

УДК 517.542+517.545

А. Б. Богатырёв

Конформное отображение прямоугольных семиугольников

В работе предлагается новый эффективный подход к вычислению прямого и обратного конформного отображения прямоугольных многоугольников на полуплоскость, основанный на использовании римановых тэта-функций.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: интеграл Кристоффеля–Шварца, риманова поверхность, якобиан, пространство Зигеля, тэта-функции.

§ 1. Введение

Существует большой список численных методов для конформного отображения (односвязных) многоугольников на полуплоскость и обратно [1]. Следующее простое наблюдение позволяет этот список расширить. Если углы многоугольника рационально кратны числу π , то соответствующий интеграл Кристоффеля–Шварца (CS), отображающий верхнюю полуплоскость \mathbb{H} на многоугольник, является абелевым интегралом на компактной римановой поверхности. Для вычисления интегралов CS, а также их вспомогательных параметров, можно, следовательно, использовать методы теории функций на римановых поверхностях.

В этой работе наш подход применяется для односвязного семиугольника с шестью прямыми и одним нулевым углом. Это простейший случай, следующий за эллиптическим интегралом CS (многоугольник с четырьмя прямыми и несколькими нулевыми углами), разобранным в статье [2]. Мы дадим представления для обоих отображений: семиугольника на полуплоскость и обратно, как некоторые явные выражения в терминах тэта-функций рода 2. Для последних имеются надежные и эффективные методы вычислений с контролем точности [3]. Следовательно, мы сможем гарантировать машинную точность конформного отображения равномерно по всему многоугольнику/полуплоскости.

Как обычно, конформное отображение содержит несколько вспомогательных параметров, определяемых по размерам многоугольника. Многие задачи, например в классической механике, становятся проще, если их переписать в подходящей системе координат. Мы увидим, что это верно и для задач конформного отображения: большая часть этих вспомогательных уравнений становится линейной, если в качестве независимых координат взять элементы

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00407) и программы ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

матрицы периодов. Скажем, для L -образного прямоугольного шестиугольника нужно решить всего одно нелинейное уравнение для определения конформного отображения.

Предлагаемый метод можно использовать как эталон при тестировании численных конформных отображений. Этот метод хорошо работает и для невыпуклых областей, при наличии входящих ребер границы, узких перешейков, граничных ребер различных масштабов и т.п. Метод позволяет эффективно решать многие граничные задачи для гармонических функций, каковыми могут быть, например, потенциалы электрических и магнитных полей, функции тока и давления течения идеальной жидкости и т.п. Кроме того, явные аналитические формулы для отображений позволяют решать вопросы дизайна области, т.е. за счет выбора геометрических размеров получать физические поля с нужными свойствами. Например, можно поместить точку отрыва струи в предписанную точку на границе области. Такие задачи являются трудными для обычных численных методов.

Автор благодарит участников семинара по комплексному анализу МИ РАН за обсуждение работы, В. З. Энольского, прочитавшего первую версию этой статьи, за полезные замечания и О. А. Григорьева, предоставившего рис. 1, за компьютерные расчеты.

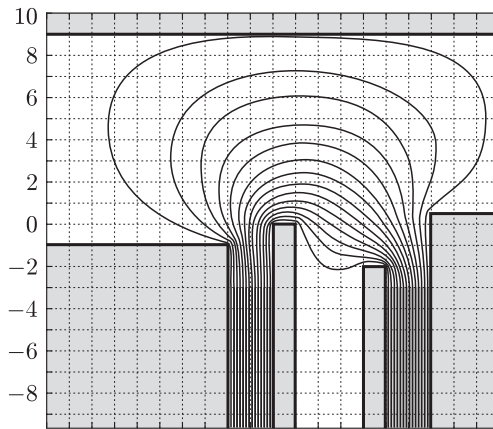


Рис. 1. Линии тока идеальной жидкости, вычисленные при помощи тэта-функций рода 2

§ 2. Пространство прямоугольных семиугольников

Рассмотрим прямоугольный семиугольник с полубесконечным “каналом” ширины π , направленным на восток, как показано на рис. 2. Стороны его либо вертикальны, либо горизонтальны. Два из шести прямых углов семиугольника должны быть входящими, т.е. равными $3\pi/2$, а вершина с нулевым углом –

бесконечно удаленной. Вершину в бесконечности обозначим w_0 , остальные вершины занумеруем в возрастающем порядке по отношению к естественной ориентации границы (т.е. против часовой стрелки). Две вершины с входящими углами имеют выделенные имена w_α и w_β с индексами $1 \leq \alpha < \beta \leq 6$.

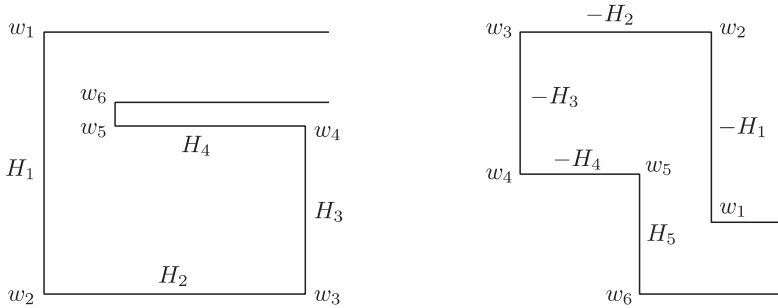


Рис. 2. Семиугольники из пространства \mathcal{P}_{56} (слева) и пространства \mathcal{P}_{15} (справа)

Пространство $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ семиугольников с заданными индексами α, β параметризовано длинами сторон, которым мы для удобства припишем знаки:

$$i^s H_s := w_s - w_{s+1}, \quad s = 1, 2, \dots, 5. \tag{2.1}$$

Одно очевидное ограничение на вещественные величины H_1, \dots, H_5 таково:

$$H_1 - H_3 + H_5 = \pi \quad (=:\text{Im}(w_1 - w_6)). \tag{2.2}$$

Знак величины H_s отрицателен, если и только если $\alpha \leq s < \beta$:

$$\left(s + \frac{1}{2} - \alpha\right) \left(s + \frac{1}{2} - \beta\right) H_s > 0. \tag{2.3}$$

Граница семиугольника не имеет самопересечений, что накладывает на размеры сторон следующие дополнительные ограничения:

(α, β)	Ограничения
(1, 2)	$-H_2 + H_4 > 0$
(1, 5)	$-H_2 + H_4 > 0$, когда $H_1 - H_3 \leq 0$
(2, 3)	$-H_3 + H_5 > 0$
(2, 6)	$-H_2 + H_4 < 0$, когда $-H_3 + H_5 \leq 0$
(4, 5)	$H_1 - H_3 > 0$
(5, 6)	$-H_2 + H_4 < 0$

ЛЕММА 1. Семиугольники с фиксированными выделенными индексами α и β образуют связное пространство $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ вещественной размерности 4 с глобальными координатами H_1, \dots, H_5 , связанными соотношением (2.2), правилом знаков (2.3) и неравенствами (2.4).

Точка из пространства $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ определяет семиугольник только с точностью до сдвигов в плоскости. Трансляции можно при необходимости устранить, например, потребовав, чтобы $w_1 := i\pi$. Отражение семиугольников в вещественной оси порождает отображение $\mathcal{P}_{\alpha,\beta} \rightarrow \mathcal{P}_{7-\beta,7-\alpha}$, которое во введенных выше глобальных координатах имеет вид $(H_1, H_2, \dots, H_5) \rightarrow (H_5, H_4, \dots, H_1)$.

§ 3. Гиперэллиптические кривые с шестью вещественными точками ветвления

Конформное отображение верхней полуплоскости на семиугольник из пространства $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ представим в виде интеграла Кристоффеля–Шварца. Этот интеграл живет на гиперэллиптической кривой с шестью вещественными точками ветвления – прообразами вершин прямых углов. В этом параграфе мы напомним некоторые сведения о таких кривых.

3.1. Алгебраическая модель. Двудлистное накрытие сферы с шестью вещественными точками ветвления $x_1 < x_2 < \dots < x_5 < x_6$ является компактной римановой поверхностью X рода 2 с уравнением (аффинной части)

$$y^2 = \prod_{s=1}^6 (x - x_s), \quad (x, y) \in \mathbb{C}^2. \quad (3.1)$$

Эта комплексная кривая допускает конформную инволюцию $J(x, y) = (x, -y)$ с шестью неподвижными точками $p_s := (x_s, 0)$, а также антиконформную инволюцию (отражение) $\bar{J}(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$. Множество неподвижных точек последней инволюции имеет три компонента, известные как *вещественные овалы* кривой. Всякий вещественный овал есть вложенная окружность и дважды накрывает ровно один из отрезков $[x_2, x_3], [x_4, x_5], [x_6, x_1] \ni \infty$ расширенной вещественной оси $\widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \infty$. Мы назовем эти овалы *первым, вторым и третьим* соответственно. Поднятия дополнительного набора отрезков $[x_1, x_2], [x_3, x_4], [x_5, x_6]$ на кривую (3.1) дает нам три *ковещественных овала*, образующих множество точек, неподвижных при другой антиконформной инволюции $\bar{J}J = J\bar{J}$.

3.2. Циклы, дифференциалы, периоды. Фиксируем специальный базис в пространстве 1-гомологий кривой X , однозначно определяемый по последней. Первый и второй вещественные овалы дают нам пару 1-циклов, a_1 и a_2 соответственно. Оба цикла ориентированы (с точностью до одновременной смены знака) как граница штанов, полученных удалением вещественных овалов из поверхности (3.1). Два оставшихся цикла b_1 и b_2 – это ковещественные овалы нашей кривой, ориентированные так, что матрица пересечений имеет канонический вид, см. рис. 3.

Отражение поверхности действует на введенном базисе циклов следующим образом:

$$\bar{J}a_s = a_s, \quad \bar{J}b_s = -b_s, \quad s = 1, 2. \quad (3.2)$$

Голоморфные дифференциалы на кривой X имеют вид

$$du_* = (C_{1*}x + C_{2*}) \frac{dx}{y} \quad (3.3)$$

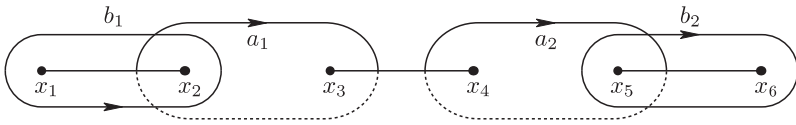


Рис. 3. Канонический базис в гомологиях кривой X

с постоянными величинами C_{1*}, C_{2*} . Базис дифференциалов, двойственный к базису циклов, определяется равенствами

$$\int_{a_s} du_j := \delta_{sj}, \quad s, j = 1, 2, \tag{3.4}$$

и задает матрицу периодов Π с элементами

$$\Pi_{sj} := \int_{b_s} du_j, \quad s, j = 1, 2. \tag{3.5}$$

Классические результаты Римана говорят о том, что матрица периодов симметрична и имеет положительно определенную мнимую часть [4].

Из свойств симметрии (3.2) выбранного базиса циклов несложно вывести следующие утверждения:

- нормированные дифференциалы являются вещественными, т.е. $\overline{J}du_s = \overline{du_s}$, другими словами, коэффициенты C_* в представлении (3.3) дифференциалов являются вещественными;
- матрица периодов является чисто мнимой, так что можно ввести симметричную и положительно определенную вещественную матрицу $\Omega := \text{Im}(\Pi)$;
- нули дифференциала du_2 (соответственно du_1) лежат на первом (соответственно втором) вещественном овале кривой.

3.3. Якобиан и отображение Абеля–Якоби.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. При заданной матрице периодов Π определим решетку полного ранга в \mathbb{C}^2

$$L(\Pi) = \Pi\mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 = \int_{H_1(X, \mathbb{Z})} du, \quad du := (du_1, du_2)^t, \tag{3.6}$$

а также вещественно четырехмерный тор $\text{Jac}(X) := \mathbb{C}^2/L(\Pi)$, известный как якобиан кривой X .

Это определение, конечно, зависит от выбора канонического базиса в решетке целых гомологий $H_1(X, \mathbb{Z})$, другой выбор приводит к изоморфному тору.

Удобно представлять точки $u \in \mathbb{C}^2$ как тэта-характеристику $[\varepsilon, \varepsilon']$, т.е. как пару вещественных вектор-столбцов $\varepsilon, \varepsilon'$ высоты $g = 2$:

$$u = \frac{1}{2}(\Pi\varepsilon + \varepsilon'). \tag{3.7}$$

Точкам якобиана $\text{Jac}(X)$ в этих обозначениях соответствует пара векторов с коэффициентами, взятыми по модулю 2. Точкам второго порядка в якобиане соответствуют (2×2) -матрицы с элементами из \mathbb{Z}_2 . Наше определение тэта-характеристики как пары вектор-столбцов размера g , записанных один за другим, не является стандартным. Обычно используют транспонированную матрицу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображение Абеля–Якоби (сокращенно АЯ) $X \rightarrow \text{Jac}(X)$ определим формулой

$$u(p) := \int_{p_1}^p du \pmod{L(\Pi)}, \quad p_1 := (x_1, 0), \quad du := (du_1, du_2)^t. \quad (3.8)$$

Иногда рассматривают отображение АЯ из универсальной накрывающей кривой X в комплексное пространство \mathbb{C}^2 . Из формулы Римана–Роха [4] следует, что отображение Абеля–Якоби задает голоморфное вложение кривой в ее якобиан. В §5 мы приведем явное уравнение для образа кривой рода 2 в ее якобиане. В качестве упражнения пока вычислим образы точек ветвления $p_s = (x_s, 0)$, $s = 1, \dots, 6$, кривой X под действием отображения Абеля–Якоби.

p	$u(p) \pmod{L(\Pi)}$	$[\varepsilon, \varepsilon'](u(p))$
p_2	$\frac{\Pi^1}{2}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
p_3	$\frac{\Pi^1 + E^1}{2}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
p_4	$\frac{\Pi^2 + E^1}{2}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
p_5	$\frac{\Pi^2 + E^1 + E^2}{2}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
p_6	$\frac{E^1 + E^2}{2}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Здесь Π^s и E^s есть s -е столбцы матрицы периодов и единичной матрицы соответственно. Отметим, что вектор $\varepsilon(u(p))$ постоянен вдоль вещественных овалов, а вектор $\varepsilon'(u(p))$ – вдоль ковещественных.

3.4. Разбиение якобиана. Якобиан является объединением замыканий шестнадцати непересекающихся областей (блоков), заполненных точками с тэта-характеристиками из множеств

$$\begin{bmatrix} \pm I & \pm I \\ \pm I & \pm I \end{bmatrix}, \quad I := (0, 1),$$

различающихся выбором четырех знаков.

Выбор ориентации (любого) вещественного овала кривой выделяет компоненту множества $x^{-1}\mathbb{H} \subset X$, которая лежит слева от этого овала. Обозначим этот диск через \mathbb{H}^+ . Поверхность X с выброшенными вещественными и ковещественными овалами – это объединение четырех непересекающихся открытых дисков \mathbb{H}^+ , $J\mathbb{H}^+$, $\bar{J}\mathbb{H}^+$, $\bar{J}J\mathbb{H}^+$. Оказывается, что отображение AJ посылает каждый из этих дисков в свой блок якобиана, а каждый (ко)вещественный овал – на определенный 2-тор в якобиане. Это позволяет различать точки $p \in X$ с одинаковым значением проекции $x(p)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть диск \mathbb{H}^+ выбран в соответствии с ориентацией (любого) a -цикла. Образы определенных выше четырех дисков при отображении AJ лежат в следующих четырех блоках якобиана:

$p \in$	\mathbb{H}^+	$J\mathbb{H}^+$	$\bar{J}\mathbb{H}^+$	$\bar{J}J\mathbb{H}^+$
$[\varepsilon, \varepsilon'](u(p)) \in$	$\begin{bmatrix} -I & I \\ -I & I \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I & -I \\ I & -I \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I & I \\ I & I \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -I & -I \\ -I & -I \end{bmatrix}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Симметрии нормированных голоморфных дифференциалов по отношению к инволюциям J и \bar{J} гарантируют следующие равенства: $u(Jp) = -u(p)$, $u(\bar{J}p) = \overline{u(p)}$, поскольку базовая точка p_1 отображения AJ неподвижна при действии обеих инволюций. Поэтому мы можем сосредоточиться только на изучении отображения диска \mathbb{H}^+ .

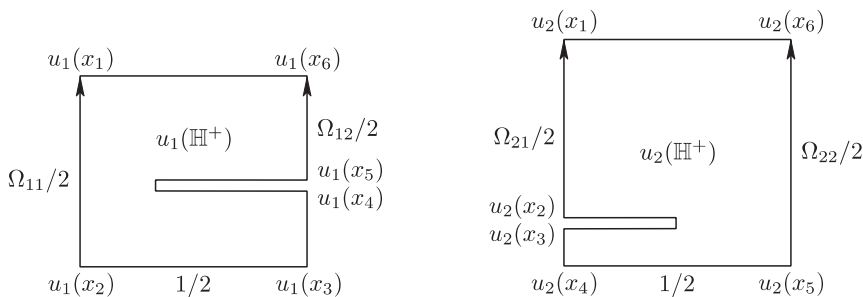


Рис. 4. Образ верхней полуплоскости $u_1(\mathbb{H}^+)$ (слева) и $u_2(\mathbb{H}^+)$ (справа)

Обе компоненты $u_s(p)$ отображения Абеля–Якоби являются интегралами Кристоффеля–Шварца и отображают диск \mathbb{H}^+ на прямоугольники с разрезами, показанными на рис. 4. Очевидно, что вещественная часть $u_s(p)$ лежит в интервале $(0, 1/2)$, что можно переформулировать как $\varepsilon'(u(p)) \in (I, I)^t$.

Чтобы исследовать область значений 2-вектора $\varepsilon := 2\Omega^{-1} \text{Im } u(p)$, рассмотрим новые дифференциалы

$$dv = (dv_1, dv_2)^t := -i\Omega^{-1} du.$$

Последние являются чисто мнимыми с нормировкой $\int_{b_j} dv_s = \delta_{js}$. Дифференциал dv_1 имеет нули на ковещественном овале, накрывающем интервал (x_5, x_6) ; нули дифференциала dv_2 проектируются на (x_1, x_2) .

Снова, каждый абелев интеграл $v_s(p)$ отображает верхнюю полуплоскость на прямоугольник с разрезом, схожий с приведенным рис. 4 слева. Однако теперь вершина $v_s(x_1)$ лежит на правой стороне прямоугольника, следовательно, $\varepsilon(u(p)) := 2 \operatorname{Re} v(p) \in (-I, -I)^t$.

§ 4. Два пространства модулей

Мы хотим описать пространство интегралов Кристоффеля–Шварца, отвечающих прямоугольным семиугольникам пространства $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$. Это пространство является расширением пространства кривых рода 2 с вещественными точками ветвления.

4.1. Кривые рода 2 с тремя вещественными овалами. Всякая кривая X рода 2 автоматически гиперэллиптическая, т.е. допускает конформную инволюцию J с шестью неподвижными точками. Эта инволюция единственна. Говорят, что риманова поверхность имеет отражение, если она допускает антиконформную инволюцию \bar{J} . Одна и та же поверхность X может допускать несколько отражений. Всякая компонента множества неподвижных при отражении точек является вложенной окружностью и называется *вещественным овалом* [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пространством модулей $\mathcal{M}_2\mathbb{R}_3$ назовем пространство римановых поверхностей рода 2 с отражением и тремя занумерованными вещественными овалами. Две таких поверхности эквивалентны в том и только том случае, если они связаны взаимно однозначным конформным отображением, перестановочным с отражениями и уважающим нумерацию вещественных овалов.

Рассмотрим конструктивную модель элемента $X \in \mathcal{M}_2\mathbb{R}_3$. Инволюции J и \bar{J} кривой X с необходимостью перестановочны (иначе J не единственная инволюция) и, следовательно, \bar{J} действует на римановой сфере X/J . Поскольку действие отражения на поверхности имеет неподвижные точки, то и порожденное отражение сферы также действует с неподвижными точками. При подходящем выборе глобальной координаты x на сфере, отражение на последней действует как комплексное сопряжение. Удобно считать x мероморфной функцией степени 2 на поверхности. Очевидно, она отображает всякий вещественный овал поверхности X на подмножество вещественного экватора $\widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \infty$ римановой сферы. Для образа вещественного овала есть три возможности:

- (i) x отображает овал взаимно однозначно на экватор;
- (ii) овал проецируется $2 - 1$ на экватор или
- (iii) овал отображается $2 - 1$ на отрезок экватора.

В последнем случае концы отрезка являются критическими значениями проекции x .

Простые комбинаторные рассуждения показывают, что в случае трех вещественных овалов на поверхности X последние проецируются на три непересекающихся отрезка вещественного экватора сферы. Концы этих отрезков являются проекциями неподвижных точек инволюции J поверхности X . Мы дадим им уникальные имена следующим образом.

Проекции первого, второго и третьего овалов порождают либо естественный циклический порядок на вещественном экваторе, либо обратный. В последнем случае изменим знак глобальной координаты x . Теперь мы можем занумеровать концы отрезков в естественном циклическом порядке x_1, x_2, \dots, x_6 так, чтобы первым овалом поверхности X был бы полный прообраз $x^{-1}([x_2, x_3])$, вторым овалом было бы множество $x^{-1}([x_4, x_5])$ и третьим овалом – множество $x^{-1}([x_6, x_1])$. Заметим, что отрезок расширенной вещественной оси $\widehat{\mathbb{R}}$ может содержать бесконечность на границе или внутри. Мы показали, что наше первое определение пространства модулей эквивалентно следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пространство модулей $\mathcal{M}_2\mathbb{R}_3$ – это фактор множества циклически упорядоченных шестерок точек (x_1, \dots, x_6) на окружности $\widehat{\mathbb{R}}$ по модулю действия $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (= вещественные проективные преобразования, сохраняющие ориентацию экватора).

Нормируя точки ветвления, например, так: $x_4 = \infty, x_5 = -1, x_6 = 0$, получаем глобальную систему координат на пространстве модулей

$$0 < x_1 < x_2 < x_3 < \infty. \tag{4.1}$$

Другие нормирования приводят нас к другим глобальным координатам в том же пространстве. Еще одна глобальная координатная система связана с периодами голоморфных дифференциалов.

ТЕОРЕМА 2. *Отображение периодов $\Omega(X)$ – вещественно аналитический диффеоморфизм из пространства модулей $\mathcal{M}_2\mathbb{R}_3$ на трехгранный конус*

$$0 < \Omega_{12} < \min(\Omega_{11}, \Omega_{22}). \tag{4.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, матрица $\Omega := \mathrm{Im} \Pi$ корректно определена на пространстве модулей: оба выбора выделенного базиса в пространстве целых 1-циклов, введенных в п. 3.2, приводят нас к той же матрице периодов.

Интегралы Кристоффеля–Шварца $u_j(x) := \int_{x_1}^x du_j$ взаимно однозначно отображают верхнюю полуплоскость (реализованную как диск $\mathbb{H}^+ \subset X$) на прямоугольники с разрезами, показанные на рис. 4. Размеры этих прямоугольников связаны с элементами матрицы периодов, откуда и следуют неравенства (4.2).

Мы видим, что все кривые $X \in \mathcal{M}_2\mathbb{R}_3$ с фиксированным первым столбцом матрицы периодов параметризованы длиной l разреза в левом прямоугольнике на рис. 4. В частности, Ω_{22} является монотонной функцией от l . Можно исследовать асимптотическое поведение этой функции (см. дополнение в конце статьи) и показать, что $\Omega_{22}(l) \rightarrow \infty$ когда $l \rightarrow 0$ (см. [6]) и $\Omega_{22}(l) \rightarrow \Omega_{21}$ при $l \rightarrow 1$ (см. [7]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Обратное отображение из матриц периодов в множество точек ветвления с подходящей нормировкой также эффективно. Для кривых рода 2 оно осуществляется формулами Розенхайна (см. [8; §5]) в терминах тэта-констант.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Конус (4.2) строго меньше пространства всех вещественных симметричных положительно определенных матриц Ω размера 2×2 . Известно однако (см., например, [9]), что любая неразложимая матрица из пространства Зигеля рода 2 является матрицей периодов некоторой римановой поверхности. Разложимые матрицы образуют компоненту многообразия Хумберта коразмерности 1, которая определяется занулением хотя бы одной из 10 четных тэта-констант. В нашем случае вещественных кривых многообразие Хумберта имеет вещественную коразмерность 1 в вещественно трехмерном пространстве матриц и разбивает последнее на компоненты. Можно проверить, что

$$\begin{aligned} \theta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (i\Omega) = 0 \text{ на грани } \{\Omega_{12} = 0\} \text{ конуса,} \\ \theta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (i\Omega) = 0 \text{ на грани } \{\Omega_{12} = \Omega_{11}\} \text{ и} \\ \theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (i\Omega) = 0 \text{ на грани } \{\Omega_{12} = \Omega_{22}\}. \end{aligned}$$

Определение тэта-констант будет дано в § 5.

4.2. Кривые с отмеченной точкой на вещественном овале. Задачи конформного отображения обслуживает немного более сложное пространство модулей, а именно пространство вещественных кривых рода 2 с отмеченной точкой на вещественном овале (см., например, [10]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пространство римановых поверхностей рода 2 с отражением, тремя занумерованными вещественными овалами и отмеченной точкой $p_0 \neq Jp_0$ третьего овала назовем $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}_3$. Две поверхности эквивалентны, если и только если найдется конформное отображение между ними, коммутирующее с отражениями, уважающее нумерацию вещественных овалов, а также отмеченные точки.

Рассуждения из п. 4.1 показывают, что можно ввести эквивалентное, но более конструктивное

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Под $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}_3$ мы понимаем семерки циклически упорядоченных точек (x_0, x_1, \dots, x_6) вещественного экватора $\widehat{\mathbb{R}}$ сферы Римана по модулю действия $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ на них. Для краткости будем называть это пространство модулей большим.

Здесь x_0 означает проекцию отмеченной точки кривой на сферу, другие координаты – это проекции точек ветвления кривой. Естественная проекция пространства $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}_3$ на $\mathcal{M}_2\mathbb{R}_3$ состоит в забывании отмеченной точки x_0 .

Вспомним, что для элемента X пространства $\mathcal{M}_2\mathbb{R}_3$ нет естественного различия между компонентами множества $x^{-1}\mathbb{H} \subset X$, если мы не ориентируем вещественный овал. Разница возникает, если мы отметим точку $p_0 \neq Jp_0$ на вещественном овале: существует единственный диск $\mathbb{H}^+ \subset x^{-1}\mathbb{H}$, на границе которого эта точка p_0 лежит.

В пространстве $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}_3$ можно ввести несколько систем координат. При фиксированных трех точках из семи, скажем $x_4 := \infty$, $x_5 := -1$, $x_6 := 0$, положения остальных четырех точек семерки даст глобальную систему координат в большом пространстве модулей

$$0 < x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \infty. \tag{4.3}$$

Другие нормирования семерки точек приводят к другим системам координат на большом пространстве модулей. Можно показать, что возникающая замена координат – это вещественно аналитическое и взаимно однозначное отображение четырехмерной клетки (4.3) на соответствующую клетку.

Еще одна система координат на пространстве $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}_3$ связана с матрицей периодов. Три переменных Ω_{11} , Ω_{12} , Ω_{22} наследуются из пространства $\mathcal{M}_2\mathbb{R}_3$, а четвертая – это либо u_1^0 , либо u_2^0 , компонента образа отмеченной точки при отображении AJ. Путь интегрирования для $u^0 := u(p_0)$ проходит по третьему овалу и минует точку ветвления p_6 .

ЛЕММА 2. *Каждое из двух отображений*

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \rightarrow (\Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{22}, u_s^0), \quad s = 1, 2,$$

является вещественно аналитическим диффеоморфизмом конуса (4.3) на произведение конуса (4.2) и интервала $(0, 1/2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положения точек x_s , $s = 0, 1, 2, 3$, задают координаты в пространстве $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}_3$ при фиксированных оставшихся точках ветвления. По определению матрица периодов Ω не зависит от положения отмеченной точки p_0 и отображение $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \Omega$ – вещественно аналитический диффеоморфизм из клетки (4.1) в конус (4.2). Оба дифференциала из базиса du_1, du_2 являются вещественными и не имеют нулей на третьем овале, содержащем отмеченную точку. Следовательно, обе величины $u_s(p_0)$ монотонно возрастают от нуля до $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int_{a_1+a_2} du_s$, когда отмеченная точка p_0 движется от p_1 до p_6 вдоль третьего овала.

Периоды более сложных дифференциалов, взятых вместо du_s , приводят нас к другим системам координат в том же пространстве модулей кривых с отмеченными точками на них.

4.2.1. Дифференциалы Кристоффеля–Шварца. Фиксируем пару целых чисел $1 \leq \alpha < \beta \leq 6$, задающих одно из пространств семиугольников. Каждому элементу пространства модулей $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}_3$ мы припишем уникальный абелев дифференциал (Кристоффеля–Шварца) $dw_{\alpha\beta}$ третьего рода с простыми полюсами p_0, Jp_0 , с вычетами соответственно $-1, +1$ в этих точках и нулями в точках ветвления p_α и p_β (один из способов нормировать мероморфный дифференциал – это обнулить его в точках неспециального дивизора степени g). Этот дифференциал будет автоматически иметь двойные нули, поскольку он нечетный по отношению к инволюции J . В алгебраической модели (3.1) он имеет вид

$$dw_{\alpha\beta} = (x - x_\alpha)(x - x_\beta) \frac{dx}{y}, \tag{4.4}$$

где $y^2 = \prod_{j=1}^6 (x - x_j)$ и семерка точек $\infty =: x_0, x_1, \dots, x_6$ представляет элемент пространства $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}_3$. Дифференциал Кристоффеля–Шварца (4.4) можно разложить в сумму трех элементарных:

$$dw_{\alpha\beta} = dv_{Jp_0p_0} + C_1 du_1 + C_2 du_2, \quad (4.5)$$

где $dv_{r,q}$ – это a -нормированный абелев дифференциал третьего рода с полюсами в точках r и q , du_1 и du_2 – это базис голоморфных дифференциалов, а постоянные C_1 и C_2 однозначно определены условием обращения $dw_{\alpha\beta}$ в нуль в точках p_α и p_β .

Каждый элемент пространства семиугольников $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ является образом верхней полуплоскости при отображении Кристоффеля–Шварца

$$w_{\alpha\beta}(x) := \int_*^x dw_{\alpha\beta}. \quad (4.6)$$

В действительности, верно большее.

ТЕОРЕМА 3. *Отображение Кристоффеля–Шварца $w_{\alpha\beta}(x)$ порождает вещественно аналитическое и взаимно однозначное отображение из пространства модулей $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}_3$ в пространство семиугольников $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно проверить, что каждый дифференциал CS является вещественным: $\bar{J}dw_{\alpha\beta} = \overline{dw_{\alpha\beta}}$. Это означает, что приращение отображения CS на границе диска \mathbb{H}^+ , вложенного в риманову поверхность, чисто вещественное на вещественных овалах и чисто мнимое на ковещественных овалах. Это приращение монотонно между точками ветвления, за исключением окрестности полюса p_0 . Образ границы $\partial\mathbb{H}^+$ диска, следовательно, является ломаной с той же последовательностью углов, что и любой семиугольник из пространства $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$. А именно все внутренние углы равны $\pi/2$, кроме углов в точках p_α и p_β , которые равны $3\pi/2$. Эта ломаная не имеет самопересечений. Например, в случае $(\alpha, \beta) = (2, 6)$ самопересечение, показанное на рис. 5, невозможно, так как точки прямоугольника, помеченного *, имеют -1 прообраз в диске \mathbb{H}^+ в соответствии с принципом аргумента.

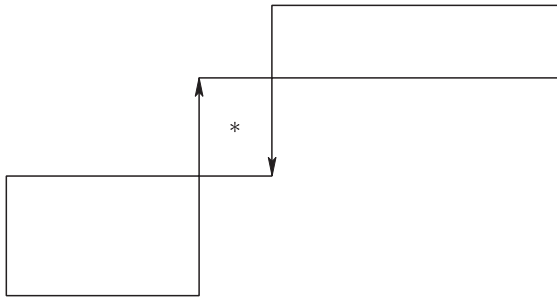


Рис. 5. Самопересечение образа вещественного экватора при отображении w_{26}

Мы установили взаимно однозначное соответствие между большим пространством модулей и пространством семиугольников, порожденное отображением CS (4.6). Несложно видеть, что размеры семиугольника (т.е. координаты в пространстве $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$)— это по существу периоды соответствующего интеграла CS:

$$\begin{aligned} iH_1 &:= \int_{p_2}^{p_1} dw_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int_{b_1} dw_{\alpha\beta}, & i^2H_2 &:= \int_{p_3}^{p_2} dw_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \int_{a_1} dw_{\alpha\beta}, \\ i^3H_3 &:= \int_{p_4}^{p_3} dw_{\alpha\beta} = i\pi + \frac{1}{2} \int_{b_2-b_1} dw_{\alpha\beta}, & & (4.7) \\ i^4H_4 &:= \int_{p_5}^{p_4} dw_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \int_{a_2} dw_{\alpha\beta}, & i^5H_5 &:= \int_{p_6}^{p_5} dw_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int_{-b_2} dw_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Докажем вещественную аналитичность прямого и обратного отображений.

Базисные 1-циклы можно выбрать проходящими на расстоянии от точек ветвления, так что становится ясна вещественная аналитичность прямого отображения $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}_3 \rightarrow \mathcal{P}_{\alpha\beta}$. Остается показать, что это отображение имеет полный ранг.

Рассмотрим систему координат в большом пространстве модулей, возникающую при фиксации трех точек $x_0 = \infty$, $x_\alpha = -1$, $x_\beta = 1$. Предположим, что исследуемое отображение, порожденное интегралом CS, вырождено в точке (x_0, x_1, \dots, x_6) большого пространства модулей. Тогда существует нетривиальный касательный вектор $\xi := \sum_{1=j \notin \{\alpha, \beta\}}^6 \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, аннулирующий все периоды дифференциала CS $dw_{\alpha\beta}$ в этой точке. Это, в свою очередь, означает существование мероморфного дифференциала

$$dv := \frac{1}{2} \sum_{1=j \notin \{\alpha, \beta\}}^6 \xi_j \frac{dw_{\alpha\beta}}{x - x_j}$$

с нулевыми циклическими и полярными периодами на ассоциированной поверхности и с полюсами только в точках ветвления, за исключением p_α и p_β .

Функция $v(x, y) := \int_{p_\alpha}^{(x, y)} dv$ в таком случае однозначна на поверхности и имеет самое большее четыре простых полюса наряду с двумя тройными нулями в точках p_α и p_β (последнее в силу равенства $\int_\alpha^\beta dv = 0$). Такая функция тождественно обращается в нуль, а значит и касательный вектор ξ к пространству модулей равен нулю. Следовательно, порождаемое интегралом CS отображение $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}_3 \rightarrow \mathcal{P}_{\alpha\beta}$ везде имеет полный ранг.

4.2.2. *Вспомогательные параметры отображения CS.* Зададим элемент пространства $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$. Соответствующую ему точку пространства модулей $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}_3$ можно найти как (единственное, что следует из теоремы 3) решение следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} 2H_1 &= (C_1\Omega_{11} + C_2\Omega_{12} + 2\pi(1 - 2u_1^0)), \\ 2H_2 &= C_1, & 2H_4 &= -C_2, \\ 2H_5 &= -(C_1\Omega_{12} + C_2\Omega_{22} - 4\pi u_2^0), \end{aligned} \quad (4.8)$$

полученной из (4.7) подстановкой разложения (4.5) дифференциала Кристоффеля–Шварца на элементарные дифференциалы. (Мы используем билинейные соотношения Римана (5.11), чтобы преобразовать b -периоды элементарного дифференциала 3-го рода в образ его полярного дивизора при отображении Абеля–Якоби.) Здесь C_1 и C_2 – это вещественно аналитические функции на пространстве модулей, определенные выше как решение линейной системы уравнений с невырожденной матрицей $\|du(p_\alpha), du(p_\beta)\|$ размера 2×2 . Мы видим, что вспомогательная система уравнений “почти линейна” в системе координат, связанной с периодами голоморфных дифференциалов. Остается понять, как эффективно вычислять функции C_1, C_2 и u_2^0 , а также сами интегралы CS. Об этом – в следующем параграфе.

§ 5. Тэта-функции на поверхности рода 2

Приведем здесь необходимые нам сведения о тэта-функциях на поверхностях рода $g = 2$. Три задачи, связанные с конформным отображением, можно эффективно решить при помощи тэта-функций Римана:

- локализация AJ-образа кривой внутри ее якобиана;
- представление двулистной проекции кривой на сферу;
- вычисление нормированного абелева интеграла третьего рода (это существенная часть интеграла CS).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $u \in \mathbb{C}^2$ и $\Pi \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ – риманова матрица, т.е. $\Pi = \Pi^t$ и $\text{Im } \Pi > 0$. Тэта-функция этих двух аргументов – это следующий ряд Фурье:

$$\theta(u, \Pi) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \exp(2\pi i m^t u + \pi i m^t \Pi m). \quad (5.1)$$

Рассматривают также тэта-функции с характеристиками, являющиеся несущественным обобщением приведенной выше тэта-функции:

$$\begin{aligned} \theta[2\varepsilon, 2\varepsilon'](u, \Pi) &:= \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \exp(2\pi i(m + \varepsilon)^t(u + \varepsilon') + \pi i(m + \varepsilon)^t \Pi(m + \varepsilon)) \\ &= \exp(i\pi \varepsilon^t \Pi \varepsilon + 2i\pi \varepsilon^t(u + \varepsilon')) \theta(u + \Pi \varepsilon + \varepsilon', \Pi), \quad \varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Матричный аргумент Π обычно опускают, если ясно какую матрицу периодов имеют в виду. Опущенный векторный аргумент u предполагается равным нулю и соответствующая функция от Π называется тэта-константой:

$$\theta[\varepsilon, \varepsilon'] := \theta[\varepsilon, \varepsilon'](0, \Pi).$$

Рассматриваемые ряды очень быстро сходятся из-за положительной определенности матрицы $\text{Im } \Pi$, а остаточный член ряда легко оценивается [3].

Тэта-функции имеют следующие легко проверяемые свойства четности и квазипериодичности по отношению к решетке $L(\Pi) := \Pi \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2$.

ЛЕММА 3 (см. [11], [12]). (i) При $m, m' \in \mathbb{Z}^2$ и $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{R}^2$ справедливо равенство

$$\theta[\varepsilon, \varepsilon'](u + \Pi m + m', \Pi) = \exp(-i\pi(m^t \varepsilon' - \varepsilon^t m' + m^t \Pi m + 2m^t u)) \theta[\varepsilon, \varepsilon'](u, \Pi). \quad (5.3)$$

(ii) При $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{Z}^2$ выполняется

$$\theta[\varepsilon, \varepsilon'](-u, \Pi) = (-1)^{\varepsilon^t \varepsilon'} \theta[\varepsilon, \varepsilon'](u, \Pi). \quad (5.4)$$

Соответственно, целая тэта-характеристика $[\varepsilon, \varepsilon']$ называется четной или нечетной в зависимости от четности скалярного произведения $\varepsilon^t \cdot \varepsilon'$.

В частности, из (5.3) следует, что множество нулей тэта-функции корректно определено в якобиане. Отображение Абеля–Якоби переносит тэта-функцию на риманову поверхность, на которой она становится многозначной функцией (сечением некоторого линейного расслоения)

$$\theta_e(p) := \theta(u(p) - e; \Pi), \quad e \in \mathbb{C}^2,$$

которая домножается на не обращающиеся в нуль множители, если ее аргумент p обходит ручки на поверхности. Так что нули последней функции корректно определены на поверхности. Они описываются так называемыми теоремами Римана о нулях, наиболее важная из которых в нашем случае следующая [4], [11], [12].

ТЕОРЕМА 4 (Риман). *Функция $\theta_e(p)$ на поверхности рода 2 либо*

(i) *тождественно обращается в нуль на поверхности, что происходит, если и только если e – это вектор римановых констант K (некоторая эффективно вычисляемая точка якобиана), либо*

(ii) *имеет ровно два нуля q_1, q_2 таких, что $q_1 \neq Jq_2$ и*

$$e = u(q_1) + u(q_2) + K \pmod{L(\Pi)}. \quad (5.5)$$

5.1. Вектор римановых констант. Мы хотим определить вектор римановых констант K для нашего выбора базиса в гомологиях и начальной точки отображения Абеля–Якоби.

ЛЕММА 4. *Вектор римановых констант имеет представление*

$$K = u(p_3) + u(p_5). \quad (5.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из таблицы п. 3.3 мы видим, что точки $u(p_3)$ и $u(p_5)$ соответствуют нечетным тэта-характеристикам. Согласно (5.4) функция $\theta(u(p))$ имеет нули в точках $p = p_3, p_5$ поверхности. Эта функция не может быть тождественным нулем на поверхности, в противном случае из части (i) теоремы 4 следовало бы, что $K = 0$. Теперь можно проверить, что функция $\theta_e(p)$ со сдвигом $e := u(p_3) + u(p_5) + K$ – не тождественный нуль (поскольку $p_3 \neq Jp_5$) и при этом зануляется в трех точках $p = p_1, p_3, p_5$.

Альтернатива (ii) теоремы 4 теперь подсказывает, что

$$K = u(p_3) + u(p_5) \pmod{L(\Pi)}.$$

Другими словами, K соответствует нечетной тэта-характеристике $\begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Удобно представлять целые тэта-характеристики как суммы образов точек ветвления при отображении Абеля–Якоби, записывая только индексы этих точек: $[sk \dots l]$ означает сумму по модулю 2 тэта-характеристик точек $u(p_s), u(p_k), \dots, u(p_l)$, например, $[35]$ – это вектор римановых констант, представленный в виде тэта-характеристики.

5.2. Образ отображения Абеля–Якоби. Образ кривой рода 2, вложенной в якобиан, может быть восстановлен решением одного уравнения.

ТЕОРЕМА 5 (Риман). *Точка e якобиана кривой лежит в образе $u(X)$ отображения Абеля–Якоби, если и только если*

$$\theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (e) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Функция $\theta(u(p) - K)$, а значит и $\theta[35](u(p))$, тождественно равна нулю на кривой по теореме 4.

2. Обратно, предположим, что $\theta[35](e) = 0$, что эквивалентно равенству $\theta(e + K) = 0$. Функция $\theta_{e'}(p)$ со сдвигом $e' := e + K$ или имеет два нуля p_1, p' , и в этом случае $e = u(p')$ или является тождественным нулем, и тогда $e = 0 = u(p_1)$.

5.3. Проекция на сферу. Любую мероморфную функцию на кривой можно эффективно вычислить при помощи римановых тэта-функций, если мы знаем ее дивизор. Возьмем, к примеру, функцию x степени 2 на гиперэллиптической кривой (3.1). Такая функция единственна, если ее нормировать, скажем так: $x(p_s) = 0, x(p_j) = 1, x(p_l) = \infty$, где s, j, l – положительная тройка из множества индексов $\{1, 2, \dots, 6\}$.

Из свойств квазипериодичности (5.3) тэта-функции сразу следует, что следующая функция однозначна на кривой:

$$\tilde{x}(p) := \frac{\theta^2[sk35](u(p), \Pi)}{\theta^2[lk35](u(p), \Pi)}, \quad k \neq s, l.$$

Теперь с помощью теоремы 4 можно проверить, что числитель функции имеет двойные нули в точках p_s, p_k , а знаменатель – двойные нули в точках p_l, p_k . Следовательно, $\tilde{x}(p)$ отличается от нормированной выше проекции на постоянный множитель:

$$x(p) = \pm \frac{\theta^2[lkj35]}{\theta^2[skj35]} \frac{\theta^2[sk35](u(p))}{\theta^2[lk35](u(p))}, \quad k \neq s, l, j, \quad (5.7)$$

где знак \pm в последней формуле зависит от четности (+ четный / – нечетный) скалярного произведения $\varepsilon(j) \cdot (\varepsilon'(s) + \varepsilon'(l))$, где целая тэта-характеристика $[\varepsilon(s), \varepsilon'(s)]$ соответствует полупериоду $u(p_s)$. В случае $k = j$ при нормировке используется правило Лопиталья и мы получаем немного другой множитель.

Стандартная нормировка проекции $x(p_\alpha) = -1, x(p_\beta) = 1, x(p_0) = \infty$ приводит нас к несколько более громоздкому выражению

$$x(p) := \pm 2 \frac{\theta^2[\beta j 35](u^0)}{\theta^2[\alpha \beta j 35]} \frac{\theta^2[\alpha j 35](u(p))}{\prod_{\pm} \theta[j 35](u(p) \pm u^0)} - 1, \quad j \neq \alpha, \beta,$$

в котором знак перед дробью зависит от четности скалярного произведения $\varepsilon(\beta) \cdot \varepsilon'(\alpha)$, где $[\varepsilon(s)\varepsilon'(s)]$ – это представление полупериода $u(p_s)$ целой тэта-характеристикой.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Существуют и другие представления двулистной проекции на сферу, например, формула Гранта–Йоргенсена [13], [14] использует частные производные от сигма-функции, близкой родственницы тэты.

5.4. Формулы Розенхайна. Подставляя в приведенную выше формулу (5.7) полупериоды, отвечающие точкам ветвления, мы получим эффективно вычисляемые выражения для последних в терминах матрицы периодов. К примеру, если проекция $x(p)$ нормирована равенствами $x(p_1) = 0$, $x(p_2) = 1$, $x(p_6) = \infty$, мы получаем следующие выражения для остающихся точек ветвления в терминах тэта-констант:

$$\begin{aligned}
 x_3 &= \frac{\theta^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \theta^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\theta^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \theta^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}, & x_4 &= \frac{\theta^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \theta^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}{\theta^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \theta^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}, \\
 x_5 &= \frac{\theta^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \theta^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}{\theta^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \theta^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Выбрав другую нормировку для проекции, получим выражения для всевозможных двойных отношений точек из того же множества точек ветвления, например:

$$\begin{aligned}
 1 - x_3 &= -\frac{\theta^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \theta^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\theta^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \theta^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}, & 1 - x_4 &= -\frac{\theta^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \theta^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\theta^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \theta^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}, \\
 1 - x_5 &= -\frac{\theta^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \theta^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{\theta^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \theta^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Сравнивая выражения (5.8) и (5.9), мы получаем определенные соотношения для тэта-констант, которые являются следствиями тэта-тождества Римана. Выражения для точек ветвления кривых рода 2 в терминах тэта-констант появились в работе Розенхайна [8].

ТЕОРЕМА 6 (см. [8]). *Для невырожденной кривой рода 2 все 10 четных тэта-констант $\theta[\varepsilon, \varepsilon']$, $\varepsilon^t \cdot \varepsilon' \in 2\mathbb{Z}$, отличны от нуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем три различные точки ветвления p_s, p_j, p_l на кривой. Поскольку $p_s \neq Jp_j$, функция $\theta_e(p)$ не обращается в нуль при $p = p_l$, если $e = u(p_s) + u(p_j) + K$. Значение $\theta_e(p_l)$ зануляется одновременно с тэта-константой $\theta[sjl35]$. Когда индексы s, j, l пробегает множество $\{1, 2, \dots, 6\}$, тэта-характеристика $[sjl35]$ пробегает все 10 четных тэта-характеристик.

Одна из компонент многообразия Хумберта в комплексном пространстве Зигеля рода 2 определяется занулением какой-то из четных тэта-констант. Это в точности множество римановых матриц, не являющихся матрицами периодов никаких римановых поверхностей.

5.5. Абелевы интегралы третьего рода. На всякой римановой поверхности существует единственный абелев дифференциал (третьего рода) dv_{rq} с простыми полюсами в предписанных точках $r \neq q$, вычетами соответственно $+1$, -1 и нулевыми периодами вдоль всех a -циклов. Он имеет физический смысл в терминах потока идеальной жидкости по поверхности с источником в точке r и стоком в точке q . Наш подход к эффективному вычислению конформных отображений основан на том, что интеграл от этого дифференциала можно выразить в замкнутой форме.

ТЕОРЕМА 7 (Риман). *Выберем произвольно точку $s \in X$, тогда для любых двух точек $r, q \neq s$ на поверхности справедливо представление*

$$v_{rq}(p) := \int_*^p dv_{rq} = \log \frac{\theta(e + u(p) - u(r))}{\theta(e + u(p) - u(q))} = \log \frac{\theta[\varepsilon, \varepsilon'](u(p) - u(r))}{\theta[\varepsilon, \varepsilon'](u(p) - u(q))} + \text{const}, \quad (5.10)$$

где тэта-характеристика $[\varepsilon, \varepsilon']$ соответствует нулю $e := -u(s) - K$ тэта-функции (скажем, это может быть любая нечетная характеристика).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующую функцию переменной $p \in X$:

$$\exp(-v_{rq}(p)) \frac{\theta(e + u(p) - u(r))}{\theta(e + u(p) - u(q))}.$$

Можно проверить, что она локально голоморфна на поверхности: тэта-функция в числителе зануляется в точках r, s , знаменатель зануляется в точках q, s .

Кроме того, эта функция однозначна на поверхности при условии, что ветви для $u(r), u(q)$ в формуле (5.10) правильно выбраны (путь интегрирования от r до начальной точки p_1 и далее до q можно продеформировать в путь, не пересекающий базисных циклов). Чтобы доказать это, используем билинейное соотношение Римана

$$\int_{b_j} dv_{rq} = 2\pi i \int_q^r du_j \quad (5.11)$$

и свойства квазипериодичности тэта-функций (5.3).

Следовательно, рассматриваемая функция является постоянной, не зависящей от p .

ПРИМЕР. Интеграл CS из п. 4.2.1 можно представить следующим образом:

$$w_{\alpha\beta}(p) = \log \frac{\theta[3](u(p) + u^0)}{\theta[3](u(p) - u^0)} + C_1 u_1(p) + C_2 u_2(p), \quad (5.12)$$

где $u(p) := (u_1(p), u_2(p))^t$, $u^0 := u(p_0)$ и постоянные C_1, C_2 получены из системы линейных уравнений $dw_{\alpha\beta}(p_\gamma) = 0$ при $\gamma = \alpha, \beta$.

§ 6. Алгоритм конформного отображения

На основе формул предыдущего параграфа можно предложить алгоритм конформного отображения семиугольников на полуплоскость и обратно. При заданном многоугольнике нужно прежде всего определить соответствующую ему точку пространства модулей $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}_3$.

6.1. Вспомогательные параметры. Пусть даны связанные с длинами сторон координаты H_s семиугольника. Нужно определить семь вещественных параметров: Ω – мнимую часть матрицы периодов, образ $u^0 := u(p_0)$ отмеченной точки в якобиане кривой и вещественный 2-вектор $C := (C_1, C_2)$. Эти параметры удовлетворяют системе из семи вещественных уравнений:

$$d\theta[35](u, i\Omega) \wedge d\left(\log \frac{\theta[3](u + u^0, i\Omega)}{\theta[3](u - u^0, i\Omega)} + C \cdot u\right) = 0, \quad u = u(p_\alpha), u(p_\beta), \quad (6.1)$$

означающих, что дифференциал $CS dw_{\alpha,\beta}$ имеет нули в точках p_α и p_β ;

$$\theta[35](u^0, i\Omega) = 0, \quad (6.2)$$

означающего, что точка u^0 лежит на образе кривой при вложении последней в ее якобиан и

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2}(C_1\Omega_{11} + C_2\Omega_{12} + 2\pi(1 - 2u_1^0)), \\ H_2 &= \frac{1}{2}C_1, \quad H_4 = -\frac{1}{2}C_2, \\ H_5 &= -\frac{1}{2}(C_1\Omega_{12} + C_2\Omega_{22} - 4\pi u_2^0), \end{aligned} \quad (6.3)$$

определяющих длины сторон семиугольника.

ЛЕММА 5. Пусть длины сторон H_1, H_2, \dots, H_5 удовлетворяют ограничениям леммы 1, тогда система из семи уравнений (6.1)–(6.3) имеет единственное решение $\Omega, u^0, C \in \mathbb{R}^2$ в области, задаваемой неравенствами

$$0 < \Omega_{12} < \min(\Omega_{11}, \Omega_{22}), \quad 0 < u_s^0 < \frac{1}{2}, \quad s = 1, 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование и единственность решения системы уравнений (6.1)–(6.3) в определенной выше области изменения параметров следует из существования и единственности (с точностью до вещественных проективных преобразований) конформного отображения заданного семиугольника на верхнюю полуплоскость.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. По существу, нам нужно решить всего три нелинейных уравнения, что можно сделать методом Ньютона с продолжением по параметру. В самом деле, возьмем любую точку (Ω, u_1^0) большого пространства модулей. Решая всего одно нелинейное уравнение (6.2), получим весь вектор $u^0 = (u_1^0, u_2^0)$. Решением двух линейных уравнений (6.1) получаем вектор постоянных C и, подставляя величины Ω, u^0, C в последние четыре уравнения (6.3), мы получаем длины сторон некоторого семиугольника. Таким образом мы получаем соответствие двух точек: одной в пространстве $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ и одной – в большом пространстве модулей $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}_3$. Любую заданную точку в пространстве семиугольников можно соединить с полученной точкой путем, состоящим из не более чем двух отрезков. Этот путь можно эффективно поднять в большое пространство модулей методом Ньютона.

6.2. Отображение семиугольника на полуплоскость. Предположим, что точка w^* лежит в нормированном семиугольнике (т.е. с вершиной $w_1 = i\pi$). Этому семиугольнику соответствует единственная точка большого пространства модулей, определяющая вещественную симметричную матрицу Ω и вещественные 2-векторы u^0 , C как решения вспомогательной системы (6.1)–(6.3). Рассмотрим систему двух уравнений

$$\log \frac{\theta[3](u^* + u^0, i\Omega)}{\theta[3](u^* - u^0, i\Omega)} + C \cdot u^* = w^*, \quad \theta[35](u^*, i\Omega) = 0 \quad (6.4)$$

по отношению к неизвестному комплексному 2-вектору u^* .

ЛЕММА 6. Система (6.4) имеет единственное решение u^* с тэта-характеристикой из области $\begin{bmatrix} -I & I \\ -I & I \end{bmatrix}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интеграл CS с нормировкой $w_{\alpha\beta}(p_1) = i\pi$ взаимно однозначно отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}^+ \subset X$ на выбранный нормированный семиугольник. Другими словами, уравнение $w_{\alpha\beta}(p^*) = w^*$ имеет единственное решение $p^* \in \mathbb{H}^+$. Отображение Абеля–Якоби также допускает выделение в верхней полуплоскости однозначной ветви с нормировкой $u(p_1) = 0$. Комплексный 2-вектор $u^* := u(p^*)$ согласно (5.12) и теореме 5 удовлетворяет системе уравнений (6.4), и его тэта-характеристика согласно теореме 1 лежит в указанном блоке пространства \mathbb{C}^2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Интеграл CS является многозначной функцией на поверхности, поэтому система двух уравнений (6.4) может иметь много решений (например, это видно из принципа отражений для конформных отображений). Мы вводим ограничения на тэта-характеристику, чтобы выделить единственное решение.

Подставляя решение u^* в правую часть выражения (5.7), мы получим значение в точке w^* конформного отображения $x(w)$ семиугольника на полуплоскость с нормировкой $w_s, w_j, w_l \rightarrow 0, 1, \infty$

$$x^* = \frac{\theta^2[lkj35]}{\theta^2[skj35]} \frac{\theta^2[sk35](u^*)}{\theta^2[lk35](u^*)}, \quad k \neq s, l, j. \quad (6.5)$$

6.3. Отображение полуплоскости на семиугольник. Обратно, имея точку x^* в верхней полуплоскости, мы решаем систему двух уравнений

$$\frac{\theta^2[lkj35]}{\theta^2[skj35]} \frac{\theta^2[sk35](u^*)}{\theta^2[lk35](u^*)} = x^*, \quad \theta[35](u^*) = 0 \quad (6.6)$$

по отношению к комплексному 2-вектору u^* с характеристикой из области $\begin{bmatrix} -I & I \\ -I & I \end{bmatrix}$. Подставляя это решение в формулу

$$\log \frac{\theta[3](u^* + u^0)}{\theta[3](u^* - u^0)} + C \cdot u^* := w^*, \quad (6.7)$$

мы получим образ точки x^* в нормированном семиугольнике.

Дополнение: асимптотики матрицы периодов

Вычислим диапазон изменения второго столбца матрицы периодов Ω при фиксированном первом. Первая компонента отображения Абеля–Якоби переводит верхнюю полуплоскость (вложенную в риманову поверхность) в прямоугольник размера $1/2 \times \Omega_{11}/2$ с горизонтальным разрезом, лежащим на высоте Ω_{12} , см. рис. 4 слева. Длина l этого разреза меняется в пределах от нуля до $1/2$ и параметризует все поверхности с заданным первым столбцом матрицы периодов.

ЛЕММА 7. *Имеют место следующие асимптотики:*

- 1) $\Omega_{22}(l) \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow 0$;
- 2) $\Omega_{22}(l) \rightarrow \Omega_{12}$ при $l \rightarrow 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Отобразим разрезанный прямоугольник на полуплоскость с нормировкой $x_3 = 0, x_4 = 1, x_6 = \infty$, тогда оставшиеся величины x_1, x_2, x_5 будут зависеть от параметра l и иметь конечные пределы при $l \rightarrow 0$, например $x_5(0) = 1$.

Второй элемент базиса голоморфных форм на кривой имеет вид $du_2 = L(x) \frac{dx}{y}$, где $L(x)$ – вещественная линейная функция, имеющая отрицательный нуль (на интервале (x_2, x_3)). Оценим величину $L(x_5)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \int_{x_4}^{x_5} du_2 \leq |L(x_5)| \int_{x_4}^{x_5} \prod_{j=1}^5 |x - x_j|^{-1/2} dx \\ &\leq |L(x_5)| |x_3 - x_4|^{-3/2} \int_{x_4}^{x_5} \frac{dx}{\sqrt{(x - x_4)(x_5 - x)}} = \pi |L(x_5)|. \end{aligned}$$

Теперь оценим период Ω_{22} :

$$\left| \frac{\Omega_{22}}{2} \right| = \left| \int_{x_5}^{x_6} du_2 \right| > |L(x_5)| \int_{x_5}^{x_6} \prod_{j=1}^5 |x - x_j|^{-1/2} dx > \frac{1}{2\pi} \int_{x_5}^{\infty} \frac{dx}{(x - x_1)^{3/2}(x - x_4)}.$$

Последний интеграл логарифмически расходится, когда $x_5(l) \rightarrow 1 = x_4$ при $l \rightarrow 0$.

2) Нормируем отображение разрезанного прямоугольника на полуплоскость условиями $x_2 = \infty, x_3 = 0, x_4 = 1$. Оставшиеся три точки $1 < x_5 < x_6 < x_1$ будут функциями от длины l разреза и стремятся к общему пределу $x_{561} > 1$ при $l \rightarrow 1/2$. Как и ранее, $du_2 = L(x) \frac{dx}{y}$, где $L(x)$ – линейная функция с отрицательным нулем. Оценим величину $L(x_4)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \int_{x_4}^{x_5} du_2 \geq |L(x_4)| \int_{x_4}^{x_5} \prod_{2 \neq j=1}^6 |x - x_j|^{-1/2} dx \\ &\geq \frac{|L(x_4)|}{(x_5 - x_3)(x_5 - x_4)} \int_{x_4}^{x_5} \frac{dx}{(x_1 - x)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Поскольку x_1 и x_5 имеют общий предел при $l \rightarrow 1/2$, то последний интеграл в оценке в пределе расходится. Это значит, что $L(x_4) \rightarrow 0$. Наконец, оценим

разность между Ω_{22} и Ω_{21} :

$$\frac{1}{2}|\Omega_{22} - \Omega_{21}| = \left| \int_{x_3}^{x_4} du_2 \right| \leq \frac{|L(x_4)|}{|x_5 - 1|^{3/2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \rightarrow 0.$$

Список литературы

- [1] T. A. Driscoll, L. N. Trefethen, *Schwarz–Christoffel mapping*, Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math., **8**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [2] A. Bogatyrev, M. Hassner, D. Yarmolich, “An exact analytical-expression for the read sensor signal in magnetic data storage channels”, *Error-correcting codes, finite geometries and cryptography* (Toronto, ON, Canada, 2007), *Contemp. Math.*, **523**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 155–160.
- [3] B. Deconinck, M. Heil, A. Bobenko, M. van Hoeij, M. Schmies, “Computing Riemann theta functions”, *Math. Comp.*, **73**:247 (2004), 1417–1442.
- [4] H. M. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces*, Grad. Texts in Math., **71**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1980.
- [5] С. М. Натанзон, *Модули поверхностей, вещественных алгебраических кривых и их супераналогов*, Изд-во МЦНМО, М., 2003; англ. пер.: S. M. Natanzon, *Moduli of Riemann surfaces, real algebraic curves, and their superanalogs*, *Transl. Math. Monogr.*, **225**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [6] A. Lebowitz, “Handle removal on a compact Riemann surface of genus 2”, *Israel J. Math.*, **15**:2 (1973), 189–192.
- [7] A. Lebowitz, “Degeneration of a compact Riemann surface of genus 2”, *Israel J. Math.*, **12**:3 (1972), 223–236.
- [8] G. Rosenhain, “Abhandlung über die Funktionen zweier Variabeln mit Vier perioden”, *Mem. pres. l’Acad. de Sci. de France des savants XI*, 1851.
- [9] Б. А. Дубровин, “Тэта-функции и нелинейные уравнения”, *УМН*, **36**:2 (1981), 11–80; англ. пер.: B. A. Dubrovin, “Theta functions and non-linear equations”, *Russian Math. Surveys*, **36**:2 (1981), 11–92.
- [10] А. Б. Богатырёв, “Эффективный подход к задачам о наименьшем уклонении”, *Матем. сб.*, **193**:12 (2002), 21–40; англ. пер.: A. B. Bogatyrev, “Effective approach to least deviation problems”, *Sb. Math.*, **193**:12 (2002), 1749–1769.
- [11] H. E. Rauch, H. M. Farkas, *Theta functions with applications to Riemann surfaces*, Williams & Wilkins, Baltimore, 1974.
- [12] Д. Мамфорд, *Лекции о тэта-функции*, Мир, М., 1988; пер. с англ.: D. Mumford, *Tata lectures on theta*. I, *Progr. Math.*, **28**, Birkhäuser, Boston, MA, 1983; II, *Progr. Math.*, **43**, Birkhäuser, Boston, MA, 1984.
- [13] D. Grant, “Formal groups in genus two”, *J. Reine Angew. Math.*, **411** (96–121).
- [14] J. Jorgenson, “On directional derivatives of the theta function along its divisor”, *Israel J. Math.*, **77**:3 (1992), 273–284.

А. Б. Богатырёв (A. B. Bogatyrev)

Институт вычислительной математики РАН, г. Москва;
 Московский физико-технический институт
 (государственный университет);
 Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: gourmet@inm.ras.ru

Поступила в редакцию

22.11.2011