



" Утверждаю"
ИИМ РАН, академик

В. П. Дымников

29 апреля 2007г.

ПРОГРАММА

вступительных экзаменов в аспирантуру по специальности 05.13.18 –
математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

I. Линейная алгебра (1, 3)

1. Линейное пространство. Базис. Матрица линейного оператора. Элементарные матрицы.
2. Детерминант квадратной матрицы. Два определения ранга матрицы (в терминах линейной независимости строк и неравенства нулю миноров).
3. Система линейных уравнений. Критерий совместимости Кронекера-Капелли.
4. Собственные векторы и собственные числа линейного оператора. Нормальные операторы. Жорданова форма (без доказательства). Сингулярное разложение.
5. Билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы. Критерий Сильвестра (без доказательства).

II. Математический анализ (4, 5, 6)

1. Предел последовательности. Числовые ряды.
2. Предел функции. Дифференцируемость. Формула Тейлора. Ряд Тейлора.
3. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.
4. Интеграл Римана. Несобственные интегралы. Формулы Грина (без доказательства).

III. Функциональный анализ (8, 16)

1. Метрические пространства. Полнота. Непрерывные отображения. Компактные множества.
2. Принцип сжатых отображений. Метод последовательных отображений.
3. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства. Сильная и слабая сходимость. Задача о наилучшем приближении элементами

выпуклого множества или подпространства. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

4. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора. Сходимость операторов. Обратимость. Ряд Неймана $\sum A^k$ и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора.

5. Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Принцип равномерной ограниченности. Теорема Банаха-Штейнгауза, ее приложения.

6. Теорема Рисса (для гильбертова пространства). Сопряженные, самосопряженные, симметричные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их свойства.

7. Свойства собственных значений и собственных функций для задачи на собственные значения $Au = \lambda u$, где A - самосопряженный, вполне непрерывный линейный оператор.

8. Квадратичные функционалы и обобщенные решения операторных уравнений.

IV. Обыкновенные дифференциальные уравнения (9)

1. Решение однородной системы первого порядка с постоянными коэффициентами (случай простых корней).

2. Системы линейных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений однородного уравнения. Формула Лиувилля. Метод вариации произвольных постоянных для отыскания частного решения неоднородной системы. Структура общего решения.

V. Задачи математической физики (7, 10, 16)

1. Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики, постановки задач.

2. Обобщенное решение краевых задач для эллиптических уравнений в самосопряженной форме. Пространства функций $W_p^k, \overset{0}{W}_p^k$. Понятие о теоремах вложения.

3. Задача Штурма-Лиувилля. Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

4. Метод Фурье (метод разделения переменных) для волнового уравнения и уравнения теплопроводности. Обоснование метода на конкретных примерах (простейших). Теорема Стеклова (без доказательства).

VI. Методы вычислительной математики

1. Численный анализ (11, 12, 18)

1.1. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

1.2. Интерполяция функции одного переменного с помощью кубических сплайнов. Кусочно-кубическая интерполяция со сглаживанием. Гладкие восполнения. Сходимость сплайн-функций.

1.3. Численное интегрирование.

2. Численные методы линейной алгебры (2, 11, 12, 16, 18)

2.1. Разложение матрицы на треугольные множители. Компактная схема. Метод факторизации. Число обусловленности матрицы как мера устойчивости процесса решения системы уравнений.

2.2. Итерационные методы решения систем линейных уравнений. Сходимость и оптимизация итерационных методов.

2.3. Метод последовательной верхней релаксации, чебышевские итерационные методы, метод минимальных невязок, метод сопряженных градиентов.

2.4. Теоремы о сходимости для итерационных методов.

2.5. Техника предобуславливания метода сопряженных градиентов для решения систем с симметричными положительно определенными разреженными матрицами.

2.6. Задача на собственные значения. Степенный метод. Метод вращений.

3. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (12, 13, 17)

3.1. Конечно-разностные методы. Методы Рунге-Кутты (на примере явной схемы 4-го порядка аппроксимации). Линейные многошаговые методы. Предиктор-корректор методы (на примере метода Адамса-Бэшворта-Мултона 2-го порядка аппроксимации).

3.2. Сходимость и устойчивость конечно-разностных методов. Понятия устойчивости, абсолютной устойчивости. Порядок аппроксимации, погрешность аппроксимации. Сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной (на примере явной схемы Рунге-Кутты 2-го порядка аппроксимации).

3.3. Жесткие задачи. Явные и неявные методы, их особенности. Применение линейных многошаговых методов.

4. Разностные и проекционно-сеточные методы решения задач математической физики (11,12,13,14,15,16,17,19)

4.1. Основные понятия теории разностных схем (сетки, сеточные функции, аппроксимация, устойчивость, сходимость). Разностные схемы для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Двухслойные и трехслойные схемы, их устойчивость. Схема Кранка-Николсон для эволюционного уравнения. Оценка порядка точности. Консервативные разностные схемы. Понятие об экономичных разностных схемах.

4.2. Вариационные и проекционные методы решения задач математической физики (методы Рунта, Бубнова-Галёркина, наименьших квадратов, Галёркина-Петрова). Аппроксимация финитными функциями (кусочно-линейными, полилинейными, эрмитовыми базисными функциями). Проекционно-сеточные схемы для эллиптических, параболических, гиперболических задач. Теоремы сходимости.

4.3. Методы расщепления для нестационарных задач. Методы стабилизации, предиктор-корректор, покомпонентного расщепления. Метод двухциклического покомпонентного расщепления.

VII. Вычислительные и операционные системы

1. Классификация ЭВМ и вычислительных систем по их архитектуре и целям применения. Понятие о мультипроцессорных вычислительных системах и вычислительных комплексах с параллельной обработкой данных.

2. Общие функциональные и технические характеристики микропроцессоров, суперЭВМ и вычислительных средств специальной ориентации (матричные процессоры, векторные конвейерные и потоковые вычислительные системы).

3. MPI-библиотека для параллельного программирования.

4. Понятие о сетях ЭВМ, удаленной обработке и терминальном доступе.

5. Режимы функционирования вычислительных систем, структура и функции операционных систем. Основные блоки и модули.

6. Операционные системы программирования, типовые компоненты СП: языки, трансляторы, редакторы связей, отладчики, тестовые редакторы.

Литература

1. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М., Наука, 1980.
2. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М., Наука, 1977.
3. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. М., Наука, 1983.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М., Высшая школа, 1981, т.1.

5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М., Высшая школа, 1981, т. II.

6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М., Физматиз, 1965.

7. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных, М., Наука, 1983.

8. Треногий В.А. Функциональный анализ. М., Наука, 1980.

9. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1980.

10. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., Наука, 1981.

11. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М., Наука, 1980.

12. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М., Наука, 1987.

13. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М., Изд. МФТИ, 1994.

14. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., Наука, 1981.

15. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., Наука, 1977.

16. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. М., ВИНТИ, 1994.

17. Самарский А.А. Введение в численные методы. М., Наука, 1982.

18. Тыртышников Е.Е. Краткий курс численного анализа. М., ВИНТИ, 1994.

Согласен

СЗЗ / Чиряков Е.В.

 / Киреев Р.А.