задаче аппроксимации комплексных функций был весьма велик. Вот, например, один из результатов Рунге 1885 г.: всякая функция, аналитичная на компактном множестве E, имеющем связное дополнение, может быть приближена равномерно на E многочленом (Complex Beauties, декабрь 2014 г.). В дальнейшем возник вопрос, можно ли получать такие приближения из разложений в ряды специального вида: найдется ли по множеству E последовательность многочленов $p_1, p_2, \ldots$, такая, что всякая аналитичная на E функция f разлагается в ряд

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k(z), \qquad z \in E,$$

с комплексными коэффициентами a_k?

В 1903 г. Георг Фабер опубликовал работу, содержащую элегантное и конструктивное решение этой задачи в случае, когда дополнение $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ множества E до сферы Римана $\widehat{\mathbb{C}}$ односвязно: тогда, по теореме Римана, существует конформное отображение φ множества $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ на дополнение замкнутого единичного круга. Это отображение можно нормировать так, чтобы вблизи бесконечности было $\varphi(z) = c\,z + \psi(z)$, где c — положительная константа, а ψ — ограниченная функция. Тогда n-я степень φ представится суммой многочлена p_n и исчезающей на бесконечности функции. Фабер смог показать, что построенная таким способом последовательность p_n, именуемая ныне *многочленами Фабера*, обладает нужными аппроксимационными свойствами.

Многочлены Фабера для отрезка $[-1, 1]$ — это ни больше ни меньше чем *многочлены Чебышёва* (Complex Beauties, январь 2016 г.). Три фазовых портрета ниже суть примеры того, как многочлены Фабера степени 35 зависят от формы определяющего их множества E (обведенного черным).

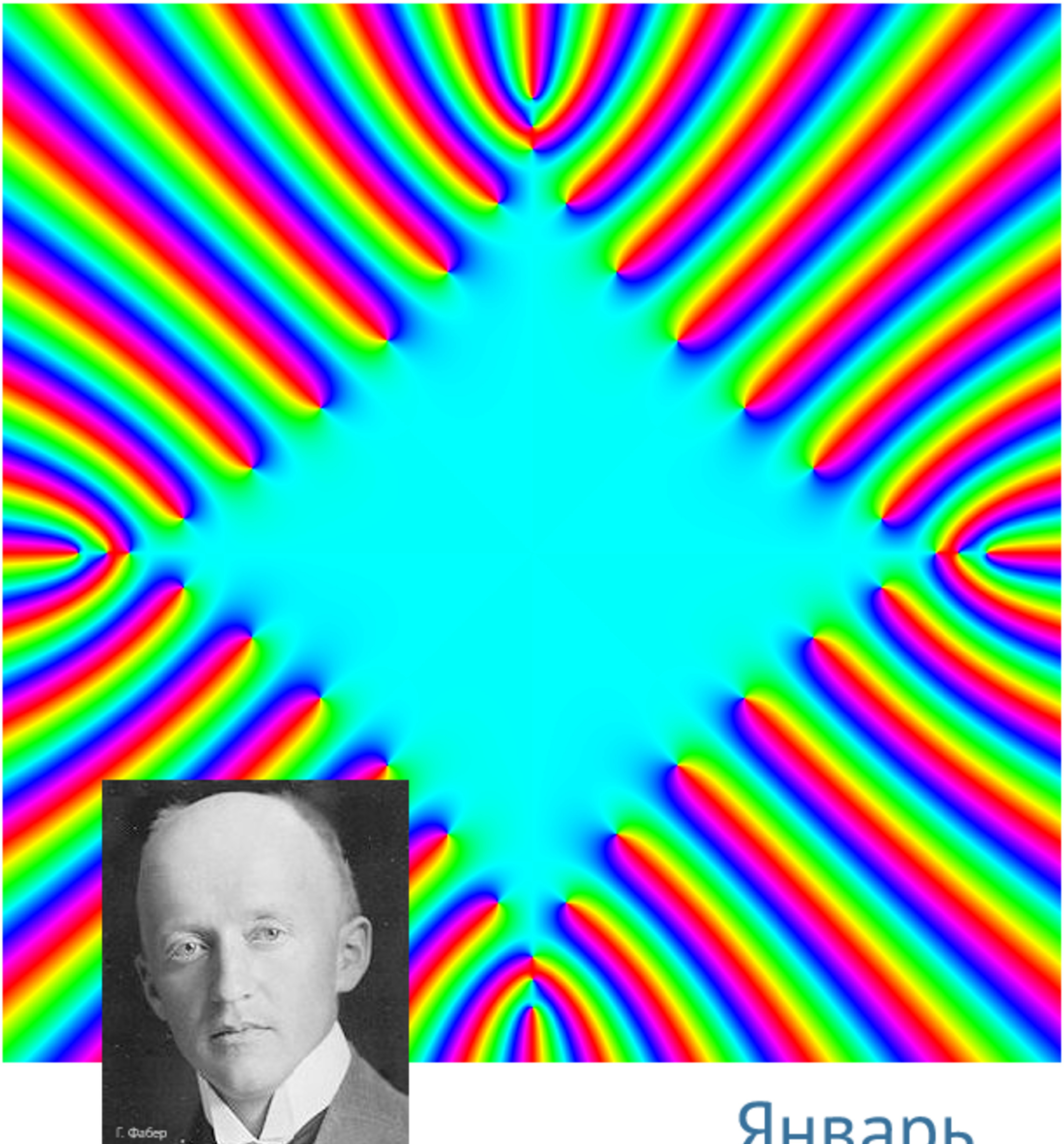
Эффективное вычисление многочленов Фабера и сегодня является актуальной исследовательской задачей. На главной картинке этого месяца — многочлен p_{36}, отвечающий квадрату, повернутому на $45°$. Все вычисления проведены с помощью программного пакета Schwarz–Christoffel Toolbox в матлабе.

Георг Фабер (1877 – 1966)

родился в г. Кайзерслаутерн в семье коммерсанта. Он изучал математику и физику в Гёттингене и Мюнхене, где он получил степень в 1902 г. После нескольких лет преподавания в гимназии, он прошел хабилитацию в высшей технической школе г. Карлсруэ. После работы в Карлсруэ, Тюбингене, Штуттгарте, Кёнигсберге и Страсбурге он был в 1916 г. назначен полным профессором в высшей технической школе Мюнхена. Там он проработал 30 лет и получил звание почетного (emeritus) профессора. После окончания Второй мировой войны Фабер, в течение последнего своего года жизни, был назначен оккупационным правительством на должность ректора высшей технической школы Мюнхена. Ему также поручили реорганизацию учебного процесса.

Важнейшей областью научной работы Фабера была теория функций, в особенности полиномиальная аппроксимация, интерполяция и конформные отображения. Фабер принимал участие в издании собраний сочинений Эйлера, Кристоффеля и предпринял расширенное издание трехтомного учебника своего предшественника Г. Буркхардта по теории функций в Мюнхене. Он был награжден в 1956 г. федеральным крестом и в 1959 г. — баварским орденом за заслуги.

J.H. Curtiss, Faber Polynomials and the Faber Series. *The American Mathematical Monthly*, 78-6 (1971) pp. 577–596. Tobin A. Driscoll, *Schwarz-Christoffel Toolbox for MATLAB*. Karl-Heinz Böttcher, Bertram Maurer, *Stuttgarter Mathematiker*. Univ. Stuttgart, 2008. Nachrufe auf Akademiemitglieder. http://badw.de/gelehrtengemeinschaft/nachrufe.html

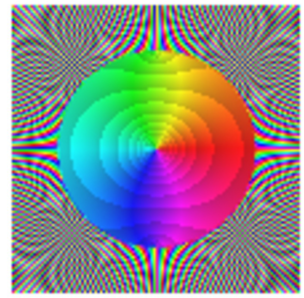


Январь

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31										

Конечные разности

Большинство функций в этом календаре — *аналитические*, то есть характеризуются следующим свойством: в окрестности всякой точки z_0 из области определения они представимы в виде степенного ряда. Такой ряд сходится в том наибольшем круге с центром в z_0, в который функция может быть аналитически продолжена. Например, функция, обратная (комплексной) функции тангенса, имеет представление в виде ряда



$$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots + (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1} + \ldots, \qquad (1)$$

верное при $|z| < 1$. Картинка напротив, на которой мы видим сотую частичную сумму этого ряда, иллюстрирует его расходящееся поведение вне единичного круга.

В работе „*О вычислении рядов*" Исаак Ньютон занимается преобразованием степенного ряда переменного z путем введения нового переменного $t = z/(1-z)$. Приравнивая разложения

$$c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_k z^k + \ldots = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_k t^k + \ldots,$$

Ньютон заключает, что коэффициенты a_k вычисляются по данным c_k рекурсивно с помощью *конечных разностей*, для чего используется следующая таблица.

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & \Delta c_1 & \Delta^2 c_1 & \Delta^3 c_1 & \ldots \\ c_2 & \Delta c_2 & \Delta^2 c_2 & \Delta^3 c_2 & \ldots \\ c_3 & \Delta c_3 & \Delta^2 c_3 & \Delta^3 c_3 & \ldots \\ c_4 & \Delta c_4 & \Delta^2 c_4 & \Delta^3 c_4 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Первый столбец содержит коэффициенты первоначального ряда. В каждый следующий столбец, начиная сверху, надо записать разность элементов предыдущего столбца: элемента, стоящего ниже, и соседнего элемента. Например, во втором столбце $\Delta c_1 = c_2 - c_1$, $\Delta c_2 = c_3 - c_2$ и т. д., в третьем столбце получаем $\Delta^2 c_1 = \Delta c_2 - \Delta c_1 = c_3 - 2c_2 + c_1$ и проч. Наконец, в первой строке таблицы возникают коэффициенты a_k нового ряда.

Применяя эту схему к степенному ряду (1), Ньютон получил представление

$$\arctan z = \frac{z}{1+z^2}\left(1 + \frac{2}{3}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^3 + \ldots\right), \qquad (2)$$

верное при z, удовлетворяющих неравенству $(\mathrm{Im}\, z)^2 - (\mathrm{Re}\, z)^2 < 1/2$. Это область, ограниченная двумя гиперболами и содержащая вещественную ось целиком. В частности, при $z = 1$ получаем сходящийся рад для значения $\pi/4 = \arctan 1$. Главная картинка месяца демонстрирует двадцатую частичную сумму ряда (2). Прием Ньютона — один из первых примеров *аналитического продолжения* функций.

Сэр Исаак Ньютон (1643 – 1727)

был сыном овцевода; родился в деревне Вулсторп при Колстерворте (графство Линкольншир). После учебы в королевской школе в Грантем и Тринити-колледже Кембриджа Ньютон занимался частной исследовательской работой в родовом поместье. В 1667 г. он вернулся в Кембридж и в 1669 г. получил должность на престижной лукасовской кафедре математики.

Ньютон был чрезвычайно разносторонним ученым. Вместе с Лейбницем (у которого он ожесточенно оспаривал приоритет) он стал основателем исчисления бесконечно малых. В основном своем труде „*Математические начала натуральной философии*", принадлежащем ряду важнейших научных работ всех времен, он сформулировал три основные закона движения и развил теорию гравитации. В оптике ему принадлежит основополагающий вклад в корпускулярную теорию света и в теорию спектра; он разработал также оригинальный зеркальный телескоп. Кроме этого, Ньютон изучал древнюю историю, теологию и мистику; его излюбленным коньком была алхимия.

Помимо занятий наукой, Ньютон занимал представительские должности. В качестве Мастера королевского монетного двора он вел беспощадную борьбу с фальшивомонетчиками. В 1703 г. Ньютон был назначен президентом Королевского общества и посвящен в рыцари в 1705-м.

Ranjan Roy, *Sources in the Development of Mathematics*, Cambridge University Press 2011, p.176 ff.

Февраль

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28										

Остаточный член в форме Лагранжа

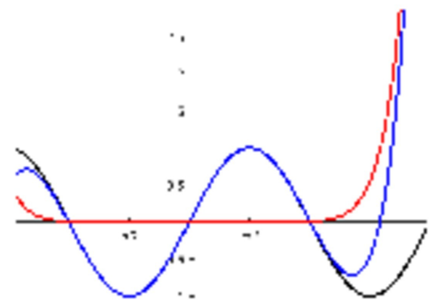
Уже в XVII столетии для аппроксимации трансцендентных функций использовали многочлены. Способ определения многочлена, касающегося n-кратно дифференцируемой функции в окрестности данной точки x_0, приписывается Бруку Тейлору. Многочлен

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

называют *многочленом Тейлора* n*-й степени* для f в точке x_0 (см. Complex Beauties, март 2011 г.).

Тейлор не рассматривал ни погрешности аппроксимации, ни сходимости p_n к f при растущих степенях многочлена. Впервые выражение для функции ошибки $R_n = f - p_n$ выписал и обосновал, используя формулу конечных приращений, Лагранж. Эта формула носит сейчас название *остаточный член в форме Лагранжа*: если функция f на интервале (a, b) непрерывно дифференцируема $(n + 1)$ раз, то по любому $x \in (a, b)$ найдется точка c между x и x_0 таким образом, что

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$



На картинке сбоку показана функция $f(x) = \sin x$ (черным), ее многочлен Тейлора степени 9 в точке $x_0 = 0$ (синим) и величина функции ошибки R_9 (красным).

Лагранж не рассматривал комплекснозначных функций; между тем, многочлены Тейлора можно ввести естественным образом и для комплексных дифференцируемых функций. Теория будет даже проще, поскольку комплексные дифференцируемые (голоморфные) функции оказываются дифференцируемыми неограниченное число раз, и можно определить многочлен Тейлора произвольно высокой степени. Кроме того, многочлены p_n сходятся к f в некоторой окрестности точки x_0.

Картинка этого месяца содержит функцию ошибки для синуса $f(z) = \sin z$, приближаемого многочленом Тейлора p_9 степени 9 в нулевой точке:

$$p_9(z) = \sum_{k=0}^{9} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

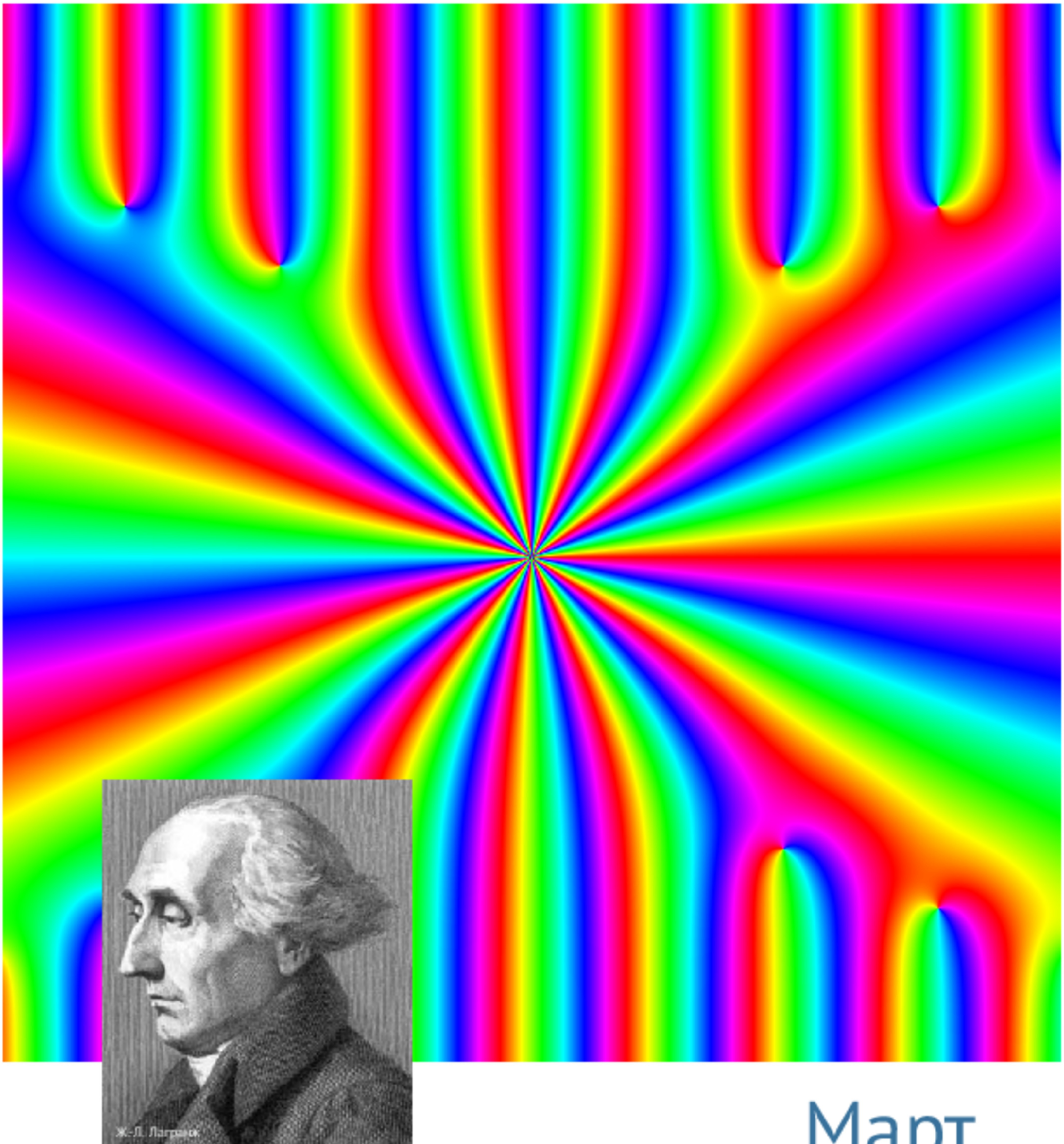
Как можно понять из фазового портрета, функция ошибки R_9 имеет в $x_0 = 0$ нуль порядка 11. Это оттого, что многочлены p_9 и p_{10} совпадают в связи с равенством $f^{(10)}(0) = 0$.

Жозеф-Луи Лагранж (1736 – 1813)

родился в Турине, бывшем тогда столицей герцогства Савойи и Сардинского королевства. Он учился в коллеже Турина и, за вычетом длительного путешествия в Париж, первые 30 лет жизни провел в своем родном городе. Лагранж переписывался с Эйлером и многими другими математиками. После того, как Эйлер переехал из Берлина в Санкт-Петербург, Лагранж в 1767 г. занял его место в Прусской академии наук. Лагранжу принадлежит существенный вклад во многих областях различных наук: астрономии, механике, динамике, теории вероятностей и обосновании исчисления бесконечно малых.

Несмотря на попытки вернуть Лагранжа на его родину, он принял решение в 1787 г. переехать из Берлина в Париж и стал членом Французской академии наук. Ему удалось счастливо избежать превратностей французской революции. В 1794 г. Лагранж стал первым профессором математического анализа во вновь основанной *École Polytechnique*. Наполеон отмечал его высокими наградами, среди которых *Большой крест императорского ордена воссоединения*.

Перед отъездом в Берлин Лагранж женился на одной из своих двоюродных сестер, однако брак был бездетным. Согласно сайту *Mathematics Genealogy Projects*, у Лагранжа было лишь трое учеников, среди которых Фурье и Пуассон; однако список его научных последователей содержит более 100 000 человек. Спустя всего неделю после награждения *Большим крестом* Лагранж скончался в Париже, во время редакторской работы над своим известнейшим трудом под названием *Аналитическая механика*.



Март

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31							

Магнитные вихри (Андрей Богатырёв и Константин Метлов)

В противовес атомистическим идеям Демокрита Аристотель постулировал существование заполняющей пространство «квинтэссенции» (= "пятого элемента"). Позднее эта идея превратилась в концепцию эфира и её можно рассматривать как предшественник современных теорий поля. Эфир вдохновил Джеймса Клерка Максвелла создать свою теорию электродинамики и лорда Кельвина – на разработку теории вихревого движения (гидродинамика идеальной жидкости). Согласно Кельвину, все объекты, включая атомы, должны описываться замысловатыми вихревыми линиями, чтобы их свойства определялись исключительно топологией этих узлов.

В двух измерениях движение вихря может быть описано с помощью комплексного анализа. Эта связь хорошо известна для гидродинамики, но она также существует для магнетизма. Состояние ферромагнетика может быть представлено как векторное поле локальной намагниченности $mathbf{m}$. Компоненты могут быть выражены с использованием стереографической проекции:

$$m_X + \mathrm{i}\, m_Y = \frac{2w(z,\overline{z})}{1 + w(z,\overline{z})\,\overline{w}(z,\overline{z})}, \qquad m_Z = \frac{1 - w(z,\overline{z})\,\overline{w}(z,\overline{z})}{1 + w(z,\overline{z})\,\overline{w}(z,\overline{z})},$$

где $w(z,\overline{z})$ зависит от координаты $z = x + \mathrm{i}\, y$ в плоскости магнетика и её сопряженной $\overline{z}$.

Эта модель была сформулирована Тони Скирмом для описания барионов. Гордон Ву впоследствии выразил уравнение Эйлера-Лагранжа для равновесного векторного поля намагничиченности в терминах комплексных производных:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}\right) = \frac{2\overline{w}}{1 + w\overline{w}}\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}.$$

Это уравнение имеет два типа решений: солитоны (обнаруженные Александром Белавиным и Александром Поляковым), соответствующие мероморфной функции $w(z,\overline{z}) = f(z)$, (удовлетворяющей уравнению $\partial w/\partial\overline{z} = 0$) и мероны (обнаруженные Дэвидом Дж. Гроссом) соответствующие $w(z,\overline{z}) = f(z)/|f(z)|$.

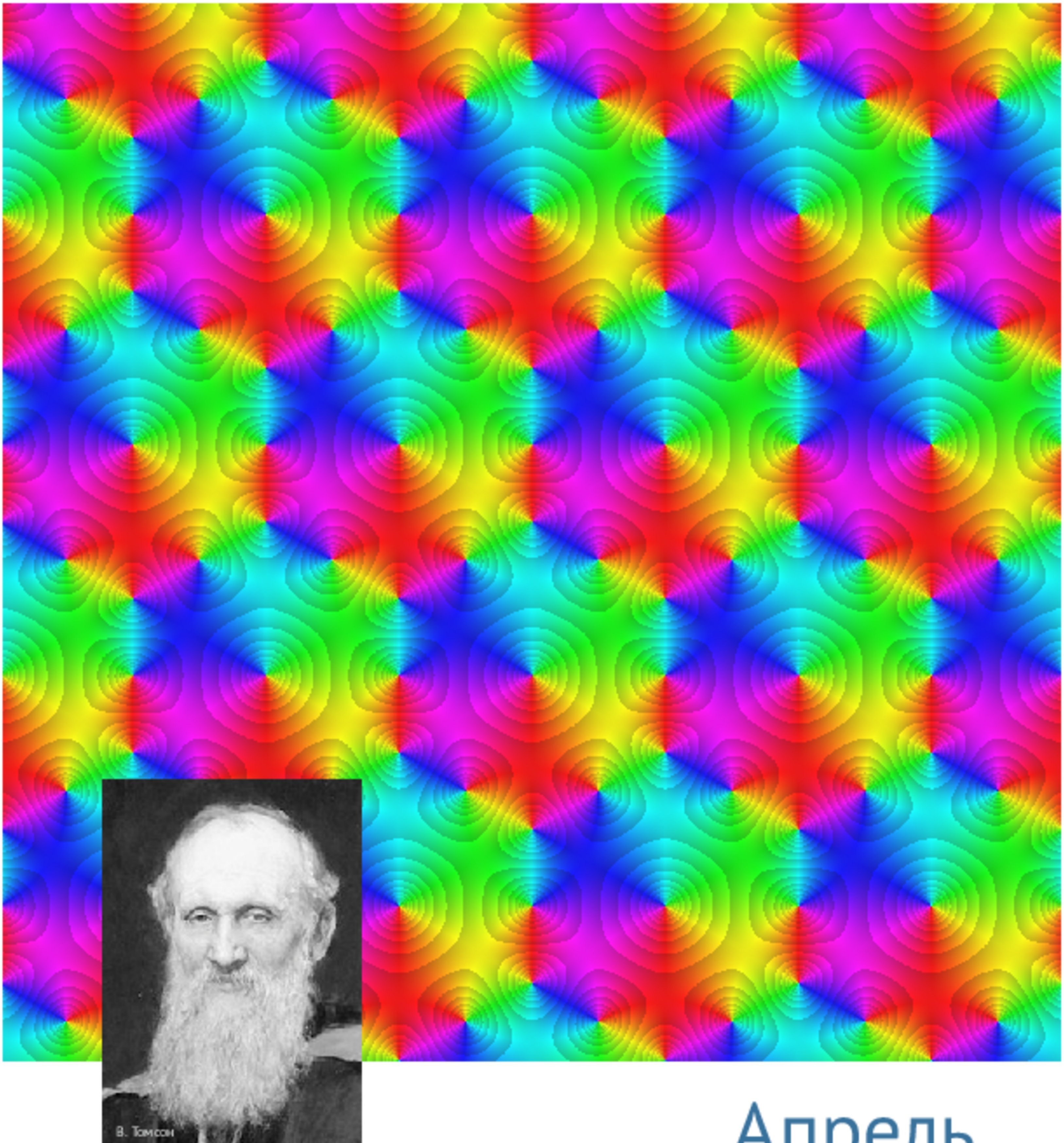
В случае ограниченного плоского цилиндрического магнитного образца субмикронного размера, векторное поле намагниченности может быть выражено как солитон или мерон, в котором $f(z)$ – решение задачи Римана-Гильберта – мероморфная функция, значения которой на боковой границе магнетика направлены вдоль этой границы. В случае многосвязных цилиндров можно обнаружить глубокую взаимосвязь топологии поля намагниченности с топологией самого наноэлемента.

Статичные поля намагниченности в тонких субмикронных ферромагнитных пленках описываются так же, как и стационарный поток идеальной жидкости. Иллюстрация этого месяца показывает дважды периодическую вихревую структуру в плоском наномагнетике.

Вильям Томсон, первый барон Кельвин (1824 – 1907)

родился в Белфасте, второй сын математика Джеймса Томсона. Университет Глазго предоставил возможности обучения для способных учеников, и Томсон начал обучаться там с возраста 10 лет. После окончания университета Томсон поступил в Кембриджский университет. После пребывания в Париже, где он работал в лаборатории физика-экспериментатора Анри Виктора Реньо, Томсон вернулся в Глазго. В возрасте 22 лет Томсон стал профессором кафедры, где и работал до 1899 года. Интересы Томсона включали термодинамику, гидродинамику, электромагнетизм, теорию упругости, теплоту, математику и технологии. В качестве студента Томсон опубликовал несколько статей о применении рядов Фурье к различным отраслям физики. В 1846 году он разработал метод решения задач электростатики, а в 1848 году, после изучения теоремы Карно, он высказал идею абсолютной температурной шкалы. В 1866 году он был посвящен в рыцари за свои работы по трансатлантическому телеграфному проекту, став сэром Уильямом Томсоном.

Томсон также способствовал разработке практических приложений в разных науках. Он был главным научным консультантом в строительстве первых трансатлантических кабелей. Он разработал ряд электрометрических приборов, в том числе улучшенный зеркальный гальванометр, чувствительные электрометры, устройство для электромеханической записи телеграфных сигналов и компас, который компенсирует магнетное поле железного корпуса корабля. Томсон получил много почестей; к ним относятся Медаль Кейта, Королевская медаль и Медаль Копли. В 1892 году Томсону было пожаловано дворянство за его научную работу, и он стал 1-м бароном Кельвином. В 1896 году он был избран почетным членом Петербургской академии наук.

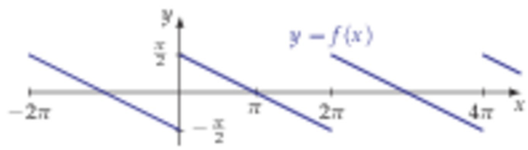


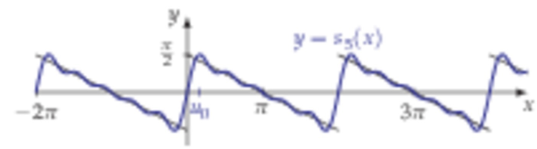
Апрель

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30												

Неравенство Фейера-Джексона-Гронуолла

Поведение сходимости рядов Фурье поднимает интересные вопросы. Например, возьмите функцию f, показанную на рисунке ниже слева. Эта функция кусочно-линейная, вещественная и периодическая с периодом длины 2π. На рисунке справа показана частичная сумма его ряда Фурье.





Поскольку f нечетно, его ряд Фурье состоит только из синусов; это $\sum_{k=1}^{\infty}(\sin kx)/k$. Сходимость частичных сумм

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$$

особенно удивительна вблизи точек разрыва функции f. Чтобы найти локальные экстремумы s_n, положим

$$s_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{n}{2}x \cos \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} = 0.$$

Для интервала $(0,\pi)$ получаем локальные максимумы в точках $u_j = \frac{2j+1}{n+1}\pi$ для $j = 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ и локальные минимумы при $v_j = \frac{2j}{n}\pi$ для $j = 1, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Для наименьшего положительного значения локального максимума s_n, то есть u_0 (в котором мы имеем глобальный максимум), находим

$$\lim_{n\to\infty} s_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx > \frac{\pi}{2}.$$

То есть при больших n частичные суммы превышают ожидаемое значение $\pi/2$ в точках разрыва. Такое поведение известно как *явление Гиббса*.

Что можно сказать о нижних границах s_n? В 1910 году Липот Фейер предположил, что для всех n

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} > 0 \quad \text{on } 0 < x < \pi.$$

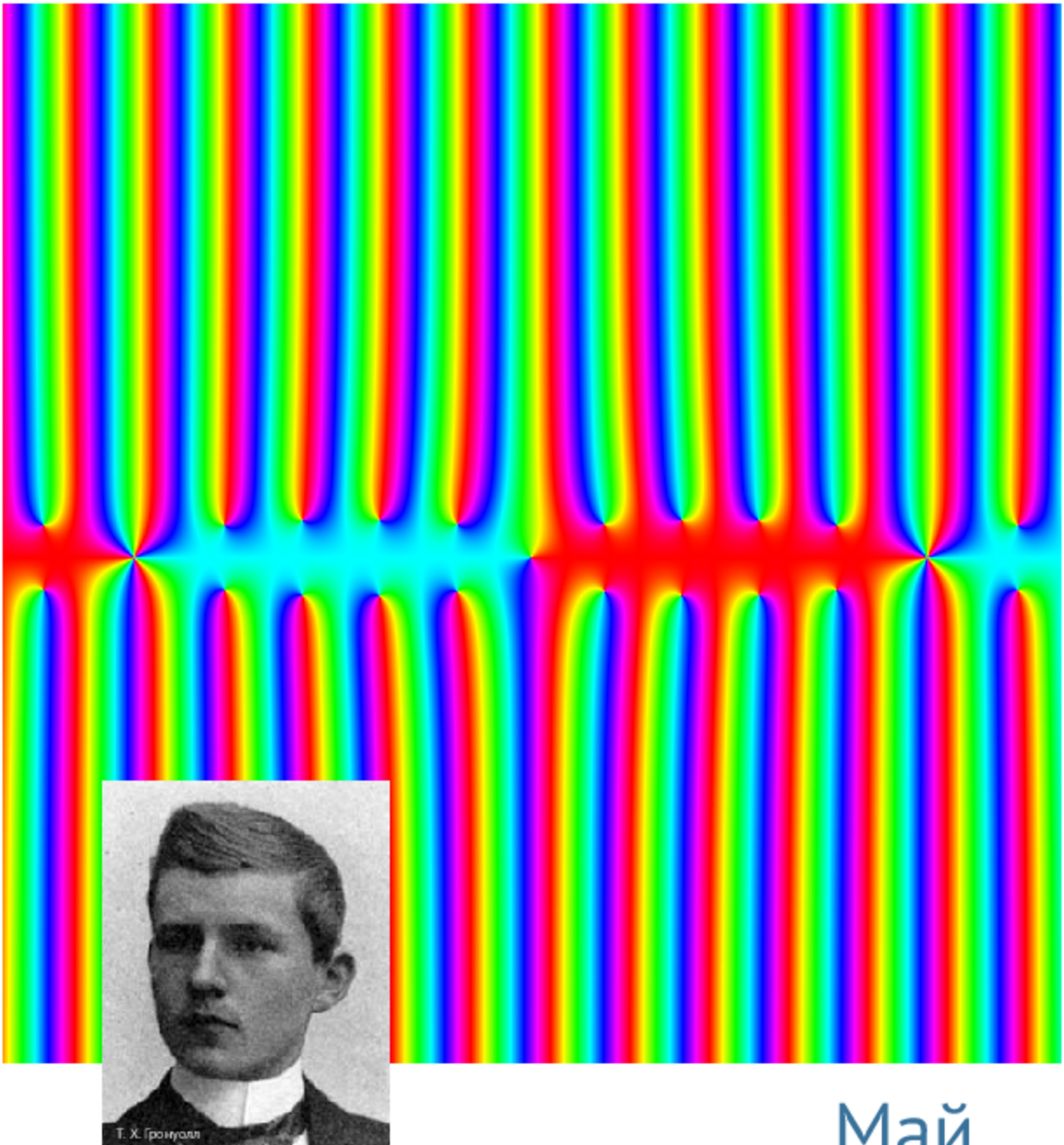
Показав, что s_n принимает положительные значения во всех точках локальных минимумов v_k, Томас Хэкон Гронуолл установил это неравенство в своей работе *Über die Gibbssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen* $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \cdots + \frac{1}{n}\sin nx$ (Mathematische Annalen 1912). Поскольку Д.Джексон дал другое доказательство годом ранее, это неравенство обычно называют *неравенством Фейера-Джексона*.

В этом месяце показана частичная сумма s_{10}, распространённая на комплексную плоскость. На вещественном интервале $(0,\pi)$ фазовый портрет окрашен красным, так как значения функции на этом интервале положительны.

This month's picture shows the partial sum s_{10} extended to the complex plane. On the real interval $(0,\pi)$ the phase portrait is red because the function values are all positive on this interval.

Томас Хэкон Гронуолл (1877 – 1932)

родился в Dylta Bruk, Швеция. Проведя год в Уппсале, он продолжил учился в Стокгольме, где преподавали Миттаг-Леффлер, Бендиксон, Фредгольм, фон Кох и Фрагмен. Гронуолл уже имел кандидатскую степень по математике и опубликовал 10 работ ко времени, когда ему исполнилось 21. Чрезмерно суровое наказание за студенческую шалость привело к его отстранению из университета на полгода. Вследствие этого Гронуолл отправился в Германию, чтобы получить диплом инженера. Некоторое время он работал инженером-строителем в Германии, прежде чем иммигрировал в Соединенные Штаты в 1904 году, где работал в различных металлургических компаниях. Примерно в 1911 году он решил вернуться к математике. Он опубликовал несколько работ в ведущих журналах и участвовал в Чикагской встрече Американского математического общества в 1912 году. В 1913/14 он был инструктором и в 1914/15 - ассистентом Принстонского университета. Гронуолл проводил исследования во многих областях классического анализа, среди которых гармонический анализ, дифференциальные и интегральные уравнения, аналитическая теория чисел и функциональный анализ. В то же время он был заинтересован в приложениях.Он служил математическим консультантом для



Май

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31									

Сингулярные внутренние функции (Шелдон Акслер)

Внутренней функцией назовем такую ограниченную аналитическую функцию φ на открытом единичном диске $\mathbb{D}$ на комплексной плоскости, что

$$\lim_{r\uparrow 1} |\varphi(rz)| = 1$$

для почти любого $z \in \partial\mathbb{D}$ (где мера на $\partial\mathbb{D}$ вводится как обычная мера Лебега - «длина дуги»). Например, пусть $a \in \mathbb{D}$ и

$$\varphi(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

Если $|z| = 1$, то

$$|\varphi(z)| = \left|\frac{z-a}{\overline{z}z-\overline{a}z}\right| = \left|\frac{z-a}{\overline{z}-\overline{a}}\right| \frac{1}{|z|} = 1.$$

Согласно принципу максимума, $|\varphi|$ ограничена единицей на $\mathbb{D}$. Из приведенного выше следует, что φ – внутренняя функция.

Простые примеры внутренних функций доставляют произведения Бляшке (март 2012 – конечные, июль 2012 – бесконечные произведения Бляшке). Другой пример: пусть для $z \neq 1$ выполнено

$$\varphi(z) = \mathrm{e}^{\frac{z+1}{z-1}}.$$

Заметим, что

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{\overline{z}-1}{\overline{z}-1} = \frac{|z|^2-1}{|z-1|^2} - \frac{2\,\mathrm{Im}\, z}{|z-1|^2}\,\mathrm{i}.$$

Итак, $\mathrm{Re}\,\frac{z+1}{z-1} < 0$ при $|z| < 1$ и $\mathrm{Re}\,\frac{z+1}{z-1} = 0$ при $z \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$, откуда $|\varphi(z)| < 1$ при $|z| < 1$ и $|\varphi(z)| = 1$ для $z \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$. Значит, функция φ – внутренняя, называемая *сингулярной атомарной внутренней функцией* (см. июнь 2014).

Более общо, обозначим через μ положительную меру на $\partial\mathbb{D}$, сингулярную по отношению к обычной мере Лебега. Для $z \in \mathbb{D}$ определим

$$\varphi(z) = \exp \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{z+w}{z-w}\, d\mu(w).$$

Функции такого вида называют *сингулярными внутренними функциями*. Они в самом деле являются внутренними, и любая внутренняя функция, не имеющая нулей в $\mathbb{D}$, имеет такой вид. В частности, если μ – мера Дирака с центром в точке $1 \in \partial\mathbb{D}$, мы получаем вышеупомянутую атомарную сингулярную функцию. На иллюстрации показан фазовый портрет приближенного значения сингулярной внутренней функции, полученной для неатомарной меры μ с носителем на канторовом множестве (замкнутом несчетном множестве из $\partial\mathbb{D}$ с мерой Лебега 0).

Дональд Сарасон (1933 – 2017)

родился в Детройте. Сарасон получил кандидатскую степень в 1963 году в университете Мичигана под руководством Пола Халмоша (см. август). Затем он получил позицию постдока в Университете перспективных исследований, а вся его дальнейшая карьера, вплоть до ухода на покой в 2012 году, была связана с Калифорнийским университетом в Беркли. В работах Сарасона по внутренним функциям были продемонстрированы глубокие связи между теорией операторов и теорией функций комплексного переменного. Например, в работе Сарасона, ссылка на которую приведена ниже, процитированной более чем в тысяче публикаций, показана взаимосвязь между вышеупомянутой атомарной сингулярной внутренней функцией и оператором Вольтерры V на $L^2([0,1])$:

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

для $f \in L^2([0,1])$ и $x \in [0,1]$. Эта связь была использована Сарасоном для характеризации операторов на $L^2([0,1])$, коммутирующих в оператором Вольтерры V.

Donald Sarason: Generalized interpolation in H^∞, *Trans. Amer. Math. Soc.* 127 (1967), 179–203.

Июнь

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
					1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30							

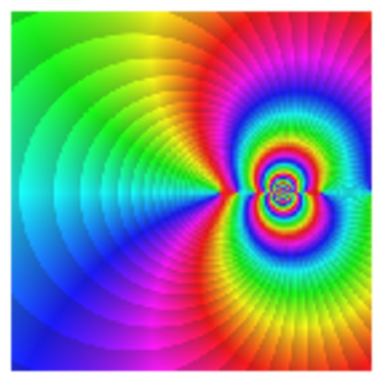
Теорема о короне

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – ограниченные аналитические функции в единичном диске $\mathbb{D}$ и пусть существует число $\delta > 0$ такое, что
$$|f_1| + |f_2| + \cdots + |f_n| \geq \delta \text{ on } \mathbb{D}.$$
Существуют ли в таком случае ограниченные аналитические функции $g_1, g_2, \ldots, g_n$ такие, что
$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_n g_n = 1 \text{ on } \mathbb{D}?$$

В 1962 году Леннарт Карлсон ответил на этот трудный вопрос утвердительно; попутно он придумал и развил важные новые методы в этой области. Теорема Карлсона называется теоремой о короне потому, что открытый единичный диск $\mathbb{D}$ можно тождествить с подмножеством определенного компактного множества (пространство максимальных идеалов алгебры ограниченных аналитических функций) и изначально было неясно, не окружен ли он в этом множестве своеобразной «короной». Вышеупомянутая теорема показывает, что нет; если говорить более техническим языком, $\mathbb{D}$ плотен в этот пространстве максимальных идеалов.

Когда $n = 1$, для ответа на поставленный вопрос достаточно элементарных свойств аналитических функций. Если $f_1, \ldots, f_n$ непрерывны на замыкании единичного диска, ответ также легко вывести, но из базовых фактов функционального анализа. Однако поведение аналитических функций в общем случае, как мы видим на картинке этого месяца, бывает достаточно сложным.

Пускай (a_n) – последовательность комплексных чисел в единичном диске и
$$\varphi_j(z) = \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}$$
– соответствующие им преобразования Мёбиуса. Мы уже видели, что эти функции отображают $\mathbb{D}$ на себя (см. июнь). Если $\sum(1 - |a_j|) < \infty$, произведение
$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{-\overline{a_j}}{|a_j|} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}$$
сходится и определяет так называемое *бесконечное произведение Бляшке*. Справа показано произведение Бляшке, разрывное в единственной точке. На титульной картинке показано приближение к бесконечному произведению Бляшке, разрывному в каждой точке единичной окружности. Зная о существовании таких функций, проще понять, как нетривиально утверждение теоремы о короне. В 1979, Томас Вольф представил простое доказательство этой теоремы. В статье, посвященной Вольфу, Дон Сарасон писал, "Вести о его решении задачи о короне быстро распространились и сделали его знаменитым".



Thomas H. Wolff (1954 – 2000)

родился в Нью-Йорке. В бытность студентом в Гарварде, он часто играл в покер со своим однокурсником Биллом Гейтсом. В 1979 году в Беркли он получил кандидатскую степень, его руководителем был Дон Сарасон (см. июнь). Большую часть своей карьеры он провел в должности профессора математики в Калтехе, хотя он также занимал эту должность в Нью-Йоркском институте Куранта с 1986 по 1988 года и в Беркли в 1992-1995. Он внес весомый вклад во многие области исследования; хронологически первой из них была теория алгебр функций, которую он пополнил новым доказательством теоремы о короне. К другим областям относятся гармонический анализ, уравнения в частных производных, теория потенциала и комплексный анализ. В 1985 он получил Салемскую премию, которой награждались молодые математики за выдающиеся достижения в области анализа. В 1999 году ему вручили премию Бёхера, присуждаемую за наиболее значительные работы по анализу. 31 июля 2000 года Вольф погиб в автомобильной аварии, ему было сорок шесть лет. Как писал Питер Джонс, "Раза за разом Том Вольф брался за центральную проблему какой-нибудь области и решал её. Несколько полученных им результатов – и эта область менялась навсегда. Тогда Том переключался на совершенно новое поле деятельности, а все остальные аналитики тратили годы, чтобы его догнать".

Т. Х. Вольф

Июль

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31											

Функции с заданным значением на границе

С помощью интегральной формулы Коши можно восстановить голоморфную функцию в единичном диске $\mathbb{D}$ по ее значению на границе – однако, это значение на границе не может быть произвольным: из интегральной формулы Шварца (см. август 2014) следует, что голоморфная в $\mathbb{D}$ функция определяется с точностью до чисто мнимой аддитивной константы вещественной частью $\operatorname{Re} f$ своего значения на границе. Аналогично, функцию можно восстановить по мнимой части ее значения на границе.

Для *аргумента* $\arg f$ и *фазы* $f/\|f\| = \psi$ значений голоморфной функции на границе единичного диска $\partial\mathbb{D}$ ситуация сложнее. Например, для непрерывной функции $\psi : \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ ограничения накладывает *принцип аргумента*: поскольку число обмотки ψ, $\operatorname{wind}\psi$, равно число нулей f в $\mathbb{D}$, решения существуют только для $\operatorname{wind}\psi \geq 0$. Если $\operatorname{wind}\psi = 0$, решение существует и определено с точностью до положительного постоянного множителя (и лежит в пространстве Харди H^p для любого $p : 1 \leq p < \infty$). Если же число обмотки n положительно, то существуют решения, обнуляющиеся на любом наперед заданного множестве n точек.

Для исследования граничной задачи, в которой фаза разрывна, нужны более тонкие методы, центральную роль в них играет изучение свойств специальных операторов. Одним из первопроходцев в этой деятельности был Пол Халмош, который соединил в своих работах методы теории функций, функционального анализа и теории операторов. Этот сплав подходов позволяет по-новому взглянуть на граничную задачу и связанные с ней и до сих пор влияет на развитие этой исключительно богатой области.

В этом месяце иллюстрация изображает фазовый портрет голоморфной в единичном диске функции

$$f(z) = c \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k - z}{a_k + z} \right)^{s_k}, \qquad |a_k| = 1,\ s_k \in \mathbb{R}.$$

Точки $\pm a_k$ разделяют единичную окружность на дуги, на которых фаза f постоянна, и меняется скачками по $\pm s_k \pi$ в $\pm a_k$. Такое поведение на границе подчеркивает постоянство функции на лучах, расходящихся из центра круга.

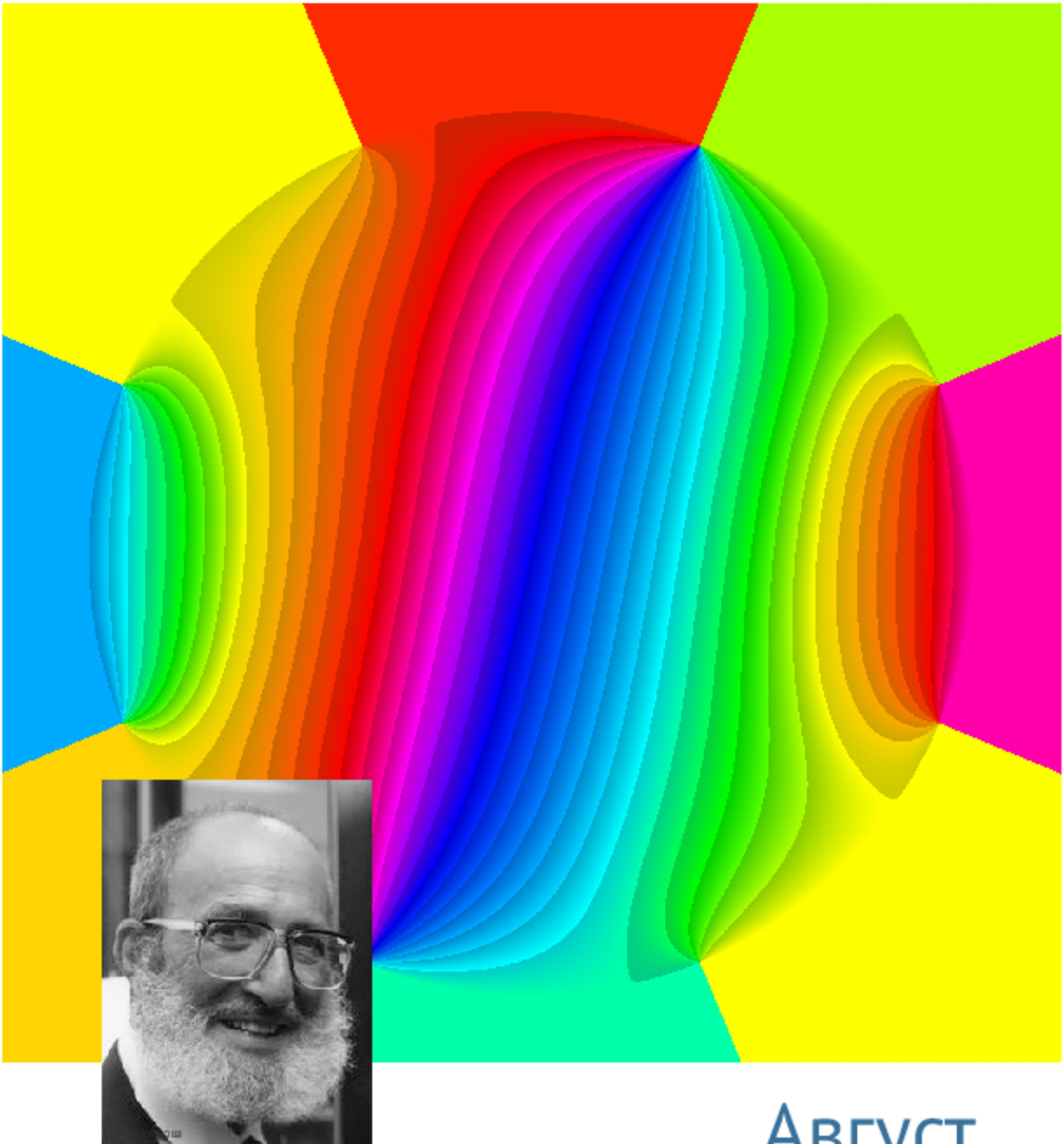
Пол Халмош (1916 – 2006)

родился в Будапеште. Его мать умерла, когда ему было шесть месяцев, а отец, осознавая, как опасно оставаться в Венгрии, в 1924 году переехал в Соединенные Штаты. Согласно воспоминаниям Халмоша, их семья воссоединилась в Чикаго в 1929 году. Халмош учился в Иллинойском университете в Урбана-Шампейне. Под руководством Джозефа Дуба он защитил кандидатскую диссертацию. Затем Халмош стал ассистентом фон Неймана а Институте перспективных исследований. В соавторстве они написали статью лекции фон Неймана вдохновили Халмоша на написание его первой книги *Конечномерные векторные пространства*. Затем Халмош преподавал в Сируказах, в университете Чикаго и университете Мичигана. В 1968 он в течение года возглавлял кафедру в университете Гавайев, а затем до 1985 года работалв университете Индианы, откуда он перешел в университет в Санта-Кларе.

Широко известен вклад Халмоша в теорию операторов, эргодическую теорию и функциональный анализ. По словам Джона Конвея, "что мне всегда казалось удивительным, так это необычайно большое количество тем и задач, которые сейчас находятся в центре внимания исследователей и которые были впервые упомянуты в его работах". Также Халмошу принесла славу его преподавательская и просветительская деятельность. Помимо *Конечномерных векторных пространств*, он также написал *Теорию меры*, *Наивную теорию множеств*, *Сборник задач по гильбертовым пространствам* и другие. За свою популяризаторскую деятельность он получил премию Стила, приз Математической ассоциации Америки за преподавательские достижения, премию Шовене, премию Полиа, и дважды - премию Лестера Форда.

Халмош и его жена пожертвовали 4,000,000 долларов на реконструкцию Carriage House Conference Center в Вашингтоне и на поддержку проводимых в нём программ Математической ассоциации. В знак признания просветительских заслуг Халмош Математическая ассоциация учредила премию Пола Халмоша - Лестера Форда.

Ewing, J. and Gehring, F. W. eds. Paul Halmos, Celebrating 50 years of mathematics. Springer Science & Business Media, 2012. p. 155



Август

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31								

Сентябрь

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
						1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30						

К. Садоски

Октябрь

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31										

Ядро Фейера

Майская страница этого календаря была посвящена неравенству Гронуолла-Джексона-Фейера, предложенному Фейером в 1910 году. Страница текущего месяца содержит больше информации о работе самого Фейера.

Ряд Фурье функции f может быть записан следующим образом:

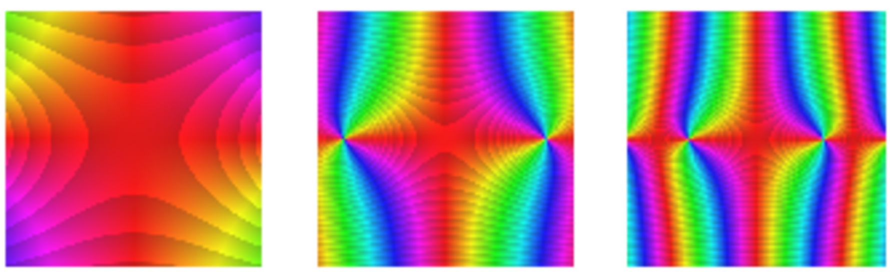
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}, \quad \text{where } \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Это представление полезно во многих задачах, включая распространение волн на струне и нагрев металлического кольца.

Теорема Фейера утверждает, что для непрерывной функции f с периодом 2π последовательность функций (σ_n) равномерно сходится к f, где σ_n – это среднее значение частичных сумм $s_0, \ldots, s_{n-1}$ ряда Фурье для f. Кроме того, Фейер показал, что

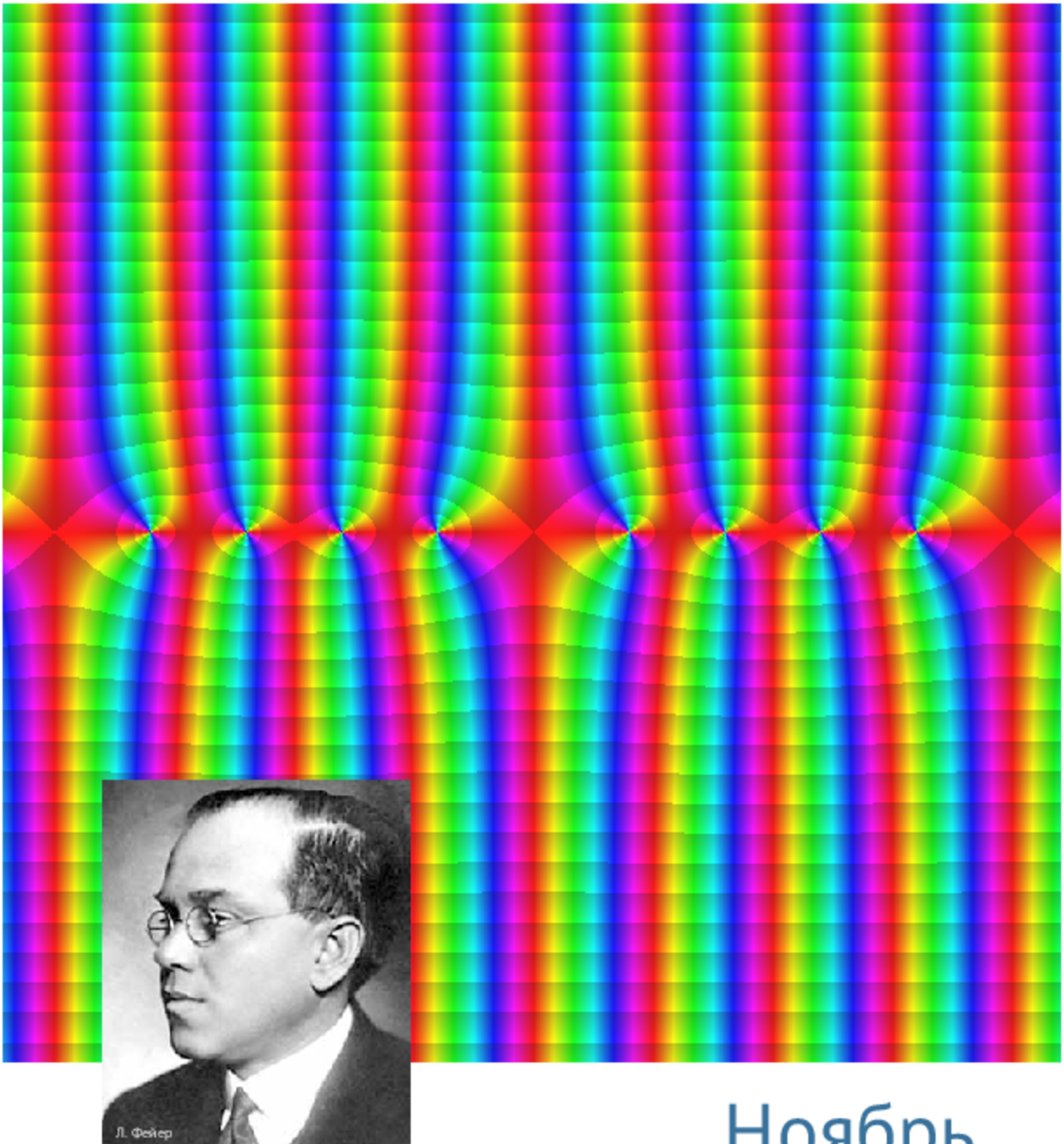
$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_n(t) dt, \quad \text{где } F_n(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$$

называется *ядром Фейера*. Замечательным следствием из результатов Фейера является аппроксимационная теорема Вейерштрасса: любая непрерывная функция на отрезке может быть равномерно приближена многочленами. Заменяя x комплексной переменной z, мы получаем комплексификацию ядра Фейера. Ниже изображены фазовые портреты для $n = 1,3$ и 5. На иллюстрации месяца также изображено ядро Фейера F_5, но на большей области: $(|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| < 7)$.



Липот Фейер (1880 – 1959)

родился в городе Печ (Венгрия), в семье Виктории Гольдбергер и Самюэля Вайса. Он вырос в еврейской семье и примерно в 1900 году сменил фамилию (в переводе с немецкого языка "вайс" означает белый, а "фейер" - соответствующее слово в венгерском языке), чтобы она звучала по-венгерски. Фейер учился в Будапештском университете технологий и экономики, за исключением одного года, проведенного в Берлинском университете. Именно там Фейер под влиянием Германа Шварца занялся исследованием сходимости рядов Фурье, доказав "Теорему Фейера". Его диссертация также содержала несколько важных следствий этой теоремы. После зимы 1902-3 года, проведенной в Геттингене, Фейер вернулся в Венгрию, и преподавал в Будапештском университете в 1903-1905 годах. Затем, до 1911 года, он был преподавателем в Коложваре, после чего возглавил кафедру математики Будапештского университета. Фейер работал в области гармонического анализа, уделяя много внимания рядам Фурье. В 1944 году Фейера вынудили уйти в отставку из-за его еврейского происхождения. Его пригнали к месту расстрела евреев, расположенному на берегу Дуная, но один из офицеров его спас. Умер он в 1959 году. Фейер был членом Геттингенской, Баварской и Польской академий наук. Он был научным руководителем Джона фон Неймана, Пала Эрдёша, Дьердя Пойа, Марселя Риса, Габора Сегё и Пала Турана. В 1948 году стал лауреатом премии Кошута - венгерской государственной премии, выдаваемой за выдающиеся достижения в науке, культуре и искусстве. В некрологе Фейера в жунале Лондонского математического общества Пойа написал: "Почему же сейчас так много венгерских математиков? Много людей задавали этот вопрос, на который, как мне кажется, никто не может ответить полностью. Однако, существовали две причины, которые явно повлияли на венгерскую математику, и одной из них являлся Леопольд Фейер, его работы, его личность."



Ноябрь

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30								

Диск Зигеля

Итерации комплексных фунций рассматривались в этом календаре уже несколько раз (июль 2012, февраль 2014, февраль 2016, декабрь 2018). Если рациональную функцию f (степени большей 1) применять к точке z на комплексной плоскости или сфере Римана, порождая последовательность $z, f(z), f^2(z) = f(f(z)), \ldots$, то возможны всего две альтернативы, определяемые точкой z:

(1) Для достаточно близких к z точек и для всех натуральных чисел n, n-ая итерация функции f дает точку, близкую к $f^n(z) = f(f(\cdots f(z)))$. Такие точки z образуют *множество Фату*, F, функции f.

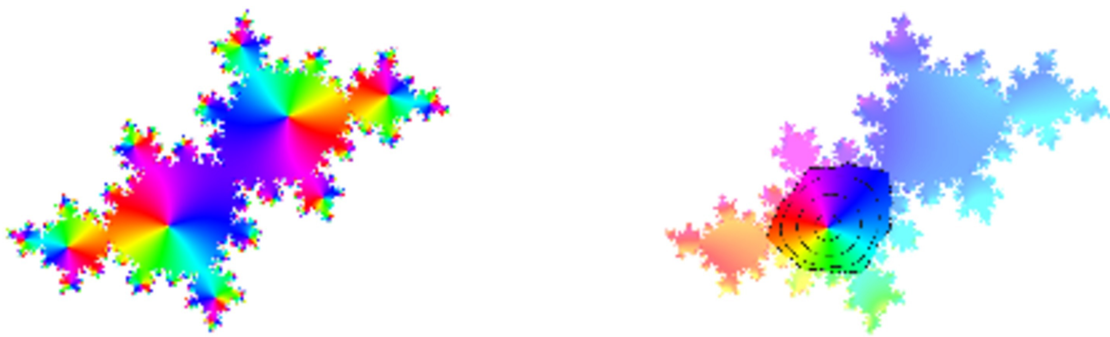
(2) Произвольно близкие к z начальные значения могут задать совершенно разные последовательности. Такие точки z образуют *множество Жюлиа*, J, функции f.

Обычно, определить принадлежность точки z_0 множеству Фату или Жюлиа очень затруднительно. Однако существуют простые признаки для неподвижной точки $z_0 = f(z_0)$. В этом случае достаточно рассмотреть производную $\lambda = f'(z_0)$. Если $|\lambda| < 1$, то точка z_0 является *притягивающей*, и для любой достаточно близкой к z_0 начальной точки z, последовательность $f^n(z_0)$ сходится к z_0. Таким образом, z_0 лежит в множестве Фату функции f. Если же $|\lambda| > 1$, то точка z_0 является *отталкивающей* и принадлежит множеству Жюлиа.

Ситуация становится гораздо сложнее если точка z_0 является *неопределенной*, то есть $|\lambda| = 1$. В этом случае z_0 лежит в множестве Фату тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности точки z_0 *уравнение Шредера*

$$\varphi(f(z)) = \lambda\varphi(z)$$

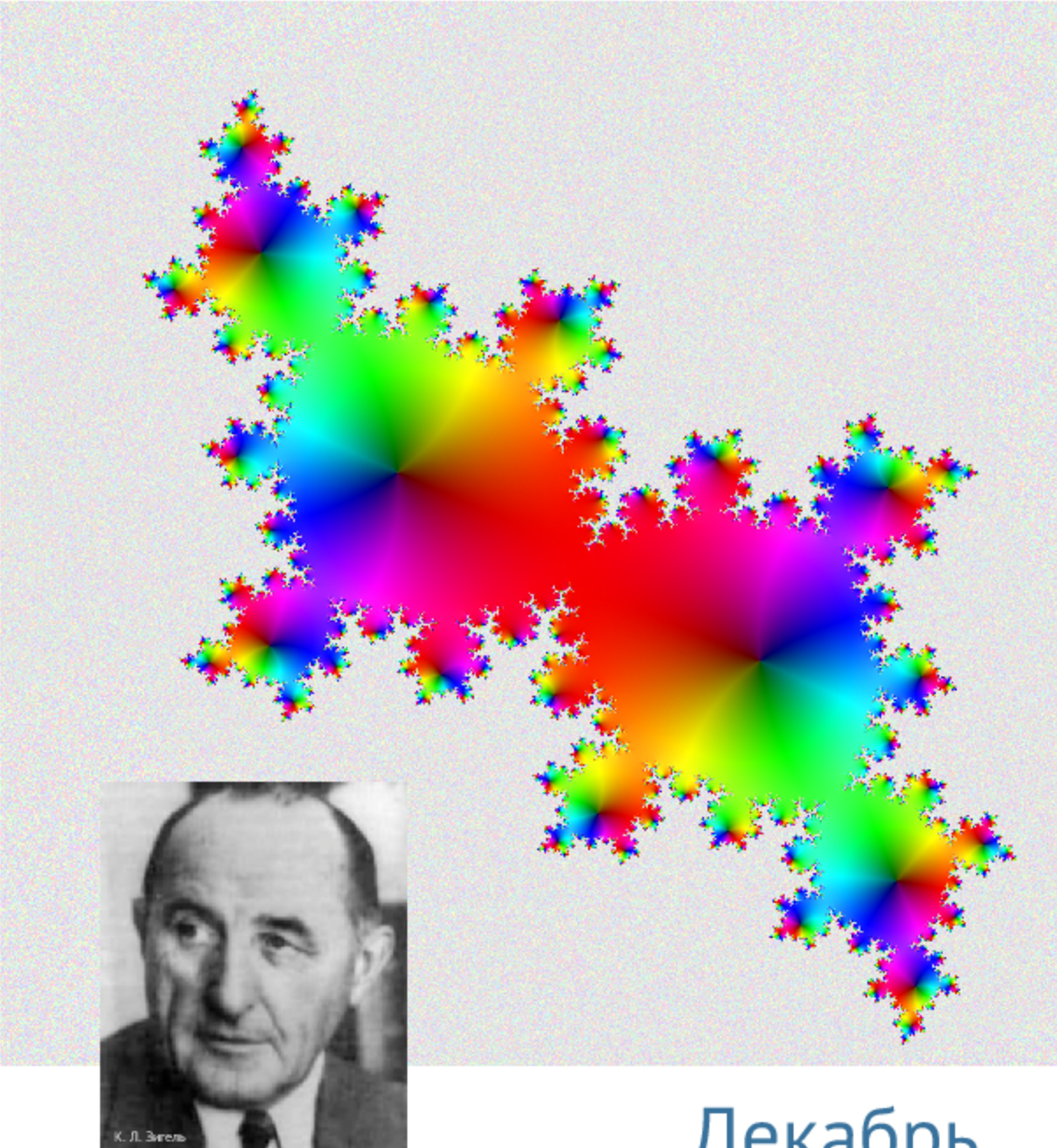
имеет голоморфное решение, удовлетворяющее условиям: $\varphi(z_0) = 0$ и $\varphi'(z_0) = 1$. В 1942 году Зигель установил существование таких решений уравнения Шредера для конкретных значений λ. Функция φ отображает компоненту S точки z_0 множества Фату конформно на круг. Множество S называется *диском Зигеля*, и функция f действует на нем как поворот вокруг z_0 на угол $\arg\lambda$.



Рассмотрим функцию $f(z) = z^2 + cz$, где $c = \mathrm{e}^{\pi(\sqrt{5}-1)\,\mathrm{i}}$. Для этой функции $z_0 = 0$ является неопределенной неподвижной точкой, лежащей в диске Зигеля. Слева изображен фазовый портрет функции f^{200} на множестве Фату. Справа изображена функция $f^{200} - z$, у которой z_0 является нулем. Соответствующий точке z_0 диск Зигеля ярко выделен, а три "круга" в нем инвариантны относительно "поворота", осущетвляемого функцией f.

Карл Людвиг Зигель (1896 – 1981)

родился в Берлине в семье почтового служащего. С 1915 года он изучал астрономию, физику и математику в родном городе. Он посещал лекции Фробениуса и Планка, и первый пробудил в нем интерес к теории чисел. Зигель сопротивлялся призыву в армию, и был определен на работу в психиатрическую лечебницу. Он продолжил обучение в 1919 году в Геттингене. Его диссертация, написанная под руководством Эдмунда Ландау, содержала усиление теоремы Туэ о приближениях иррациональных чисел, которое он получил на третьем семестре обучения. В 1922 Зигель назначен на должность профессора во Франкфурте. Несмотря на отстраненность от нацистского режима, Зигель в 1935 году вернулся в Германию после года, проведенного в Институте перспективных исследований в Принстоне. Вернувшись в Германию, он защищал своих коллег еврейского происхождения. В 1937 году его направили в Геттинген, но затем, в 1940 году, он иммигрировал в США через Норвегию. До возвращения в Геттинген в 1951 году он снова работал в Институте перспективных исследований. Зигель получил много значительных результатов в теории чисел, дзета-функции Римана, модулярных форм и небесной механике.



Декабрь

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
						1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31					

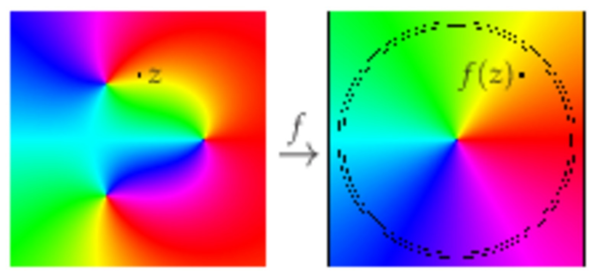
Complex Numbers and Colors

В этом девятом издании календаря «Complex Beauties» мы снова отправимся в прекрасный мир комплекснозначных функций. Каждый месяц мы представляем специальную функцию. На передней стороне каждой страницы показан фазовый портрет функции; на её обратной стороне мы объясняем связаное с ней математическое понятие. Наша цель - сделать текст доступным и для непосвященных; временами это довольно сложная задача. Тем не менее, всегда можно любоваться изображениями, чтобы получить представление о магии математических структур. Мы включаем биографические очерки о математиках, чья работа способствовала пониманию функций, представленных в этом месяце.

Мы благодарим авторов гостя в этом году: Шелдон Акслер (Сан-Франциско) представляет экзотический класс аналитических функций; Андрей Богатырёв (Москва) и Константин Метлов (Донецк) обьясняют использование комплексных функций при изучении магнитных вихрей.

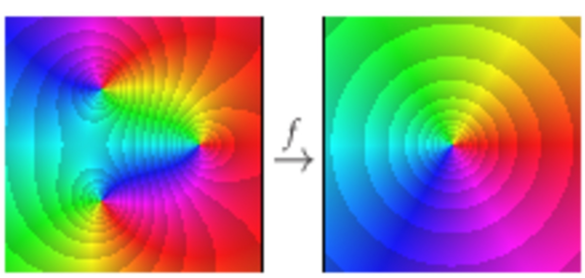
Построение *фазовых портретов* основано на интерпретации комплексных чисел z как точек на *Гауссовской плоскости*. Горизонтальную координату такой точки обозначают x и называют *вещественной частью* ($\mathrm{Re}\, z$); вертикальную координату обозначают y и называют *мнимой частью* ($\mathrm{Im}\, z$), и пишут $z = x + \mathrm{i}y$. по-другому положение точки z можно также задавать ее расстоянием от начала координат ($|z|$, *модуль* z) и азимутом ($\arg z$, *аргумент* z).

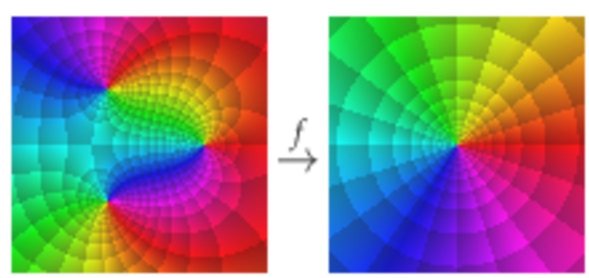
Фазовый портрет функции $f(z)$ комплексной переменной (на картинке слева) возникает, когда все точки z области определения f окрашиваются в соответствии с аргументом ее значения $w = f(z)$. (или



фазы $w/|w|$). Более точно, вначале цвета из цветового круга переносятся по лучам, исходящим из начала координат, на точки плоскости w (картинка справа). Таким образом, точкам с равным аргументом соответствует один и тот же цвет. Вторым шагом каждая точка z в области определения функции f окрашивается в тот же цвет, что и значение $f(z)$ в w-плоскости.

Фазовый портрет можно считать "отпечатками пальцев"функции. Хотя при этом остается только часть данных (аргумент), а другая часть (модуль) исчезает, функции важного класса („аналитические" или, более общо, „мероморфные") можно восстановить однозначно с точностью до нормировки.Определенные модификации цветового кодирования позволяют нам легче увидеть свойства функции.





В этом календаре мы используем в основном три различных схемы раскраски: фазовый портрет, описанный выше, и еще два варианта, показанные во втором ряду рисунков. Вариант слева добавляет к представлению модуль функции; версия справа кроме того подчеркивает сохранение углов при отображении.

Введение в теорию функций, проиллюстрированное фазовыми портретами, можно найти в книге E. Wegert, *Visual Complex Functions – An Introduction with Phase Portraits*, Springer Basel, 2012. Более подробная информация о календаре (в том числе и за предыдущие годы), как и о книге доступны на

www.mathe-kalender.de, www.visual.wegert.com.

Мы благодарим всех наших верных читателей и *Verein der Freunde und Förderer der TU Bergakademie Freiberg e. V.* за их неоценимую поддержку этого проекта.