

УДК 517.9

Интегральные уравнения Пуанкаре–Стеклова и задача монодромии Римана

© 2000. А. Б. БОГАТЫРЕВ

§1. Введение

Рассмотрим семейство сингулярных интегральных уравнений вида

$$\lambda \cdot \text{V. p.} \int_I \frac{u(t)}{t-x} dt - \text{V. p.} \int_I \frac{u(t)\dot{R}(t)}{R(t)-R(x)} dt = \text{const}, \quad x \in I := (-1, 1), \quad (1)$$

где параметр семейства $R(x)$ — гладкая невырожденная замена переменных (функция сдвига) на интервале I , λ — спектральный параметр, $u(x)$ — неизвестная функция, const — неизвестная константа. При фиксированной функции $R(x)$ решением (или собственной парой) уравнения Пуанкаре–Стеклова (1) назовем пару $(\lambda, u(x))$ с комплексным λ и гёльдеровой функцией $u(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющую соотношению (1) с некоторой постоянной const .

Обобщая метод статьи [4], в которой были явно найдены все собственные пары $(\lambda, u(x))$ уравнения (1) с квадратичной заменой $R(x)$, мы покажем, что уравнение Пуанкаре–Стеклова с рациональной функцией $R(x)$ сводится к задаче, которую Б. Риман сформулировал в 1857 году [9]: *Найти совокупность из n функций, голоморфных на римановой сфере с выколотыми точками $a_1 \dots a_p$, которые при обходе каждой из выколотых точек подвергаются действию заданной линейной подстановки с постоянными коэффициентами и имеют вблизи точек a_k рост не выше степенного*. Сама по себе эта задача не проще, чем решение рассматриваемого нами интегрального уравнения, однако в попытках ее решить был развит мощнейший геометрический аппарат [6], который с успехом может быть применен [5] к исследованию уравнений Пуанкаре–Стеклова. Излагаемый комплексно-геометрический подход к исследованию интегрального уравнения является развитием идей, изложенных в работе [8] и может быть распространен на более общие одномерные интегральные уравнения, ядра которых являются рациональными функциями. Интересно сравнить результаты исследования уравнений Пуанкаре–Стеклова, полученные методами, изложенными в настоящей статье, и методами классического функционального анализа [3]. Так, использование геометрической техники позволяет дать явные формулы для собственных пар некоторых уравнений (1).

А. Пуанкаре в 1896 г. и В. А. Стеклов в 1901 г. рассмотрели краевые задачи со спектральным параметром в граничных условиях. Уравнение (1) возникает при исследовании следующей граничной задачи [1]:

Пусть гладкая дуга Γ разбивает область Ω на плоскости на две подобласти Ω_1 и Ω_2 . Поставим задачу на собственные значения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U_1 = 0 \text{ в } \Omega_1, U_1 = 0 \text{ на } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma, \\ \Delta U_2 = 0 \text{ в } \Omega_2, U_2 = 0 \text{ на } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma, \\ U_1 = U_2 \text{ на } \Gamma, \\ -\lambda \frac{\partial U_1}{\partial n} = \frac{\partial U_2}{\partial n} \text{ на } \Gamma, \end{array} \right. \quad (2)$$

где Δ — оператор Лапласа, λ — спектральный параметр и n — нормаль к Γ . В случае односвязных областей Ω_k ($k = 1, 2$) введем конформные отображения $\omega_k(z)$ этих областей на верхнюю полуплоскость, нормированные условиями $\omega_k(\Gamma) = I$. Можно показать [2], что значения функции $U_1|_{\Gamma} = U_2|_{\Gamma}$, перенесенные с Γ на I отображением ω_1 , удовлетворяют уравнению (1) с функцией сдвига $R = \omega_2|_{\Gamma} \circ (\omega_1|_{\Gamma})^{-1}: I \rightarrow \Gamma \rightarrow I$.

§2. Задача монодромии

2.1. Эквивалентное функциональное уравнение. Везде далее мы предполагаем функцию сдвига $R(x)$ рациональной функцией степени $n := \deg R$, удовлетворяющей условию невырожденности замены переменных $R: I \rightarrow I$, т. е.

$$\dot{R}(x) \neq 0, \quad x \in [-1, 1], \quad (3)$$

что гарантирует [2, 3] дискретность спектра задачи (1). Заметим, что условие (3) влечет за собой однолиственность функции R в малой комплексной окрестности \mathcal{U} отрезка \bar{I} .

Фиксируем $x \in \widehat{\mathbb{C}}$; тогда уравнение $R(z) = R(x)$ относительно переменной z имеет ровно n решений $z_1(x) := x, z_2(x), \dots, z_n(x)$, среди которых могут быть повторяющиеся и равные ∞ . Ядро второго интеграла в (1) следующим образом разлагается на простейшие дроби:

$$\frac{\dot{R}(t)}{R(t) - R(x)} = \frac{d}{dt} \ln(R(t) - R(x)) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{t - z_k(x)} - \frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)}; \quad (4)$$

здесь $Q(t)$ — знаменатель представления $R(t)$ в виде несократимого отношения многочленов.

Вид слагаемых в разложении (4) наводит на мысль ввести новую неизвестную функцию $\Phi(x)$ — интеграл типа Коши от $u(x)$, к которому для технических целей добавлена константа:

$$\Phi(x) := \int_I \frac{u(t)}{t - x} dt + \text{const}', \quad x \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \bar{I}, \quad (5)$$

$$\text{const}' := \frac{1}{\lambda - n} \left[\int_I \frac{u(t)\dot{Q}(t)}{Q(t)} dt - \text{const} \right]. \quad (6)$$

Решение $u(x)$ интегрального уравнения (1) восстанавливает формула Сохоцкого–Племеля [7]:

$$u(x) = (2\pi i)^{-1} [\Phi(x + i0) - \Phi(x - i0)], \quad x \in I. \quad (7)$$

ЛЕММА 1. При $1 \neq \lambda \neq n$ преобразования (5), (7) осуществляют взаимно однозначное соответствие между собственными парами $(\lambda, u(x))$ уравнения (1) и ненулевыми голоморфными в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bar{I}$ решениями $\Phi(x)$ функционального уравнения

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \delta \sum_{k=2}^n \Phi(z_k(x)), \quad x \in I, \quad (8)$$

$$\delta = \frac{2}{\lambda - 1}, \quad (9)$$

граничные значения $\Phi^\pm(x) := \Phi(x \pm i0)$ которого удовлетворяют условию Гёльдера на \bar{I} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\lambda, u(x))$ — собственная пара уравнения (1). Заметим, что многочлен $Q(t)$ не имеет нулей на $[-1, 1]$; поэтому константа (6) конечна. Свойства интеграла типа Коши гарантируют [7], что граничные значения решения Φ существуют во внутренних точках отрезка \bar{I} , локально гёльдеровы и удовлетворяют формулам Сохоцкого–Племеля (7) и

$$\text{V. p.} \int_I \frac{u(t)}{t - x} dt + \text{const}' = \frac{1}{2} (\Phi^+(x) + \Phi^-(x)), \quad x \in I. \quad (10)$$

Подставив разложение ядра (4) в левую часть интегрального уравнения (1), мы получим сумму интегралов типа Коши и некоторой константы, возникающей при интегрировании функции $u(t) d \ln Q(t)$ по отрезку. Константа в определении Φ специально подобрана так, чтобы получающееся тождество для новой переменной не содержало постоянного слагаемого.

Покажем, что $u(\pm 1) = 0$, откуда будет следовать существование предельных значений решения Φ в точках ± 1 и глобальная гёльдеровость его граничных значений на \bar{I} . Пусть, например, $u(-1) \neq 0$; тогда левая часть формулы (8) имеет логарифмический рост при $x \rightarrow -1$, правая же стремится к конечному значению, поскольку $z_2(-1), \dots, z_n(-1) \notin \mathcal{U}$ — точки голоморфности функции $\Phi(x)$.

Наши рассуждения обратимы: если граничные значения голоморфной в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bar{I}$ функции Φ гёльдеровы на \bar{I} , то функция $u(x)$, восстановленная из (7), связана с $\Phi(x)$ уравнением (5) с некоторой постоянной const' [7]. Если при этом Φ удовлетворяет на разрезе уравнению (8), то это соотношение переписывается, учитывая тождество (4) и формулу Сохоцкого–Племеля (10), в виде сингулярного интегрального уравнения (1) с той же, что и в (6), постоянной const . \square

Впоследствии нам потребуется подвергнуть малой деформации разрез I , фигурирующий в формулировке функционального уравнения (8), что законно ввиду следующей леммы:

ЛЕММА 2. Пусть $J \subset \mathcal{U}$ — изотопная деформация интервала I , тождественная вблизи концов. Тогда всякое голоморфное в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bar{J}$ решение Φ уравнения

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \delta \sum_{k=2}^n \Phi(z_k(x)), \quad x \in J, \quad (11)$$

граничные значения $\Phi^\pm(x)$ которого удовлетворяют условию Гёльдера на \bar{J} , аналитически продолжается до описанного в лемме 1 решения функционального уравнения (8), и наоборот.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Φ — решение любого из уравнений (8), (11). В таком случае правая часть функционального уравнения, рассматриваемая как функция аргумента x , голоморфна в \mathcal{U} . Действительно, при $x \in \mathcal{U}$ значения $z_2(x), \dots, z_n(x)$ лежат в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{U}$ — области голоморфности функции Φ , и потому слагаемые в сумме $\sum_{k=2}^n \Phi(z_k(x))$ не голоморфны лишь в конечном числе точек ветвления x_* алгебраических функций $z_k(x)$. При обходе аргумента x вокруг любой точки x_* упомянутого множества слагаемые переставятся и сумма вернется к своему значению. Точки x_* являются для рассматриваемой суммы изолированными особыми точками однозначного характера и, поскольку Φ ограничена в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{U}$, устранимы.

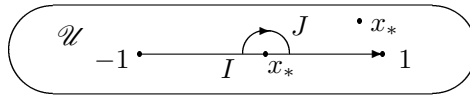


Рис. 1. Деформация разреза.

Ввиду сказанного само функциональное уравнение (8) (или (11)) определяет аналитическое продолжение функции Φ через разрез в область, ограниченную кривыми I и J . Продолженное решение Φ удовлетворяет соотношению (11) (или (8)) на новом разрезе. Граничные значения функции Φ на новом разрезе аналитичны вне сколь угодно малых окрестностей точек ± 1 . Поскольку в указанных окрестностях кривые I и J совпадают, то функции Φ^\pm являются гёльдеровыми на новом разрезе, коль скоро они были гёльдеровыми на старом. \square

2.2. Мотивация введения монодромии. Из доказательства леммы 2 видно, что функцию Φ , определенную на дополнении к разрезу I по решению u интегрального уравнения (1), можно аналитически продолжить через разрез в силу функционального соотношения (8). Росток функции Φ^+ , аналитически продолжаемый через I вдоль малой петли, огибающей любую из точек ± 1 , переходит в росток функции Φ^- , и наоборот. Таким образом, Φ имеет на концах интервала I точки ветвления второго порядка. Другими словами, в окрестности разреза $\Phi(x)$ является голоморфной функцией на римановой поверхности функции $\sqrt{1-x^2}$.

Для нахождения полной римановой поверхности функции $\Phi(x)$ рассмотрим локально определенный вектор $W(x) := (\Phi(z_1(x)), \dots, \Phi(z_n(x)))^t$, где $z_k(x)$ — решения уравнения $R(z_k) = R(x)$ на сфере Римана. Неголоморфность этого вектора на $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ вызвана двумя причинами: (1) ветвлением функции Φ в точках ± 1 и (2) ветвлением алгебраических функций $z_k(x)$, что может иметь место лишь в конечном числе точек. Нетрудно найти закон преобразования вектора W при обходе каждой из указанных особых точек x_* .

Для каждой из $2n$ точек x_* множества $R^{-1}(\pm 1)$ одна из функций $z_k(x_*)$ принимает значение ± 1 . При обходе точки x_* по малой петле компонента W_k заменяется в силу уравнения (8) на комбинацию $-W_k + \delta \sum_{j \neq k} W_j$, а остальные компоненты могут только меняться местами. При обходе оставшихся точек ветвления x_* компоненты вектора $W(x)$ просто переставляются. Таким образом, вектор $W(x)$, построенный по решению интегрального уравнения (1), является решением некоторой задачи монодромии Римана.

2.3. Определения и вспомогательные утверждения. Формализацию рассуждений предыдущего раздела удобно провести при помощи теории накрытий, основные положения которой можно найти, например, в [10]. Будем считать $R(x) : \mathbb{C}\mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_1$ n -листным накрытием, разветвленным над точками a_1, \dots, a_l сферы Римана и, возможно, над точками ± 1 . Пусть y_0 — отмеченная точка базы $\mathcal{Y} := \mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \{a_1, \dots, a_l, -1, 1\}$, а $\{x_1, \dots, x_n\} := R^{-1}(y_0)$ — накрывающие ее точки пространства $\mathcal{X} := R^{-1}(\mathcal{Y})$. Монодромия \mathbf{T}_* неразветвленного накрытия $R : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ действует из $\pi_1(\mathcal{Y}, y_0)$ в группу матриц перестановок n -го порядка по правилу

$$\mathbf{T}_*([\mathbf{r}]) \cdot (x_1, \dots, x_n)^t := (x_1 \cdot \mathbf{r}, \dots, x_n \cdot \mathbf{r})^t, \quad \mathbf{r} \in [\mathbf{r}] \in \pi_1(\mathcal{Y}, y_0). \quad (12)$$

Здесь путь \mathbf{r} из базы действует на точку x накрывающего пространства, если x проецируется в начало пути. Результат $x \cdot \mathbf{r}$ — конечная точка поднятия пути \mathbf{r} от x на накрывающую. Это действие ассоциативно, т.е. $(x \cdot \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{r}_2 = x \cdot (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)$, и зависит лишь от гомотопического класса $[\mathbf{r}]$. Далее буквами $\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \dots$ мы обозначаем пути (петли) пространства \mathcal{Y} , начинающиеся в отмеченной точке y_0 . Групповое свойство отображения \mathbf{T}_* обеспечивает

ЛЕММА 3. Пусть \mathbf{s} — путь и \mathbf{r} — петля в \mathcal{Y} , начинающиеся в y_0 . Тогда

$$\mathbf{T}_*([\mathbf{r}])(x_1 \cdot \mathbf{s}, \dots, x_n \cdot \mathbf{s})^t = (x_1 \cdot \mathbf{rs}, \dots, x_n \cdot \mathbf{rs})^t. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрица перестановок $\mathbf{T}_*([\mathbf{r}])$, определенная равенством (13), постоянна вдоль пути \mathbf{s} по соображениям непрерывности, а потому совпадает с матрицей из (12) и не зависит от \mathbf{s} . \square

Связанное с интегральным уравнением (1) представление $\mathbf{T} : \pi_1(\mathcal{Y}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ получается видоизменением монодромии накрытия R . Соединим точки ± 1 на базе \mathcal{Y} простым путем $D := I$, если последний не проходит через точки ветвления a_k накрытия, или его малой деформацией $D := R(J) \subset R(\mathcal{U})$, минующей точки ветвления (см. лемму 2). Фундаментальная группа $\pi_1(\mathcal{Y}, y_0)$ свободно порождена своей подгруппой $\pi_1(\mathcal{Y} \setminus D, y_0)$ и гомотопическим классом $[\mathbf{d}]$ фиксированного лассо \mathbf{d} , охватывающего любую из точек ± 1 и единожды пересекающего путь D справа налево (D наследует ориентацию от J). Справедлива

ЛЕММА 4. Полный прообраз $R^{-1}(y_0)$ содержит единственную точку x_1 поднятие от которой на \mathcal{X} любой петли класса $[\mathbf{d}]$ пересекает разрез J .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $R^{-1}(\mathbf{d})$ состоит из n компонент, из которых ровно одна пересекается с J . Начало этой компоненты примем за x_1 . При деформации поднятия петли \mathbf{d} на \mathcal{X} от точки x_1 индекс пересечения с разрезом J не изменится. \square

ЛЕММА 5. Матрица $\mathbf{T}_*([\mathbf{d}])$ коммутирует с матрицей \mathbf{D} вида

$$\mathbf{D}(\delta) := \left\| \begin{array}{cccc} -1 & \delta & \dots & \delta \\ 0 & & & \\ \vdots & E_{n-1} & & \\ 0 & & & \end{array} \right\| \in GL_n(\mathbb{C}), \quad (14)$$

где E_{n-1} — единичная матрица ранга $n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрица $\mathbf{T}_*([\mathbf{r}])$ коммутирует с \mathbf{D} , если перестановка, отвечающая петле \mathbf{r} , сохраняет первый элемент. Равенство $x_1 \cdot \mathbf{d} = x_1$ следует из однолистности функции R в \mathcal{U} . \square

Представление \mathbf{T} определим, используя указанное выше разбиение группы $\pi_1(\mathcal{Y})$ на свободные порождающие:

$$\mathbf{T}([\mathbf{d}]) := \mathbf{DT}_*([\mathbf{d}]), \quad \mathbf{T}([\mathbf{r}]) := \mathbf{T}_*([\mathbf{r}]), \quad [\mathbf{r}] \in \pi_1(\mathcal{Y} \setminus D, y_0). \quad (15)$$

Можно показать, что монодромия \mathbf{T} не зависит от произвола в выборе разреза $D \subset R(\mathcal{Y})$; замена опорной точки y_0 , лассо \mathbf{d} и порядка нумерации точек x_2, x_3, \dots, x_n (точка x_1 выбирается в соответствии с леммой 4) приводит к подобному представлению \mathbf{T} с приводящей матрицей перестановок.

2.4. Основная теорема. Сформулируем и докажем основную теорему:

ТЕОРЕМА 1. *Собственные пары $(\lambda, u(x))$ уравнения (1) при $1 \neq \lambda \neq n$ взаимно однозначно соответствуют нетривиальным ограниченными вблизи проколов $\pm 1, a_1, \dots, a_l$ голоморфным решениям W задачи Римана с монодромией \mathbf{T} , определенной в (15), (14) при δ из (9).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. $(\lambda, u) \rightarrow W$. Пусть (λ, u) — собственная пара уравнения (1) при $1 \neq \lambda \neq n$. Сопоставим ей вектор $W(\tilde{y})$ на универсальной накрывающей $\tilde{\mathcal{Y}}$. Точки последней имеют представление $\tilde{y} = \tilde{y}_0 \cdot \mathbf{t}$, где $\mathbf{t} \subset \mathcal{Y}$ — начинающийся в y_0 путь и опорная точка $\tilde{y}_0 \in \tilde{\mathcal{Y}}$ накрывает y_0 . В точках \tilde{y} , не лежащих на системе разрезов \tilde{D} , накрывающих D , определим вектор

$$W(\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{t}) := \mathbf{T}([\mathbf{r}])\mathbf{T}_*^{-1}([\mathbf{r}])\left(\Phi(x_1 \cdot \mathbf{t}), \dots, \Phi(x_n \cdot \mathbf{t})\right)^t, \quad (16)$$

где петля $\mathbf{r} := \mathbf{t} \cdot \mathbf{s}^{-1}$ — это продолжение пути \mathbf{t} любым не пересекающим D путем \mathbf{s}^{-1} , а Φ — соответствующее собственной паре (λ, u) решение функционального уравнения (11). Проверим корректность этого определения: если \mathbf{s}' — другой путь, замыкающий \mathbf{t} до петли, то гомотопический класс петли $\mathbf{r}' := \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}'^{-1}$ принадлежит $\pi_1(\mathcal{Y} \setminus D, y_0)$ и выполнены равенства

$$\mathbf{T}([\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'])\mathbf{T}_*^{-1}([\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}']) = \mathbf{T}([\mathbf{r}])\mathbf{T}([\mathbf{r}'])\mathbf{T}_*^{-1}([\mathbf{r}'])\mathbf{T}_*^{-1}([\mathbf{r}]) = \mathbf{T}([\mathbf{r}])\mathbf{T}_*^{-1}([\mathbf{r}]).$$

Покажем, что предельные значения вектора W на правом ($-$) и левом ($+$) берегах разрезов \tilde{D} совпадают и, следовательно, W голоморфен на всей накрывающей $\tilde{\mathcal{Y}}$. Пусть пути \mathbf{t}_\pm имеют общий конец $y \in D$, гомотопны, но подходят к D с разных сторон. Деформируя лассо \mathbf{d} и разбивая его на две части (см. рис. 2), мы можем выбрать два оканчивающихся в y пути \mathbf{d}_\pm , таких, что $D \cap \mathbf{d}_\pm = y$ и $\mathbf{d}_- \cdot \mathbf{d}_+^{-1} \in [\mathbf{d}]$.

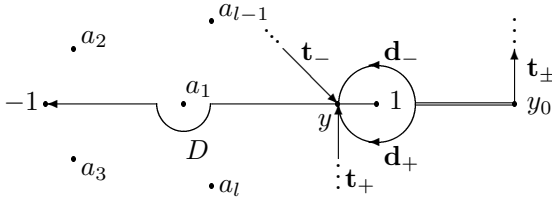


Рис. 2. К соотношению на разрезе D .

Положим $\mathbf{r}_\pm := \mathbf{t}_\pm \cdot \mathbf{d}_\pm^{-1}$; тогда $[\mathbf{r}_+] = [\mathbf{r}_-][\mathbf{d}]$, и, поскольку $x_s \cdot \mathbf{t}_+ \in J$ для некоторого s , $1 \leq s \leq n$, имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
 W^+(\tilde{y}) &:= \mathbf{T}([\mathbf{r}_+])\mathbf{T}_*^{-1}([\mathbf{r}_+])(\Phi(x_1 \cdot \mathbf{t}_+), \dots, \Phi^+(x_s \cdot \mathbf{t}_+), \dots, \Phi(x_n \cdot \mathbf{t}_+))^t \\
 &= \mathbf{T}([\mathbf{r}_-])\mathbf{D}\mathbf{T}_*^{-1}([\mathbf{r}_-])(\Phi(x_1 \cdot \mathbf{t}_+), \dots, \Phi^+(x_s \cdot \mathbf{t}_+), \dots, \Phi(x_n \cdot \mathbf{t}_+))^t \\
 &\stackrel{\text{Л.4.,(13)}}{=} \mathbf{T}([\mathbf{r}_-])\mathbf{D}(\Phi^+(x_1 \cdot \mathbf{d}_-), \dots, \Phi(x_n \cdot \mathbf{d}_-))^t \\
 &\stackrel{(11)}{=} \mathbf{T}([\mathbf{r}_-])(\Phi^-(x_1 \cdot \mathbf{d}_-), \dots, \Phi(x_n \cdot \mathbf{d}_-))^t \\
 &\stackrel{\text{Л.4.,(13)}}{=} \mathbf{T}([\mathbf{r}_-])\mathbf{T}_*^{-1}([\mathbf{r}_-])(\Phi(x_1 \cdot \mathbf{t}_-), \dots, \Phi^-(x_s \cdot \mathbf{t}_-), \dots, \Phi(x_n \cdot \mathbf{t}_-))^t \\
 &=: W^-(y).
 \end{aligned}$$

Ограниченность вектора W , спроецированного локально на \mathcal{Y} , вблизи выколотых точек $a_1, \dots, a_l, \pm 1$ следует из ограниченности функции Φ вплоть до разреза J . Определим, наконец, монодромию вектора $W(\tilde{y})$. Пусть \mathbf{q} — петля с началом в y_0 , а \mathbf{t} , \mathbf{r} — те же, что в (16); тогда

$$W(\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{q}\mathbf{t}) := \mathbf{T}([\mathbf{q}\mathbf{r}])\mathbf{T}_*^{-1}([\mathbf{q}\mathbf{r}])(\Phi(x_1 \cdot \mathbf{q}\mathbf{t}), \dots, \Phi(x_n \cdot \mathbf{q}\mathbf{t}))^t \stackrel{(13)}{=} \mathbf{T}([\mathbf{q}])W(\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{t}).$$

2. $W \rightarrow (\lambda, u)$. Задавшись вектором $W(\tilde{y}) = (W_1, \dots, W_n)^t$ с монодромией \mathbf{T} , определим на множестве $R^{-1}(\mathcal{Y} \setminus D)$ однозначную функцию $\Phi(x)$. Если путь \mathbf{s} не пересекает D , то

$$\Phi(x_k \cdot \mathbf{s}) := W_k(\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{s}). \quad (17)$$

Проверим корректность определения (17): если \mathbf{s}' также не пересекает D и $x_k \cdot \mathbf{s} = x_{k'} \cdot \mathbf{s}'$, $1 \leq k, k' \leq n$, то гомотопический класс петли $\mathbf{r} := \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}'^{-1}$ принадлежит $\pi_1(\mathcal{Y} \setminus D, y_0)$, а $x_k \cdot \mathbf{r} = x_{k'}$. Поэтому k -я строчка равенства

$$W(\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{s}) = \mathbf{T}([\mathbf{r}])W(\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{s}') = \mathbf{T}_*([\mathbf{r}])W(\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{s}')$$

выглядит как $W_k(\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{s}) = W_{k'}(\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{s}')$, откуда вытекает корректность определения функции Φ .

Исследуем граничные значения функции Φ на компонентах множества $R^{-1}(D)$. Фиксируем точку $y \in D$ и два пути \mathbf{d}_\pm , такие, что $[\mathbf{d}_- \cdot \mathbf{d}_+^{-1}] = [\mathbf{d}]$ и $D \cap \mathbf{d}_\pm = y$ (см. рис. 2). Записав покомпонентно равенство

$$W(\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{d}_-) = \mathbf{T}([\mathbf{d}])W(\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{d}_+)$$

с учетом того, что перестановка $\mathbf{T}_*([\mathbf{d}])$ переводит k -й элемент в m -й, если $x_k := x_m \cdot \mathbf{d}$, и, в частности, сохраняет первый элемент, приходим к следующим соотношениям для граничных значений функции Φ на $R^{-1}(D)$:

$$\Phi^-(x_1 \cdot \mathbf{d}_-) = -\Phi^+(x_1 \cdot \mathbf{d}_+) + \delta \sum_{k=2}^n \Phi(x_k \cdot \mathbf{d}_+), \quad (18)$$

$$\Phi^-(x_m \cdot \mathbf{d}_-) = \Phi^+(x_k \cdot \mathbf{d}_+), \quad m = 2, \dots, n. \quad (19)$$

Равенства (19) с учетом $x_m \cdot \mathbf{d}_- = x_k \cdot \mathbf{d}_+ \notin J$ показывают, что на отличных от J компонентах полного прообраза разреза D граничные значения функции Φ слева совпадают с ее граничными значениями справа; поэтому Φ продолжается до голоморфной в $\mathcal{X} \setminus J$ функции. Равенство (18) — это в точности формула (11), и, наконец, проколы пространства \mathcal{X} являются устранимыми особыми точками функции Φ , поскольку вектор W ограничен вблизи проколов пространства \mathcal{Y} .

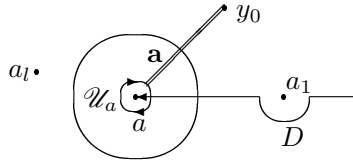


Рис. 3. К представлению функции Φ вблизи ± 1 .

Докажем гёльдеровость граничных значений функции Φ на разрезе J , после чего мы сможем воспользоваться леммами 1, 2 для восстановления собственной пары интегрального уравнения Пуанкаре–Стеклова. Во внутренних точках разреза J граничные значения функции Φ аналитичны. Исследуем поведение Φ^\pm вблизи конца c разреза J . Пусть $a = R(c)$ — один из концов разреза D , \mathcal{U}_a — круговая окрестность точки a , не содержащая других проколов, и \mathbf{a} — накинутое на прокол a лассо, пересекающее D один раз справа налево (см. рис. 3). Для некоторых не пересекающих D петель \mathbf{r} , \mathbf{s} справедливо разложение

$$[\mathbf{a}] = [\mathbf{r}][\mathbf{d}][\mathbf{s}], \quad [\mathbf{r}], [\mathbf{s}] \in \pi_1(\mathcal{Y} \setminus D, y_0). \quad (20)$$

Вблизи c определение функции Φ преобразуется в $\Phi(x) = W_m(y)$, $y := R(x) \in \mathcal{U}_a$; здесь однозначную ветвь вектора W в односвязной области $\mathcal{U}_a \setminus D$ определяет черенок лассо \mathbf{a} , а компоненту m — равенство $x_m := x_1 \cdot \mathbf{r}^{-1}$. Ниже мы покажем, что $W_m(y)$ возвращается к своему значению, если аргумент y дважды огибает a , оставаясь в окрестности \mathcal{U}_a . Соответственно $\Phi(x)$ вблизи c есть голоморфная функция $\sqrt{R(x) - a}$ или $\sqrt{x - c}$. Ее граничное значение на J является гёльдеровской функцией показателя $1/2$.

Покажем, наконец, что монодромия $\mathbf{T}^2([\mathbf{a}])$ сохраняет m -ю компоненту вектора W . Поднятие лассо \mathbf{a} от x_m — это огибающее точку c лассо, ибо R однолиствна вблизи c . Поэтому $x_m \cdot \mathbf{a} = x_m$ и $x_1 \cdot \mathbf{dsr} = x_1$; следовательно, матрицы \mathbf{D} и $\mathbf{T}_*([\mathbf{dsr}])$ коммутируют и справедлива выкладка

$$\mathbf{T}^2([\mathbf{a}]) := \mathbf{T}_*([\mathbf{r}])\mathbf{D}\mathbf{T}_*([\mathbf{dsr}])\mathbf{D}\mathbf{T}_*([\mathbf{ds}]) = \mathbf{T}_*([\mathbf{rds}]). \quad (21)$$

Перестановка $\mathbf{T}_*([\mathbf{a}])$ сохраняет m -ю компоненту. \square

§3. Универсальная накрывающая \mathfrak{S}

Наметим один из подходов к решению задачи монодромии Римана, фигурирующей в формулировке теоремы 1. Он связан с построением естественного пространства, на котором «живут» (т.е. являются однозначными голоморфными функциями) решения $W(y)$ задачи Римана. Другой возможный подход связан с нахождением голоморфных сечений расслоения Рёрля, построенного по монодромии \mathbf{T} [6, 5].

ЛЕММА 6. Матрицы монодромии \mathbf{T} , отвечающие обходам каждой из выколотых точек $-1, +1, a_1, \dots, a_l$, имеют в $GL_n(\mathbb{C})$ конечные порядки $m_-, m_+, m_1, \dots, m_l$ соответственно, такие, что

$$\begin{aligned} m_\pm &= \text{НОК}\{2, k(R, x) \mid x \in R^{-1}(\pm 1)\}, \\ m_s &= \text{НОК}\{k(R, x) \mid x \in R^{-1}(a_s)\}, \quad s = 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (22)$$

где $k(R, x)$ — индекс ветвления накрытия R в точке x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим не пересекающее разрез D лассо \mathbf{a}_s , наброшенное на фиксированную точку a_s , $s = 1, \dots, l$. Если k_1, \dots, k_p — индексы ветвления накрытия R в прообразах точки a_s , то перестановка, отвечающая матрице монодромии $\mathbf{T}([\mathbf{a}_s]) := \mathbf{T}_*([\mathbf{a}_s])$, разбивается на p циклов длины k_1, \dots, k_p и порядок матрицы $\mathbf{T}([\mathbf{a}_s])$ равен в точности наименьшему общему кратному чисел k_1, \dots, k_p . Любой другой огибающий точку a_s путь имеет гомотопический класс, сопряженный $[\mathbf{a}_s]^{\pm 1}$, и соответствующая матрица \mathbf{T} имеет тот же групповой порядок m_s .

Если a — любой из концов разреза D и петли $\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$ те же, что и в (20), то для натуральных p справедливо равенство

$$\mathbf{T}^p([\mathbf{a}]) = \mathbf{T}_*([\mathbf{r}])\mathbf{T}_*^{p-1}([\mathbf{dsr}])\mathbf{D}^{p \pmod{2}}\mathbf{T}_*([\mathbf{ds}]);$$

аргументация здесь та же, что и в равенстве (21). Вывод: порядок m_a матрицы $\mathbf{T}([\mathbf{a}])$ четен и кратен порядку матрицы перестановок $\mathbf{T}_*([\mathbf{rds}]) := \mathbf{T}_*([\mathbf{a}])$, вычислять который мы уже умеем. Любой другой огибающий точку a путь имеет гомотопический класс, сопряженный $[\mathbf{a}]^{\pm 1}$, и соответствующая матрица монодромии имеет тот же порядок m_a . \square

Согласно теореме Клейна–Пуанкаре об униформизации [11], существует универсальная накрывающая \mathbb{S} сферы Римана, ветвящаяся над точками $-1, 1, a_1, \dots, a_l$ с порядками $m_-, m_+, m_1, \dots, m_l$ соответственно¹. Накрытие $\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_1$ является регулярным, а конформный тип накрывающей совпадает с $\mathbb{C}\mathbb{P}_1$, \mathbb{C} либо $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ в зависимости от знака (соответственно $+, 0, -$) величины

$$\chi(R) := -l + \frac{1}{m_+} + \frac{1}{m_-} + \sum_{s=1}^l \frac{1}{m_s}. \tag{23}$$

СЛЕДСТВИЕ ЛЕММЫ 6. Представление \mathbf{T} корректно определено на группе скольжений G накрытия $\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа скольжений G накрытия $\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_1$ имеет представление $G \cong \pi_1(\mathcal{Y}, y_0)/\pi_1^\sharp$ с группой накрытия π_1^\sharp , порожденной всевозможными элементами вида $[\mathbf{a}_\pm]^{m_\pm}, [\mathbf{a}_k]^{m_k}, k = 1, \dots, l$, где петля \mathbf{a}_k зацеплена за прокол a_k и \mathbf{a}_+ и \mathbf{a}_- — петли, зацепленные за $+1, -1$ соответственно. Из леммы 6 следует, что $\pi_1^\sharp \subset \ker \mathbf{T}$. \square

Поднимая задачу монодромии Римана теоремы 1 с \mathcal{Y} на накрывающую \mathbb{S} , убеждаемся, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. Собственные пары $(\lambda, u(x))$ уравнения (1) при $1 \neq \lambda \neq n$ взаимно однозначно соответствуют ненулевым голоморфным в \mathbb{S} векторам $W(s)$ размерности n с симметрией

$$W(\hat{\mathbf{r}}s) = \mathbf{T}(\hat{\mathbf{r}})W(s) \quad \forall \hat{\mathbf{r}} \in G, s \in \mathbb{S}. \tag{24}$$

§ 4. Уравнения с негиперболической накрывающей

В этом параграфе мы классифицируем функции сдвига R по конформному типу накрывающей \mathbb{S} и для всех R , для которых $\mathbb{S} \neq \mathbb{U}$, найдем собственные пары соответствующих интегральных уравнений.

¹Случай двух выколотых точек ± 1 при $m_+ \neq m_-$ не реализуется: см. п. 1 доказательства теоремы 3.

ТЕОРЕМА 3. *Эллиптической накрывающей $\mathbb{S} = \mathbb{C}\mathbb{P}_1$ отвечает однопараметрическое семейство дробно-линейных функций*

$$R(x) = \Lambda_\alpha(x) := \frac{x + \alpha}{\alpha x + 1}, \quad \alpha \in (-1, 1). \quad (25)$$

Параболической накрывающей $\mathbb{S} = \mathbb{C}$ соответствует семейство параметрически представимых функций $R(x)$:

$$\begin{aligned} R(s) &= \Lambda_\alpha \circ \operatorname{sn}(K(k)s | k), \\ x(s) &= \Lambda_\beta \circ \operatorname{sn}(K(k_1)s | k_1), \end{aligned} \quad s \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in (-1, 1), \quad (26)$$

где модули k, k_1 эллиптических синусов связаны со степенью n функции $R(x)$ соотношением $n \cdot \operatorname{Im} \tau(k) = \operatorname{Im} \tau(k_1)$ ($\tau(k) := iK'(k)/K(k)$ — отношение полных эллиптических интегралов модуля k) и изменяются в одном из интервалов

$$\begin{aligned} k \in (0, 1), \quad k_1 \in (0, 1), \quad n \in \mathbb{N} + 1, \\ k \in i(0, \infty), \quad k_1 \in (0, 1), \quad n \in 2\mathbb{N}, \\ k \in i(0, \infty), \quad k_1 \in i(0, \infty), \quad n \in 2\mathbb{N} + 1. \end{aligned} \quad (27)$$

Формулами (25), (26) исчерпываются все возрастающие на $[-1, 1]$ невырожденные рациональные функции $R(x) : I \rightarrow I$, для которых $\chi(R) \geq 0$. Убывающие функции сдвига получают отсюда заменой $R \rightarrow -R$ либо $x \rightarrow -x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем рациональную функцию сдвига R , производная которой строго положительна на отрезке $[-1, 1]$. В зависимости от количества l отличных от ± 1 выколотых точек a_1, \dots, a_l рассмотрим три случая.

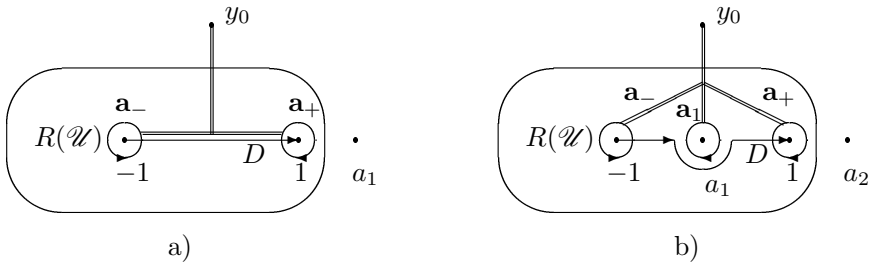


Рис. 4. Выбор образующих гомотопической группы.

1. $l = 0, 1$. В этом случае гомотопическая группа $\pi_1(\mathcal{Y}, y_0)$ (свободно, если $l = 1$) порождается классами двух лассо \mathbf{a}_\pm , изображенных на рис. 4а). Поскольку функция R однолистка в малой окрестности \mathcal{U} отрезка $[-1, 1]$, оба лассо можно накрыть петлями, проведенными из одной точки $x_1 \in \mathcal{R}^{-1}(y_0)$. Из формулы $\deg R = |\pi_1(\mathcal{Y}, y_0) : R(\pi_1(\mathcal{X}, x_1))|$ вытекает, что $\deg R = 1$; следовательно, R есть дробно-линейное отображение, сохраняющее направленный отрезок $[-1, 1]$, т. е. справедливо представление (25).

2. $l = 2$. Если хотя бы одна из точек a_1, a_2 принадлежит интервалу I , то рассмотрим три лассо $\mathbf{a}_\pm, \mathbf{a}_1$ вида, указанного на рис. 4б). Гомотопические классы этих лассо порождают группу $\pi_1(\mathcal{Y}, y_0)$, а сами лассо накрываются петлями, проведенными от одной из точек $x_1 \in \mathcal{R}^{-1}(y_0)$, откуда следует, что $\pi_1(\mathcal{Y}, y_0) = R(\pi_1(\mathcal{X}, x_1))$. Рассуждая, как и в предыдущем пункте, мы приходим к выводу, что $R(x) = \Lambda_\alpha(x)$ при $\alpha \in (-1, 1)$.

Пусть точки a_1, a_2 лежат в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bar{I}$ и при этом $m_1 = m_2 = m_+ = m_- = 2$, ибо если хотя бы одно из этих чисел превосходит 2, то $\chi(R) < 0$. Составляя в противном случае подходящую суперпозицию $\Lambda_\alpha^{-1} \circ R$ с дробно-линейным отображением Λ_α , мы будем считать, что $a_1 = 1/k, a_2 = -1/k$, где $k \in (0, 1)$ при действительных a_1, a_2 и $k \in i(0, \infty)$ при комплексно сопряженных a_1, a_2 .

Отображение $R_\sharp(s) := \text{sn}(K(k)s | k)$ является регулярным накрытием $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_1$ с ветвлением второго порядка над четырьмя точками $\pm 1, \pm 1/k$ и переводящим в себя отрезок $[-1, 1]$. Группа скольжений G_\sharp этого накрытия порождена двумя евклидовыми вращениями \hat{a}_\pm порядка два с центрами в ± 1 соответственно и сдвигом \hat{s} на величину $2\tau(k)$.

Индексы ветвления накрытия R в прообразах четырех точек $\pm 1, \pm 1/k$ делят 2; поэтому существует [11] определенное с точностью до движений из G_\sharp регулярное накрытие R_b , которое делает следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C} = \mathbb{S} & \\ & \swarrow R_b(s) & \downarrow R_\sharp(s) := \text{sn}(K(k)s | k) \\ \mathcal{X} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}_1 & \xrightarrow{R(x)} & \mathbb{C}\mathbb{P}_1 \supset \mathcal{Y} \end{array} \quad (28)$$

Мы явно найдем накрытие R_b , вычислив его группу скольжений G_b , после чего из диаграммы (28) будет следовать параметрическое представление (26) для $R(x)$. Накрытие R_b проецирует точку $s_1 \cdot \mathbf{t} \in \mathbb{S}$ в точку $x_1 \cdot \mathbf{t} \in \mathcal{X}$, где $\mathbf{t} \subset \mathcal{Y}$ — путь с началом в y_0 , а накрывающие точку y_0 отмеченные точки $x_1 \in \mathcal{X}$ и $s_1 \in \mathbb{S}$ мы выберем специальным образом — так, чтобы: (1) поднятия петель \mathbf{a}_\pm на рис. 4а) на \mathcal{X} от x_1 были бы петлями, огибающими точки ± 1 соответственно и (2) поднятия петель \mathbf{a}_\pm^2 на \mathbb{S} от s_1 также огибали бы точки $\pm 1 \in \mathbb{S}$.

ЛЕММА 7. *Группа G_b порождена вращениями \hat{a}_\pm и сдвигом \hat{s}^n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим равенство $n := \deg R = |G_\sharp : G_b|$. Включения $\hat{a}_\pm \in G_b$ гарантирует сделанный выше специальный выбор базисных точек x_1, s_1 . Используя коммутационное соотношение $\hat{a}_\pm \hat{s} = \hat{s}^{-1} \hat{a}_\pm$, представим всякий элемент $\hat{\mathbf{r}}$ группы G_b в виде

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{s}^j \prod \hat{a}_\pm, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (29)$$

Классы смежности подгруппы G_b в G_\sharp образуют ряд $\dots, \hat{s}^{-1}G_b, G_b, \hat{s}G_b, \hat{s}^2G_b, \dots$ содержащий ровно n различных множеств, а потому циклически повторяющийся с периодом n . Элемент группы скольжений с разложением (29) содержится в G_b тогда и только тогда, когда $j \pmod n = 0$. \square

Существует единственное с точностью до движения Λ_β сферы Римана регулярное накрытие $R_b(s) = \text{sn}(K(k_1)s | k_1) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_1$ с группой скольжений G_b , переводящее в себя направленный отрезок $[-1, 1]$. Модуль $k_1 \in (0, 1) \cup i(0, \infty)$ связан с модулем k соотношением $n \cdot \text{Im } \tau(k) = \text{Im } \tau(k_1)$. Действительно, если $k \in (0, 1)$, то $\text{Re } \tau(k) = 0$ и существует единственный модуль $k_1 \in (0, 1)$, такой, что $n\tau(k) = \tau(k_1)$. Если же $k \in i(0, \infty)$, то $\text{Re } \tau(k) = 1$ и модуль k_1 определяется из равенства $n\tau(k) - 2[n/2] = \tau(k_1)$, причем $k_1 \in (0, 1)$ при четном n и $k_1 \in i(0, \infty)$ при нечетном n . Нетрудно проверить, что группа скольжений описанного накрытия порождена вращениями \hat{a}_\pm и сдвигом на $2n\tau(k) - 4[n/2]$.

3. $l \geq 3$. При этом $\chi(R) \leq -1/2$. \square

Завершим этот параграф, решив уравнение (24) на накрывающих $\mathbb{S} = \mathbb{C}\mathbb{P}_1, \mathbb{C}$. Основной случай гиперболической накрывающей $\mathbb{S} = \mathbb{U}$ значительно сложнее рассмотренного ниже, и все же для рациональных функций R порядка $n = 3$ удается дать представления решений задачи (24), хотя и не в столь явной форме, как в приведенной ниже теореме 4. Для дробно-линейной функции сдвига накрывающее пространство $\mathbb{S} = \mathbb{C}\mathbb{P}_1$ компактно и на нем не существует отличных от констант голоморфных функций. Из теоремы 2 следует, что собственным числом уравнения Пуанкаре–Стеклова (1) с $R(x)$ из (25) может быть лишь $\lambda = 1$; его кратность бесконечна ввиду тождества

$$\frac{\dot{\Lambda}_\alpha(t)}{\Lambda_\alpha(t) - \Lambda_\alpha(x)} = \frac{1}{t-x} + \frac{\alpha}{\alpha t + 1}. \quad (30)$$

Случай параболической накрывающей \mathbb{S} описывает

ТЕОРЕМА 4. *Все собственные пары $(\lambda, u(x))$ уравнения (1) при функциях сдвига $R(x)$ из (26), модулях k, k_1 , лежащих в одном из интервалов (27), и $1 \neq \lambda \neq n$ представимы следующими формулами:*

$$u_m(x) = \sin \left[\frac{m\pi}{2K(k_1)} \int_{-1}^{\Lambda_\beta^{-1}(x)} (1-t^2)^{-1/2} (1-k_1^2 t^2)^{-1/2} dt \right], \quad m = 1, 2, \dots, \quad (31)$$

$$\lambda_m = \begin{cases} \operatorname{th}(mn\pi \operatorname{Im} \tau/2) \cdot \operatorname{th}^{-1}(m\pi \operatorname{Im} \tau/2), & k \in (0, 1), \\ [\operatorname{th}(mn\pi \operatorname{Im} \tau/2)]^{\epsilon(mn)} \cdot [\operatorname{th}(m\pi \operatorname{Im} \tau/2)]^{-\epsilon(m)}, & k \in i(0, \infty), \end{cases} \quad (32)$$

где $\epsilon(j) := (-1)^j$, а $\tau := iK'(k)/K(k)$ — отношение полных эллиптических интегралов модуля k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду теоремы 2 нам достаточно решить уравнение (24) на накрывающей $\mathbb{S} = \mathbb{C}$, предварительно определив движения из группы скольжений и представление монодромии \mathbf{T} .

Из тождества (30) видно, что уравнения Пуанкаре–Стеклова с функциями сдвига R и $\Lambda_\alpha \circ R$ обладают одним набором собственных пар — домножение слева на Λ_α влияет лишь на величину константы в уравнении. Не теряя общности, полагаем $a_1 = 1/k$, $a_2 = -1/k$, где $k \in (0, 1)$ либо $k \in i(0, \infty)$. Фиксируем $y_0 := \infty$ и выберем в качестве образующих фундаментальной группы $\pi_1(\mathcal{Y}, y_0)$ гомотопические классы петель $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{d}$, изображенных на рис. 5.

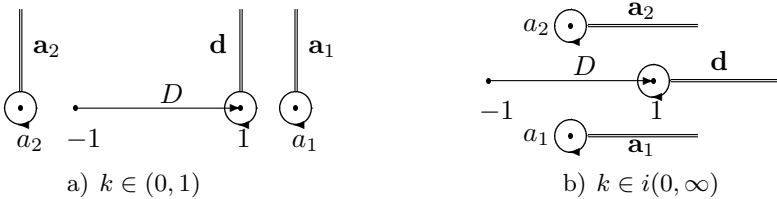


Рис. 5. Петли $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{d}$.

Для вычисления перестановок \mathbf{T}_* удобно использовать конструкцию диаграммы (28), считая точками пространства \mathcal{Y} орбиты группы скольжений $G_\#$ накрытия $R_\#$, а точками пространства \mathcal{X} — орбиты ее подгруппы G_b . При

выборе базисных точек $x_1 = s_1 = \tau$ действие образующих $\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2, \hat{\mathbf{d}}$ группы G_{\sharp} , соответствующих гомотопическим классам $[\mathbf{a}_1], [\mathbf{a}_2], [\mathbf{d}]$, выглядит так:

$$\hat{\mathbf{d}}s = 2 - s, \quad \hat{\mathbf{a}}_1 s = 2 + 2\tau - s, \quad \hat{\mathbf{a}}_2 s = -2 + 2\tau - s, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (33)$$

а подгруппа G_b порождается вращениями второго порядка $\hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{a}}_1\hat{\mathbf{a}}_2$ и сдвигом $(\hat{\mathbf{a}}_1\hat{\mathbf{d}})^n$. Конец поднятия на \mathbb{S} петли \mathbf{d} от накрывающей y_0 точки

$$x_j := (2j - 1)\tau = (\hat{\mathbf{a}}_1\hat{\mathbf{d}})^{j-1}\tau, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (34)$$

есть точка $(\hat{\mathbf{a}}_1\hat{\mathbf{d}})^{j-1}\hat{\mathbf{d}}\tau$, эквивалентная в силу группы G_b точке x_{2+n-j} ; поэтому классу $[\mathbf{d}]$ отвечает перестановка

$$\mathbf{T}_*(\hat{\mathbf{d}})(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)^t = (x_1, x_n, x_{n-1}, \dots, x_3, x_2)^t. \quad (35)$$

Аналогично вычисляются и другие перестановки:

$$\mathbf{T}_*(\hat{\mathbf{a}}_p)(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)^t = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1)^t, \quad p = 1, 2. \quad (36)$$

Наша задача — найти голоморфный в \mathbb{C} вектор W с законом преобразования (24). Перестановка \mathbf{T}_* , отвечающая сдвигу $\hat{\mathbf{a}}_1\hat{\mathbf{a}}_2s = s + 4$, тривиальна; поэтому вектор W разлагается в (равномерно сходящийся на компактах) ряд Фурье:

$$W(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A^{(m)} e^{i\pi m s/2}. \quad (37)$$

Подставляя ряд (37) в (24) при $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{a}}_1$ и $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{a}}_1\hat{\mathbf{d}}$, убеждаемся, что его коэффициенты удовлетворяют уравнениям

$$A^{(m)} e^{i\pi m(\tau+1)} = \mathbf{T}_*(\hat{\mathbf{a}}_1)A^{(-m)}, \quad A^{(m)} e^{i\pi m\tau} = \mathbf{T}_*(\hat{\mathbf{a}}_1\hat{\mathbf{d}})\mathbf{D}A^{(m)}. \quad (38)$$

Если в ряде (37) коэффициент $A^{(m)}$ ненулевой, то и коэффициент $A^{(-m)}$ тоже ненулевой и оба они являются собственными векторами матрицы

$$\mathbf{T}_*(\hat{\mathbf{a}}_1\hat{\mathbf{d}})\mathbf{D} = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & & \\ \vdots & E_{n-1} & \\ 0 & & \\ -1 & \delta & \dots & \delta \end{array} \right\|,$$

где E_{n-1} — единичная матрица; поэтому с точностью до пропорциональности

$$A^{(\pm m)} = (\pm i)^m \gamma (\gamma^{n-1}, \gamma^{n-3}, \dots, \gamma^{3-n}, \gamma^{1-n})^t, \quad \gamma = e^{\mp i\pi m\tau/2}, \quad (39)$$

при

$$\delta = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{\gamma^{n-1} - \gamma^{1-n}} (\gamma^n + \gamma^{-n}). \quad (40)$$

Покажем, что значения δ , соответствующие различным $|m|$, различны. Отсюда будет следовать, что решения уравнения (24) принимают вид

$$W^{(m)}(s) = A^{(-m)} e^{-i\pi m s/2} + A^{(m)} e^{i\pi m s/2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (41)$$

Восстановим значения спектрального параметра λ , однозначно связанного с величиной δ формулой (9):

$$\lambda_m = \frac{\operatorname{th}(-i\pi m n\tau/2)}{\operatorname{th}(-i\pi m\tau/2)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда, учитывая что $\operatorname{Re} \tau = 0$ при $k \in (0, 1)$ и $\operatorname{Re} \tau = 1$ при $k \in i(0, \infty)$, мы получаем формулы (32) для собственных значений. Замечая, что функция $\operatorname{th}(nx)/\operatorname{th}(x)$ убывает на положительной полуоси, убеждаемся, что при $k \in (0, 1)$ собственные числа убывают с ростом m , а при $k \in i(0, \infty)$ нечетные собственные числа возрастают, стремясь к 1, четные же убывают, стремясь к единице. Следовательно, различным значениям $|m|$ отвечают различные значения δ .

Осталось восстановить собственные функции $u(x)$ по формулам (7), (17):

$$2\pi i u_m(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x) = W_1^{(m)}(s) - W_1^{(m)}(\hat{\mathbf{d}}s),$$

где точка $x \in I$ связана с $s \in I$ выражением (26). Подставляя сюда значения из (41), (39) и обращая эллиптический синус, приходим к выражению (31) для собственных функций. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $\lambda = n$ уравнение Пуанкаре–Стеклова можно привести к форме (24), но с представлением \mathbf{T} в аффинную группу $GA(n, \mathbb{C})$. Решая неоднородное уравнение (24), можно убедиться, что $\lambda = n$ не является собственным числом интегрального уравнения (1) при R из (26).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Существует интерпретация собственных пар (31), (32) при $k \in (0, 1)$, связанная с краевой задачей (2). Соответствующая краевая задача на собственные значения поставлена в прямоугольнике размера $2 \times (n+1) \operatorname{Im} \tau$, разбитом прямолинейным отрезком на два прямоугольника размеров $2 \times n \cdot \operatorname{Im} \tau$ и $2 \times \operatorname{Im} \tau$. Эта задача решена в [1] методом разделения переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев В. И., Агошков В. И. Операторы Пуанкаре–Стеклова и их применение в анализе. ОВМ АН, М., 1983.
2. Bogatyrev A. B. On spectra of pairs of Poincaré–Steklov operators. Russ. J. Numer. Anal. Math. Model., **8**, No. 3, 177–194 (1993).
3. Богатырев А. Б. Дискретный спектр задачи для пары операторов Пуанкаре–Стеклова. Докл. РАН, **358**, № 3, 295–298 (1998).
4. Богатырев А. Б. Геометрический способ решения серии интегральных уравнений Пуанкаре–Стеклова. Матем. заметки, **63**, No. 3, 343–353 (1998).
5. Bogatyrev A. On the geometry of Poincaré–Steklov integral equations. In: Modern Group Analysis-VII. MARS Publishers, Trondheim, 1999, pp. 25–37.
6. Болибрух А. А. Проблема Римана–Гильберта. УМН, **45**, вып. 2, 3–47 (1990).
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Наука, М., 1978.
8. Гахов Ф. Д., Чибрикова Л. И. О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешимых в замкнутой форме. Матем. сб., **35**, № 3, 395–436 (1954).
9. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в 19 столетии. Наука, М., 1989.
10. Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. Наука, М., 1989.
11. Vinberg E., Shvartsman O. Discrete groups of motions of spaces of constant curvature. Encyclop. Math. Sci., vol. 29, Springer-Verlag, 1993.