Математические заметки

том 63 выпуск 3 март 1998

УДК 517.5

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ СЕРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПУАНКАРЕ–СТЕКЛОВА

А. Б. Богатырёв

В явном виде найдены собственные числа и собственные функции для одного семейства сингулярных интегральных уравнений. Показано, как дискретный спектр преобразуется в непрерывный при вырождении уравнения.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Семейство сингулярных интегральных уравнений (Пуанкаре–Стеклова) вида

$$\lambda \int_I \frac{u(x)}{x-y}\,dx - \int_I \frac{u(x)\dot{\mathscr{A}}(x)}{\mathscr{A}(x)-\mathscr{A}(y)}\,dx = \mathrm{const}, \qquad y \in I = (-1,1), \tag{1}$$

где λ – спектральный параметр, $\mathscr{A}(x)$ – заданная гладкая замена переменных на интервале интегрирования I, $u(x)$ – неизвестная функция из заранее оговоренного функционального класса и const – неизвестная константа, было введено автором в [1], [2] для исследования обобщенной спектральной задачи с двумя операторами Пуанкаре–Стеклова [3].

В [2] рассматривался операторный пучок, определяемый левой частью (1), действующий из пространства $H^{1/2}_{\mathrm{oo}}(I)$ с нормой [4], [5]:

$$\|u\|^2 = \int_I |u(x)|^2(1-x^2)^{-1}\,dx + \int_{I\times I} |u(x)-u(y)|^2|x-y|^{-2}\,dx\,dy \tag{2}$$

в факторпространство пространства Соболева $H^{1/2}(I)$ по подпространству, образованному константами. Показано, что при достаточной гладкости и равномерной на I невырожденности замены переменных $\mathscr{A}(x)$ спектр этого пучка действителен, дискретен, имеет единственную точку накопления $\lambda = 1$, а пространство $H^{1/2}_{\mathrm{oo}}(I)$ раскладывается в ортогональную сумму подпространств H_λ, образованных собственными функциями пучка, отвечающими собственному значению λ. Из результатов работы [6] следует, что напротив, при вырожденности замены $\mathscr{A}(x)$, спектр пучка содержит отрезок действительной оси, границы которого вычисляются по явным формулам.

В настоящей заметке в явном виде находятся все собственные числа и собственные функции уравнений (1), рассматриваемых в пространстве $H^{1/2}_{\mathrm{oo}}(I)$, когда функция сдвига $\mathscr{A}$ является квадратичным полиномом:

$$\mathscr{A}(x) = x + (2C)^{-1}(x^2-1), \tag{3}$$

где $C \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \overline{I}$ – параметр семейства полиномов. При $C = \pm 1$ замена переменных (3) вырождается на одном из концов I, и как следует из [6], спектр (1) заполняет отрезок $[1, 2]$. Для этого вырожденного случая мы находим в явном виде решения уравнения (1), не принадлежащие пространству $H^{1/2}_{\text{oo}}(I)$, которые можно трактовать как обобщенные собственные функции. Соответствующие значения спектрального параметра λ заполняют интервал $(1, 2]$.

Используемый в данной работе метод исследования интегральных уравнений близок к методам, изложенным в [7], [8].

2. Невырожденный случай. Фиксируем на протяжении этого пункта функцию сдвига (3), полагая, без потери общности, параметр C в (3) большим единицы. Действительно, если $(u(x), \lambda)$ – собственная пара уравнения (1) с функцией сдвига $\mathscr{A}(x)$ из (3), то $(u(-x), \lambda)$ – собственная пара (1) с функцией сдвига, отвечающей противоположному значению параметра C в (3). Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Все собственные функции $u(x)$ класса $H^{1/2}_{\text{oo}}(I)$ и соответствующие собственные значения λ уравнения* (1) *при $\mathscr{A}(x)$ из* (3) *и $C > 1$ даются формулами* (4), (5). *Собственные функции* (4) *образуют полную систему в пространстве $H^{1/2}_{\text{oo}}(I)$,*

$$u_n(x) = \sin\biggl(\frac{n\pi}{K'}\int_1^{(C+x)/(C-1)} (s^2-1)^{-1/2}(1-k^2s^2)^{-1/2}\,ds\biggr), \tag{4}$$

$$\lambda_n = 1 + \operatorname{ch}^{-1}(2\pi\tau n), \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{5}$$

где

$$k(C) = \frac{C-1}{C+1}, \qquad \tau(k) = \frac{K(k)}{K'(k)},$$

$$K(k) = \int_0^1 \bigl((1-s^2)(1-k^2s^2)\bigr)^{-1/2}\,ds, \qquad K'(k) = \int_1^{1/k} \bigl((s^2-1)(1-k^2s^2)\bigr)^{-1/2}\,ds. \tag{6}$$

Докажем предварительно аналогичное утверждение для гёльдеровых решений.

Теорема 2. *Формулами* (4), (5) *исчерпываются все собственные пары $(u(x), \lambda)$ уравнения* (1) *при $\mathscr{A}(x)$ из* (3), *$C > 1$ и гёльдеровыми $u(x)$.*

Доказательство. В лемме 1 устанавливается эквивалентность интегрального уравнения (1) и функционального уравнения (9), которое будет решено ниже.

Лемма 1. *Преобразования*

$$\Phi(z) = \int_I \frac{u(x)}{x-z}\,dx, \qquad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{I}, \tag{7}$$

$$u(x) = (2\pi i)^{-1}\bigl(\Phi(x+i0) - \Phi(x-i0)\bigr), \qquad x \in I, \tag{8}$$

осуществляют взаимно-однозначное соответствие между удовлетворяющими условию теоремы 2 собственными парами $(u(x), \lambda)$ уравнения (1) *и убывающими на бесконечности голоморфными в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{I}$ функциями $\Phi(z)$, граничные значения*

$\Phi^{\pm}(x)=\Phi(x\pm i0)$ *которых существуют на* $\overline{I}$, *гёльдеровы и удовлетворяют функциональному уравнению*

$$\frac{1}{2}(\lambda-1)\big(\Phi^{+}(x)+\Phi^{-}(x)\big)=\Phi(-x-2C)+\mathrm{const},\qquad x\in I. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $(u(x),\lambda)$ – собственная пара уравнения (1) с гёльдеровой $u(x)$. Рассмотрим голоморфную в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{I}$ функцию $\Phi(z)$, определенную формулой (7). Граничные значения Φ существуют во внутренних точках $\overline{I}$, локально гёльдеровы и удовлетворяют формулам Сохоцкого (8), (10) (см. [8]–[10]):

$$\mathrm{V.p.}\int_I\frac{u(t)}{t-x}\,dt=\frac{1}{2}\big(\Phi^{+}(x)+\Phi^{-}(x)\big),\qquad x\in I. \tag{10}$$

Уравнение (1), которому удовлетворяет $u(x)$, с учетом (10) и тождества

$$\frac{\dot{\mathscr{A}}(x)}{\mathscr{A}(x)-\mathscr{A}(y)}=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y+2C} \tag{11}$$

можно переписать в виде функционального уравнения (9) для Φ. Покажем, что $u(\pm1)=0$, откуда будет следовать существование предельных значений $\Phi(z)$ в точках ±1 и глобальная гёльдеровость $\Phi^{\pm}$ на $\overline{I}$ [8], [9]. Пусть, например, $u(-1)\neq0$, тогда левая часть (9) имеет логарифмический рост при $x\to-1$, правая же стремится к конечному значению, поскольку $1-2C$ – точка голоморфности функции $\Phi(z)$.

Наши рассуждения обратимы: если убывающая на бесконечности голоморфная в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{I}$ функция $\Phi(z)$ удовлетворяет на разрезе уравнению (9), а граничные значения Φ на $\overline{I}$ гёльдеровы, то функция $u(x)$, восстановленная из (8), связана с $\Phi(z)$ уравнением (7) (см. [8], [9]). Соотношение (9) на разрезе переписывается, учитывая тождество (11) и формулу Сохоцкого (10), в виде сингулярного интегрального уравнения (1) с постоянной const, той же, что и в (9).

Приступим к решению функционального уравнения (9). При $\lambda=1$ имеется лишь тривиальное решение, поэтому далее считаем, что $\lambda\neq1$. Задавшись удовлетворяющим условию леммы 1 решением $\Phi(z)$ уравнения (9), определим вектор

$$W(z)=\big(\Phi((C-1)z-C),\ \Phi(-(C-1)z-C)\big)^{T}, \tag{12}$$

голоморфный на расширенной комплексной плоскости с разрезами:

$$\Omega=\overline{\mathbb{C}}\setminus([-1/k,-1]\cup[1,1/k]),$$

где $k(C)$ определено в (6). Введем матрицы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}-1&\delta\\0&1\end{pmatrix},\quad \delta=\frac{2}{\lambda-1}. \tag{13}$$

В силу своего определения, а также соотношения (9) на разрезе, вектор $W(z)$ удовлетворяет соотношениям:

$$W(-z)=\mathbf{S}W(z),\qquad z\in\Omega, \tag{14}$$
$$W^{\pm}(x)=\mathbf{D}W^{\mp}(x)+W_0,\qquad x\in[1,1/k], \tag{15}$$

где $W_0 = \delta \cdot \mathrm{const} \cdot (1,0)^T$.

Введем новую независимую переменную $t(z)$, изменяющуюся в концентрическом кольце при $z \in \Omega$. Эллиптический интеграл

$$F(z,k) = \int_0^z (1-s^2)^{-1/2}(1-k^2s^2)^{-1/2}\,ds$$

конформно отображает $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup I$ на прямоугольник со сторонами $2K$ и $2K'$, верхняя и нижняя стороны которого склеиваются при экспоненциальном отображении $\omega(z) = \exp\bigl(\pi z/K'(k)\bigr)$. Композиция $t(\,\cdot\,) = \omega(\,\cdot\,) \circ F(\,\cdot\,,k)$ отображает область Ω на кольцо T с внутренним радиусом $\exp(-\pi\tau)$ и внешним радиусом $\exp(\pi\tau)$, где τ – отношение полных эллиптических интегралов модуля k.

Функция $W_*(t)$, определенная в кольце T равенством $W_*(t(z)) = W(z)$, $z \in \Omega$, наследует свойства симметрии (14), (15) функции W:

$$W_*(1/t) = \mathbf{S}W_*(t), \qquad t \in T, \tag{16}$$

$$W_*(\overline{t}) = \mathbf{D}W_*(t) + W_0, \qquad t \in \{\text{внешняя граница } T\}. \tag{17}$$

Пусть t – произвольная точка внутренней границы нашего кольца, тогда $t\exp(2\pi\tau) = \overline{1/t}$ – точка внешней границы, поэтому $W_*(e^{2\pi\tau}t) = W_*(\overline{1/t}) = \mathbf{D}W_*(1/t) + W_0 = \mathbf{DS}W_*(t) + W_0$. Полагая t в равенстве

$$W_*(e^{2\pi\tau}t) = \mathbf{DS}W_*(t) + W_0, \tag{18}$$

изменяющимся в кольце T, мы в силу непрерывности W_* на ∂T получим аналитическое продолжение W_* в кольцо $e^{2\pi\tau}T$. Продолжая применять равенство (18), мы аналитически продолжим W_* в $\mathbb{C}\setminus 0$, и в области определения продолженной функции останутся справедливыми соотношения (16) и (18).

Разложим аналитическую в $\mathbb{C} \setminus 0$ функцию $W_*(t)$ в ряд Лорана:

$$W_*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n t^n. \tag{19}$$

В терминах коэффициентов A_n симметрии (16) и (18) перепишутся соответственно в виде:

$$A_n = \mathbf{S}A_{-n}, \qquad n = 0,1,2,\dots, \tag{20}$$

$$A_0 = \mathbf{DS}A_0 + W_0, \qquad e^{2\pi\tau n}A_n = \mathbf{DS}A_n, \quad n = \pm1, \pm2, \dots .$$

Поскольку матрица $\mathbf{DS}$ не может иметь более двух различных собственных чисел, то в ряде (19) не более трех членов. Всякое нетривиальное решение $W_*(t)$ обязано иметь вид

$$W_*^{(n)}(t) = A_n t^n + A_0^{(n)} + A_{-n}t^{-n}, \qquad n = 1,2,\dots . \tag{21}$$

В этом случае величины $\exp(\pm 2\pi\tau n)$ являются корнями характеристического многочлена $\mu^2 - \delta\mu + 1$ матрицы $\mathbf{DS}$, и следовательно, параметр δ принимает дискретный ряд значений:

$$\delta_n = 2\,\mathrm{ch}(2\pi\tau n), \qquad n = 1,2,\dots . \tag{22}$$

Векторы A_n и A_{-n} – собственные векторы матрицы $\mathbf{DS}$ – должны удовлетворять условию (20), откуда с точностью до пропорциональности

$$A_{\pm n} = \begin{pmatrix} e^{\pm\pi\tau n} \\ e^{\mp\pi\tau n} \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{23}$$

Вспоминая, что $\Phi(\infty) = 0$, т.е. в новых переменных $W_*(-1) = 0$, мы найдем значение вектора $A_0^{(n)}$, подставляя в (21) $t = -1$:

$$A_0^{(n)} = 2(-1)^{n+1} \operatorname{ch}(n\pi\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Функция $W_*^{(n)}(t)$, а значит и $\Phi(z)$, определены нами полностью.

Приведенные рассуждения обратимы: сужение любой из функций $W_*^{(n)}(t)$ (21) с коэффициентами A_n и A_{-n} из (23) и $A_0^{(n)}$ – из (24) на кольцо T удовлетворяет соотношениям (16), (17), если величину const в определении вектора W_0 положить равной

$$\mathrm{const}_n = 2(\lambda - 2)(-1)^n \operatorname{ch}(n\pi\tau). \tag{25}$$

Переходя к независимой переменной z, мы убеждаемся, что функции $W^{(n)}(z) = W_*^{(n)}(t)$ удовлетворяют условиям (14), (15) на плоскости с разрезами. Из (14) следует, что равенство (12) корректно определяет голоморфную в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \big(\overline{I} \cup (\overline{I} - 2C)\big)$ функцию $\Phi(z)$, которая в силу (15) голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{I}$ и является решением функционального уравнения (9) с константой из (25). Полученная из (12) функция $\Phi(z)$ убывает на бесконечности, так как $W_*^{(n)}(-1) = 0$.

Решения $u_n(x)$ уравнения (1) могут быть восстановлены по формулам (8), (12), (21), (23), (24), что приводит к выражению (4). Собственные числа λ_n (5) получаются из выражения для δ_n (22) с учетом формулы связи между этими параметрами, приведенной в (13).

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим в пространстве $H_{oo}^{1/2}(I)$ норму, эквивалентную (2) (см. [2], [4], [5]):

$$\|u\|_*^2 = \int_{\{-\infty<x<\infty,\, y>0\}} |\nabla U(x,y)|^2 \, dx\, dy, \tag{26}$$

где $U(x,y)$ – гармоническое продолжение функции $u(x)$ с I в верхнюю полуплоскость при нулевом условии Дирихле на $\mathbb{R} \setminus I$. В [2] показано, что пространство $H_{oo}^{1/2}(I)$ раскладывается в ортогональную (в скалярном произведении, порожденном (26)) сумму подпространств H_λ, образованных собственными функциями (1), отвечающими собственному значению λ. Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что

а) функции (4) лежат в пространстве Соболева $H_{oo}^{1/2}(I)$,

б) система этих функций полна в $H_{oo}^{1/2}(I)$.

Действительно, собственные функции (1), отличные от перечисленных в (4), следует считать ортогональными всем функциям из полной системы, т.е. равными 0.

Рассмотрим конформное отображение G верхней полуплоскости на прямоугольник $\Pi = (0,1)\times(0,2\tau)$, задаваемое интегралом

$$G(z) = \frac{1}{K'}\int_1^{\frac{C+z}{C-1}} (s^2-1)^{-1/2}(1-k^2s^2)^{-1/2}\,ds.$$

Выберем в качестве квадрата нормы в $H^{1/2}_{\rm oo}((0,1))$ интеграл Дирихле от гармонического продолжения функции с интервала $(0,1)$ в Π при нулевом условии Дирихле на дополнительной к $(0,1)$ части границы [2], [4], а в $H^{1/2}_{\rm oo}(I)$ – норму (26). Оператор замены переменных $G(x)\colon I\to(0,1)$ является при таком выборе норм изометрическим изоморфизмом из $H^{1/2}_{\rm oo}\bigl((0,1)\bigr)$ в $H^{1/2}_{\rm oo}(I)$, поскольку конформное отображение сохраняет интеграл Дирихле. Функции $\sin(n\pi x)$, $n=1,2,\dots$, принадлежат пространству $H^{1/2}_{\rm oo}\bigl((0,1)\bigr)$ и образуют в нем полную систему [5]. Тем же свойством обладают, следовательно, и функции $\sin\bigl(n\pi G(x)\bigr)$, $n=1,2,\dots$, в пространстве $H^{1/2}_{\rm oo}(I)$.

3. Вырожденный случай. Исследуем случай вырожденной замены переменных в (3): $\dot{\mathscr{A}}(-1)=0$ при $C=1$. Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Формулами* (27), (28) *исчерпываются все собственные пары* $(u(x),\lambda)$ *уравнения* (1) *с функцией сдвига* $\mathscr{A}(x)=\frac12(x+1)^2-1$, *для которых решение* $u(x)$ *удовлетворяет условиям*:

А) $u(x)$ *– гёльдерова на всяком отрезке* $[s,1]$, $-1<s<1$;

Б) *интеграл типа Коши от* $u(x)$ *в комплексной окрестности точки* $z=-1$ *имеет рост более слабый, чем степенной, т.е. для любого* $\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$\left|\int_I \frac{u(x)\,dx}{x-z}\right| \leqslant C_\varepsilon|1+z|^{-\varepsilon},$$

$$u_\mu(x)=\sin\biggl(\frac{\ln\mu}{2\pi}\cdot\ln\left|\frac{2-\sqrt{(1-x)(3+x)}}{2+\sqrt{(1-x)(3+x)}}\right|\biggr),\qquad \lambda_\mu=1+\frac{2\mu}{\mu^2+1},\qquad \mu\in(0,1), \tag{27}$$

$$u(x)=\ln\left|\frac{2-\sqrt{(1-x)(3+x)}}{2+\sqrt{(1-x)(3+x)}}\right|,\qquad \lambda=2. \tag{28}$$

Доказательство. Буквальное повторение доказательства леммы 1 устанавливает справедливость следующей леммы.

Лемма 2. *Формулы* (7) *и* (8) *предыдущего пункта осуществляют взаимно-однозначное соответствие между удовлетворяющими условию теоремы* 3 *собственными парами* $(u(x),\lambda)$ *уравнения* (1) *и убывающими на бесконечности голоморфными в* $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{I}$ *решениями* $\Phi(z)$ *функционального уравнения*

$$\frac12(\lambda-1)\bigl(\Phi^+(x)+\Phi^-(x)\bigr)=\Phi(-x-2)+\mathrm{const},\qquad x\in I, \tag{29}$$

чьи граничные значения $\Phi^{\pm}$ *существуют на* $(-1,1]$, *гёльдеровы на всяком отрезке* $[s,1]$, $-1<s<1$, *а рост в окрестности точки* $z=-1$ – *более слабый, чем степенной.*

Функциональное уравнение (29) при указанных в лемме 2 ограничениях будет решено ниже сведением его к задаче линейного сопряжения для аналитических функций [8]–[11]. Рассмотрим три случая:

I) $\lambda\notin\{1,2\}$;
II) $\lambda=2$;
III) $\lambda=1$.

I) Вычитая в противном случае из решения Φ величину $\mathrm{const}/(\lambda-2)$, будем считать, что постоянная const в уравнении (29) равна 0, а само решение не обязано обращаться в 0 на бесконечности. Рассмотрим голоморфный в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{I}$ вектор

$$W(z)=\big(\Phi(2z-1),\ \Phi(-2z-1)\big)^T \tag{30}$$

и голоморфное преобразование его области определения: $t(z)=\sqrt{1-z^2}$, знак корня выбран так, чтобы при больших по модулю z выполнялось асимптотическое равенство $t(z)\sim iz$. Голоморфный в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{I}$ вектор W_*, определенный равенством $W_*(t)=W(z)$, является решением задачи линейного сопряжения с матричным коэффициентом $\mathbf{DS}$ на разрезе I. Действительно, W_* согласно определению и функциональному уравнению для Φ имеет симметрии

$$\begin{gathered}W_*(-t)=\mathbf{S}W_*(t),\qquad t\in\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{I},\\ W_*(-t+i0)=\mathbf{D}W_*(t+i0),\qquad t\in I,\end{gathered} \tag{31}$$

где матрицы $\mathbf{D}$, $\mathbf{S}$ определены в (13). Справедлива цепочка равенств: $W_*(t+i0)=\mathbf{D}W_*(-t+i0)=\mathbf{DS}W_*(t-i0)$, $t\in I$.

Лемма 3. *Нетривиальное голоморфное в* $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{I}$ *и удовлетворяющее условию симметрии* (31) *решение* W_* *однородной задачи линейного сопряжения*

$$W_*^+(t)=\mathbf{DS}W_*^-(t),\qquad t\in I, \tag{32}$$

имеющее в окрестности концов I *рост более слабый, чем степенной, а также непрерывные граничные значения* $W_*^{\pm}(t)$ *на всяком содержащемся в* I *отрезке, существует лишь при* $\delta\in[2,\infty)$. *В этом случае решение с точностью до пропорциональности единственно*:

$$W_*(t)=\begin{pmatrix}\mu & 1\\ 1 & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{w}_1(t)\\ \widetilde{w}_2(t)\end{pmatrix}, \tag{33}$$

$$\widetilde{w}_1(t)=\widetilde{w}_2(t)=\exp\biggl(\frac{\ln\mu}{2\pi i}\,\ln\frac{t-1}{t+1}\biggr), \tag{34}$$

где $\ln$ – *главная ветвь* Ln *с разрезом вдоль отрицательной полуоси, а* μ – (*любое*) *собственное значение матрицы* $\mathbf{DS}$: $\mu^2-\delta\mu+1=0$.

Доказательство. Матричная задача линейного сопряжения (32) сводится к паре скалярных задач, если сделать замену переменных

$$W_*(t) = \mathbf{P}\begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}, \tag{35}$$

где $\mathbf{P}$ – матрица, приводящая $\mathbf{DS}$ к нормальной жордановой форме $\mathbf{J}$, т.е. $\mathbf{DS} = \mathbf{PJP}^{-1}$. В зависимости от вида матрицы $\mathbf{J}$ будем различать три случая.

1) При $\mu \neq \pm 1$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}.$$

Уравнение (32) и симметрия (31) перепишутся соответственно в виде

$$w_1^+(t) = \mu w_1^-(t), \quad w_2^+(t) = \mu^{-1} w_2^-(t), \qquad t \in I, \tag{36}$$

$$w_1(-t) = w_2(t), \qquad t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{I}. \tag{37}$$

Положим функции $\widetilde{w}_1(t)$ и $\widetilde{w}_2(t)$ равными правой части (34), при этом $\ln \mu$ принимает одно и то же значение из полосы $\{-\pi < \operatorname{Im} z \leqslant \pi\}$. Нетрудно проверить, что функции $\widetilde{w}_1(t)$ и $\widetilde{w}_2(t)$ голоморфны в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{I}$, удовлетворяют соотношениям на разрезе (36) и условию симметрии (37).

Функция $w_1(t)/\widetilde{w}_1(t)$ голоморфна в $\overline{\mathbb{C}}$ за исключением, быть может, двух изолированных особых точек $t = \pm 1$. В окрестности $t = \pm 1$ рост $|w_1|$ – более слабый, чем степенной, а $|1/\widetilde{w}_1(t)|$ мажорируется функцией $|t \mp 1|^{-1/2}$, поскольку

$$|\widetilde{w}_1|(t) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\left(\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \cdot \arg\mu + \arg\frac{t-1}{t+1} \cdot \ln|\mu|\right)\right) = |\mu|^{\frac{1}{2\pi}\arg\frac{t-1}{t+1}}\left|\frac{t-1}{t+1}\right|^{\frac{1}{2\pi}\arg\mu} \tag{38}$$

и $|\arg\mu| \leqslant \pi$. Как видим, рост $|w_1/\widetilde{w}_1|$ в окрестности каждой из особых точек достаточно слабый, поэтому эти точки являются устранимыми особыми точками $w_1/\widetilde{w}_1$. Из теоремы Лиувилля теперь следует, что $w_1 = \mathrm{const}_1\, \widetilde{w}_1$. Такие же доводы можно привести в пользу равенства $w_2 = \mathrm{const}_2\, \widetilde{w}_2$, после чего из (37) следует, что $\mathrm{const}_1 = \mathrm{const}_2$.

Пусть $\arg\mu \neq 0$. В формуле $w_1(t) = \mathrm{const}_1\, \widetilde{w}_1(t)$ устремим t к $-\operatorname{sgn}\arg\mu$. Из (38) видно, что $|\widetilde{w}_1|$ растет степенным образом, функция же $|w_1|$ обязана иметь рост более слабый, чем степенной, следовательно $\mathrm{const}_1 = \mathrm{const}_2 = 0$, если $\arg\mu \neq 0$.

Если $\mu \in (0,1) \cup (1,\infty)$, то формулы (33), (34) дают удовлетворяющее условиям леммы решение задачи линейного сопряжения (32).

2) При $\mu = 1$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Уравнение (32) и симметрия (31) перепишутся соответственно в виде

$$w_1^+(t) = w_1^-(t) + w_2^-(t), \quad w_2^+(t) = w_2^-(t), \qquad t \in I, \tag{40}$$

$$w_1(-t) = w_1(t) + w_2(t), \qquad t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{I}. \tag{41}$$

Решения задачи линейного сопряжения (40), голоморфные в бесконечности и имеющие более слабый, чем степенной, рост вблизи $t = \pm 1$, – линейная оболочка векторов

$$\left(\ln\frac{t-1}{t+1},\, 2\pi i\right)^T, \qquad (1,0)^T$$

(см. [8]–[10]). Условию симметрии (41) удовлетворяют лишь решения, пропорциональные вектору $(1,0)^T$, что соответствует решению W_*, приведенному в (33) при $\mu = 1$.

3) При $\mu = -1$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (32) перепишется в виде

$$w_1^+(t) = -w_1^-(t) + w_2^-(t), \quad w_2^+(t) = -w_2^-(t), \qquad t \in I.$$

Решения этой задачи линейного сопряжения – только нулевые. Действительно, рассмотрим голоморфную в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\pm 1\}$ функцию $g_2(t) = w_2(t)/\sqrt{1-t^2}$. Учитывая условия роста $|w_2(t)|$ вблизи ± 1, можно утверждать, что особые точки ± 1 устранимы и, следовательно, $g_2(t)$ – константа. Величина этой константы равна $g_2(\infty) = 0$. Эти рассуждения теперь применимы и к функции $w_1(t)$.

Можно проверить, что функции $\Phi(z) - \Phi(\infty)$, восстановленные из решений (33), (34) однородной задачи линейного сопряжения, действительно удовлетворяют функциональному уравнению (29) и ограничениям леммы 2. Соответствующая серия решений интегрального уравнения Пуанкаре–Стеклова приведена в (27).

II) Случай однородного функционального уравнения (29) при $\lambda = 2$ был, по существу, только что рассмотрен. Далее считаем не теряя в общности, что величина const в (29) равна $1/2$. Вводя векторную функцию $W_*(t)$ как в предыдущем случае, можно убедиться, что она является решением неоднородной задачи линейного сопряжения, рассмотренной в следующей лемме.

Лемма 4. *Убывающее на бесконечности голоморфное в* $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{I}$ *и удовлетворяющее условию симметрии* (31) *решение* W_* *неоднородной задачи линейного сопряжения*

$$W_*^+(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W_*^-(t) + (1,0)^T, \qquad t \in I, \tag{42}$$

имеющее в окрестности концов I *рост более слабый, чем степенной, а также непрерывные граничные значения* $W_*^{\pm}(t)$ *на всяком содержащемся в* I *отрезке, единственно*:

$$W_*(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{8\pi^2}\ln^2\dfrac{t-1}{t+1} + \dfrac{1}{4\pi i}\ln\dfrac{t-1}{t+1} \\ -\dfrac{1}{8\pi^2}\ln^2\dfrac{t-1}{t+1} - \dfrac{1}{4\pi i}\ln\dfrac{t-1}{t+1} \end{pmatrix}, \tag{43}$$

где $\ln$ *– главная ветвь* Ln *с разрезом вдоль отрицательной полуоси.*

Доказательство. Сделаем замену переменной (35) с матрицей $\mathbf{P}$ из (39). Перепишем задачу линейного сопряжения (42):

$$w_1^+(t) = w_1^-(t) + w_2^-(t), \quad w_2^+(t) = w_2^-(t) + 1, \qquad t \in I. \tag{44}$$

Общее решение задачи (44) при $w_1(t), w_2(t)$, убывающих на бесконечности и растущих в окрестности $t = \pm 1$ слабее, чем степенным образом, следующее [8]–[10]:

$$\begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{8\pi^2} \ln^2 \dfrac{t-1}{t+1} - \dfrac{1}{4\pi i} \ln \dfrac{t-1}{t+1} \\ \dfrac{1}{2\pi i} \ln \dfrac{t-1}{t+1} \end{pmatrix},$$

что приводит к приведенному в (43) решению, удовлетворяющему симметрии (31).

Функция $\Phi(z)$, восстановленная из решения (43) неоднородной задачи линейного сопряжения, удовлетворяет функциональному уравнению (29), ограничениям леммы 2 и приводит к решению (28) интегрального уравнения (1).

III) В этом случае решения функционального уравнения (29) при ограничениях леммы 2 только нулевые.

Теорема 3 доказана.

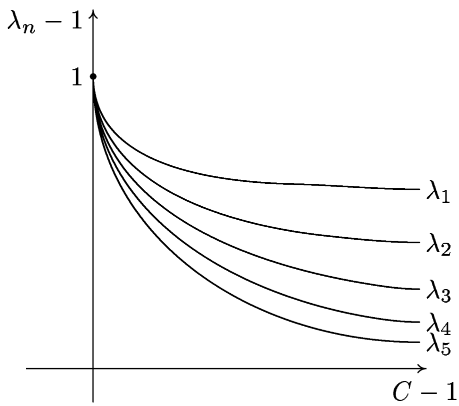

Рис. 1. Динамика собственных значений при $C \to 1$

Интересно проследить, как дискретный спектр (5) преобразуется в непрерывный $\{\lambda \in [1, 2]\}$ при $C \to 1 + 0$. При значениях параметра C в (3), больших 1, дискретный спектр содержится в интервале $(1, 2)$ и сгущается к $\lambda = 1$. Каждое собственное значение $\lambda_n(C)$ монотонно стремится к 2 при $C \to 1 + 0$. Тем самым, собственные значения “вытягиваются” из точки накопления $\lambda = 1$ и при C, близком к 1, “плотно” заполняют отрезок $[1, 2]$.

Замечание. Мы решили уравнение (1) в вырожденном случае, сведя его к задаче линейного сопряжения. Существуют другие подходы к решению этой задачи:

1) Можно, как и во втором разделе, найти риманову поверхность вектора $W(z)$ (30) и решить функциональное уравнение, которому удовлетворяет $W(z)$.

2) Компоненты вектора $W(z)$ – фундаментальная система решений уравнения класса Фукса второго порядка с тремя особыми точками $0, \pm 1$, сводящегося к гипергеометрическому. Коэффициенты этого уравнения полностью находятся как функции от λ, z.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Bogatyrev A. B. On spectra of pairs of Poincaré–Steklov operators // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. V. 8. №3. P. 171–194.
[2] Богатырёв А. Б. Дискретный спектр задачи для пары операторов Пуанкаре–Стеклова // Докл. РАН 1998. Т. 358. №3.
[3] Лебедев В. И., Агошков В. И. Операторы Пуанкаре–Стеклова и их применение в анализе. М.: ОВМ АН, 1983.
[4] Grisvard P. Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. Boston: Pitman, 1985.
[5] Лионс Ж. Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их применение. М.: Мир, 1971.
[6] Овчинников Э. Е. Сопряженные уравнения, алгоритмы возмущений и оптимальное управление // Сб. научных трудов / ред. В.И. Агошкова, В.П. Шутяев. М.: ВИНИТИ, 1993. С. 64–100. (Деп. ВИНИТИ № 453-В93 от 25.03.93).
[7] Гахов Ф. Д., Чибрикова Л. И. О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешимых в замкнутой форме // Матем. сб. 1954. Т. 35. №3. С. 395–491.
[8] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1978.
[9] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
[10] Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.: Гостехиздат, 1950.
[11] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

Институт вычислительной математики РАН
E-mail: `gourmet@inm.ras.ru`

Поступило
06.03.96
Исправленный вариант
06.03.97