Рациональные функции, допускающие двойные разложения

А. Б. Богатырёв

Дж. Ритт [1] исследовал структуру множества комплексных многочленов по отношению к композиции. Многочлен $P(x)$ называется неразложимым, если представление $P = P_1 \circ P_2$ возможно только в случае, когда P_1 или P_2 является линейной функцией. Разложение $P = P_1 \circ P_2 \circ \ldots \circ P_r$ называют максимальным, если все P_j являются неразложимыми многочленами, отличными от линейных. Ритт доказал, что любые два максимальных разложения одного и того же многочлена имеют одну длину r, одно и то же (неупорядоченное) множество $\{\deg(P_j)\}$ степеней композиционных множителей и могут быть связаны конечной цепочкой преобразований, каждое из которых состоит в замене левой части следующего двойного разложения

$$R_1 \circ R_2 = R_3 \circ R_4 \tag{1}$$

на его правую часть. Решениями последнего функционального уравнения являются неразложимые многочлены степени, большей чем один, и все они были явно перечислены Риттом.

Аналоги теории Ритта для рациональных функций к настоящему времени построены лишь для нескольких частных классов упомянутых функций, скажем для многочленов Лорана [2]. В данной заметке мы опишем определенный класс двойных разложений (1) с рациональными функциями $R_j(x)$ степени больше чем один. По существу, описанные ниже рациональные функции были открыты Е. И. Золотарёвым как решения некоторой оптимизационной задачи [4, 5]. Свойство двойного разложения для этих функций оставалось, однако, малоизвестным из-за их неудачного параметрического представления. Ниже мы даём (возможно, новое) представление для золотарёвских дробей, напоминающее известное представление для многочленов Чебышёва. Последние являются, кстати, специальным предельным случаем дробей Золотарёва.

Библиография: 5 названий. *УДК:* 517.54, 517.583. *MSC2010:* 30D05, 33E05. *Ключевые слова и фразы:* теория Ритта, композиционные множители, дробь Золотарёва, эллиптические функции, решётки.

§ 1. Дроби Золотарёва и их композиционное свойство

Чисто мнимый параметр $\tau \in i\mathbb{R}_+$ определяет прямоугольник $\Pi(\tau)$ размера $2 \times |\tau|$:

$$\Pi(\tau) := \{u \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Re} u| \leqslant 1,\ 0 \leqslant \operatorname{Im} u \leqslant |\tau|\}.$$

Конформное отображение $x_\tau(u)$ этого прямоугольника на верхнюю полуплоскость, сохраняющее неподвижными три точки $u = \pm 1, 0$, имеет следующий простой вид:

$$x_\tau(u) = \operatorname{sn}(K(\tau)u|\tau)$$

Поддержано грантом РФФИ-10-01-00407 и Программой ОМН РАН «Современные проблемы теоретической математики».

в терминах эллиптического синуса sn и полного эллиптического интеграла K. Из принципа отражений для конформного отображения можно легко вывести, что параметрическое представление:

$$R(u) := x_\tau(u); \quad x(u) := x_{n\tau}(u), \quad u \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N},$$

определяет рациональную функцию R степени n от аргумента x и параметрически зависящую от τ:

$$Z_n(x|\tau) := R(u(x)) = x_\tau \circ x_{n\tau}^{-1}.$$

Эта рациональная функция известна как дробь Золотарёва. Непосредственно из определения следует, что золотарёвские дроби удовлетворяют следующему композиционному свойству:

$$Z_{mn}(x|\tau) = Z_m(Z_n(x|m\tau)|\tau), \quad m, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Когда параметр τ стремится к нулю, подправленные с помощью подходящих дробно-линейных преобразований дроби Золотарёва переходят в классические многочлены Чебышёва и классическое свойство композиции многочленов Чебышёва проявляется как следствие вышеприведенной формулы (2). Меняя местами n и m в формуле (2), мы замечаем, что дроби Золотарёва составных степеней обладают двойными композиционными разложениям вида (1). Мы обобщаем эту конструкцию в следующем разделе.

§ 2. Построение

Пусть L — решётка ранга два в плоскости комплексного переменного u. Группу сдвигов плоскости на элементы этой решётки обозначим той же буквой L. Обозначим L^+ расширение группы L элементом порядка два, соответствующим преобразованию $u \to -u$. Расширенная группа действует разрывно на комплексной плоскости, так что пространство орбит хорошо определено и имеет естественную комплексную структуру

$$\mathbb{C}/L^+ = \mathbb{C}P^1.$$

На этой сфере Римана можно ввести глобальную координату, скажем

$$x(u) = \wp(u|L) := u^{-2} + \sum_{0 \neq v \in L} ((u-v)^{-2} - v^{-2}), \quad u \in \mathbb{C}.$$

Традиционно в качестве второго аргумента функции Вейерштрасса используют (какой-либо) базис в решётке L, хотя функция зависит только от самой решётки в целом.

Если наша решётка L содержит подрешётку полного ранга $L_\bullet$, то соответствующая расширенная группа $L_\bullet^+$ будет подгруппой в L^+, а значит, всякая орбита группы $L_\bullet^+$ содержится в некоторой орбите группы L^+. Тем самым возникает голоморфное отображение одной сферы на другую:

$$\mathbb{C}/L_\bullet^+ \to \mathbb{C}/L^+, \tag{3}$$

которое можно отождествить с рациональной функцией, коль скоро мы фиксируем глобальную комплексную координату на каждой сфере. Так мы получаем задаваемую параметрически рациональную функцию $R_{L:L_\bullet}(x)$ степени $|L:L_\bullet|$:

$$R_{L:L_\bullet}(x_\bullet(u)) := x(u), \quad x_\bullet(u) := \wp(u|L_\bullet), \tag{4}$$

которая является общим видом рациональных функций с числом экстремальности $g=1$ в терминологии [6]. Чтобы получить золотарёвскую дробь модуля $\tau \in i\mathbb{R}_+$, нужно взять решётку $L = \mathrm{Span}_\mathbb{Z}\{4, 2\tau\}$ и её подрешётку $L_\bullet = \mathrm{Span}_\mathbb{Z}\{4, 2n\tau\}$. Тогда $R_{L:L_\bullet}(x)$ совпадает с $Z_n(x|\tau)$ с точностью до нормировки (т. е. пре- и посткомпозиции с дробно-линейными функциями).

Предположим, что у нас есть две подрешётки полного ранга $L_\bullet$ и $L_\circ$ в решётке L. Их пересечение $L_{\bullet\circ} := L_\bullet \cap L_\circ$ есть подрешётка полного ранга как в $L_\bullet$, так и в $L_\circ$. Действительно, $L_{\bullet\circ}$ содержит подрешётку $|L:L_\bullet||L:L_\circ|\,L$ полного ранга. В этих условиях имеет место двойное разложение:

$$R_{L:L_{\bullet\circ}} = R_{L:L_\bullet} \circ R_{L_\bullet:L_{\bullet\circ}} = R_{L:L_\circ} \circ R_{L_\circ:L_{\bullet\circ}}. \tag{5}$$

Не все соотношения вида (5) независимы. Ниже мы покажем, что произвольное двойное разложение (5) следует из таких же соотношений для подрешёток $L_\bullet$, $L_\circ$ простых индексов в L.

§ 3. Подрешётки простого индекса

Если задан базис решётки L, то базис её подрешётки $L_\bullet$ получается при помощи целочисленной матрицы Q размера 2×2. Другой выбор базисов приводит к умножению Q на обратимые целочисленные матрицы (т. е. с определителем ± 1) слева и справа. Индекс подрешётки $L_\bullet$ в решётке L обозначают $|L:L_\bullet|$ и полагают равным $|\det Q|$; он независим от выбора базисов в решётке и её подрешётке. Если задана последовательность подрешёток $L \supset L_\bullet \supset L_{\bullet\bullet}$, их индексы удовлетворяют цепному правилу: $|L:L_{\bullet\bullet}| = |L:L_\bullet||L_\bullet:L_{\bullet\bullet}|$.

Лемма 1. *Любая подрешётка $L_\bullet$ простого индекса p в L имеет следующее представление:*

$$L_\bullet = \mathrm{Span}_\mathbb{Z}\{pL, e\}, \tag{6}$$

где e — произвольный элемент из $L_\bullet \setminus pL$. Обратно, правая часть (6) *есть подрешётка простого индекса p в L, если $e \notin pL$.*

Доказательство. Пусть матрица $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ переводит базис L в базис $L_\bullet$. Матрица $(\det Q)\cdot Q^{-1}$ целочисленна и, следовательно, $L_\bullet$ содержит подрешётку pL индекса $p = \det Q$. Рассмотрим цепочку подрешёток

$$pL \subset \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{pL, e\} \subset L_\bullet.$$

Простой индекс $p = |L_\bullet : pL|$ равен произведению индексов $|L_\bullet : \mathrm{Span}\{\dots\}|$ и $|\mathrm{Span}\{\dots\} : pL|$, следовательно, один из них равен единице. Другими словами, средняя решётка в цепочке совпадает либо с левой, либо с правой решёткой. Выбор элемента e говорит нам, что средняя решётка цепочки строго больше, чем pL. □

Следствие 1. *Пусть $L_\bullet \neq L_\circ$ — две подрешётки в L одного и того же простого индекса p. Тогда $L_\bullet \cap L_\circ = pL$.*

Доказательство. Всякая подрешётка в L индекса p содержит pL. Если пересечение $L_\bullet \cap L_\circ$ содержит хотя бы один элемент $e \notin pL$, то каждую из двух подрешёток можно восстановить по формуле (6) и, следовательно, они совпадают. □

Следствие 2. *Пусть $L_\bullet$ и $L_\circ$ — две подрешётки в L с различными простыми индексами $p_\bullet$ и $p_\circ$ соответственно. Их пересечение имеет представление:*

$$L_\bullet \cap L_\circ = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{p_\bullet p_\circ L,\ p_\bullet e_\circ,\ p_\circ e_\bullet\}, \tag{7}$$

где e_* — произвольный элемент $L_* \setminus p_* L$, индекс $*$ равен $\bullet$ или $\circ$.

Доказательство. Обозначим решётку в правой части формулы (7) как $L_{\bullet\circ}$ и покажем, что она является подрешёткой в $L_\bullet$ индекса $p_\circ$. В самом деле, из (6) следует представление

$$L_{\bullet\circ} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{p_\circ L_\bullet,\ p_\bullet e_\circ\},$$

и остаётся проверить, что $p_\bullet e_\circ \notin p_\circ L_\bullet$. Если бы это было не так, то $p_\bullet e_\circ \in$ $\in p_\bullet L \cap p_\circ L = p_\bullet p_\circ L$ и $e_\circ \in p_\circ L$ вопреки нашему выбору элемента $e_\circ$. Схожим образом мы проверяем, что $L_{\bullet\circ}$ является подрешёткой в $L_\circ$ индекса $p_\bullet$. Тем самым $L_{\bullet\circ}$ является подрешёткой пересечения $L_\bullet \cap L_\circ$. Индекс $L_\bullet \cap L_\circ$ в L — это кратное обоих чисел $p_\bullet$ и $p_\circ$, т. е. по крайней мере $p_\bullet p_\circ$. С другой стороны, $p_\bullet p_\circ = |L : L_{\bullet\circ}| = |L : L_\bullet \cap L_\circ||L_\bullet \cap L_\circ : L_{\bullet\circ}|$. Откуда и следует (7). □

Объединяя следствия 1 и 2, мы получаем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть $L_\bullet$ и $L_\circ$ — две подрешётки в L простых индексов $p_\bullet$ и $p_\circ$ соответственно, а $L_{\bullet\circ} := L_\bullet \cap L_\circ$ — их пересечение. Если $L_\bullet \neq L_\circ$ то тогда $|L_\bullet : L_{\bullet\circ}| = p_\circ$ и $|L_\circ : L_{\bullet\circ}| = p_\bullet$. В противном случае, если $L_\bullet = L_\circ$, то $|L_\bullet : L_{\bullet\circ}| =$ $= |L_\circ : L_{\bullet\circ}| = 1$.*

Теперь мы можем перечислить все подрешётки в L заданного простого индекса p. Фактормножество любой решётки (6) по её подрешётке pL состоит из p элементов $\{je\}$, $j = 0, \dots, p-1$, и естественно включено в фактормножество L/pL, состоящее из p^2 элементов. Для различных подрешёток $L_\bullet$, факторы $L_\bullet/pL$ пересекаются только по нулевому элементу в L/pL. Следовательно, в L существует ровно $(p^2-1)/(p-1) = p+1$ подрешёток заданного простого индекса p. Можно проверить, что они представлены, например, следующими матрицами перехода Q для любого фиксированного базиса в L:

$$\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix}, \ j = 0, \ p-1, \quad \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 4. Подрешётки составного индекса

Фиксируем произвольную решётку L ранга 2 и её подрешётки L_*, L^* полного ранга.

Для подходящих базисов в решётках L и L_* матрица перехода Q_* диагональна (для доказательства используем каноническую форму Смита для целочисленных матриц). Разлагая элементы Q_* в произведение простых чисел, мы получим представление этой матрицы как произведение целочисленных матриц с простыми определителями. Тем самым мы получаем цепочку вложенных решёток $L := L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \ldots \supset L_r =: L_*$ с последовательными простыми индексами $p_j := |L_{j-1} : L_j|$. Это же рассуждение, применённое ко второй подрешётке L^*, даст ещё одну фильтрацию $L := L^0 \supset L^1 \supset L^2 \supset \ldots \supset L^s =: L^*$ с простыми индексами $p^k := |L^{k-1} : L^k|$.

Рассмотрим подрешётки $L_j^k := L_j \cap L^k$, естественно заполняющие такую прямоугольную таблицу:

$$\begin{array}{ccccccccc}
L^s & \leftarrow & L_1^s & \leftarrow & L_2^s & \leftarrow & \ldots & \leftarrow & L_r^s = L_* \cap L^* := L_*^* \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
L^2 & \leftarrow & L_1^2 & \leftarrow & \ldots & \leftarrow & \ldots & \leftarrow & L_r^2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
L^1 & \leftarrow & L_1^1 & \leftarrow & L_2^1 & \leftarrow & \ldots & \leftarrow & L_r^1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
L & \leftarrow & L_1 & \leftarrow & L_2 & \leftarrow & \ldots & \leftarrow & L_r
\end{array} \tag{8}$$

где стрелки обозначают вложения. В самом деле,

$$L_{j-1}^k \cap L_j^{k-1} := (L_{j-1} \cap L^k) \cap (L_j \cap L^{k-1}) = (L_j \cap L_{j-1}) \cap (L^k \cap L^{k-1}) = L_j \cap L^k =: L_j^k.$$

Применяя лемму 2 последовательно к элементарным квадратам таблицы (8), начиная с левого нижнего и двигаясь направо по строкам и вверх по столбцам, мы получим следующее

Следствие 3. *Соседние подрешётки в таблице 8 или совпадают, или имеют простой индекс:* $|L_{j-1}^k : L_j^k| \in \{1, p_j\}$; $|L_j^{k-1} : L_j^k| \in \{1, p^k\}$.

Теорема 1. *Любое двойное разложение* (5) *является следствием соотношений того же типа для подрешёток* $L_\bullet$, $L_\circ$ *простого индекса.*

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим всевозможные пути из L_*^* в L, идущие по стрелкам таблицы (8). Каждый путь соответствует фильтрации начальной решётки L, а следовательно, и разложению рациональной функции

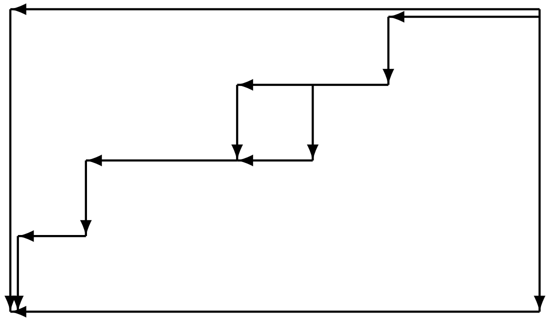

Рис. 1. Деформация путей по таблице

$R_{L:L^*_*}(x)$ на простые композиционные множители (возможно, являющиеся тождественными элементами). Изменение пути, вызванное другим обходом элементарного квадрата таблицы (см. рис. 1), приводит к замене двух соседних членов разложения на основе соотношения двойного разложения (5)

$$R_{L^k_j:L^k_{j+1}} \circ R_{L^k_{j+1}:L^{k+1}_{j+1}} = R_{L^k_j:L^{k+1}_j} \circ R_{L^{k+1}_j:L^{k+1}_{j+1}},$$

соответствующего подрешёткам простых индексов. Путь, идущий вдоль верхней и левой сторон таблицы можно такими элементарными заменами перевести в путь, идущий по правой и нижней стороне. $\square$

Список литературы

[1] *Ritt J. F.* Prime and composite polynomials // Trans. Amer. Math. Soc. 1922. Vol. 23. P. 51–66.

[2] *Pakovich F.* Prime and composite Laurent polynomials // Bull. Sci. Math. 2009. Vol. 133. P. 693–732.

[3] *Pakovich F.* On semiconjugate rational functions. Preprint arXiv:1108.1900v2

[4] *Золотарёв Е. И.* Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля (1877) // ПСС Е. И. Золотарёва, т. 2. Л.: Изд-во АН СССР, 1932. С. 1–59.

[5] *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.

[6] *Богатырёв А. Б.* Чебышёвское представление рациональных функций // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 11. С. 19–40.

Андрей Борисович Богатырёв
Институт вычислительной математики РАН
E-mail: gourmet@inm.ras.ru

Представлено в редакцию 31.05.2012