

УДК 621.391.1 : 517

© 2017 г. А.Б. Богатырев, С.А. Горейнов, С.Ю. Лямаев

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К СИНТЕЗУ МНОГОПОЛОСНЫХ ФИЛЬТРОВ И ЕГО СРАВНЕНИЕ С ДРУГИМИ ПОДХОДАМИ¹

Представлен новый аналитический подход к синтезу многополосных электрических фильтров, который позволяет получать фильтры минимально возможного порядка для широкого класса спецификаций, включая спецификации с большим числом полос пропускания и задержки и спецификации с узкими переходными полосами. Приведены сравнения нового подхода с методом прямой оптимизации и модульным подходом.

§ 1. Введение

В настоящее время многополосные фильтры широко применяются в аналоговой и цифровой технике. Например, в современной аппаратуре связи, работающей в СВЧ- и радио-диапазонах, часто требуются фильтры с несколькими полосами пропускания, соответствующими различным стандартам беспроводных коммуникаций. Разработка фильтров с многополосными спецификациями представляет собой сложную инженерную задачу, особенно если требуется одновременно обеспечить и высокую производительность компонента, и его компактную реализацию. К текущему моменту в литературе не появилось полностью удовлетворительных и универсальных решений этой проблемы.

Очевидным подходом является модульный: многополосный фильтр получается в результате соединения нескольких однополосных. Недостаток его – слишком большие порядки синтезируемых фильтров, а значит, и их массогабаритные характеристики. Этим объясняется интерес к разработке других подходов, идейно более сложных, но позволяющих получать фильтры, имеющие меньшие порядки при той же спецификации. На уровне технической реализации инженеры используют методы синтеза СВЧ-фильтров, основанные на использовании многочастотных резонаторов [1, 2], а также методы, основанные на использовании частотных преобразований (например, [3, 4]). Сложность этих подходов быстро растет с увеличением числа рабочих полос и порядка фильтра, а обслуживаемые спецификации имеют существенные ограничения.

Наконец, распространенным способом синтеза фильтров является прямая численная оптимизация его амплитудно-частотной характеристики (АЧХ). Под *оптимальным* здесь понимается фильтр, который обладает наименьшим порядком среди всех физически осуществимых фильтров, удовлетворяющих требованиям заданной спецификации (маски) фильтра. Последняя состоит из следующих параметров: 1) значений граничных частот всех полос пропускания и задержки; 2) максимально допустимой величины неравномерности АЧХ на полосах пропускания и 3) минимально допустимой величины подавления в полосах задержки. Эти данные опре-

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10349).

деляют желаемый вид амплитудно-частотной характеристики фильтра и лишь косвенно влияют на его прочие характеристики: фазочастотную, импульсную и т.д.

Методы синтеза фильтров, связанные с прямой численной оптимизацией, обычно используют алгоритмы типа Ремеза (см. [5–7] и др.). Ввиду присущей им принципиальной неустойчивости они имеют ограниченную область применимости: при вычислениях с двойной машинной точностью число полос пропускания фильтра, как правило, не превышает трех, а его порядок – двадцати.

Авторами статьи разработан аналитический подход к синтезу оптимальных многополосных фильтров, который может быть применен для спецификаций с общим числом полос (на текущий момент) вплоть до 23 и порядками вплоть до 1000. Целью статьи является сравнение нового подхода к синтезу оптимальных многополосных фильтров с методом прямой оптимизации, основанным на алгоритме типа Ремеза, а также сравнение оптимальных фильтров с неоптимальными составными фильтрами, получаемыми модульным подходом. В § 2 ставится оптимизационная задача, лежащая в основании проблемы синтеза оптимального многополосного фильтра, § 3 содержит краткое описание нового аналитического подхода к решению этой задачи. В § 4 приводятся рецепты, использованные нами при решении той же задачи методом прямой оптимизации, в § 5 описывается модульный подход к синтезу неоптимальных многополосных фильтров, § 6 содержит результаты численных экспериментов, посвященных сравнению этих трех подходов.

§ 2. Постановка задачи

Поиск оптимального фильтра по заданной спецификации может быть сведен к решению серии задач о наименьшем отклонении типа сформулированных ниже. Для этого на каждом шаге фиксируется порядок фильтра и максимизируется, например, величина подавления в полосах задержки при фиксированных остальных параметрах спецификации. Приведем две встречающиеся в литературе формулировки.

Пусть E – множество, состоящее из m непересекающихся отрезков действительной оси (частотных диапазонов), разделенное на два подмножества: полосы пропускания E_+ и полосы задержки E_- . Идеальная функция пропускания F равна $+1$ на отрезках из E_+ и -1 на отрезках из E_- .

Задача 1. *Найти вещественную рациональную функцию R_n степени не выше n , для которой величина отклонения от функции пропускания F минимальна в равномерной норме на E :*

$$\|R_n - F\|_{C(E)} := \max_{x \in E} |R_n(x) - F(x)| \rightarrow \min =: \mu. \quad (1)$$

Задача 2. *Найти вещественную рациональную функцию $Q_n(x)$ степени не выше n , минимизирующую величину θ при условиях*

$$\min_{w \in E_-} |Q_n(w)| \geq \theta^{-1}, \quad \max_{w \in E_+} |Q_n(w)| \leq \theta. \quad (2)$$

Нетрудно показать, что эти задачи эквивалентны, и их решения отличаются дробно-линейной подстановкой, т.е. $Q_n = l \circ R_n$, где l – дробно-линейное преобразование, а обратные к минимальным отклонениям величины связаны преобразованием Жуковского $\mu^{-1} = (\theta + \theta^{-1})/2$.

Отметим, что две сформулированных постановки задачи о рациональной аппроксимации в существенном совпадают с третьей и четвертой задачами Золотарева для конденсатора (E_+ , E_-) [8]. Задача является многоэкстремальной: все множество рациональных функций разбивается на 2^{m-2} непересекающихся класса [9, 10], в каждом из которых решение существует, единственно и имеет альтернативную характе-

ризации: на E имеется $2n + 2$ точек альтернанса, в которых для решения степени n достигается величина отклонения с последовательной переменной знака [11].

До недавнего времени точное аналитическое решение этой задачи было известно только для случая $m = 2$ (для одной полосы пропускания и одной полосы задержки), найденное в 70-х годах XIX века учеником Чебышева Е.И. Золотаревым [12]. Именно оно около полувека спустя было использовано немецким ученым-электротехником В. Кауэром [13] для расчета передаточных функций оптимальных фильтров высоких или низких частот, получивших название фильтров Кауэра – Золотарева (эллиптических). К настоящему времени эти фильтры нашли широкое применение в аналоговой и цифровой технике, а метод аппроксимации АЧХ по Золотареву – Кауэру стал классическим.

§ 3. Новый аналитический подход

Подход к решению задач (1), (2), предлагаемый в данной статье, опирается на явные аналитические формулы, полученные в [14] и обобщающие решение Золотарева на случай большего числа m компонент множества E . Этот подход ранее использовался первым автором для оптимизации равномерной нормы многочленов [17]; идея его следующая. Решения задачи оптимизации весьма специфичны, так как они обладают большим количеством точек альтернанса, а потому лежат на некотором многообразии малой размерности в пространстве всех рациональных функций. При решении задач о наименьшем уклонении разумно перейти от поиска по всему пространству рациональных функций заданной степени к поиску по этому маломерному многообразию.

Действительно, решение степени n задачи о наименьшем уклонении имеет $2n + 2$ точек альтернанса на E [11], причем каждая из них, находящаяся во внутренней области множества E , с необходимостью будет критической точкой функции-решения со значением в множестве \mathbb{Q} из четырех элементов: $\pm 1 \pm \mu$ для формулировки (1) и $\pm \theta, \pm \theta^{-1}$ для формулировки (2). Всего же рациональная функция степени n имеет, с учетом кратности, $2n - 2$ критических точек, поэтому решение рассматриваемой задачи о наименьшем уклонении удовлетворяет следующему определению с малым параметром g .

Определение. Рациональная функция $R(x)$ называется g -экстремальной относительно 4-элементного множества значений \mathbb{Q} , если все ее критические точки за исключением $g - 1$ из них – простые со значениями в \mathbb{Q} . Число исключительных критических точек подсчитывается по формуле

$$g - 1 = \sum_{x: R(x) \notin \mathbb{Q}} \text{ord } dR(x) + \sum_{x: R(x) \in \mathbb{Q}} \left[\frac{1}{2} \text{ord } dR(x) \right], \quad (3)$$

где суммирование производится по всем точкам сферы Римана; $\text{ord } dR(x)$ – порядок нуля дифференциала голоморфного отображения $R: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ в точке x (например, в простых полюсах функции $R(x)$ это число равно нулю), $[\cdot]$ – целая часть числа.

Рациональные функции с числом экстремальности g обладают следующим эффективным малопараметрическим при небольших g и численно устойчивым представлением [14], обобщающим представление для дробей Золотарева:

$$R(x) = \text{sn} \left(\int_e^x d\zeta + A(e) \mid \tau \right), \quad \mathbb{Q} = \{\pm 1, \pm 1/k(\tau)\}, \quad (4)$$

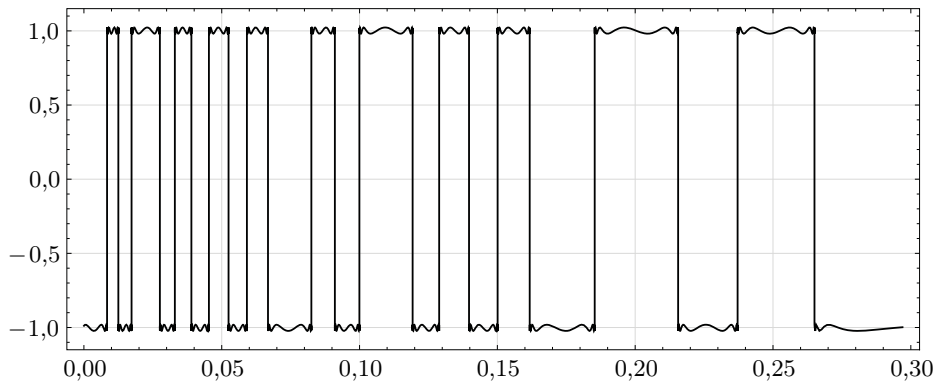


Рис. 1. График решения оптимизационной задачи (для спецификации с $m = 23$)

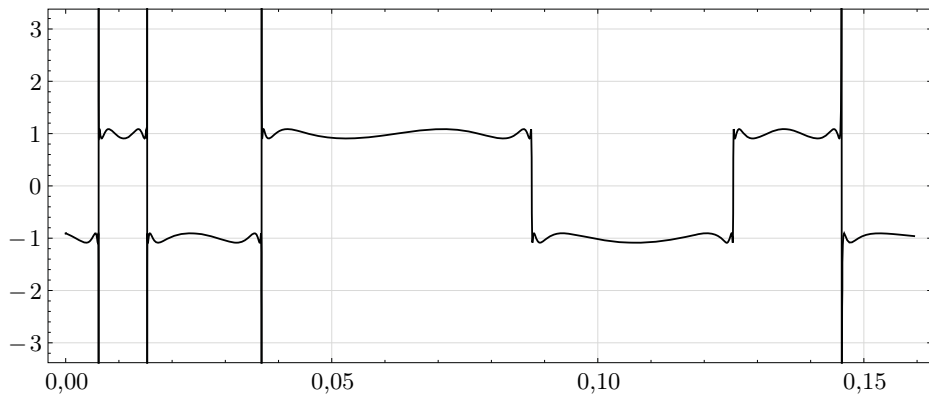


Рис. 2. График решения оптимизационной задачи (для спецификации с $m = 7$)

в котором $d\zeta$ – голоморфный дифференциал на римановой поверхности M рода g , периоды которого лежат в решетке периодов эллиптического синуса, а фазовый сдвиг $A(e)$ также соизмерим с этой решеткой. Поверхность M определяется рациональной функцией $R(x)$ как двулистная накрывающая сферы Римана с ветвлением в точках e , в которых $R(x)$ принимает значения из множества Q с нечетной кратностью. Возникающая риманова поверхность не произвольна, это так называемая кривая Калоджеро – Мозера: она разветвленно накрывает тор, задаваемый множеством выделенных значений Q . Само алгебро-геометрическое представление (4) возникает при анализе функционального уравнения типа Пелля – Абеля, которому удовлетворяет рациональная функция $R(x)$ (подробнее см. в [14]).

Использование для решения оптимизационной задачи 1 или 2 анзацта (4) предполагает нахождение всех его параметров. Прежде всего, необходимо определить топологический тип вещественной кривой M , т.е. ее род и число вещественных овалов, а также расположение последних относительно компонент множества E рабочих полос фильтра. При условии чередования полос пропускания и задержки род g кривой M связан с числом m рабочих полос неравенствами $m - 1 \leq g \leq 2m - 3$. После того как дискретные параметры анзацта установлены (на сегодняшний день это требует конечного перебора либо квалифицированной работы по его уменьшению), возможно выписать систему трансцендентных уравнений на модули пары (кривая M , дифференциал $d\zeta$), решением которой и являются требуемые параметры анзацта (4), позволяющие восстановить решение задачи оптимизации. Представление решений в терминах конформных отображений прямоугольных многоуголь-

ников (например, вычисляемых с помощью тэта-функций [15]) дано в [14]. Более детальное изложение метода, основанного на использовании явной аналитической формулы (4), будет приведено в отдельной статье.

Используемая параметризация экстремальных функций позволяет контролировать поведение решения в переходных полосах фильтра, что отвечает выбору класса, и непосредственно решать задачу о фильтре наименьшей степени для заданной спецификации без рассмотрения цепочки задач о наименьшем уклонении. Вычислительные средства, используемые для нахождения экстремальных рациональных функций по явной аналитической формуле, включают разработанный ранее [14–18] аппарат эффективных вычислений на римановых поверхностях, и позволяют устойчиво вычислять решения степеней n вплоть до тысячи и более.

С использованием нового аналитического подхода были рассчитаны примеры решений оптимизационной задачи 1. На рис. 1 представлен график функции-решения степени 654 для спецификации с числом отрезков $m = 23$. На рис. 2 изображен график решения (для спецификации с $m = 7$) из класса, допускающего наличие полюсов в первой, второй, третьей и шестой переходных полосах.

§ 4. Прямая оптимизация

Решения оптимизационной задачи могут быть вычислены приближенно, например, алгоритмами типа Ремеза [9, 19, 20]. Отправной точкой снова служит теорема Ахиезера [11]: оптимальная рациональная функция $R(x) = \varphi(x)/\psi(x)$ степени n должна иметь на E по крайней мере $2n+2$ точки альтернанса. Предположим, что мы имеем приближенную дробь, заданную, например, положением нулей и полюсов или коэффициентами числителя и знаменателя по некоторому полиномиальному базису, и кроме того, приближенные точки альтернанса, множество которых обозначим через A . Рассматриваемые алгоритмы состоят в поочередном уточнении каждого из этих двух объектов:

1. Имея множество точек $A \subset E$, можно изменить дробь так, чтобы на дискретном множестве A соблюдался альтернанс;
2. Имея дробь, можно изменить положение точек с целью увеличения на A равномерной нормы ошибки приближения – или же убедиться, что это невозможно, т.е. равномерная норма ошибки не уменьшается при ограничении последней с E на A .

Кроме того, требуется начальное приближение, выбор которого из-за локальной сходимости алгоритмов типа Ремеза весьма важен. Изложим кратко использованные нами рецепты для всех указанных шагов.

Выбор начального приближения. Мы начинаем с выбора множества A , а именно используются $1/(2n+2)$ -квантили равновесной меры для множества E , полученной с помощью численного решения интегрального уравнения с логарифмическим ядром [21].

Шаг 2 (уточнение A по заданной дроби φ/ψ). Рассматривается сначала более широкое множество, составленное из концов наших m интервалов и критических точек функции ошибки $\varphi(w)/\psi(w) - F(w)$, лежащих на E . Точки, в которых отклонение меньше полученного ранее на шаге 1, отбрасываются. Новое множество A должно подчиняться правилу перемены знаков и содержать $2n+2$ точек; наличие меньшего или большего их количества исправляется с помощью введенной ранее равновесной меры; например, выбрасываются точки, соответствующие меньшим значениям плотности этой меры. Поиск критических точек осуществляется методом Брента или, если приближение достаточно хорошее, проще – методом Ньютона.

Шаг 1 (уточнение дроби φ/ψ по заданному A). В отличие от полиномиальных приближений условие на альтернанс на множестве A , по всей видимости, невозможно представить в виде линейной системы; в лучшем случае возникают обобщенные

задачи на собственные значения вида

$$\begin{pmatrix} V_+ & -V_+ \\ V_- & V_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_+ V_+ \\ 0 & \Sigma_- V_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \quad (5)$$

для первой формулировки экстремальной задачи, или вида

$$\begin{pmatrix} V_- & 0 \\ 0 & \Sigma_+ V_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \theta \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_- V_- \\ V_+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \quad (6)$$

для второй формулировки (см. § 2). Последнюю задачу можно найти в [9]. В уравнениях (5), (6) использованы обозначения: V_{\pm} – матрица Вандермонда по узлам A , принадлежащим E_{\pm} ; Σ_{\pm} – диагональные матрицы с элементами ± 1 , фиксированными для каждого из интервалов пропускания или задержки, по узлам A , принадлежащим E_{\pm} ; φ, ψ – векторы коэффициентов числителя и знаменателя рациональной дроби; μ, θ – экстремальные альтернирующие значения. Наличие матриц Σ_{\pm} связано с возможным изменением знака альтернанса в соседних интервалах.

Как видно, матричные задачи (5), (6) несимметричны, и соответствующие пучки могут оказаться сингулярными; даже в случае двух интервалов может оказаться, что стандартной мантиссы не хватит для вычисления хотя бы одного знака коэффициентов φ, ψ (не говоря уже о корнях). Кроме того, перебор всех вариантов знаков альтернанса в соседних интервалах означает экспоненциальную по m сложность.

Некоторым преимуществом по сравнению с задачами на собственные значения обладает редукция задачи (1), сформулированной относительно заданного множества A , к задаче линейного программирования, причем и здесь возникает экспоненциальный по m перебор, связанный с выбором знака знаменателя дроби на каждом интервале. Вот эта задача: потребуем минимизации величины $t > 0$ при нелинейных ограничениях

$$|\varphi(x) - \psi(x)F(x)| \leq t|\psi(x)|, \quad x \in A, \quad j = 1, \dots, m,$$

которые переходят в линейные, если фиксировать знаки $\text{sign } \psi(x)$ на каждом интервале. Хорошие результаты для такой задачи показывает метод внутренней точки для объединенных прямой и двойственной формулировок [22].

Линейная параметризация числителей и знаменателей дроби существенно ограничивает устойчивость алгоритмов типа Ремеза [19]. Максимальная степень решения R , полученная таким методом при вычислениях с двойной точностью, зависит от конфигурации множества E и не превосходит $n = 20$.

§ 5. Модульный подход

Модульный подход не связан с решением сформулированной оптимизационной задачи и предполагает получение (неоптимального) многополосного фильтра в результате соединения нескольких однополосных. Архитектурно это может осуществляться, например, путем параллельного включения полосно-пропускающих фильтров, каждый из которых обслуживает одну рабочую полосу из заданной многополосной спецификации, либо путем каскадного соединения полосно-пропускающих и полосно-заграждающих фильтров.

Неоптимальные фильтры, получаемые модульным подходом, далее мы называем составными. Нами использовался следующий рецепт их построения: по каждой полосе пропускания рассчитывалась передаточная функция соответствующего полосового эллиптического фильтра, затем полученные функции складывались. Параметры эллиптических фильтров оптимизировались ручным перебором для достижения как можно меньшего порядка итогового многополосного фильтра при условии, чтобы его АЧХ была вписана в заданный спецификацией коридор.

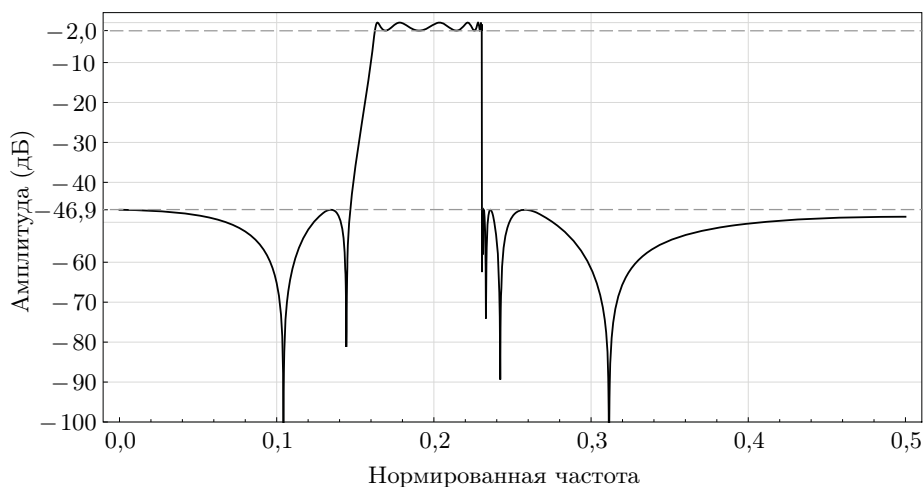


Рис. 3. АЧХ однополосного оптимального фильтра

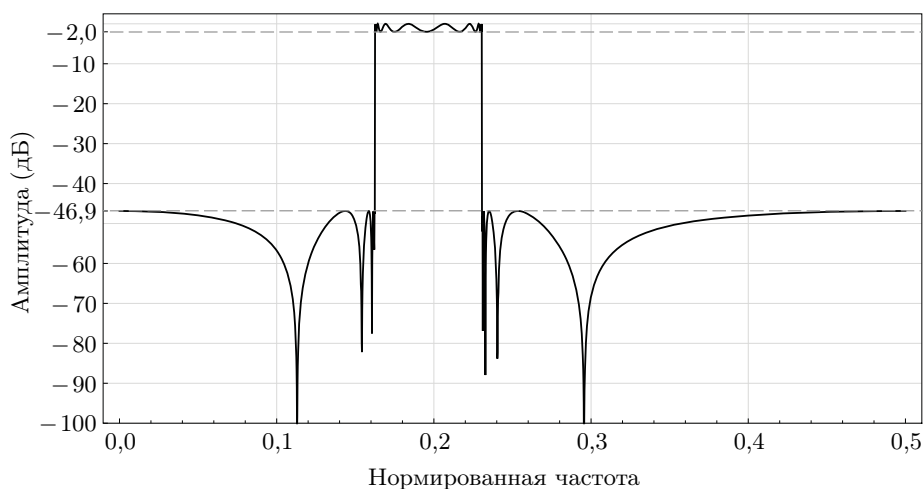


Рис. 4. АЧХ однополосного эллиптического фильтра

§ 6. Примеры синтеза

Здесь приводятся примеры результатов расчета цифровых многополосных фильтров с помощью трех подходов: нового аналитического подхода, метода прямой оптимизации и модульного подхода. Первые два подхода основываются на решении сформулированной выше оптимизационной задачи и дают оптимальные фильтры (т.е. порядка, минимально достижимого для заданной спецификации), последний подход заключается в соединении однополосных эллиптических фильтров и дает неоптимальные многополосные фильтры.

Оптимальные цифровые фильтры получались из оптимальных аналоговых путем стандартного, так называемого билинейного, преобразования частоты.

Прямая оптимизация ни для одного из рассмотренных примеров не дала удовлетворительных результатов ввиду сложности спецификаций. Ее результаты приведены для первого и второго примеров. Модульный подход, как видно из примеров, дает фильтры с существенно большими порядками в сравнении с оптимальными.

Таблица 1

Результаты прямой численной оптимизации для однополосного фильтра

Порядок	Затухание в полосе задержки	Число итераций
3	-3,381	102
4	-4,227	154
5	-7,589	211
6	-10,612	308
8	-19,355	457
9	-22,378	652
10	-	> 1000
18	-46,9	?

Таблица 2

Результаты прямой оптимизации для двухполосного фильтра

Порядок	Затухание в полосах задержки	Число итераций
3	-5,342	151
4	-9,178	273
5	-12,649	351
6	-16,013	408
7	-19,215	594
8	-	> 1000
16	-40	?

6.1. Однополосный фильтр. С помощью нового аналитического подхода нами был рассчитан однополосный оптимальный фильтр 18-го порядка с сильно несимметричными ширинами переходных полос, равными $0,016$ и $2 \cdot 10^{-5}$. График его АЧХ приводится на рис. 3.

Стандартное частотное преобразование, используемое при синтезе полосового эллиптического фильтра из НЧ-прототипа, не может обеспечить такой разницы в ширинах переходных полос, и эллиптический фильтр, рассчитанный по той же спецификации, имеет больший порядок – 28. График его АЧХ представлен на рис. 4.

Результаты прямой численной оптимизации для такой спецификации приведены в табл. 1. При расчетах с помощью алгоритма типа Ремеза границы полос фильтра задавались спецификацией, неравномерность в полосе пропускания фиксировалась равной -2 дБ, а затухание в полосах задержки (второй столбец в таблице) определялось исходя из порядка получаемого оптимального фильтра. Затухание в полосах задержки в $-46,9$ дБ для метода прямой оптимизации оказалось недостижимым ввиду того, что уже для расчета фильтра 10-го порядка требовались большие временные затраты.

6.2. Двухполосный фильтр. В качестве примера оптимального двухполосного фильтра с помощью аналитического подхода был рассчитан фильтр 16-го порядка с минимальным затуханием в полосах задержки, равным -40 дБ, и величиной пульсаций АЧХ в полосах пропускания, равной $-2,6$ дБ. Ширины переходных полос: $0,012$, $0,012$, $0,003$, $0,008$. График АЧХ приведен на рис. 5.

Построенный по той же спецификации составной фильтр имеет порядок 23. График его АЧХ представлен на рис. 6.

Результаты прямой оптимизации для такой спецификации приведены в табл. 2. При расчетах границы полос фильтра задавались спецификацией, неравномерность в полосе пропускания фиксировалась равной -2 дБ, а затухание в полосах задержки (второй столбец в таблице) определялось, исходя из порядка получаемого оптимального фильтра. В данном случае алгоритм типа Ремеза оказался неприменимым для поиска оптимальных фильтров начиная уже с восьмого порядка, соответственно, оп-

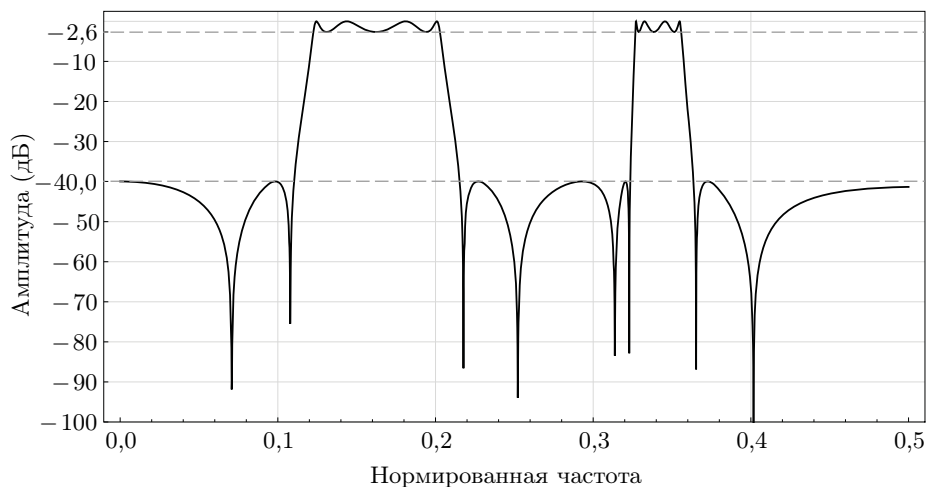


Рис. 5. АЧХ двухполосного оптимального фильтра

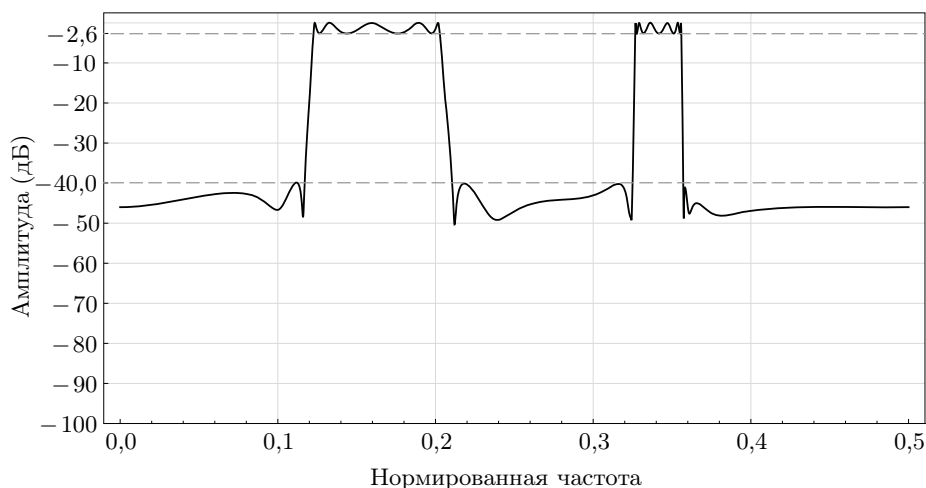


Рис. 6. АЧХ двухполосного составного фильтра

тимальный фильтр 16-го порядка, найденный с помощью аналитического подхода, метод прямой оптимизации рассчитать не позволяет.

6.3. Четырехполосный фильтр. С помощью аналитического подхода нами был построен четырехполосный оптимальный фильтр 36-го порядка с минимальным затуханием в полосах задержки, равным $-42,8$ дБ, неравномерностью АЧХ в полосах пропускания в $-2,0$ дБ, и ширинами переходных полос от 0,002 до 0,005. График АЧХ полученного фильтра приведен на рис. 7.

Рассчитанный по той же спецификации составной фильтр имеет порядок 55. Его АЧХ приводится на рис. 8.

6.4. Пятиполосный фильтр. Для пятиполосной спецификации был рассчитан оптимальный фильтр 76-го порядка с минимальным затуханием АЧХ в полосах задержки, равным -50 дБ, и неравномерностью в полосах пропускания, равной $-2,0$ дБ. Ширины переходных полос лежат в промежутке от 0,002 до 0,005. График АЧХ представлен на рис. 9.

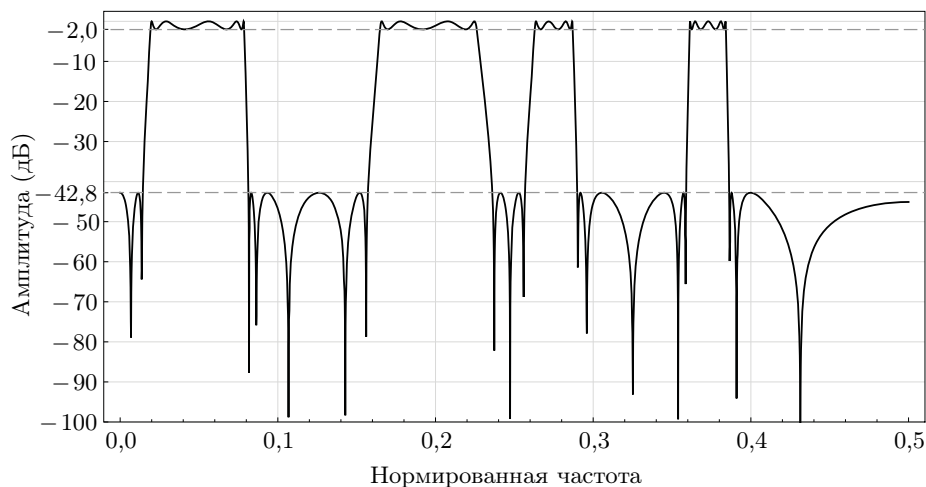


Рис. 7. АЧХ четырехполосного оптимального фильтра

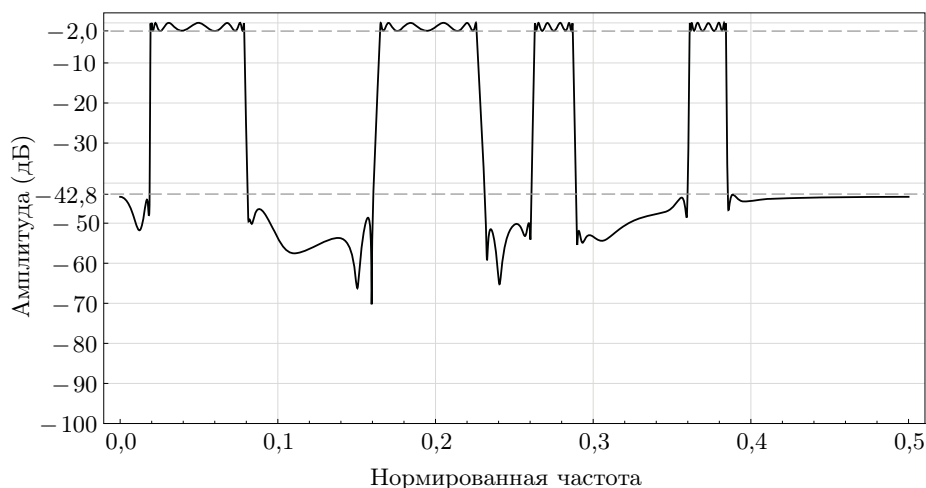


Рис. 8. АЧХ четырехполосного составного фильтра

Построенный по той же спецификации составной фильтр имеет порядок 121. Его АЧХ приводится на рис. 10.

6.5. Фильтр режекторного типа с двумя полосами задержки. График АЧХ оптимального фильтра 16-го порядка режекторного типа, осуществляющего точное вырезание двух заданных частот, представлен на рис. 11. Участок АЧХ, содержащий вырезаемые частоты, в большем масштабе представлен на рис. 12.

Составной фильтр, обеспечивающий такое же качество аппроксимации АЧХ, имеет 62-й порядок.

6.6. Фильтр с двумя полосами пропускания, расположенными критически близко друг к другу. С помощью аналитического подхода был рассчитан оптимальный фильтр 24-го порядка с двумя полосами пропускания, расположенными критически близко друг к другу. Соответствующий график АЧХ приводится на рис. 13. Подобные фильтры могут быть использованы, если требуется выделить из спек-

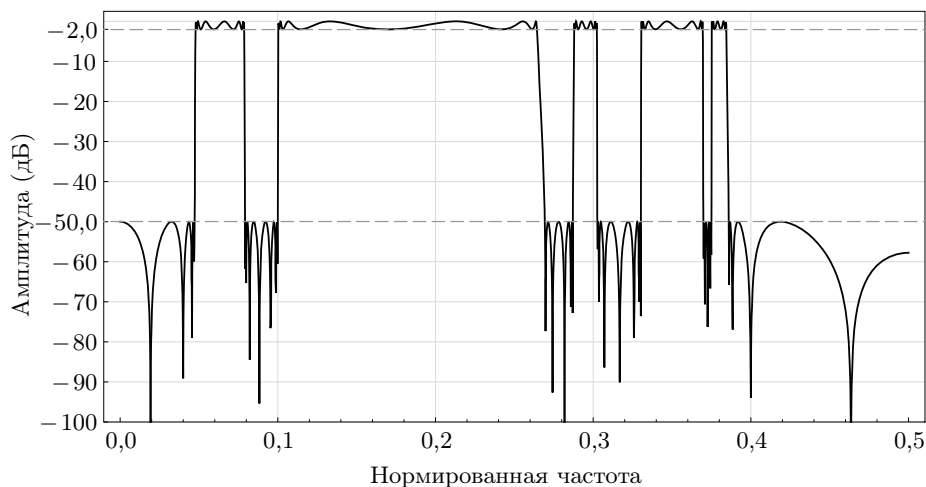


Рис. 9. АЧХ четырехполосного оптимального фильтра

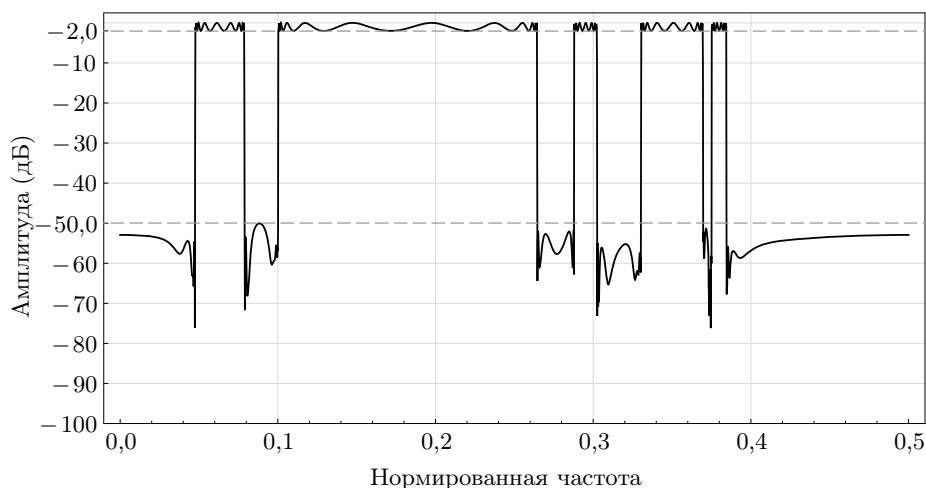


Рис. 10. АЧХ четырехполосного составного фильтра

тра некоторую частотную полосу и при этом задержать одну или несколько частот, содержащихся внутри этой полосы.

Составной фильтр, обеспечивающий такое же качество аппроксимации АЧХ, имеет 59-й порядок.

§ 7. Заключение

В статье приведено сравнение трех подходов к синтезу многополосных фильтров: нового аналитического подхода, прямой численной оптимизации на основе метода Ремеза и полуаналитического модульного подхода. Прямая численная оптимизация сегодня наиболее алгоритмически проработана: существуют и совершенствуются готовые пакеты для инженерных расчетов. К сожалению, неустранимая неустойчивость алгоритмов ремезовского типа не позволяет решать слишком сложные задачи: при использовании двойной точности (15 десятичных знаков) порядок фильтра не доходит до 20, и при этом невозможно достичь хороших аппроксимационных свойств

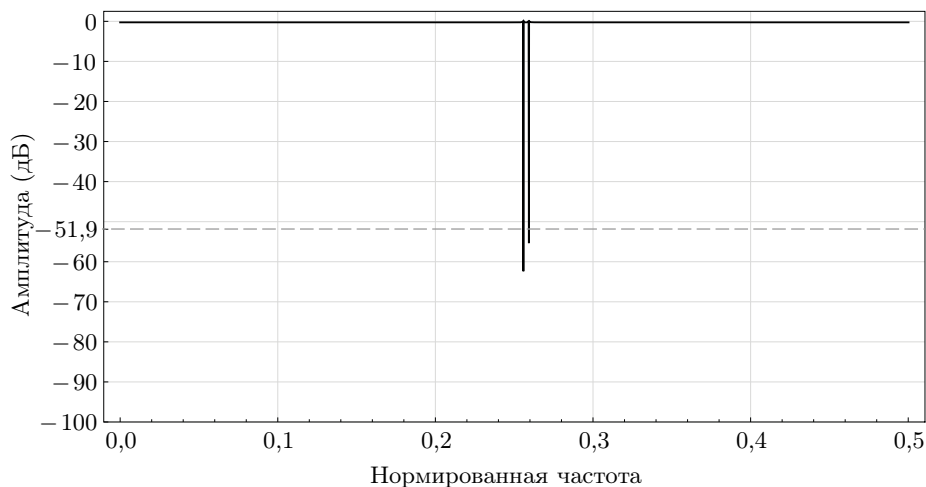


Рис. 11. АЧХ оптимального фильтра режекторного типа с двумя полосами задержки

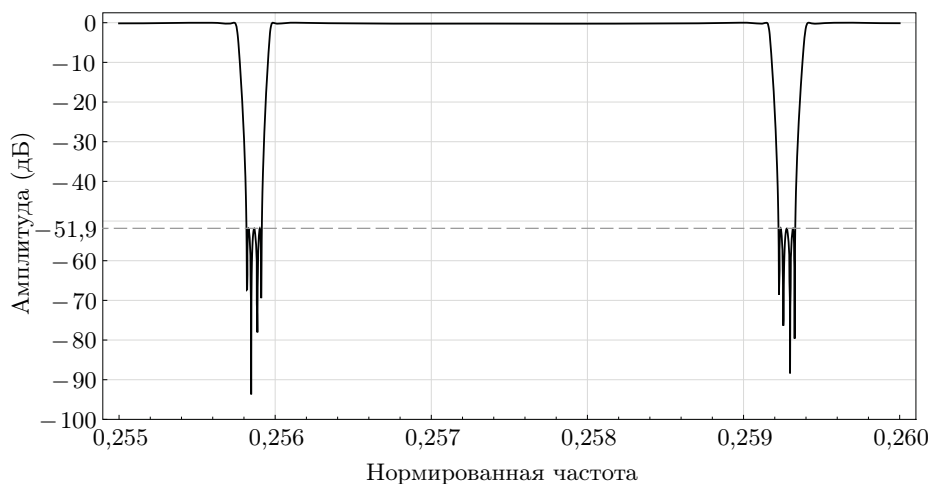


Рис. 12. Участок АЧХ, содержащий вырезаемые частоты

в случае сложных спецификаций, например, при большом числе полос пропускания и задержки, узких переходных полосах, полосах пропускания, расположенных критически близко друг к другу. Модульный подход состоит в разбиении сложной задачи на ряд простых и их последовательном решении с использованием дроби Золотарева для построения АЧХ полосового фильтра. Его преимущество состоит в том, что таким образом можно гарантированно получить (эрзац-) решение с заданной спецификацией. Как правило, оно далеко от оптимального: порядок составного фильтра может в несколько раз превышать порядок оптимального с той же спецификацией. Ситуация усугубляется с ростом сложности спецификации фильтра. На наш взгляд, наиболее перспективным, как и наименее изученным с алгоритмической точки зрения, является аналитический подход, опирающийся на сложный математический аппарат. Авторы намереваются продолжать исследования в этом направлении.

Авторы благодарны профессору Л. Баратшару за обсуждение задач равномерно-рационального приближения и докторам Ф. Зайферту и В. Люно (INRIA, Sophia-

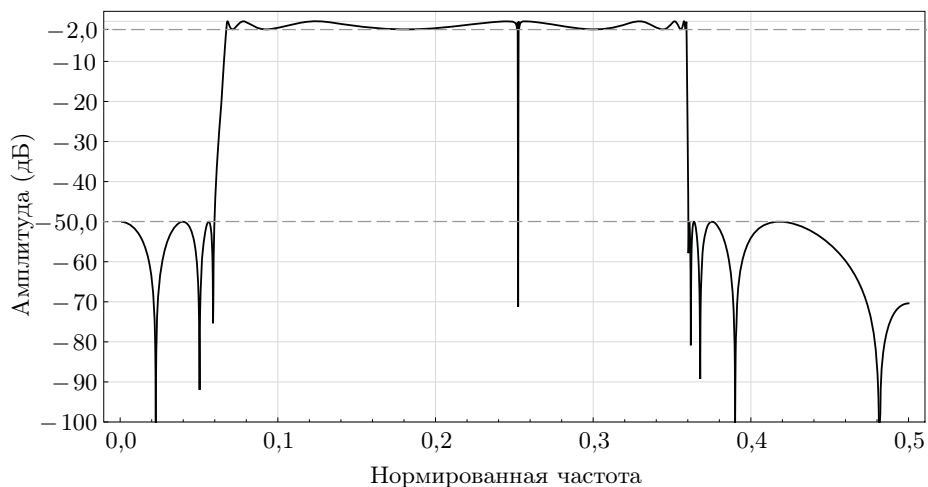


Рис. 13. АЧХ оптимального фильтра с двумя полосами пропускания, расположенными критически близко друг к другу

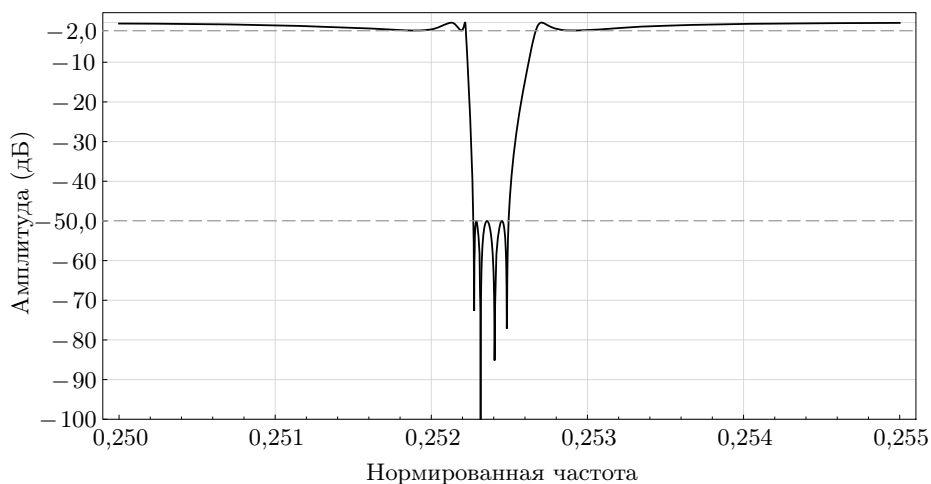


Рис. 14. Участок АЧХ, содержащий вырезаемую частоту

Antipolis) за предоставленный код, позволяющий рассчитывать оптимальные фильтры алгоритмом типа Ремеза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллев Б.А., Сержантов А.М., Тюрнев В.В. Миниатюрный фильтр с двумя полосами пропускания на микрополосковых двухмодовых резонаторах // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. № 18. С. 31–40.
2. Chu Q., Wu X., Chen F. Novel Compact Tri-Band Bandpass Filter with Controllable Bandwidths // IEEE Microw. Wirel. Compon. Lett. 2011. V. 21. № 12. P. 655–657.
3. Mohan A., Singh S., Biswas A. Generalized Synthesis and Design of Symmetrical Multiple Passband Filters // Prog. Electromagn. Res. B. 2012. V. 42. P. 115–139.
4. Lee J., Sarabandi K. Design of Triple-Passband Microwave Filters Using Frequency Transformation // IEEE Trans. Microw. Theory Tech. 2008. V. 56. № 1. P. 187–193.

5. *Lunot V., Bila S., Seyfert F.* Optimal Synthesis for Multi-Band Microwave Filters // Proc. 2007 IEEE/MTT-S Int. Microwave Sympos. (IMS'2007). Honolulu, HI, USA. June 3–8, 2007. P. 115–118.
6. *Deslandes D., Boone F.* An Iterative Design Procedure for the Synthesis of Generalized Dual-Bandpass Filters // Int. J. RF and Microwave CAE. 2009. V. 19. № 5. P. 607–614.
7. *Macchiarella G.* “Equi-ripple” Synthesis of Multiband Prototype Filters Using a Remez-like Algorithm // IEEE Microw. Wirel. Compon. Lett. 2013. V. 23. № 5. P. 231–233.
8. *Гончар А.А.* О задачах Е.И. Золотарева, связанных с рациональными функциями // Матем. сб. 1969. Т. 78 (120). № 4. С. 640–654.
9. *Amer R.A.-R.* The Approximation Problem of Electrical Filters: Ph.D. Thesis. Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zürich, Switzerland, 1964.
10. *Малоземов В.Н.* Задача синтеза многополосного электрического фильтра // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т. 19. № 3. С. 601–609.
11. *Ахиезер Н.И.* Об одной задаче Е.И. Золотарева // Изв. Акад. наук СССР. VII сер. Отд. физ.-мат. наук. 1929. № 10. С. 919–931.
12. *Золотарев Е.И.* Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля // Зап. Импер. акад. наук. 1877. Т. XXX (прилож.). № 5. С. 1–71.
13. *Cauer W.* Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. Bd. 1, Leipzig: Becker und Erler, 1941; Bd. 2, Berlin: Akademie, 1960.
14. *Богатырев А.Б.* Чебышевское представление рациональных функций // Матем. сб. 2010. Т. 201. № 11. С. 19–40.
15. *Богатырев А.Б.* Конформное отображение прямоугольных семиугольников // Матем. сб. 2012. Т. 203. № 12. С. 35–56.
16. *Bogatyrev A.B.* Computations in Moduli Spaces // Comput. Methods Funct. Theory. 2007. V. 7. № 2. P. 309–324.
17. *Богатырев А.Б.* Экстремальные многочлены и римановы поверхности. М.: МЦНМО, 2005.
18. *Bogatyrev A.B.* Image of Abel–Jacobi Map for Hyperelliptic Genus 3 and 4 Curves // J. Approx. Theory. 2015. V. 191. P. 38–45.
19. *Ремез Е.Я.* Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наук. думка, 1969.
20. *Veidinger L.* On the Numerical Determination of the Best Approximations in the Chebyshev Sense // Numer. Math. 1960. V. 2. № 1. P. 99–105.
21. *Fuchs W.J.H.* On Chebyshev Approximation on Sets with Several Components // Aspects of Contemporary Complex Analysis. London; New York: Academic Press, 1980. P. 399–408.
22. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge, UK; New York: Cambridge Univ. Press, 2004.

Богатырев Андрей Борисович
Горейнов Сергей Анатольевич
Лямаев Сергей Юрьевич
 Институт вычислительной математики РАН
 ab.bogatyrev@gmail.com
 sergei.goreinov@gmail.com
 lyamaev.sergei@gmail.com

Поступила в редакцию
 03.12.2016
 После переработки
 23.05.2017