УДК 517.54

Замкнутая формула для емкости нескольких отрезков на прямой[1]

А. Б. Богатырев[2,3], О. А. Григорьев[2,4]

Поступило 21 ноября 2016 г.

Предлагается универсальная замкнутая формула для емкости объединения нескольких отрезков прямой в терминах тэта-функций. Для двух отрезков формула впервые получена Н.И. Ахиезером (1930); три отрезка были рассмотрены в работе А. Себбара и Т. Фаллиеро (2001).

DOI: 10.1134/S0371968517030050

Для физиков емкость — это коэффициент, связывающий заряд и напряжение на конденсаторе, либо энергия электрического поля внутри конденсатора при единичном напряжении. Для математиков емкость — это определенная характеристика множества, которая показывает, насколько оно “массивно”. Это понятие оказывается очень полезным в теории аппроксимации, геометрической теории функций, уравнениях в частных производных, теории потенциала и т.д. Емкость компактного подмножества комплексной плоскости совпадает с его константой Чебышева, трансфинитным диаметром, конформным радиусом (для односвязных областей); простая формула связывает емкость с постоянной Робена [1, 9, 12].

Разнообразие областей математики, в которых возникает понятие емкости, обусловило и многочисленность подходов к ее вычислению. Для множеств общего вида разработаны различные методы вычисления емкости (см., например, [18, 17, 3]). В настоящей статье речь пойдет о емкости объединения отрезков прямой, поэтому отметим лишь результаты, касающиеся данного случая. В работе Видома [18] была найдена формула, выражающая емкость такого множества в виде абелева интеграла. Статья [2] содержит формулу, позволяющую вычислять емкость системы отрезков через значения эффективно определяемых функций, описывающих динамику периодической цепочки Тоды. В [14] емкость выражена в терминах автоморфных функций. Наконец, в работах [1, 10], результаты которых обобщаются ниже, получены явные компактные выражения для емкости двух и трех отрезков соответственно в терминах тэта-функций на некоторой римановой поверхности (в [10] эта техника развивается и для большего числа отрезков, но приводимые формулы требуют вычисления дополнительных параметров поверхности).

Практическая польза от существования различных формул для одной величины (в данном случае емкости) состоит не только в разной степени удобства их применения в разных ситуациях. Существуют вычислительные неустойчивости, которые присущи численным методам решения многих задач комплексного анализа, таких как поиск корней многочлена или нахождение образов точек при конформном отображении (печально известное явление краудинга). Если есть несколько методик расчета, среди них можно выбрать более устойчивые.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10349).

[2] Институт вычислительной математики РАН, Москва, Россия.

[3] Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: ab.bogatyrev@gmail.com

[4] E-mail: guelpho@mail.ru

Пусть E — объединение $g+1$ отрезков на прямой:

$$E := \bigcup_{j=0}^{g} [e_{2j+1}, e_{2j+2}], \tag{1}$$

причем последовательность конечных точек e_j этих отрезков строго возрастает. Мы знаем, что емкость множества не зависит от переносов и однородна относительно растяжений, поэтому без ограничения общности мы считаем, что крайняя левая точка множества E находится в нуле, а крайняя правая — в единице:

$$e_1 = 0, \qquad e_{2g+2} = 1. \tag{2}$$

Емкость $C := \mathrm{Cap}(E)$ определена в терминах асимптотики функции Грина $G_E(x)$ этого множества на бесконечности:

$$G_E(x) = \log|x| - \log C + o(1), \qquad x \to \infty. \tag{3}$$

Мы собираемся вывести замкнутую формулу для $\mathrm{Cap}(E)$ в терминах римановых тэта-функций, поэтому необходимо ввести несколько стандартных конструкций из теории римановых поверхностей.

1. РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ И ТЭТА-ФУНКЦИИ

Риманова поверхность, возникающая в данной задаче, — это двулистное накрытие сферы, разветвленное в концах отрезков из E. Это компактная поверхность $\mathcal{X}$ рода g, аффинная часть которой удовлетворяет уравнению

$$w^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (x - e_j). \tag{4}$$

Поверхность допускает гиперэллиптическую инволюцию $J(x,w) := (x, -w)$ с $2g+2$ фиксированными точками $P_s = (e_s, 0)$ и антиконформную инволюцию (отражение) $\overline{J}(x,w) := (\overline{x}, \overline{w})$. Неподвижные точки отражения $\overline{J}$ образуют *вещественные овалы* на поверхности; неподвижные точки другой антиконформной инволюции $J\overline{J}$ называют *ковещественными овалами*. Ковещественные овалы накрывают множество E, вещественные — его дополнение $\widehat{\mathbb{R}} \setminus E$; в частности, две точки $\infty_\pm := (+\infty, \pm\infty)$ лежат над бесконечностью.

Мы вводим симплектический базис гомологий кривой $\mathcal{X}$, как показано на рисунке. Двойственный базис голоморфных дифференциалов удовлетворяет условиям нормировки

$$\int_{a_j} du_s := \delta_{js} \tag{5}$$

и формирует матрицу периодов

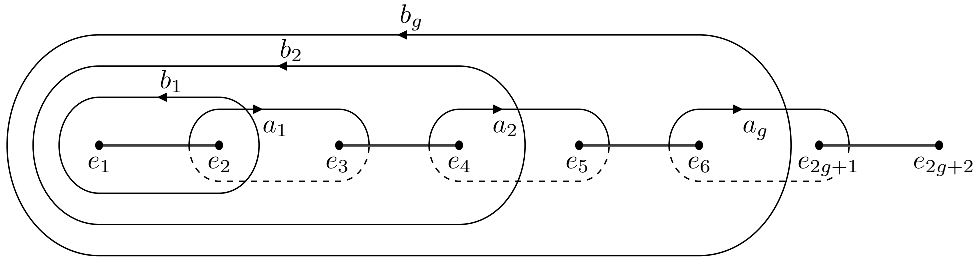
$$\int_{b_j} du_s =: \Pi_{js}. \tag{6}$$

Легко проверить, что введенные базисы циклов и дифференциалов ведут себя при инволюциях следующим образом:

$$\overline{J}a_s = a_s, \qquad \overline{J}b_s = -b_s, \qquad Ja_s = -a_s, \qquad Jb_s = -b_s, \tag{7}$$

$$\overline{J}du_s = \overline{du_s}, \qquad Jdu_s = -du_s, \qquad s = 1, \ldots, g. \tag{8}$$

Циклы, выдерживающие отражение $\overline{J}$, называют *четными*, а циклы, меняющие знак, — *нечетными*. Дифференциалы, обладающие свойством (8), обычно называют *вещественными*,



Симплектический базис 1-циклов на кривой $\mathcal{X}$

а их периоды вдоль четных/нечетных циклов являются вещественными/чисто мнимыми соответственно (см. [4, 6]). В частности, матрица периодов Π является чисто мнимой. Согласно стандартным фактам теории [11] матрица периодов симметрична, а ее мнимая часть положительно определена.

По матрице периодов мы определяем комплексный g-мерный тор, называемый якобианом комплексной кривой $\mathcal{X}$:

$$\mathrm{Jac}(\mathcal{X}) := \mathbb{C}^g/L(\Pi), \qquad L(\Pi) := \mathbb{Z}^g + \Pi\mathbb{Z}^g. \tag{9}$$

Отображение Абеля–Якоби вкладывает кривую в ее якобиан:

$$u(P) := \int_{P_1}^{P} du \bmod L(\Pi) \in \mathrm{Jac}(\mathcal{X}), \qquad du := (du_1, du_2, \ldots, du_g)^{\mathrm{t}}. \tag{10}$$

Удобно представлять точки $u \in \mathbb{C}^g$ в виде так называемых тэта-характеристик, т.е. пары действительных вектор-столбцов ϵ, ϵ':

$$u = \frac{1}{2}(\epsilon' + \Pi\epsilon). \tag{11}$$

Точки якобиана в этих обозначениях соответствуют паре действительных векторов с элементами, взятыми по модулю 2. Точки второго порядка — это $(2 \times g)$-матрицы с бинарными элементами. В частности, образы неподвижных точек P_s гиперэллиптической инволюции при отображении Абеля–Якоби (10) имеют вид, представленный в табл. 1, где E_s и Π_s — столбцы единичной матрицы и матрицы периодов соответственно. Обращаем внимание, что здесь используется необщепринятое обозначение для тэта-характеристики в виде двух вектор-столбцов, написанных друг после друга (иногда используется транспонированная матрица).

Следующий абсолютно сходящийся ряд Фурье называют тэта-функцией:

$$\theta(u;\Pi) := \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \exp\{2\pi i m^{\mathrm{t}}u + \pi i m^{\mathrm{t}}\Pi m\}, \qquad u \in \mathbb{C}^g, \quad \Pi = \Pi^{\mathrm{t}} \in \mathbb{C}^{g\times g}, \quad \mathrm{Im}\,\Pi > 0. \tag{12}$$

Часто удобно рассматривать тэта-функцию с характеристикой:

$$\begin{aligned}\theta[2\epsilon, 2\epsilon'](u,\Pi) &:= \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \exp\bigl\{2\pi i(m+\epsilon)^{\mathrm{t}}(u+\epsilon') + \pi i(m+\epsilon)^{\mathrm{t}}\Pi(m+\epsilon)\bigr\} = \\ &= \exp\bigl\{i\pi\epsilon^{\mathrm{t}}\Pi\epsilon + 2i\pi\epsilon^{\mathrm{t}}(u+\epsilon')\bigr\}\,\theta(u+\Pi\epsilon+\epsilon';\Pi), \qquad \epsilon,\epsilon' \in \mathbb{R}^g.\end{aligned} \tag{13}$$

Мы не будем указывать матрицу Π как аргумент функции в том случае, когда это не вызывает неопределенности. Также мы будем иногда опускать векторный аргумент u, полагая в этом случае $u = 0$. При этом значение функции называется тэта-константой (зависимость от матрицы периодов остается).

Таблица 1. Образы неподвижных точек P_s гиперэллиптической инволюции при отображении Абеля–Якоби (10)

P_s	$u(P_s) \bmod L(\Pi)$	$[\epsilon,\epsilon']^{\mathrm{t}}$	P_s	$u(P_s) \bmod L(\Pi)$	$[\epsilon,\epsilon']^{\mathrm{t}}$
P_1	0	$\begin{bmatrix}0\,0\dots0\\0\,0\dots0\end{bmatrix}$	P_6	$(\Pi_3+E_1+E_2)/2$	$\begin{bmatrix}0\,0\,1\,0\dots\\1\,1\,0\,0\dots\end{bmatrix}$
P_2	$\Pi_1/2$	$\begin{bmatrix}1\,0\,0\dots\\0\,0\,0\dots\end{bmatrix}$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
P_3	$(\Pi_1+E_1)/2$	$\begin{bmatrix}1\,0\,0\dots\\1\,0\,0\dots\end{bmatrix}$	P_{2g}	$(\Pi_g+E_1+E_2+\dots+E_{g-1})/2$	$\begin{bmatrix}0\dots0\,1\\1\dots1\,0\end{bmatrix}$
P_4	$(\Pi_2+E_1)/2$	$\begin{bmatrix}0\,1\,0\dots\\1\,0\,0\dots\end{bmatrix}$	P_{2g+1}	$(\Pi_g+E_1+E_2+\dots+E_g)/2$	$\begin{bmatrix}0\dots0\,1\\1\,1\dots1\end{bmatrix}$
P_5	$(\Pi_2+E_1+E_2)/2$	$\begin{bmatrix}0\,1\,0\dots\\1\,1\,0\dots\end{bmatrix}$	P_{2g+2}	$(E_1+E_2+\dots+E_g)/2$	$\begin{bmatrix}0\,0\dots0\\1\,1\dots1\end{bmatrix}$

Функция (12) имеет следующие легко проверяемые свойства квазипериодичности по отношению к решетке $L(\Pi)$:

$$\theta(u+m'+\Pi m;\Pi)=\exp\{-i\pi m^{\mathrm{t}}\Pi m-2i\pi m^{\mathrm{t}}u\}\,\theta(u;\Pi), \qquad m,m'\in\mathbb{Z}^g. \tag{14}$$

Тэта-функции с характеристиками преобразуются сходным образом [15, 16], что можно легко вывести из формулы (14). Для краткости изложения мы не приводим здесь явный вид преобразований.

Замечание 1. (i) Тэта-функция с целыми характеристиками $[\epsilon,\epsilon']$ будет либо четной, либо нечетной в зависимости от четности скалярного произведения $\epsilon^{\mathrm{t}}\cdot\epsilon'$. В частности, все нечетные тэта-константы нулевые.

(ii) Добавление к характеристике матрицы с четными элементами в худшем случае изменит знак тэта-функции, поэтому двоичная арифметика играет важную роль в исчислении тэта-функций.

Тэта-функции можно рассматривать как многозначные функции на якобиане или как сечения определенных линейных расслоений. Множества их нулей — тэта-дивизоры — являются хорошо определенными подмножествами якобиана, поскольку экспоненциальный множитель в (14) не принимает нулевых значений. Тэта-дивизор описывается так называемыми теоремами Римана о нулях [16, 11]. Один из важных ингредиентов этих теорем — это вектор римановых констант $\mathcal{K}$, зависящий от выбора базиса гомологий и начальной точки отображения Абеля–Якоби. В описанной ситуации вектор констант может быть найден с помощью прямого вычисления [15] или комбинаторных рассуждений [11] и соответствует характеристике

$$\mathcal{K}\sim\begin{bmatrix}\dots\,1\,1\,1\,1\,1\\\dots\,1\,0\,1\,0\,1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}.$$

Нули композиции отображения Абеля–Якоби и тэта-функции описываются следующей теоремой.

Теорема 1 (Риман). *Пусть D_g — положительный неспециальный дивизор степени g на кривой $\mathcal{X}$. Тогда функция $\theta(u(P)-\mathcal{K}-u(D_g))$, зависящая от точки $P\in\mathcal{X}$, имеет ровно g нулей в точках дивизора D_g с учетом кратностей.*

Здесь и далее мы будем использовать стандартные обозначения теории функций на римановых поверхностях [11, 16, 15]. *Дивизор* — это конечное множество точек на поверхности, взятых с целыми весами: $D = \sum_j m_j P_j$, $m_j \in \mathbb{Z}$, $P_j \in \mathcal{X}$. *Степень дивизора* есть сумма весов его точек: $\deg D := \sum_j m_j$. *Положительным дивизором* называется дивизор, все веса которого неотрицательны.

Под *индексом специальности* $i(D)$ положительного дивизора D подразумевается размерность пространства голоморфных дифференциалов с нулями в точках из D (с учетом кратности). Дивизоры с индексом $i(D) > g - \deg D$ называют *специальными*, поскольку их точки находятся не в общем положении. Говорят, что два дивизора *эквивалентны*, если они отличаются на дивизор мероморфной функции. По теореме Римана–Роха [11] класс эквивалентности положительного дивизора содержит единственный элемент тогда и только тогда, когда этот дивизор неспециальный.

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Цель этого раздела — представить замкнутое выражение для функции Грина объединения отрезков прямой. Существует единственный абелев дифференциал третьего рода $d\eta$ с простыми полюсами в двух наперед заданных точках $\infty_\pm$ на $\mathcal{X}$ с вычетами ∓ 1 соответственно и чисто мнимыми периодами. По условию нормировки такой дифференциал вещественный, и потому его a-периоды равны нулю [6].

Лемма 1. *Функция Грина множества E допускает представление*

$$G_E(x) = \left| \mathrm{Re}\left(\int\limits_Q^P d\eta \right) \right|, \tag{15}$$

где верхний предел P накрывает аргумент x функции Грина, т.е. $x(P) = x$, а нижний предел Q лежит на ковещественном овале, $x(Q) \in E$.

Доказательство. Поднимем дополнение $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ на риманову поверхность (4) так, что бесконечность отобразится в выделенную точку ∞_+ поверхности $\mathcal{X}$, и назовем это верхним листом поверхности. Другое поднятие назовем нижним листом. Функция, равная $G_E(x)$ на верхнем листе и $-G_E(x)$ на нижнем листе, является гармонической с двумя логарифмическими особенностями в точках $\infty_\pm$. Она равна вещественной части некоторого абелева интеграла третьего рода, удовлетворяющего тем же условиям нормировки, что и введенный выше интеграл $\eta = \int d\eta$. Остается проверить, что интегрирование дифференциала $d\eta$ вдоль любого ковещественного овала дает чисто мнимый результат. Это так, потому что выбранный дифференциал вещественен. $\square$

Сходное выражение для функции Грина, данное в несколько других терминах, было использовано для вычисления емкости системы отрезков в работах [18, 2]. Явная формула для абелева интеграла третьего рода в терминах тэта-функций была дана Риманом [11, 16].

Теорема 2.

$$G_E(x) = \left| \log \left| \frac{\theta[\epsilon, \epsilon'](u(P) + u(\infty_+))}{\theta[\epsilon, \epsilon'](u(P) - u(\infty_+))} \right| \right|,$$

где $x(P) = x$, $[\epsilon, \epsilon']$ — целая (нечетная несингулярная) характеристика, отвечающая полупериоду $\mathcal{K} + u(D_{g-1})$, а D_{g-1} — сумма любых $g - 1$ различных точек ветвления: $D_{g-1} = \sum_{s \in I} P_s$, $I \subset \{1, 2, \dots, 2g+2\}$, $\#I = g - 1$.

Доказательство основано на теореме Римана о нулях тэта-функций: дивизоры $D_g^\pm := D_{g-1} + \infty_\pm$ неспециальны, следовательно, дробь $\theta(u(P) - \mathcal{K} - u(D_g^-))/\theta(u(P) - \mathcal{K} - u(D_g^+))$ как многозначная функция точки $P \in \mathcal{X}$ имеет единственный нуль в $P = \infty_-$ и единственный полюс в $P = \infty_+$. Такой же набор полюсов и нулей у функции $\exp\{\int^P d\eta\}$, кроме того, обе функции приобретают один и тот же множитель при обходе циклов на поверхности (это вытекает из правил преобразования тэта-функций (14) и билинейных соотношений Римана [11]). Из теоремы Лиувилля следует, что эти функции отличаются домножением на ненулевую константу. Использование тэта-характеристик упрощает запись интеграла. □

3. ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА

До настоящего момента мы следовали логике работы [10]. Себбар и Фаллиеро далее подставляли выражение для функции Грина в формулу (3) для емкости и использовали правило Лопиталя для разрешения неопределенности типа 0/0. Такая стратегия приводила к возникновению коэффициентов абелевых дифференциалов и производных тэта-функций. В результате практическое использование полученных ими формул затрудняется необходимостью предварительного вычисления этих объектов.

Кроме функции Грина, формула для емкости содержит еще один ингредиент: независимую переменную x. Хорошо известно представление гиперэллиптической проекции вложенной в якобиан поверхности (4) на сферу в терминах тэта-функций [11].

Теорема 3.

$$x(P) = \frac{\theta^2[\epsilon,\epsilon'](u(P))}{\prod_\pm \theta[\epsilon,\epsilon'](u(P)\pm u(\infty_+))}\,\frac{\theta^2[\xi,\xi'](u(\infty_+))}{\theta^2[\xi,\xi']},$$

где $[\epsilon,\epsilon']$ — снова целая характеристика, отвечающая полупериоду $\mathcal{K}+u(D_{g-1})$, D_{g-1} — положительный дивизор из любых $g-1$ различных точек ветвления, кроме первой и последней, $[\xi,\xi'] = [\epsilon,\epsilon'] + [(0\ \ldots\ 0)^{\mathrm t}, (1\ \ldots\ 1)^{\mathrm t}] \bmod 2$.

Доказательство. Функция $x(P)$ на поверхности $\mathcal{X}$ имеет двойной полюс $P = P_1$ и два полюса в $P=\infty_\pm$, как и дробь $\theta^2(u(P)-\mathcal{K}-u(D_{g-1}))/\prod_\pm \theta(u(P)-\mathcal{K}-u(D_{g-1})\pm u(\infty_+))$ (это следствие теоремы Римана о нулях). Последнее выражение однозначно на поверхности, а значит, с точностью до постоянного множителя совпадает с проекций $x(P)$. Растяжение можно найти, вычислив значения обеих функций в $P = P_{2g+2}$. Полученное выражение можно упростить с использованием характеристик. □

Соберем вместе полученные ранее формулы:

$$\operatorname{Cap}(E) = \lim_{x\to\infty}|x|\exp\{-G_E(x)\} = \lim_{P\to\infty_\pm}|x(P)|\left|\frac{\theta[\epsilon,\epsilon'](u(P)\mp u(\infty_+))}{\theta[\epsilon,\epsilon'](u(P)\pm u(\infty_+))}\right| =$$
$$= \left|\frac{\theta[\epsilon,\epsilon'](u(\infty_+))\,\theta[\xi,\xi'](u(\infty_+))}{\theta[\epsilon,\epsilon'](2u(\infty_+))\,\theta[\xi,\xi'](0)}\right|^2, \tag{16}$$

где $[\epsilon,\epsilon']$ — целая характеристика, отвечающая полупериоду $\mathcal{K}+u(D_{g-1})$, дивизор D_{g-1} — это сумма любых $g-1$ различных точек ветвления, кроме первой и последней, и $[\xi,\xi'] = [\epsilon,\epsilon'] + [(0\ \ldots\ 0)^{\mathrm t}, (1\ \ldots\ 1)^{\mathrm t}] \bmod 2$.

Для практического применения полученной формулы необходимо вычислить матрицу периодов Π и образ бесконечности в якобиане $u(\infty_+)$. Можно избежать использования квадратурных формул, если применить технику, развитую в [5, 13, 7]. Этот подход особенно полезен в случаях, близких к вырождению, когда отрезки в E малы и/или близки друг к другу.

4. ПРОВЕРКА ОСНОВНОЙ ФОРМУЛЫ

Для проверки полученной выше формулы (16) нам необходим некоторый набор множеств E, емкости которых известны. В качестве примеров мы будем брать прообразы отрезков при полиномиальных отображениях. Действительно, пусть $E := T^{-1}([-1,1])$, где

$$T(x) = cx^n + (\text{члены более низких степеней})$$

Таблица 2. Матрица периодов ассоциированной кривой $\mathcal{X}$ и емкость $\mathrm{Cap}(E)$, вычисленная по формуле (16), для нескольких множеств $E = T_5^{-1}(I)$

I	Матрица периодов	Емкость
$[-1/6, 1/3]$	$\begin{pmatrix} 0.581304428690 & 0.265097452123 & 0.142465655111 & 0.063806949583 \\ 0.265097452123 & 0.698635810128 & 0.328904401707 & 0.141377608521 \\ 0.142465655111 & 0.328904401707 & 0.723770083801 & 0.265097452123 \\ 0.063806949583 & 0.141377608521 & 0.265097452123 & 0.557258201607 \end{pmatrix}$	0.37892914163
$[-0.5, 0.5]$	$\begin{pmatrix} 0.703235096283 & 0.285878284249 & 0.148276665778 & 0.065947018040 \\ 0.285878284249 & 0.851511762061 & 0.351825302289 & 0.148276665778 \\ 0.148276665778 & 0.351825302289 & 0.851511762061 & 0.285878284249 \\ 0.065947018040 & 0.148276665778 & 0.285878284249 & 0.703235096284 \end{pmatrix}$	0.43527528164
$[-0.2, 0.4]$	$\begin{pmatrix} 0.581799961010 & 0.270529331631 & 0.143046124396 & 0.064421403944 \\ 0.270529331631 & 0.759072205590 & 0.334950735576 & 0.144355718924 \\ 0.143046124397 & 0.334950735576 & 0.724846085406 & 0.270529331631 \\ 0.064421403944 & 0.144355718924 & 0.270529331631 & 0.614716486665 \end{pmatrix}$	0.39300154279
$[-0.1, 0.4]$	$\begin{pmatrix} 0.549252298597 & 0.265164827067 & 0.140966628599 & 0.063811919424 \\ 0.265164827067 & 0.736018990002 & 0.328976746491 & 0.142930161909 \\ 0.140966628599 & 0.328976746491 & 0.690218927196 & 0.265164827067 \\ 0.063811919424 & 0.142930161909 & 0.265164827067 & 0.593088828092 \end{pmatrix}$	0.37892914163
$[-0.5, 0.25]$	$\begin{pmatrix} 0.615250639522 & 0.277253172081 & 0.144977134658 & 0.065127616053 \\ 0.277253172081 & 0.811694974260 & 0.342380788133 & 0.146608896058 \\ 0.144977134658 & 0.342380788133 & 0.760227774180 & 0.277253172081 \\ 0.065127616053 & 0.146608896058 & 0.277253172081 & 0.665086078202 \end{pmatrix}$	0.41093795738

— многочлен степени n. Тогда функция Грина принимает простой вид

$$G_E(x) = \bigl|\log\bigl|T(x) + \sqrt{T^2(x) - 1}\bigr|\bigr|,$$

откуда немедленно следует равенство $\mathrm{Cap}(E) = (2|c|)^{-1/n}$.

В табл. 2 для нескольких множеств E, каждое из которых состоит из пяти компонент, составляющих полный прообраз одного отрезка при отображении, порожденном чебышевским многочленом $T_5(x)$, приведены матрица периодов ассоциированной кривой $\mathcal{X}$ и емкость $\mathrm{Cap}(E)$, вычисленная по формуле (16). Образ бесконечности в якобиане одинаков: $u(\infty) = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)$; значения емкостей, вычисленные по разным формулам, согласуются с точностью до 10^{-12}.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы предложили компактную замкнутую формулу для вычисления емкости множества E, состоящего из $g+1$ отрезков на прямой (1):

$$\mathrm{Cap}(E) = (e_{2g+2} - e_1)\left|\frac{\theta[\epsilon,\epsilon'](u(\infty_+))\,\theta[\xi,\xi'](u(\infty_+))}{\theta[\epsilon,\epsilon'](2u(\infty_+))\,\theta[\xi,\xi'](0)}\right|^2, \tag{17}$$

где θ — тэта-функция с несингулярной нечетной характеристикой $[\epsilon,\epsilon']$ и четной характеристикой $[\xi,\xi']$. Изменение функции Грина множества при его конформном отображении легко контролируется, поэтому емкости множеств с конформно эквивалентными дополнениями связаны простой зависимостью. По лемме Грёча любая многосвязная область на сфере Римана конформно эквивалентна дополнению плоскости до объединения некоторых параллельных отрезков, а значит, наш результат в перспективе может быть полезен при выводе явных формул для емкости целого класса осесимметричных множеств. Авторы планируют получить аналогичные формулы для емкости конденсаторов более сложной формы в будущих публикациях (см. [8]).

Благодарности. Авторы выражают благодарность анонимному рецензенту, указавшему на существование работ [2, 14], в которых изложены другие подходы к вычислению емкости системы отрезков в терминах теории функций на комплексных кривых.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Achieser N.* Sur les polynomes de Tchebyscheff pour deux segments // C. r. Acad. sci. Paris. 1930. V. 191. P. 754–756.
2. *Аптекарев А.И.* Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Тода // Мат. сб. 1984. Т. 125, №2. С. 231–258.
3. *Betsakos D., Samuelsson K., Vuorinen M.* The computation of capacity of planar condensers // Publ. Inst. math. 2004. V. 75. P. 233–252.
4. *Богатырев А.Б.* Элементарная конструкция штребелевых дифференциалов // Мат. заметки. 2012. Т. 91, №1. С. 143–146.
5. *Богатырев А.Б.* Конформное отображение прямоугольных семиугольников // Мат. сб. 2012. Т. 203, №12. С. 35–56.
6. *Bogatyrev A.* Extremal polynomials and Riemann surfaces. Berlin: Springer, 2012. (Springer Monogr. Math.).
7. *Bogatyrev A.B.* Image of Abel–Jacobi map for hyperelliptic genus 3 and 4 curves // J. Approx. Theory. 2015. V. 191. P. 38–45.
8. *Bogatyrev A.B., Grigor'ev O.A.* Conformal mapping of rectangular heptagons. II // Comput. Methods Funct. Theory. To appear.
9. *Dubinin V.N., Karp D.B.* Generalized condensers and distortion theorems for conformal mappings of planar domains // The interaction of analysis and geometry. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. P. 33–51. (Contemp. Math.; V. 424).
10. *Falliero T., Sebbar A.* Capacité d'une union de trois intervalles et fonctions thêta de genre 2 // J. math. pures appl. 2001. V. 80, N 4. P. 409–443.
11. *Farkas H.M., Kra I.* Riemann surfaces. New York: Springer, 1980. (Grad. Texts Math.; V. 71).
12. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
13. *Григорьев О.А.* Численно-аналитический метод конформного отображения многоугольников с шестью прямыми углами // ЖВМиМФ. 2013. Т. 53, №10. С. 1629–1638.
14. *Lukashov A.L., Peherstorfer F.* Automorphic orthogonal and extremal polynomials // Can. J. Math. 2003. V. 55. P. 576–608.
15. *Mumford D.* Tata lectures on theta. Boston: Birkhaüser, 1983, 1984, 1991. V. II.
16. *Rauch H.E., Farkas H.M.* Theta functions with applications to Riemann surfaces. Baltimore: Williams & Wilkins Co., 1974.
17. *Rumely R.S.* Capacity theory on algebraic curves. Berlin: Springer, 1989. (Lect. Notes Math.; V. 1378).
18. *Widom H.* Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane // Adv. Math. 1969. V. 3, N 2. P. 127–232.