"Утверждаю"
Директор ИВМ РАН, академик
________ В.П.Дымников
25.08. 2000г.

ПРОГРАММА
вступительных экзаменов в аспирантуру по специальности 01.01.07 – вычислительная математика

I. Линейная алгебра (1, 3)

1. Линейное пространство. Базис. Матрица линейного оператора. Элементарные матрицы.
2. Детерминант квадратной матрицы. Два определения ранга матрицы (в терминах линейной независимости строк и неравенства нулю миноров).
3. Система линейных уравнений. Критерий совместимости Кронекера-Капелли.
4. Собственные векторы и собственные числа линейного оператора. Нормальные операторы. Жорданова форма (без доказательства). Сингулярное разложение.
5. Билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы. Критерий Сильвестра (без доказательства).

II. Математический анализ (4, 5, 6)

1. Предел последовательности. Числовые ряды.
2. Предел функции. Дифференцируемость. Формула Тейлора. Ряд Тейлора.
3. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.
4. Интеграл Римана. Несобственные интегралы. Формулы Грина (без доказательства).
5. Ряды Фурье по тригонометрической системе. Сходимость рядов Фурье для кусочно-гладких функций. Порядок убывания коэффициентов Фурье для n- раз непрерывно-дифференцируемой функции. Равномерная сходимость ряда Фурье для непрерывно дифференцируемой функции. Теорема Вейерштрасса (о полноте). Многочлены Чебышева.

6. Функции одной комплексной переменной. Условие Коши-Римана. Интегральная формула Коши.

7. Степенные ряды. Первая теорема Абеля. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Эквивалентность дифференцируемости и регулярности функции в области.

8. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Особые точки. Понятие вычета в изолированной точке.

III. Функциональный анализ (8, 16)

1. Метрические пространства. Полнота. Непрерывные отображения. Компактные множества.

2. Принцип сжатых отображений. Метод последовательных отображений.

3. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства. Сильная и слабая сходимость. Задача о наилучшем приближении элементами выпуклого множества или подпространства. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

4. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора. Сходимость операторов. Обратимость. Ряд Неймана $\sum_k A^k$ и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора.

5. Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Принцип равномерной ограниченности. Теорема Банаха-Штейнгауза, ее приложения.

6. Теорема Рисса (для гильбертова пространства). Сопряженные, самосопряженные, симметричные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их свойства.

7. Свойства собственных значений и собственных функций для задачи на собственные значения $Au = \lambda u$, где A - самосопряженный, вполне непрерывный линейный оператор.

8. Квадратичные функционалы и обобщенные решения операторных уравнений.

IУ. Обыкновенные дифференциальные уравнения (9)

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для одного уравнения 1-го порядка и для системы "n" уравнений 1-го порядка с "m" неизвестными в нормальной форме (без

доказательства). Теорема существования и единственности для системы линейных уравнений 1-го порядка.

2. Линейные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Решение однородного уравнения. Решение неоднородного уравнения со специальной правой частью в виде квазиполинома. Уравнение Эйлера.

3. Решение однородной системы первого порядка с постоянными коэффициентами (случай простых корней).

4. Системы линейных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений однородного уравнения. Формула Лиувилля. Метод вариации произвольных постоянных для отыскания частного решения неоднородной системы. Структура общего решения.

У. Задачи математической физики (7, 10, 16)

1. Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики, постановки задач.

2. Обобщенное решение краевых задач для эллиптических уравнений в самосопряженной форме. Пространства функций W_p^k, $\overset{\circ}{W}{}_p^k$ Понятие о теоремах вложения.

3. Задача Штурма-Лиувилля. Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

4. Метод Фурье (метод разделения переменных) для волнового уравнения и уравнения теплопроводности. Обоснование метода на конкретных примерах (простейших). Теорема Стеклова (без доказательства).

5. Гармонические функции и их свойства.

УI. Методы вычислительной математики

1. Численный анализ (11, 12, 18)

1.1. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

1.2. Интерполяция функции одного переменного с помощью кубических сплайнов. Кусочно-кубическая интерполяция со сглаживанием. Гладкие восполнения. Сходимость сплайн-функций.

1.3. Численное интегрирование.

2. Численные методы линейной алгебры (2, 11, 12, 16, 18)

2.1. Разложение матрицы на треугольные множители. Компактная схема. Метод факторизации. Число обусловленности матрицы как мера устойчивости процесса решения системы уравнений.

2.2. Итерационные методы решения систем линейных уравнений. Сходимость и оптимизация итерационных методов.

2.3. Метод последовательной верхней релаксации, чебышевские итерационные методы, метод минимальных невязок, метод сопряженных градиентов.

2.4. Теоремы о сходимости для итерационных методов.

2.5. Задача на собственные значения. Степенный метод. Метод вращений.

3. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (12, 13, 17)

3.1. Конечно-разностные методы. Методы Рунге-Кутта (на примере явной схемы 4-го порядка аппроксимации). Линейные многошаговые методы. Предиктор-корректор методы (на примере метода Адамса-Бэшворта-Мултона 2-го порядка аппроксимации).

3.2. Сходимость и устойчивость конечно-разностных методов. Понятия устойчивости, абсолютной устойчивости. Порядок аппроксимации, погрешность аппроксимации. Сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной (на примере явной схемы Рунге-Кутта 2-го порядка аппроксимации).

3.3. Жесткие задачи. Явные и неявные методы, их особенности. Применение линейных многошаговых методов.

4. Разностные и проекционно-сеточные методы решения задач математической физики (11,12,13,14,15,16,17,19)

4.1. Основные понятия теории разностных схем (сетки, сеточные функции, аппроксимация, устойчивость, сходимость). Разностные схемы для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Двухслойные и трехслойные схемы, их устойчивость. Схема Кранка-Николсон для эволюционного уравнения. Оценка порядка точности. Консервативные разностные схемы. Понятие об экономичных разностных схемах.

4.2. Вариационные и проекционные методы решения задач математической физики (методы Ритца, Бубнова-Галёркина, наименьших квадратов, Галёркина-Петрова). Аппроксимация финитными функциями (кусочно-линейными, полилинейными, эрмитовыми базисными функциями). Проекционно-сеточные схемы для эллиптических, параболических, гиперболических задач. Теоремы сходимости.

4.3. Методы расщепления для нестационарных задач. Методы стабилизации, предиктор-корректор, покомпонентного расщепления. Метод двуциклического покомпонентного расщепления.

Литература

1. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М., Наука, 1980.

2. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М., Наука, 1977.

3. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. М., Наука, 1983.

4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М., Высшая школа, 1981, т.I.

5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М., Высшая школа, 1981, т.II.

6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М., Физматиз, 1965.

7. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных, М., Наука, 1983.

8. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., Наука, 1980.

9. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1980.

10. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., Наука, 1981.

11. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М., Наука, 1980.

12. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М., Наука, 1987.

13. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М., Изд. МФТИ, 1994.

14. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., Наука, 1981.

15. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., Наука, 1977.

16. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. М., ВИНИТИ, 1994.

17. Самарский А.А. Введение в численные методы. М., Наука, 1982.

18. Тыртышников Е.Е. Краткий курс численного анализа. М., ВИНИТИ, 1994.