

УДК 517.5

А. Б. Богатырёв

## Эффективное решение задачи о наилучшем многочлене устойчивости

Предложен эффективный метод нахождения многочлена, приближающего в нуле экспоненциальную функцию с третьим порядком и отклоняющегося от нуля не более чем на единицу на максимальном отрезке вещественной оси. Эта задача сводится к решению четырех уравнений на некотором четырехмерном пространстве модулей алгебраических кривых. Описана численная реализация этого метода, использующая суммирование линейных рядов Пуанкаре.

Библиография: 19 названий.

### § 1. Введение

Метод Рунге–Кутты вот уже более ста лет используется для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Около 50 лет назад при построении  $n$ -стадийных явных устойчивых методов Рунге–Кутты  $p$ -го порядка точности была поставлена [1], [2] следующая оптимизационная задача для многочленов.

*Задача А. Найти вещественный многочлен  $R_n(x)$  степени  $\leq n$ , приближающий в нуле показательную функцию с заданным порядком  $p \leq n$ :  $R_n(x) = 1 + x + x^2/2! + \dots + x^p/p! + o(x^p)$ , для которого отклонение  $\|R_n\|_E := \max_{x \in E} |R_n(x)|$  не превосходит единицы на возможно большем отрезке  $E = [-L, 0]$ ,  $L > 0$ .*

Решение задачи А известно как *наилучший многочлен устойчивости*. При  $p = 1$  этот многочлен выражается [3] через классические многочлены Чебышёва:  $R_n(x) = T_n(1 + x/n^2)$ . Многочлены Золотарёва, представимые параметрически через эллиптические функции, дают решение задачи А при  $p = 2$  [4]. Многие авторы (W. Riha [5], C. L. Metzger, H. Lomax, В. И. Лебедев [6], van der Houwen, А. А. Медовиков, А. Abdulle [7], J. G. Verwer [8]) отмечают, что при  $p > 2$  решение  $R_n(x)$  в замкнутой аналитической форме неизвестно, и предлагают различные итерационные методы для его численного определения. Прямая численная оптимизация оказывается очень трудоемкой и практически невозможной при больших

---

Работа выполнена при поддержке Фонда содействия отечественной науки, Программы РАН “Современные проблемы теоретической математики” (проект “Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики”) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05-01-01027, 05-01-00582).

степенях многочлена. Лучший на сегодняшний день итерационный метод [6] потребовал при  $p = 3$  четырех суток вычислений на многопроцессорной рабочей станции для решения задачи с  $n = 576$  (В. И. Лебедев, А. А. Медовиков).

Дать явную аналитическую формулу для решения тем не менее можно и для случая  $p > 2$ . Оказывается, что наилучший многочлен устойчивости удовлетворяет следующему определению при некотором  $g \leq p - 1$ .

Вещественный многочлен  $P_n(x)$  назовем  *$g$ -экстремальным многочленом*, если все его критические точки, за исключением  $g$  из них, простые со значениями  $\pm 1$ .

Теория  $g$ -экстремальных многочленов разработана в работах [9]–[11]. Эти многочлены удобно описывать при помощи следующей восходящей к П. Л. Чебышёву конструкции. Сопоставим вещественному многочлену  $P_n(x)$  вещественную гиперэллиптическую кривую

$$M = M(\mathbf{e}) = \left\{ (x, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = \prod_{s=1}^{2g+2} (x - e_s) \right\}, \quad \mathbf{e} := \{e_s\}_{s=1}^{2g+2}, \quad (1)$$

дивизор ветвления  $\mathbf{e}$  которой – это нули нечетного порядка многочлена  $P_n^2(x) - 1$ . Род сопоставленной  $g$ -экстремальному многочлену кривой  $M$  равен  $g$ , т.е. количеству исключительных критических точек многочлена при их подсчете с учетом кратностей [9]. По своей алгебраической кривой многочлен восстанавливается с точностью до знака по явной формуле:

$$P_n(x) = \pm \cos \left( ni \int_{(e,0)}^{(x,w)} d\eta_M \right), \quad x \in \mathbb{C}, \quad (x, w) \in M, \quad (2)$$

где  $d\eta_M$  – некоторый жестко привязанный к  $M$  абелев дифференциал 3-го рода, а выражение в правой части не зависит от пути интегрирования на  $M$ , от двузначности в выборе  $w(x)$  и от точки ветвления  $e \in \mathbf{e}$ , взятой в качестве начальной точки интегрирования. Порождаемые многочленами степени  $n$  кривые  $M$  не произвольны, они удовлетворяют уравнениям Абеля

$$\int_{C_s} d\eta_M = 2\pi i \frac{m_s}{n}, \quad s = 1, \dots, 2g, \quad m_s \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

в которых  $C_s$  – базис в решетке целочисленных 1-циклов на кривой  $M$ . Половина этих соотношений автоматически следует из зеркальной симметрии кривой  $\bar{J}(x, w) := (\bar{x}, \bar{w})$ .

Задачу об оптимальном многочлене устойчивости можно решать выбором подходящей подстановки (= анзатца). Сначала необходимо “угадать” анзатц, т.е. определить топологический тип соответствующей решению вещественной кривой и целые числа в уравнениях Абеля. Далее необходимо, используя данные задачи, составить и решить систему трансцендентных уравнений на модули ассоциированной кривой. После чего решение можно восстановить по явной формуле (2). Выполнению этого плана и посвящена настоящая работа.

Предлагаемый здесь аналитический подход к решению задачи о наилучшем многочлене устойчивости реализован численно для порядка аппроксимации  $p = 3$ . Решение упомянутой выше задачи для  $n = 576$  при помощи разработанного алгоритма теперь занимает лишь несколько секунд машинного времени на персональном компьютере.

## § 2. Свойства оптимальных многочленов устойчивости

Явное формульное представление решения оптимизационной задачи А основано на тщательном изучении качественного поведения этого решения. Задача о наилучшем многочлене устойчивости тесно связана со значительно более изученной задачей о наименьшем уклонении:

*ЗАДАЧА А'. Пусть  $E'$  – отрезок вещественной оси. Минимизировать норму  $\|P_n\|_{E'}$  многочлена при заданных  $r$  независимых линейных связях на его коэффициенты.*

С. Н. Бернштейну принадлежит критерий разрешимости такой задачи с чебышёвскими связями.

**ТЕОРЕМА 1** [12]. *Пусть всякий многочлен степени  $\leq n$ , удовлетворяющий однородным линейным связям задачи А', имеет не более  $n - r$  нулей на  $E'$ , считая их кратности. Тогда решение  $P_n(x)$  задачи о наименьшем уклонении единственно и характеризуется тем, что  $P_n(x)$  имеет  $(n+2-r)$ -альтернанс на  $E'$ , т.е. в некоторых  $n+2-r$  точках этого отрезка многочлен принимает значения  $\pm\|P_n\|_{E'}$  с чередующимися знаками.*

**ТЕОРЕМА 2** [5], [9]. *Задача о наилучшем многочлене устойчивости имеет единственное решение. Многочлен*

$$R_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^p}{p!} + O(x^{p+1}) \quad (4)$$

*и отрезок  $E = [-L, 0]$ , на котором отклонение  $\|R_n\|_E = 1$ , являются решением задачи А, если и только если на множестве  $E \setminus \{0\}$  существует  $(n+1-p)$ -альтернанс этого многочлена.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Замкнутый шар  $\{\|P_n\|_{[-l, 0]} \leq 1\}$  в пространстве многочленов степени  $\leq n$  при возрастании  $l > 0$  испытывает (линейное, но неоднородное) сжатие. В пределе  $l \rightarrow \infty$  в нем остаются только постоянные многочлены, которые при  $p > 0$  не удовлетворяют связям (4). Следовательно, существуют максимальный отрезок  $E := [-L, 0]$  и многочлен  $R_n(x)$ , удовлетворяющий связям и имеющий на  $E$  уклонение 1.

1. Покажем, что  $R_n(x)$  одновременно является и решением задачи А' со связями (4) на отрезке  $E' = [-L, -\epsilon]$ , где положительное  $\epsilon$  меньше любого из трех чисел  $1, L/2, 1/\max |P_n''(x)|$  и максимум берется на компактном множестве  $\{(P_n, x) : x \in [-L/2, 0]; \|P_n\|_{[-L, -L/2]} \leq 1; \deg P_n \leq n\}$ . Пусть найдется многочлен  $P_n(x)$  с уклонением на  $E'$  меньшим чем 1 при наличии  $r = p + 1$  связей (4). В силу локального возрастания  $P_n(x)$  вблизи нуля и малости  $\epsilon$  отклонение  $P_n$  на  $E$  равно 1. Поскольку значение  $P_n(x)$  в крайней точке  $x = -L$  по модулю меньше 1, отрезок  $E$  можно расширить с сохранением нормы многочлена  $P_n(x)$ , что противоречит максимальности  $E$ .

Приближение многочленом показательной функции в нуле с данным порядком  $p$  означает наличие  $r = p + 1$  неоднородных линейных связей (4) на его коэффициенты. Многочлен степени  $\leq n$ , удовлетворяющий однородным связям, имеет не более  $n - r$  нулей на отрезке  $E'$ , потому что при  $z = 0$  он имеет корень порядка  $r$ .

По теореме Бернштейна многочлен наименьшего уклонения  $R_n(x)$  единственный и имеет  $(n + 1 - p)$ -альтернанс на  $E'$ .

2. Обратное, пусть многочлен  $R_n(x)$  имеет  $(n + p - 1)$ -альтернанс на полуоткрытом интервале  $[-L, 0)$ , уклонение на котором равно 1. По теореме Бернштейна  $R_n(x)$  является решением задачи о наименьшем уклонении при наличии связей (4) на множестве  $E' = [-L, -\epsilon]$ , где  $\epsilon > 0$  достаточно мало. Наилучший многочлен устойчивости имеет на  $E'$  уклонение, равное 1 при тех же связях. В силу единственности решения задачи о наименьшем уклонении  $R_n$  является наилучшим многочленом устойчивости.

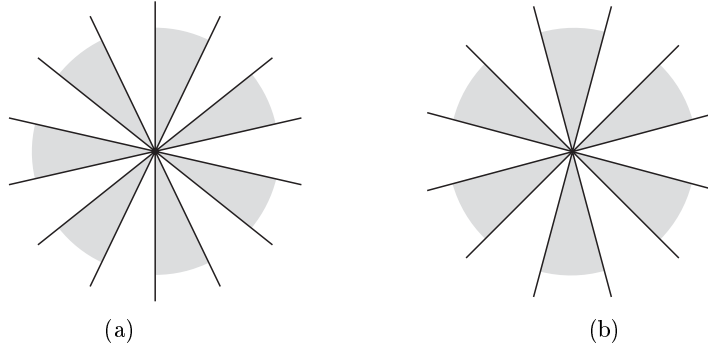


Рис. 1. Порядковые звезды вблизи нуля при (а) четном  $p$  и (б) нечетном  $p$

Наличие альтернанса позволяет оценить число нулей наилучшего многочлена устойчивости и его производной на множестве устойчивости  $E = [-L, 0]$ . Их точное количество дает

ЛЕММА 1. Решение  $R_n(x)$  задачи оптимизации  $A$  и его производная  $\frac{dR_n(x)}{dx}$  имеют лишь простые нули, которые лежат на  $E$  и  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  в следующем количестве:

Число нулей $R_n$	$E$	$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$	Число нулей $\frac{dR_n}{dx}$	$E$	$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
четное $p$	$n - p$	$p$	четное $p$	$n - p + 1$	$p - 2$
нечетное $p$	$n - p + 1$	$p - 1$	нечетное $p$	$n - p$	$p - 1$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (по А. Abdulle [7]). Пусть вещественный многочлен приближает в нуле показательную функцию с точным порядком  $p$ :  $P_n(x) - \exp(x) \asymp x^{p+1}$ . Тогда он имеет по меньшей мере  $2\lfloor p/2 \rfloor$  различных комплексных корней. Доказательство этого утверждения опирается на анализ топологии порядковых звезд (order stars) [2].

Рассмотрим на плоскости комплексной переменной два открытых множества, симметричных относительно вещественной оси. В точках белого множества величина  $P_n(x)/\exp(x)$  по модулю меньше 1, в точках черного – больше 1. Эти два

множества, называемые порядковыми звездами, имеют следующие легко проверяемые свойства [2]:

- (a) черное и белое множества имеют ровно по одной неограниченной компоненте;
- (b) вблизи нуля эти множества образуют криволинейные секторы раствора  $\pi/(p+1)$  чередующегося цвета (см. рис. 1);
- (c) каждая ограниченная компонента белого множества содержит нуль многочлена (принцип максимума);
- (d) ограниченных компонент черного множества нет (они содержали бы полюсы многочлена), поэтому это множество связно.

Отсюда можно вывести, что всякая компонента белого множества содержит не более одного сектора – иначе неверно (d). Если белая компонента содержит сектор, лежащий строго в верхней или нижней полуплоскости, то и вся компонента лежит в этой полуплоскости, так как белое множество зеркально симметрично. Вдобавок такая компонента должна быть ограниченной – согласно (a) неограниченная компонента лежит в обеих полуплоскостях. Как видно из рис. 1, при четном  $p$  имеется  $p$  белых секторов, не пересекающих действительную ось, при нечетном  $p$  таких секторов не менее  $p-1$ . Каждый из этих секторов содержится в ограниченной белой компоненте, не пересекающей вещественную ось и содержащей согласно (c) нуль многочлена  $P_n(x)$ . Соответственно, наш многочлен имеет не менее  $2\lfloor p/2 \rfloor$  комплексных корней, а его производная – не менее  $2\lfloor (p-1)/2 \rfloor$  комплексных корней.

О расположении корней наилучшего многочлена устойчивости  $R_n(x)$  и его производной можно сказать больше. Между соседними точками альтернанса есть нуль многочлена, а каждая точка альтернанса внутри  $E$  является нулем его производной. Между нулем и самой правой точкой альтернанса  $x_1$  лежит либо нуль многочлена (при  $R_n(x_1) = -1$ ), либо нуль его производной (при  $R_n(x_1) = 1$ ). При четном  $p$  мы уже насчитали  $(n-p)+p = n$  различных нулей  $R_n$ , а при  $p$  нечетном –  $(n-p)+(p-1) = n-1$  различных нулей  $dR_n/dx$ . Следовательно,  $R_n(x_1) = (-1)^p$  и распределение корней такое, как утверждается в лемме.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Перечислим еще раз все вещественные корни наилучшего многочлена устойчивости  $R_n(x)$  и его производной. Между соседними точками альтернанса лежат  $n-p$  корней этого многочлена. Кроме того, на интервале  $(x_1, 0)$  есть нуль многочлена при нечетном  $p$  и нуль его производной при четном  $p$ . Остальные вещественные нули  $dR_n(x)/dx$  – это  $n-p$  точек альтернанса из внутренности  $E$ . В частности, левый конец отрезка  $E$  является точкой альтернанса.

### § 3. Чебышёвское представление решения

Найдя кривую  $M$ , соответствующую решению оптимизационной задачи, мы можем восстановить само решение по явной формуле (2). Сложность вычислений по этой формуле вообще не зависит от степени  $n$  решения при условии, что мы умеем эффективно вычислять гиперэллиптический интеграл.

**3.1. Топологический тип ассоциированной кривой.** Точки ветвления сопоставленной многочлену  $P_n(x)$  кривой  $M$  – это нули нечетного порядка многочлена  $P_n^2(x)-1$ . Общее число  $2g+2$  точек ветвления и их число  $2k$  на вещественной

оси являются топологическими инвариантами вещественной кривой. Они определяют род  $g$  кривой  $M$  (т.е. количество ручек) и число  $k$  вещественных овалов<sup>1</sup> (т.е. контуров, неподвижных при отражении  $\overline{J}$  кривой).

**ТЕОРЕМА 3.** *Вещественная кривая  $M$ , сопоставляемая наилучшему многочлену устойчивости  $R_n$ , имеет ровно один вещественный овал и род  $g \leq p - 1$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Концы отрезка  $E$  — это простые нули многочлена  $R_n^2(x) - 1$ ;  $n - p$  точек альтернанса из внутренней  $E$  являются его двойными нулями. Других точек из прообраза  $R_n^{-1}(\pm 1)$  на вещественной оси нет, их наличие означало бы существование нулей многочлена  $R_n R'_n$ , не описанных в лемме 1. Скажем, существование точки  $x \in R_n^{-1}(\pm 1)$  вне отрезка  $E$  означает наличие нуля многочлена  $R_n$  или его производной между  $x$  и отрезком  $E$ . Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Итак, вне вещественной оси находится ровно  $2p - 2$  прообразов точек  $\pm 1$ , учитывая их кратности. Если все эти прообразы простые, то род кривой  $M$  равен  $p - 1$ . Если есть кратные, то род  $g$  будет меньше.

Естественное предположение, что род кривой  $M$  равен  $p - 1$ , справедливо при  $p < 4$ :

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ.** *При  $p \leq 3$  род  $g = p - 1$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $p < 3$ , то в верхней полуплоскости не более одной точки прообраза  $R_n^{-1}(\pm 1)$ , учитывая кратность. Если  $p = 3$ , то число прообразов каждой из точек  $-1$  и  $+1$  на вещественной оси равно  $n - 2$ , учитывая кратность. Значит, в верхней полуплоскости есть ровно по одному простому прообразу этих точек.

Как видим, при  $p = 1$  решение оптимизационной задачи выражается через 0-экстремальный многочлен (Чебышёва), при  $p = 2$  — через 1-экстремальный многочлен (Золотарёва). В оставшейся части работы мы подробно исследуем случай  $p = 3$ , соответствующий 2-экстремальному многочлену.

**3.2. Пространство модулей.** В случае  $p = 3$  дивизор ветвления кривой  $M$ , сопоставляемой наилучшему многочлену устойчивости, состоит из двух вещественных точек и двух пар комплексно сопряженных точек. На подобных наборах свободно действует группа  $\mathfrak{A}_1^+$  сохраняющих ориентацию аффинных движений вещественной оси:  $\mathbf{e} = \{e_s\}_{s=1}^6 \rightarrow A\mathbf{e} + B = \{Ae_s + B\}_{s=1}^6$ ,  $A > 0$ ,  $B \in \mathbb{R}$ . Орбиты этого действия назовем *пространством модулей  $\mathcal{H}$* . Каждая точка пространства  $\mathcal{H}$  определяет конформный класс (гиперэллиптических) вещественных кривых рода 2 с одним ориентированным вещественным овалом и отличной от точек ветвления отмеченной точкой  $\infty_+$  на нем.

Дивизор ветвления  $\mathbf{e}$  будет удобно нормировать так, чтобы левая вещественная точка ветвления была равна  $-1$ , а правая равна  $0$ . Теперь дивизор ветвления полностью определен своими двумя точками в открытой верхней полуплоскости  $\mathbb{H}$ .

<sup>1</sup>При  $k > 0$  имеется ровно  $k$  вещественных овалов; при  $k = 0$  вещественных овалов один или два.

Другими словами, пространство модулей  $\mathcal{H}$  – это 2-конфигурационное пространство верхней полуплоскости. Его вещественная размерность равна 4, а фундаментальная группа совпадает с  $\mathbb{Z}$  [9].

Принятой выше нормировке дивизора ветвления  $\mathbf{e}$  удовлетворяет кривая  $M$ , сопоставленная многочлену  $P_n(x) := R_n(Lx)$ , который будем называть *приведенным наилучшим многочленом устойчивости*.

**3.3. Группа накрытия.** При униформизации элементов пространства модулей группами Шоттки возникает описанная ниже нормальная подгруппа в фундаментальной группе проколотой сферы  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{e}$ .

Соединим точки ветвления попарно тремя разрезами: отрезком  $\Lambda_0 := [-1, 0]$ , простой гладкой кривой  $\Lambda_+$ , лежащей в  $\mathbb{H}$  и соединяющей пару точек ветвления верхней полуплоскости, и зеркально симметричной кривой  $\Lambda_- := \overline{\Lambda_+}$ . Система разрезов  $\Lambda := (\Lambda_+, \Lambda_0, \Lambda_-)$  задает представление  $\chi_\Lambda$  из  $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{e}, \infty)$  в абстрактную группу  $\mathfrak{G} := \langle G_+, G_0, G_- \mid G_+^2 = G_0^2 = G_-^2 = 1 \rangle$  – свободное произведение трех групп порядка 2. Петле  $\rho$ , трансверсально пересекающей подряд разрезы  $\Lambda_*, \Lambda_\bullet, \dots, \Lambda_\circ$ , где индексы  $\star, \bullet, \dots, \circ$  принимают значения  $+, 0, -$ , сопоставлен элемент группы

$$\chi_\Lambda[\rho] := G_\star G_\bullet \cdots G_\circ.$$

Представление в дискретную группу  $\mathfrak{G}$  не может измениться при непрерывной деформации разрезов. Любые два разреза верхней полуплоскости с общими концами изотопны, поэтому наше представление  $\chi_\Lambda$  и, в частности, его ядро не зависят от выбора  $\Lambda_+$ .

**3.4. Циклы на римановой поверхности.** На каждой кривой  $M$  из пространства модулей  $\mathcal{H}$  мы выделяем четыре целых цикла. Контур  $C_0$  проходит по берегу отрезка  $[-1, 0]$  против часовой стрелки. Цикл  $C_+$  охватывает пару точек ветвления в верхней полуплоскости (см. рис. 2(a), где жирными линиями обозначены разрезы  $\Lambda_+, \Lambda_0, \Lambda_-$ , попарно соединяющие точки ветвления). Третий цикл  $C_-$  получается из  $C_+$  отражением и сменой ориентации. Цикл  $C_1$  проходит по берегу разреза, соединяющего точку ветвления верхней полуплоскости с нулем. Этот цикл, в отличие от трех первых, определен неоднозначно. Фундаментальная группа пространства модулей естественно действует на пространстве гомологий кривой (подробнее см. в [9], [11]), при этом к циклу  $C_1$  добавляется целое число циклов  $C_+$ .

**3.5. Ассоциированный дифференциал.** На всякой кривой (1) существует единственный абелев дифференциал с двумя простыми полюсами на бесконечности, вычетом  $-1$  на бесконечности верхнего листа  $\infty_+$  и чисто мнимыми периодами. Указанная нормировка имеет ясную электростатическую аналогию: в точки  $\infty_\pm$  нужно посадить электрические заряды  $\mp 1$ , тогда возникающее распределение логарифмического потенциала на римановой поверхности  $M$  будет вещественной частью соответствующего многозначного абелевого интеграла  $\eta_M$ . Связанный с кри-

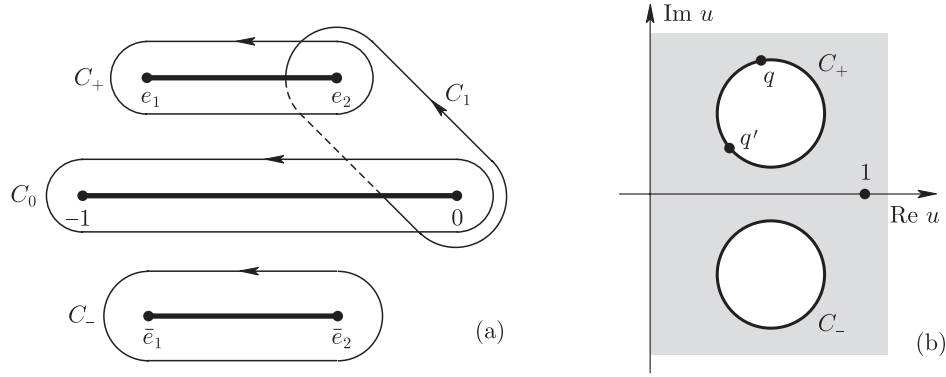


Рис. 2. (а) Выделенные циклы на кривой  $M$ , элементе пространства модулей  $\mathcal{H}$ . (б) Фундаментальная область группы  $\mathfrak{G}$ , связанной с точкой деформационного пространства  $\mathcal{G}$

вой  $M$  дифференциал имеет следующее координатное выражение:

$$d\eta_M = \left( x^g + \sum_{s=0}^{g-1} c_s x^s \right) \frac{dx}{w}. \quad (5)$$

Этот дифференциал меняет знак при гиперэллиптической инволюции  $J(x, w) := (x, -w)$  кривой  $M$ . Вещественная кривая  $M$  допускает *отражение* (антиконформную инволюцию)  $\bar{J}(x, w) := (\bar{x}, \bar{w})$ . Можно проверить, что отражение переводит ассоциированный дифференциал  $d\eta_M$  в  $\overline{d\eta_M}$  [9]. Такие дифференциалы называют *вещественными*, и в нашем случае это означает, что вещественными будут все коэффициенты  $c_s$  в представлении (5). Нетрудно проверить, что интегралы от  $d\eta_M$  по циклу  $C$  и по отраженному циклу  $\bar{J}C$  являются сопряженными числами. В частности, интеграл по всякому четному циклу (т.е.  $\bar{J}C = C$ ) равен нулю.

**3.6. Уравнения Абеля.** Если кривая  $M$  порождена некоторым многочленом  $P_n(x)$ , то связанный с ней дифференциал имеет представление

$$d\eta_M = n^{-1} d \log \tilde{P}_n(x, w), \quad (6)$$

где  $\tilde{P}_n(x, w) := P_n(x) + \sqrt{P_n^2(x) - 1}$  — мероморфная функция (Ахиезера) на кривой  $M$  с дивизором  $n(\infty_- - \infty_+)$ . Действительно, в силу равенства

$$\tilde{P}_n(x, w) \tilde{P}_n(x, -w) = 1$$

дивизор функции Ахиезера состоит из двух накрывающих бесконечность точек  $\infty_-$  и  $\infty_+$  с кратностями  $n$  и  $-n$ . Дифференциал (6) имеет только простые полюсы на бесконечности с вычетами  $\pm 1$  и чисто мнимые периоды. Подробнее см. в [9].



Интеграл от выражения (6) по любому целому циклу выражается через приращение аргумента функции Ахиезера на этом цикле и, следовательно, лежит в решетке  $2\pi i\mathbb{Z}/n$ . В частности,

$$\int_{C_1} d\eta_M \in 2\pi i\mathbb{Z}/n. \tag{7}$$

Если кривая  $M$  порождена приведенным наилучшим многочленом устойчивости, то интегралы по контурам  $C_0, C_+$  можно вычислить точно. Многочлен

$$R_n(Lx) =: P_n(x) = \frac{1}{2} \left( \tilde{P}_n(x, w) + \frac{1}{\tilde{P}_n(x, w)} \right)$$

испытывает на отрезке  $[-1, 0]$  ровно  $n - 2$  колебаний между  $+1$  и  $-1$ . Когда точка  $(x, w)$  пробегает по контуру  $C_0$  на римановой поверхности, значение  $\tilde{P}_n(x, w)$ , полученное из  $P_n(x)$  обратным преобразованием Жуковского, огибает единичную окружность ровно  $n - 2$  раза *против* часовой стрелки. Следовательно,  $\int_{C_0} d\eta_M = 2\pi i(n - 2)/n$ . Цикл  $C_0 + C_+ + C_-$  стягивается к полюсу  $\infty_+$  дифференциала  $d\eta_M$ , вычет в котором равен  $-1$ . Интегралы по  $C_+$  и  $C_-$  равны в силу вещественности дифференциала, поэтому

$$\int_{C_+} d\eta_M = 2\pi i n^{-1}. \tag{8}$$

Как мы увидим ниже, уравнения (7) и (8) гарантируют, что всякий интеграл от  $d\eta_M$  по целому циклу лежит в  $2\pi i\mathbb{Z}/n$ . Следовательно, функция  $\tilde{P}_n(x, w) := \exp n \int_{(0,0)}^{(x,w)} d\eta_M$  будет однозначной на римановой поверхности  $M$ . По сути, это одна из формулировок критерия Н. Х. Абеля [13] о существовании на  $M$  функции с дивизором  $n(\infty_- - \infty_+)$ . Мы будем называть (7), (8) *уравнениями Абеля*. Многочлен  $P_n$ , породивший кривую  $M$ , получается из функции Ахиезера  $\tilde{P}_n$  преобразованием Жуковского и с точностью до знака вычисляется по явной формуле:

$$P_n(x) = \cos \left( ni \int_{(0,0)}^{(x,w)} d\eta_M \right), \quad x \in \mathbb{C}, \quad (x, w) \in M. \tag{9}$$

**3.7. Уравнения на пространстве модулей.** В окрестности нуля приведенный наилучший многочлен устойчивости приближает функцию  $\exp(Lx)$  с третьим порядком:

$$P_n(x) = 1 + Lx + \frac{(Lx)^2}{2} + \frac{(Lx)^3}{6} + O(x^4). \tag{10}$$

Исключая заранее неизвестную величину  $L = \frac{dP_n}{dx}(0)$ , получаем

$$\frac{d^2 P_n}{dx^2}(0) = \left( \frac{dP_n}{dx}(0) \right)^2, \quad \frac{d^3 P_n}{dx^3}(0) = \left( \frac{dP_n}{dx}(0) \right)^3. \tag{11}$$

**ТЕОРЕМА 4.** *В пространстве модулей  $\mathcal{H}$  существует ровно одно решение  $M$  системы из четырех уравнений (7), (8), (11). Функция (9), вычисленная в этой точке  $M$ , является приведенным наилучшим многочленом устойчивости.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В одну сторону доказательство уже было проведено – кривая, соответствующая приведенному наилучшему многочлену устойчивости, удовлетворяет обоим уравнениям Абеля и двум уравнениям связи (11). Покажем, что кривая, удовлетворяющая этим четырём уравнениям, порождает решение оптимизационной задачи А.

Четыре цикла:  $C_1, C_+$  и их отражения  $\bar{J}C_1, \bar{J}C_+$ , образуют (неканонический) базис в решетке целочисленных 1-гомологий компактной кривой  $M$ ; их индексы пересечений образуют целочисленную матрицу с определителем  $\pm 1$ . Интеграл от  $d\eta_M$  по любому целому циклу на  $M$  лежит (в силу уравнений Абеля (7), (8) и вещественности дифференциала) в  $2\pi i\mathbb{Z}/n$ . Следовательно, формула (9) определяет однозначную мероморфную функцию на  $M$ . Последняя имеет особенности там же, где и дифференциал (т.е. на бесконечности), и инвариантна при инволюции  $J$ , меняющей знак ассоциированного дифференциала. Значит, эта функция – многочлен переменной  $x$ . Из вещественности  $d\eta_M$  легко следует вещественность многочлена  $P_n(x)$ . Когда переменная  $x$  пробегает от нуля до  $-1$ , аргумент косинуса в (9) остается вещественным и непрерывно меняется от нуля до  $-(n-2)\pi$ , так как в силу второго уравнения Абеля  $\int_{C_0} d\eta_M = 2\pi i(n-2)/n$ . Соответственно, отклонение  $P_n(x)$  на отрезке  $[-1, 0]$  равно единице, а сам многочлен имеет  $(n-2)$ -альтернанс на интервале  $[-1, 0)$ . Положим  $L := \frac{dP_n}{dx}(0) > 0$ , тогда в силу уравнений связи (11) 4-струя многочлена  $P_n(x)$  имеет вид (10). Согласно критерию теоремы 2  $P_n(x/L)$  будет наилучшим многочленом устойчивости. Из единственности последнего вытекает единственность решения нашей системы из четырех уравнений на пространстве модулей  $\mathcal{H}$ .

#### § 4. Модель Шоттки

Для эффективной работы с римановыми поверхностями мы произведем униформизацию кривых  $M$  группами Шоттки, при этом пространство модулей будет представлено как деформационное пространство некоторой клейновой группы. Входящие в нашу систему из четырех уравнений величины, заданные на пространстве модулей, эффективно вычисляются суммированием линейных рядов Пуанкаре по группе. Униформизация, при которой эти ряды сходятся на всем пространстве модулей, описана в [10]. Ниже мы используем другую униформизацию. Для нее ряды Пуанкаре быстрее сходятся в окрестности решения, особенно при больших  $n$ . К сожалению, в используемом подходе мы можем гарантировать, что ряды сходятся лишь для (достаточно большой) части пространства модулей.

**4.1. Деформационное пространство.** Дробно-линейное преобразование порядка 2 с неподвижными точками  $c \pm r$  имеет вид

$$G_+(u) := G_+u = c + \frac{r^2}{u - c}. \quad (12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Деформационным пространством*  $\mathcal{G}$  назовем множество преобразований вида (12), которые отображают внутренность некоторой целиком лежащей в открытом первом квадранте плоскости простой гладкой замкнутой кривой  $C_+$  на ее внешность (см. рис. 2(b)).

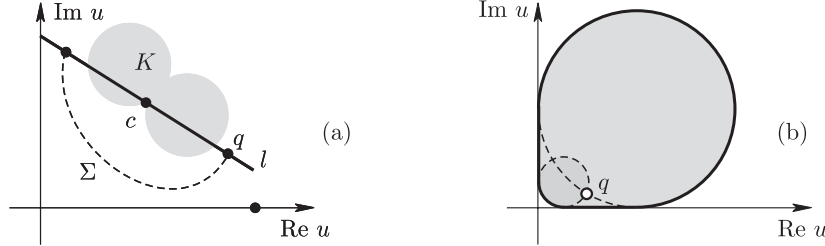


Рис. 3. (a) Выбор контура  $C_+$ . (b) Двумерное сечение классической части деформационного пространства

Деформационное пространство можно параметризовать комплексными коэффициентами  $c, r^2$  преобразования  $G_+$  либо неупорядоченными парами  $q, q'$  его неподвижных точек, которые обязаны лежать в первом квадранте. Определим явно область изменения модулей в пространстве  $\mathbb{C}^2$ .

ТЕОРЕМА 5. *Пространство  $\mathcal{G}$  задано следующей системой неравенств:*

$$|r| > 0, \quad \operatorname{Re} c > |\operatorname{Re} r|, \quad \operatorname{Im} c > |\operatorname{Im} r|, \quad \operatorname{Im}(c^2 - r^2) > |r|^2. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть модули  $c, r^2$  определяют точку пространства  $\mathcal{G}$ . Нижняя полуплоскость  $-\mathbb{H}$  и левая полуплоскость  $i\mathbb{H}$  лежат вне кривой  $C_+$ . Их образы при отображении  $G_+(u)$  должны лежать внутри  $C_+$ , а значит, строго в первом квадранте плоскости переменной  $u$ . Образ нижней полуплоскости — это круг с центром в точке  $c - r^2 / (c - \bar{c})$  и радиусом  $|r|^2 / |c - \bar{c}|$ ; левая полуплоскость отображается на круг с центром в точке  $c - r^2 / (c + \bar{c})$  и радиусом  $|r|^2 / |c + \bar{c}|$ . Круг лежит в первом квадранте, если и только если и вещественная, и мнимая части его центра больше радиуса. Отсюда, учитывая, что  $c = G_+(\infty)$  лежит в первом квадранте, нетрудно получить неравенства (13).

2. Покажем, как выбрать требуемый в определении контур  $C_+$ , если для модулей  $c, r^2$  выполнены неравенства (13). Объединение двух кругов  $K := G_+(-\mathbb{H}) \cup G_+(i\mathbb{H})$  в рассматриваемом случае лежит строго внутри первого квадранта и не содержит неподвижных точек преобразования  $G_+(u)$ . Проходящая через точки  $c \pm r$  прямая  $l$  пересекает замыкание  $K$  по отрезку, так как точка  $c$  лежит на границе обоих кругов. Неподвижные точки  $c \pm r$  преобразования  $G_+(u)$  можно соединить простой гладкой кривой  $\Sigma$ , лежащей в первом квадранте по одну сторону от  $l$  и не пересекающей замыкания  $K$  (см. рис. 3(a)). Возьмем в качестве контура  $C_+$  объединение кривой  $\Sigma$  и  $G_+(\Sigma)$ . Мы получим гладкую замкнутую кривую без самопересечений, целиком лежащую в первом квадранте, а действие  $G_+$  меняет местами ее внутренность и внешность. Действительно, при отображении  $G_+$  полуплоскости справа и слева от  $l$  меняются местами, а двусвязная область — дополнение  $K$  до первого квадранта — инвариантна.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В качестве контура  $C_+$  не всегда можно взять окружность. Если окружность допускается, то соответствующую точку деформационного пространства будем называть *классической* по причине, которая станет скоро ясна. Поясним соотношение между классической и неклассической частями пространства  $\mathcal{G}$ .

Существует ровно две окружности, проходящие через фиксированную точку  $q$  первого квадранта и касающиеся его границ. Внутренность выпуклой оболочки этих двух окружностей (см. рис. 3(b)), за вычетом самой точки  $q$ , будет геометрическим местом точек  $q'$  таких, что  $q$  и  $q'$  — это неподвижные точки классического элемента  $G_+$  деформационного пространства. Элементом деформационного пространства на этом рисунке соответствуют точки  $q' \neq q$ , лежащие в первом квадранте и внутри окружности с центром в точке  $x + 2y + i(y + 2x)$  и радиусом  $2x + 2y$ , если  $q = x + iy$ . Две окружности, определенные выше точкой  $q$ , касаются этой третьей окружности изнутри. Фиксация одной неподвижной точки  $q$  задает двумерное сечение деформационного пространства. Доля классической части в этом сечении зависит от аргумента точки  $q$  и составляет в среднем 82 процента.

**4.2. Пространство модулей и деформационное пространство.** Всякая точка  $G_+$  деформационного пространства порождает группу  $\mathfrak{G}$  с тремя образующими  $G_+u$ ,  $G_0u := -u$ ,  $G_-u := \overline{G_+u}$ . По теореме комбинирования Ф. Клейна [14] эта группа будет действовать разрывно в некоторой области  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathfrak{G})$  на сфере и все соотношения в группе следуют из трех:  $G_+^2 = G_0^2 = G_-^2 = 1$ . Фундаментальная область этой группы трехсвязна и ограничена мнимой осью, кривой  $C_+$  и ее отражением  $C_- := \overline{C_+}$ . Группа Шоттки  $\mathfrak{G}$  рода 2 с образующими  $S_{\pm} := G_{\pm}G_0$  является подгруппой  $\mathfrak{G}$  индекса 2. Эта группа Шоттки будет *классической*, т.е. с фундаментальной областью, ограниченной кругами, если классической является порождающая ее точка деформационного пространства.

Фактормногообразие группы Шоттки допускает гиперэллиптическую инволюцию  $J := G_0$  (с шестью неподвижными точками  $0, \infty, c \pm r, \bar{c} \pm \bar{r}$ ) и отражение  $\bar{J}u := \bar{u}$ , т.е. является вещественной гиперэллиптической кривой рода 2. Естественно ориентируя вещественную прямую и отметив точку “ $\infty_+$ ”  $:= 1$  на ней, мы получаем элемент пространства модулей  $\mathcal{H}$ .

Явно зададим отображение из деформационного пространства в пространство модулей. Фактормножеством клейновой группы  $\mathfrak{G}$  является риманова сфера. Естественную проекцию  $x(u)$  из множества разрывности  $\mathcal{D}$  группы в  $\hat{\mathbb{C}}$  нормируем так, чтобы она переводила точки  $0, 1, \infty$  в  $0, \infty, -1$  соответственно. Такая проекция единственна и перестановочна с комплексным сопряжением:  $x(\bar{u}) = \overline{x(u)}$ . Проекция шести неподвижных точек гиперэллиптической инволюции  $J$  даст нам нормированный дивизор ветвления  $e$  — элемент пространства модулей  $\mathcal{H}$ , сопоставляемый элементу  $G_+$  деформационного пространства  $\mathcal{G}$ .

Из следующей теоремы следует, что приведенная конструкция дает все точки пространства модулей.

**ТЕОРЕМА 6.** *Пространство модулей и деформационное пространство изоморфны.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** 1. *Отображение  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  мономорфно.* Проекция  $x(u)$  является неразветвленным накрытием римановой сферы, проколотов в точках ди-

визора ветвления. Соответствующим накрывающим пространством является  $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$  – область разрывности, проколота в неподвижных точках всех эллиптических элементов группы  $\mathfrak{G}$ .

Пусть два элемента  $G_+^0$  и  $G_+^1 \in \mathcal{G}$  дают один дивизор ветвления  $e \in \mathcal{H}$ . Верхние индексы 0 и 1 будут относиться к соответствующим группам, проекциям и т. д. Группа накрытия  $x^0(u)$  – это ядро представления  $\chi_\Delta$  из п. 3.3, определяемое разрезом  $\Lambda_+ := x^0(C_+^0)$  в верхней полуплоскости. Группу накрытия  $x^1(u)$  задает изотопный предыдущему разрез  $x^1(C_+^1)$ . Мы уже отмечали, что эти две группы совпадают. Следовательно, можно определить взаимно однозначное отображение накрывающих

$$\check{f} = (x^1)^{-1}x^0: \overset{\circ}{\mathcal{D}}^0 \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{D}}^1,$$

нормированное равенством  $\check{f}(1) = 1$ . Это отображение эквивариантно относительно групп скользящих:  $\check{f}G_\pm^0 = G_\pm^1\check{f}$ ,  $\check{f}G_0 = G_0\check{f}$ . По непрерывности и используя свойство эквивариантности, отображение  $\check{f}$  можно доопределить в проколах области  $\overset{\circ}{\mathcal{D}}^0$ . Область разрывности группы Шоттки относится к классу нуль-AD (т.е. всякая аналитическая в области функция с конечным интегралом Дирихле постоянна), и однолистная функция на области разрывности является дробно-линейной [15]. Точки 0 и  $\infty$  наряду с 1 являются неподвижными для  $\check{f}$ : пути  $[0, 1]$  и  $[1, \infty]$  при любой проекции  $x(u) = x^0(u)$ ,  $x^1(u)$  переходят в отрезки  $[0, \infty]$  и  $[\infty, -1]$  соответственно. Значит,  $\check{f}$  является тождественным отображением. Условие эквивариантности дает  $G_+^0 = G_+^1$ .

2. *Отображение  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  эпиморфно.* Рассмотрим произвольный элемент  $G_+$  деформационного пространства, отображающийся в дивизор  $e$  пространства модулей. Пусть перестановочный с комплексным сопряжением диффеоморфизм  $f$  плоскости переводит дивизор  $e$  в заданный дивизор  $e'$ . Дополнительно мы будем считать, что  $f$  конформно вблизи точек дивизора  $e$ . Дифференциал Бельтрами  $\mu(x)\overline{dx}/dx := (f_x\overline{dx})/(f_x dx)$  можно поднять на область разрывности  $\mathcal{D}$  группы  $\mathfrak{G}$  при помощи разветвленного накрытия  $x(u)$ . Новый дифференциал Бельтрами  $\tilde{\mu}(u)\overline{du}/du$ ,  $\tilde{\mu}(u) := \mu(x(u))\frac{\overline{dx}/\overline{du}}{dx/du}$ , инвариантен относительно группы  $\mathfrak{G}$ . Предельное множество группы имеет нулевую плоскую меру, поэтому коэффициент  $\tilde{\mu}(u)$  задает элемент пространства  $L_\infty(\mathbb{C})$ , гладкий на множестве  $\mathcal{D}$  разрывности группы. Существует единственный квазиконформный гомеоморфизм  $\tilde{f}(u)$  римановой сферы, удовлетворяющий уравнению Бельтрами  $\tilde{f}_u = \tilde{\mu}\tilde{f}_u$  и фиксирующий три точки 0, 1,  $\infty$ . Из инвариантности дифференциала Бельтрами относительно действия группы  $\mathfrak{G}$  следует, что гомеоморфизмы  $\tilde{f}(u)$  и  $\tilde{f}(Gu)$  различаются на конформное движение сферы Римана:

$$G^f\tilde{f} = \tilde{f}G, \quad G \in \mathfrak{G}, \quad G^f \in \text{PSL}_2(\mathbb{C}).$$

Элемент  $G_+^f$ , называемый квазиконформной деформацией элемента  $G_+$ , имеет порядок два и отображает внешность гладкой кривой  $\tilde{f}C_+$  на ее внутренность. Кривая  $\tilde{f}C_+$  лежит в образе первого квадранта плоскости. Покажем, что каждый квадрант плоскости инвариантен при отображении  $\tilde{f}(u)$ , откуда будет следовать, что  $G_+^f$  является элементом деформационного пространства  $\mathcal{G}$ . Зеркальная

симметрия коэффициента Бельтрами  $\tilde{\mu}(\bar{u}) = \overline{\tilde{\mu}(u)}$  и нормировочного множества  $\{0, 1, \infty\}$  влекут перестановочность  $\tilde{f}(u)$  с комплексным сопряжением. Поэтому  $f\mathbb{R} = \mathbb{R}$ . В силу нормировки деформация элемента  $G_0$  тривиальна, поэтому для  $u \in i\mathbb{R}$  выполнена цепочка равенств  $\tilde{f}(u) = \tilde{f}(-\bar{u}) = -\tilde{f}(\bar{u}) = -\overline{\tilde{f}(u)}$ . Как видим, действительная и мнимая оси остаются на своих местах и вдобавок сохраняют ориентацию, поэтому все квадранты при действии  $\tilde{f}$  инвариантны.

Остается показать, что полученный элемент  $G_{\pm}^f$  деформационного пространства отображается в дивизор  $e' \in \mathcal{H}$ . Пусть элементу  $G_{\pm}^f$  соответствует нормированная как и ранее проекция  $x^f(u): \mathcal{D}^f = \tilde{f}\mathcal{D} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ . Пользуясь единственностью нормированного квазиконформного отображения с данным коэффициентом Бельтрами, можно показать, что  $x^f\tilde{f} = fx$ . Дивизор ветвления, соответствующий элементу  $G_{\pm}^f$ , — это  $x^f$  (неподвижные точки  $G_{\pm}^f, G_0^f$ ) =  $x^f\tilde{f}$  (неподвижные точки  $G_{\pm}, G_0$ ) =  $fx$  (неподвижные точки  $G_{\pm}, G_0$ ) =  $fe = e'$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Метод работы [10] позволяет доказать, что локальные координаты  $(e_1, e_2)$  (точки нормированного дивизора  $e$  в верхней полуплоскости) на пространстве модулей и координаты  $(c, r^2)$  деформационного пространства связаны биголоморфно.

**4.3. Линейные ряды Пуанкаре.** Группы Шоттки  $\mathfrak{S}$ , отвечающие классической части нашего деформационного пространства, удовлетворяют следующему критерию Шоттки. *Фундаментальную область  $\mathcal{R}$ , ограниченную четырьмя кругами  $C_+, C_-, -C_+, -C_-$ , можно разбить на трехсвязные области (“штаны”), ограниченные окружностями.* Известно, что в этом случае линейные ряды Пуанкаре сходятся абсолютно и равномерно на компактах в области разрывности группы [16]. Теперь мы сможем конструктивно построить различные аналитические объекты, инвариантные при действии группы  $\mathfrak{S}$ .

Абелев дифференциал 3-го рода  $d\eta_{zz'}$  с полюсами в точках  $z, z'$  фундаментальной области получается усреднением по группе  $\mathfrak{S}$  дифференциала на сфере [17]:

$$\begin{aligned} d\eta_{zz'} &:= \dot{\eta}_{zz'}(u) du := \sum_{S \in \mathfrak{S}} \left\{ \frac{1}{Su - z} - \frac{1}{Su - z'} \right\} dS(u) \\ &= \sum_{S \in \mathfrak{S}} \left\{ \frac{1}{u - Sz} - \frac{1}{u - Sz'} \right\} du. \end{aligned} \quad (14)$$

Почленное равенство двух сумм вытекает из инфинитезимальной формы тождества двойного отношения

$$\frac{\frac{d}{du} S(u)(z - z')}{(Su - z)(Su - z')} = \frac{S^{-1}z - S^{-1}z'}{(u - S^{-1}z)(u - S^{-1}z')}, \quad S \in \text{PSL}_2(\mathbb{C}). \quad (15)$$

Дифференцируя (14) по параметру  $z$ , положению полюса, мы получаем абелевы дифференциалы второго рода:

$$\begin{aligned} d\omega_{mz} &:= \dot{\omega}_{mz}(u) du := D_z^m d\eta_{zy}(u) = m! \sum_{S \in \mathfrak{S}} (Su - z)^{-m-1} dS(u), \\ &m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Оба голоморфных дифференциала на  $M = \mathcal{D}/\mathfrak{S}$  можно получить, помещая полюсы  $z, z'$  в одну орбиту группы  $\mathfrak{S}$  и выделяя в (14) телескопическую сумму:

$$\begin{aligned} d\zeta_{\pm} &:= \dot{\zeta}_{\pm}(u)du := d\eta_{S_{\pm}y} = \sum_{S \in \mathfrak{S}/\langle S_{\pm} \rangle} \{(u - S\alpha_{\pm})^{-1} - (u - S\beta_{\pm})^{-1}\} du \\ &= \sum_{S \in \langle S_{\pm} \rangle / \mathfrak{S}} \{(Su - \alpha_{\pm})^{-1} - (Su - \beta_{\pm})^{-1}\} dS(u), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\alpha_{\pm}$  – притягивающая, а  $\beta_{\pm}$  – отталкивающая неподвижные точки дробно-линейного преобразования  $S_{\pm}$ ; суммирование ведется по представителям смежных классов подгруппы  $\langle S_{\pm} \rangle \subset \mathfrak{S}$ , порожденной элементом  $S_{\pm}$ . Независимость слагаемых в (17) от выбора представителей смежных классов следует из тождества двойного отношения (15). Почленно интегрируя ряды (14)–(16) по окружностям  $C_{\pm}$  против часовой стрелки, определим нормировку рассмотренных дифференциалов:

$$\int_{C_{\pm}} d\eta_{zz'} = 0, \quad \int_{C_{\pm}} d\omega_{mz} = 0, \quad \int_{C_{\pm}} d\zeta_{\pm} = 2\pi i, \quad \int_{C_{\pm}} d\zeta_{\mp} = 0, \quad z, z' \in \mathcal{R}. \quad (18)$$

Называемые функциями Шоттки [16], [17] экспоненты интегралов от рядов (14), (17) эффективно вычисляются:

$$(u, u'; z, z') := \exp \int_{u'}^u d\eta_{zz'} = \prod_{S \in \mathfrak{S}} \frac{u - Sz}{u - Sz'} : \frac{u' - Sz}{u' - Sz'}, \quad (19)$$

$$E_{\pm}(u) := \exp \int_{\infty}^u d\zeta_{\pm} = \prod_{S \in \mathfrak{S}/\langle S_{\pm} \rangle} \frac{u - S\alpha_{\pm}}{u - S\beta_{\pm}}. \quad (20)$$

При действии группы  $\mathfrak{S}$  функции Шоттки преобразуются известным образом:

$$(S_{\pm}u, u'; z, z') = (u, u'; z, z') \frac{E_{\pm}(z)}{E_{\pm}(z')}, \quad (21)$$

$$E_{\circ}(S_{\bullet}u) = E_{\circ}(u)E_{\circ\bullet}, \quad \circ, \bullet \in \{+, -\}, \quad (22)$$

где постоянная  $E_{\circ\bullet}$  – экспонента от периода голоморфного дифференциала – также вычисляется эффективно:

$$E_{\circ\bullet} = E_{\bullet\circ} = \prod_{S \in \langle S_{\bullet} \rangle / \langle S_{\circ} \rangle} \frac{S\alpha_{\circ} - \alpha_{\bullet}}{S\alpha_{\circ} - \beta_{\bullet}} : \frac{S\beta_{\circ} - \alpha_{\bullet}}{S\beta_{\circ} - \beta_{\bullet}}. \quad (23)$$

Здесь произведение берется по двусторонним классам смежности группы  $\mathfrak{S}$ , и при совпадении индексов  $\circ$  и  $\bullet$  сомножитель  $0/\infty$ , соответствующий  $S = 1$ , заменяется на коэффициент растяжения  $\lambda_{\circ} := \dot{S}_{\circ}(\alpha_{\circ})$ .

**4.4. Организация вычислений.** Для вычисления сумм и произведений по группе Шоттки или классам смежности группы по ее подгруппам  $\langle S_+ \rangle$ ,  $\langle S_- \rangle$  построим граф Кэли группы  $\mathfrak{S}$ . Поместим элементы группы в вершины (бесконечного) дерева и каждую вершину  $S$  соединим с четырьмя вершинами  $S_+S$ ,  $S_+^{-1}S$ . Дерево естественно разбито на уровни с одинаковой нормой  $|S|$ , длиной несократимого разложения элемента  $S$  по образующим. Например,  $|S_+^{-1}S_-S_+| = 3$ .

Рассмотрим вычисление функции  $\dot{\eta}_{zz'}(u) := d\eta_{zz'}/du$ . Ее можно представить в виде двух разных рядов по группе Шоттки: в формуле (14) эти ряды расположены слева и справа. Для вычисления слагаемого правого ряда, скажем, в вершине  $S_+S$  графа Кэли спустимся по дереву вниз на один уровень и возьмем хранящиеся в вершине  $S$  значения  $S(z)$ ,  $S(z')$ . Поместим значения  $S_+S(z)$ ,  $S_+S(z')$  в текущую вершину  $S_+S$  дерева и используем их для вычисления слагаемого ряда, отвечающего этой вершине. Такая схема особенно эффективна, если один и тот же ряд  $\dot{\eta}_{zz'}$  необходимо посчитать для нескольких значений аргумента  $u$ . Если же необходимо вычислять различные ряды  $\dot{\eta}_{zz'}$  в одной точке  $u$ , то в вершинах дерева следует хранить величины  $S(u)$ ,  $\bar{S}(u)$ , а вычисления проводить по левому ряду в (14). В обоих случаях суммирование членов ряда с одного уровня графа Кэли требует запоминания данных только с предыдущего уровня.

Разумеется, реальные вычисления проводятся по конечному поддереву графа Кэли группы. В качестве этого поддерева можно выбрать дерево конечной высоты, и для такого суммирования есть априорные оценки погрешности. Практика показывает, что бессмысленно тратить вычислительную мощность на суммирование малых слагаемых ряда, если еще не просуммированы большие. Поэтому более экономным является выбор другого поддерева, которое определяется лишь в процессе счета. Именно, если слагаемое ряда в узле  $S$  меньше фиксированной точности  $\varepsilon$ , то дальнейшее суммирование по дереву, растущему из этой вершины, можно не проводить. Существуют оценки, показывающие, что сумма ряда по этому бесконечному дереву имеет тот же порядок  $\varepsilon$ , что и слагаемое в его корне  $S$ . Для такой организации суммирования погрешность становится известной по окончании процесса вычислений (апостериорная оценка точности).

Затраты при вычислении рядов Пуанкаре можно уменьшить, воспользовавшись двумя инволюциями  $J$ ,  $\bar{J}$  на группе  $\mathfrak{S}$ . Эти инволюции порождены симметриями кривой  $M$  и перестановочны:  $JS(u) := -S(-u)$ ,  $\bar{J}S(u) := \overline{S(\bar{u})}$ ,  $S \in \mathfrak{S}$ . Инволюция  $J$  корректно действует на классах смежности  $\mathfrak{S}|\langle S_+ \rangle$ ,  $\mathfrak{S}|\langle S_- \rangle$  группы, а  $\bar{J}$  переводит первое множество классов во второе и наоборот. В ряде Пуанкаре можно сгруппировать члены, соответствующие друг другу при той или иной инволюции. Например, для  $u \in \mathbb{R}$  имеем

$$\dot{\eta}_{-11}(u) = \frac{-2}{u^2 - 1} + \sum_{1 \neq S \in \mathfrak{S}/\sim} 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{u - S(-1)} - \frac{1}{u - S(1)} + \frac{1}{u + S(1)} - \frac{1}{u + S(-1)} \right],$$

где элементы  $S \neq 1$  группы  $\mathfrak{S}$  объединены в классы  $S \sim JS \sim \bar{J}S \sim \bar{J}JS$ ;

$$\dot{\zeta}_+(u) + \dot{\zeta}_-(u) = 2 \sum_{S \in \mathfrak{S}|\langle S_+ \rangle} \operatorname{Re} [(u - S(\alpha_+))^{-1} - (u - S(\beta_+))^{-1}].$$



Из приведенных равенств, в частности, следует, что мероморфный дифференциал  $d\eta_{-11}$  и голоморфный дифференциал  $d\zeta_+ + d\zeta_-$  являются вещественными. Помимо сокращения вычислительной работы, подобные преобразования часто позволяют не выходить за рамки вещественной арифметики.

**4.5. Представление функций.** Ненулевую мероморфную функцию на многообразии орбит группы  $\mathfrak{S}$  можно выразить через функции Шоттки.

ЛЕММА 2 [10]. Пусть автоморфная функция  $F(u)$  имеет дивизор

$$\sum_{s=1}^{\deg F} (z_s - z'_s)$$

в фундаментальной области группы  $\mathfrak{S}$ , тогда справедливо представление

$$F(u) = \text{const} \cdot \prod_{s=1}^{\deg F} (u, *; z_s, z'_s) E_+^{m_+}(u) E_-^{m_-}(u),$$

где  $m_{\pm} \in \mathbb{Z}$  — приращение  $(2\pi i)^{-1} \log F(u)$  по циклу  $C_{\pm}$ , а положение точки  $*$  влияет лишь на постоянную в правой части формулы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие автоморфности, т.е. неизменности функции  $F(u)$  при действии группы  $\mathfrak{S}$ , дает условия согласования на ее дивизор и целые числа  $m_{\pm}$ , которые нетрудно получить из законов преобразования функций Шоттки (21), (22). Эти условия эквивалентны критерию Абеля на дивизор мероморфной функции.

ПРИМЕР 1. Вычислим проекцию  $x(u)$  области разрывности клейновой группы  $\mathfrak{S}$  на риманову сферу, нормированную, как и раньше, условиями  $(0, 1, \infty) \rightarrow (0, \infty, -1)$ . Функция  $x(u)$  имеет двойной нуль при  $u = 0$  и простые полюсы в точках  $u = \pm 1$ , кроме того, приращение аргумента  $x(u)$  при обходе граничных окружностей  $C_{\pm}$  нулевое. Следовательно,  $dx(u)/x(u) = d\eta_{01}(u) + d\eta_{0-1}(u) = d\eta_{01}(u) + d\eta_{01}(-u)$  и проекция имеет представление

$$x(u) = -(u, \infty; 0, 1)(-u, \infty; 0, 1). \quad (24)$$

ПРИМЕР 2. Предполагая выполненными уравнения Абеля, вычислим в соответствующей точке деформационного пространства многочлен  $P_n$  по формуле (9). Ассоциированный дифференциал  $d\eta_M$  кривой  $M := \mathcal{D}/\mathfrak{S}$  является вещественным, поэтому интегралы по окружностям  $C_{\pm}$  совпадают и равны  $2\pi i/n$  в силу второго уравнения Абеля (8). Этот дифференциал имеет простые полюсы в точках  $\pm 1$  с вычетами  $\mp 1$ , а потому выглядит так:

$$d\eta^* = d\eta_{-11} + \frac{1}{n}(d\zeta_+ + d\zeta_-). \quad (25)$$

Функция Ахиезера на  $M$  как функция униформизирующей переменной  $u$  имеет вид

$$\tilde{P}_n(x, w) := \tilde{T}(u) = \exp\left(n \int_0^u d\eta^*\right) = (u, 0; -1, 1)^n \frac{E_+(u)}{E_+(0)} \frac{E_-(u)}{E_-(0)}. \quad (26)$$

Наконец, 2-экстремальный многочлен  $P_n(x)$  получается из функции (26) преобразованием Жуковского:

$$P_n(x) := T(u) = \frac{1}{2} \left( \tilde{T}(u) + \frac{1}{\tilde{T}(u)} \right). \quad (27)$$

### § 5. Уравнения на деформационном пространстве

Формулы (24), (26), (27) предыдущего параграфа дают эффективно вычисляемое параметрическое представление для приведенного оптимального многочлена устойчивости при условии, что для некоторой точки классической части пространства  $\mathcal{G}$  выполнены уравнения Абеля и уравнения связей. К выводу этих уравнений на деформационном пространстве мы и приступаем.

#### 5.1. Уравнения Абеля.

**ЛЕММА 3.** *На классической части деформационного пространства  $\mathcal{G}$  два вещественных уравнения Абеля (7), (8) эквивалентны одному комплексному условию*

$$E_+^{2n}(1) = E_{++}E_{+-}. \quad (28)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** 1. Если выполнено второе уравнение Абеля (8), то ассоциированный с кривой дифференциал  $d\eta_M$  в модели Шоттки имеет вид (25). Уравнение (7) эквивалентно условию  $\exp\left(n \int_{C_1} d\eta_M\right) = 1$ . Пользуясь последовательно соотношением Римана, правилами преобразования функций Шоттки (22) и нечетностью голоморфных дифференциалов  $d\zeta_+(-u) = -d\zeta_+(u)$ , имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \exp\left(n \int_u^{S+u} d\eta^*\right) &= \exp\left(n \int_1^{-1} d\eta_{S+u} + \int_u^{S+u} (d\zeta_+ + d\zeta_-)\right) \\ &= \left(\frac{E_+(-1)}{E_+(1)}\right)^n E_{++}E_{+-} = \frac{E_{++}E_{+-}}{(E_+(1))^{2n}}. \end{aligned}$$

2. Проходя последнюю цепочку равенств в обратном направлении, из условия (28) получаем  $\int_{C_1} d\eta^* \in 2\pi i\mathbb{Z}/n$ . Нормировка (18) абелевых дифференциалов дает  $\int_{C_+} d\eta^* = \frac{2\pi i}{n}$ . Осталось показать, что  $d\eta^*$  является ассоциированным дифференциалом для кривой  $M = \mathcal{G}/\mathfrak{S}$ . Дифференциал  $d\eta^*$  вещественный, а значит, интегралы по отраженным циклам  $\bar{J}C_1, \bar{J}C_+$  кривой  $M$  также будут чисто мнимыми. Рассматриваемый на пространстве орбит группы дифференциал  $d\eta^*$  имеет простые полюсы в отмеченных точках “ $\infty_{\pm}$ ” :=  $\pm 1$  с вычетами  $\mp 1$  и чисто мнимые периоды, а значит,  $d\eta^* = d\eta_M$ .

**ЗАМЕЧАНИЯ.** 1) Условие (28) эквивалентно уравнениям Абеля на всем пространстве  $\mathcal{G}$ , если определять входящие в это условие величины без помощи рядов Пуанкаре.

2) Условие (28) равносильно автоморфности функции (26).

**5.2. Уравнения связей.** При выполнении уравнений Абеля функция (9) будет многочленом, который в модели Шоттки задается параметрически формулами (24), (26), (27). Найдем три первых производных многочлена  $P_n(x)$  в нуле, для

чего рассмотрим струи функций  $T(u) := P_n(x)$  и  $x(u)$ :

$$\begin{aligned} T(u) &:= \text{ch} \left( \int_0^u n d\eta^* \right) =: 1 + T_2 u^2 + T_4 u^4 + T_6 u^6 + \dots, \\ x(u) &= -\exp \left( -\int_\infty^u d\eta_{10} + d\eta_{-10} \right) =: x_2 u^2 + x_4 u^4 + x_6 u^6 + \dots. \end{aligned} \quad (29)$$

Для производных многочлена  $P_n(x)$  в нуле справедливы формулы

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{dx}(0) &= \frac{T_2}{x_2}, \\ \frac{d^2 P_n}{dx^2}(0) &= 2 \frac{T_4 x_2 - T_2 x_4}{x_2^3}, \\ \frac{d^3 P_n}{dx^3}(0) &= 6 \frac{2(T_2 x_4 - T_4 x_2) x_4 + (T_6 x_2 - T_2 x_6) x_2}{x_2^5}. \end{aligned} \quad (30)$$

Уравнения связей (11) после подстановки в них выражений (30) зависят только от проективной струи  $x_2 : x_4 : x_6$  функции  $x(u)$ . Эти уравнения неизменны при растяжении независимой переменной  $x$ .

### 5.3. Струя функции $T(u)$ . Коэффициенты $\eta_l^*$ тейлоровского разложения

$$\frac{d\eta^*}{du} = \eta_0^* + \eta_2^* u^2 + \eta_4^* u^4 + \dots$$

вычисляются с помощью сходящегося ряда

$$\begin{aligned} \eta_l^* &= \frac{1}{l!} D_u^l \eta^*(u) \Big|_{u=0} = \sum_{S \in \mathfrak{S}} ((S(1))^{-l-1} - (S(-1))^{-l-1}) \\ &+ \frac{2}{n} \sum_{S \in \mathfrak{S} \setminus \{S_+\}} \text{Re}[(S(\beta_+))^{-l-1} - (S(\alpha_+))^{-l-1}], \quad l = 0, 2, 4, \dots \end{aligned}$$

Три первых нетривиальных коэффициента в разложении функции

$$T(u) := \text{ch} \left( n \int_0^u d\eta^* \right)$$

по степеням  $u$  имеют вид

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{(n\eta_0^*)^2}{2}, \\ T_4 &= \frac{(n\eta_0^*)(n\eta_2^*)}{3} + \frac{(n\eta_0^*)^4}{24}, \\ T_6 &= \frac{(n\eta_0^*)(n\eta_4^*)}{5} + \frac{(n\eta_2^*)^2}{18} + \frac{(n\eta_0^*)^3(n\eta_2^*)}{18} + \frac{(n\eta_0^*)^6}{720}. \end{aligned} \quad (31)$$

**5.4. Проективная струя функции  $x(u)$ .** Сравнивая в равенстве  $dx(u) = (d\eta_{01}(u) + d\eta_{01}(-u))x(u) =: 2(1/u + \eta_1 u + \eta_3 u^3 + \dots)x du$  коэффициенты при разных степенях  $u$ , получаем

$$x_2 : x_4 : x_6 = 2 : 2\eta_1 : (\eta_1^2 + \eta_3).$$

Коэффициенты  $\eta_l$  тейлоровского разложения  $\dot{\eta}_{01}(u)$  в окрестности нуля вычисляются так:

$$\eta_l = \frac{1}{l!} D_u^l \left( \dot{\eta}_{01}(u) - \frac{1}{u} \right) \Big|_{u=0} = 1 + \sum_{1 \neq S \in \mathfrak{S}} ((S(1))^{-l-1} - (S(0))^{-l-1}), \quad l = 1, 3, \dots$$

**5.5. Вариационная теория.** Для эффективного решения нашей системы из четырех уравнений (28), (11) на деформационном пространстве необходимо найти производные величин, входящих в эти уравнения, по модулям. Уравнения Абеля в форме (28) содержат период интеграла от формы  $d\eta^*$ . Уравнения связей (11) в модели Шоттки – это некоторые соотношения между абелевыми интегралами в заданных пределах. Действительно, коэффициенты струй дифференциалов  $d\eta^*$  и  $d\eta_{01}$  можно при помощи соотношений Римана преобразовать к нужной форме:

$$\begin{aligned} l!\eta_l^* &= D_u^l \dot{\eta}^*(u) \Big|_{u=0} = D_u^{l+1} \int_{u=0}^u d\eta^*(u) \Big|_{u=0} \\ &= \int_1^{-1} d\omega_{(l+1)0} + \frac{1}{n} \left[ \int_w^{S+w} d\omega_{(l+1)0} + \int_w^{S-w} d\omega_{(l+1)0} \right], \end{aligned}$$

положение точки  $w$  здесь не существенно. Дифференциал  $d\eta_{01}$  имеет особенность при  $u = 0$ , поэтому коэффициенты его струи – регуляризация расходящегося интеграла:

$$l!\eta_l = D_u^l \left( \dot{\eta}_{01}(u) - \frac{1}{u} \right) \Big|_{u=0} = \lim_{u \rightarrow 0} \left[ \int_1^0 d\omega_{(l+1)u} + \frac{l!}{(-u)^{l+1}} \right].$$

Нормированные абелевы интегралы в заданных пределах и их периоды являются функциями точки деформационного пространства  $\mathcal{G}$ . Малое возмущение модулей  $\delta c$ ,  $\delta r^2$  приводит к малым возмущениям матриц  $\widehat{S}_{\pm} \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})$ , соответствующих образующим группы  $\mathfrak{S}$ :

$$\widehat{S}_+ := \begin{vmatrix} c & c^2 - r^2 \\ 1 & c \end{vmatrix}, \quad \delta \widehat{S}_+ := \begin{vmatrix} 1 & 2c \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \delta c - \begin{vmatrix} 0 & 2r \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \delta r + o, \quad o := o(|\delta c| + |\delta r|). \quad (32)$$

Матрица  $\widehat{S}_-$  и ее возмущение  $\delta \widehat{S}_-$  связаны с  $\widehat{S}_+$  и  $\delta \widehat{S}_+$  комплексным сопряжением.

**ТЕОРЕМА 7** [18], [10]. *Вариации определенных абелевых интегралов и их периодов описывают следующие формулы:*

$$\delta \int_v^{v'} d\eta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\bullet=+,-} \int_{\mathcal{C}_{\bullet}} \dot{\eta}(u) \dot{\eta}_{v v'}(u) \text{tr}[\mathcal{M}(u) \cdot \delta \widehat{S}_{\bullet} \cdot \widehat{S}_{\bullet}^{-1}] du + o, \quad (33)$$

$$\delta \int_{S_{\pm} w}^w d\eta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\bullet=+,-} \int_{\mathcal{C}_{\bullet}} \dot{\eta}(u) \dot{\zeta}_{\pm}(u) \text{tr}[\mathcal{M}(u) \cdot \delta \widehat{S}_{\bullet} \cdot \widehat{S}_{\bullet}^{-1}] du + o, \quad (34)$$

пределы  $v, v'$  определенного интеграла находятся в фундаментальной области  $\mathcal{R}$  группы Шоттки; все объекты в правой части равенств относятся к невозмущенной группе;  $d\eta(u) := \dot{\eta}(u)du$  – любой из дифференциалов  $d\eta_{zz'}$ ,  $d\zeta_{\pm}$ ,  $d\omega_{mz}$  с нормировкой (18);  $\mathcal{M}(u) := (u, 1)^t \cdot (-1, u) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  – матрица Хейхала,  $o := o(|\delta c| + |\delta r|)$ .

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Формула (33) – это по существу хорошо известная формула Адамара для вариации функции Грина. Похожие вариационные формулы есть в работах и других авторов, см. ссылки в статье [18].

2. Приведенные вариационные формулы (с очевидными изменениями) справедливы для любых групп Шоттки произвольного рода. Формулы были проверены в ходе компьютерных экспериментов, подтвердивших их справедливость.

Применяя теорему 7, получаем производные всех величин, из которых составлены уравнения на деформационном пространстве:

$$\begin{aligned} \delta \int_{C_1} d\eta^* &\approx -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\bullet=+,-} \int_{C_{\bullet}} \dot{\eta}^*(u) \dot{\zeta}_+(u) \operatorname{tr}[\mathcal{M}(u) \cdot \delta \widehat{S}_{\bullet} \cdot \widehat{S}_{\bullet}^{-1}] du, \\ \delta \eta_l &\approx \frac{1}{2\pi i l!} \sum_{\bullet=+,-} \int_{C_{\bullet}} \dot{\omega}_{(l+1)0}(u) \dot{\eta}_{10}(u) \operatorname{tr}[\mathcal{M}(u) \cdot \delta \widehat{S}_{\bullet} \cdot \widehat{S}_{\bullet}^{-1}] du, \quad l = 1, 3, \\ \delta \eta_l^* &\approx -\frac{1}{2\pi i l!} \sum_{\bullet=+,-} \int_{C_{\bullet}} \dot{\omega}_{(l+1)0}(u) \dot{\eta}^*(u) \operatorname{tr}[\mathcal{M}(u) \cdot \delta \widehat{S}_{\bullet} \cdot \widehat{S}_{\bullet}^{-1}] du, \quad l = 0, 2, 4. \end{aligned}$$

**5.6. Формулы Хейхала.** Прямое вычисление вариаций по формулам (33), (34) является весьма трудоемким, поскольку квадратурные формулы требуют вычисления рядов в большом количестве точек. Однако существует обходной путь, позволяющий прийти к результату, суммируя ряды лишь в трех точках. Мы основываемся на работе Хейхала [19], в которой фигурирующие в наших вариационных формулах отображения

$$\Xi(u)(du)^2 \xrightarrow{[\pm]} \int_{C_{\pm}} \Xi(u) \mathcal{M}(u) du \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \quad (35)$$

из пространства (мероморфных) квадратичных дифференциалов на кривой вычислены в явном виде для (относительных) квадратичных гэта-рядов Пуанкаре.

Рассмотрим три голоморфных квадратичных дифференциала на  $M := \mathcal{D}/\mathfrak{S}$ :

$$\Omega_0(u)(du)^2 := \sum_{S \in \mathfrak{S}} \frac{(dS(u))^2}{((Su)^2 - \alpha_+^2)((Su)^2 - \alpha_-^2)}, \quad (36)$$

$$\Omega_{\pm}(u)(du)^2 := \sum_{S \in \langle S_{\pm} \rangle \setminus \mathfrak{S}} \frac{(dS(u))^2}{((Su)^2 - \alpha_{\pm}^2)^2}. \quad (37)$$

Абсолютная сходимость этих рядов на компактах в области разрывности группы следует из сходимости рядов (14), (17). Например, квадратичные ряды Пуанкаре (37) составлены из квадратов членов линейных рядов (17). Отображения (35) для этих рядов можно вычислить почленным интегрированием.

ЛЕММА 4 (формулы Хейхала [18], [19]). *Справедливы следующие формулы:*

$$\int_{C_{\pm}} \Omega_0(u) \mathcal{M}(u) du = \frac{i\pi}{\alpha_{\pm}(\alpha_{\pm}^2 - \alpha_{\mp}^2)(1 - \lambda_{\pm})} \left( \left\| \begin{array}{cc} -\alpha_{\pm} & \alpha_{\pm}^2 \\ -1 & \alpha_{\pm} \end{array} \right\| + \lambda_{\pm} \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{\pm} & \alpha_{\pm}^2 \\ -1 & -\alpha_{\pm} \end{array} \right\| \right),$$

$$\int_{C_{\pm}} \Omega_{\pm}(u) \mathcal{M}(u) du = \frac{i\pi}{2\alpha_{\pm}^2} \left\| \begin{array}{cc} 0 & \alpha_{\pm} \\ \alpha_{\pm}^{-1} & 0 \end{array} \right\|, \quad \int_{C_{\mp}} \Omega_{\pm}(u) \mathcal{M}(u) du = 0,$$

$\lambda_{\pm} := \dot{S}_{\pm}(\alpha_{\pm})$  – коэффициент растяжения образующей  $S_{\pm}$  группы Шоттки.

Одним из следствий формул Хейхала является

ЛЕММА 5. *Квадратичные ряды Пуанкаре (36), (37) образуют базис в пространстве голоморфных квадратичных дифференциалов на кривой  $M$  в модели Шоттки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство голоморфных квадратичных дифференциалов на кривой рода  $g$  имеет размерность  $3g - 3$ . Покажем, что три дифференциала (36), (37) на кривой рода  $g = 2$  линейно независимы. Рассмотрим три функционала над квадратичными дифференциалами: числа в позициях (1, 1) и (1, 2) для  $[+]$  отображения Хейхала (35) и число в позиции (1, 2) для отображения  $[-]$ . Значения этих функционалов на дифференциалах  $\Omega_0(du)^2$ ,  $\Omega_+(du)^2$ ,  $\Omega_-(du)^2$  образуют верхнетреугольную матрицу с невырожденной диагональю:  $-i\pi/(\alpha_+^2 - \alpha_-^2)$ ,  $i\pi/(2\alpha_+)$ ,  $i\pi/(2\alpha_-)$ . Следовательно, дифференциалы линейно независимы и образуют базис в пространстве квадратичных дифференциалов на кривой.

Как вычислить отображение Хейхала для мероморфного квадратичного дифференциала такого, как  $d\eta^* d\zeta_+$  или  $d\omega_{(l+1)_0} d\eta_{10}$ ? Необходимо вычесть из него квадратичный ряд Пуанкаре с подходящими особенностями. Для таких рядов имеются аналоги формул Хейхала [18]. Оставшийся голоморфный квадратичный дифференциал нужно разложить по базису (36), (37), для которого отображение Хейхала посчитано явно.

## § 6. Численные эксперименты

Система из четырех уравнений (28) и (11), в которые подставлены величины (30), имеет при фиксированной степени  $n$  не более одного решения на классической части деформационного пространства  $\mathcal{G}$ . Автором была составлена компьютерная программа для поиска этого решения методом Ньютона. Начальное приближение для невысокой степени  $n$  было найдено методом проб и ошибок. Решение нашей системы из четырех уравнений с машинной точностью для данного  $n$  можно использовать как начальное приближение в методе Ньютона для систем со степенями  $n + 1, \dots, n + 5$  и даже  $n + 50$  при больших  $n$ . Уравнения решались с точнос-

тью  $10^{-13}$  до степени  $n = 1001$ , при этом все решения  $(c, r^2)$  попадают в классическую часть деформационного пространства. Тенденции к замедлению скорости сходимости рядов Пуанкаре с ростом  $n$  не наблюдается:  $\operatorname{Re} c, \operatorname{Im} c \gg |r|$  (см. таблицу 1).

ТАБЛИЦА 1

$n$	$c$	$r^2$	$L/n^2$
27	$0.058294188 + i0.072379887$	$3.92447195D - 005 + i1.12862487D - 005$	0.498393
107	$0.014619780 + i0.018280095$	$2.48122506D - 006 + i7.45913680D - 007$	0.500954
157	$0.009961570 + i0.012458796$	$1.15218232D - 006 + i3.46919646D - 007$	0.501047
199	$0.007858553 + i0.009829401$	$7.17095951D - 007 + i2.16027548D - 007$	0.501078
251	$0.006230206 + i0.007793080$	$4.50726679D - 007 + i1.35825821D - 007$	0.501097
301	$0.005195168 + i0.006498569$	$3.13412277D - 007 + i9.44617098D - 008$	0.501106
401	$0.003899525 + i0.004877994$	$1.76582873D - 007 + i5.32302909D - 008$	0.501116
501	$0.003121143 + i0.003904348$	$1.13124444D - 007 + i3.41035348D - 008$	0.501120
576	$0.002714732 + i0.003395971$	$8.55824263D - 008 + i2.58013073D - 008$	0.501122
651	$0.002401967 + i0.003004732$	$6.69986418D - 008 + i2.01991310D - 008$	0.501124
751	$0.002082125 + i0.002604635$	$5.03438797D - 008 + i1.51782584D - 008$	0.501125
851	$0.001837454 + i0.002298568$	$3.92072592D - 008 + i1.18208166D - 008$	0.501126
951	$0.001644239 + i0.002056868$	$3.13952470D - 008 + i9.46561689D - 009$	0.501126
1001	$0.001562108 + i0.001954128$	$2.83371730D - 008 + i8.54364345D - 009$	0.501126

Вычислялась также длина  $L$  вещественной области устойчивости. При  $p = 1$ , когда решение выражается через многочлен Чебышёва,  $L = 2n^2$ . Из таблицы 1 видно, что при  $p = 3$  величина  $L/n^2$  стабилизируется, что отмечают и другие авторы. График приведенного наилучшего многочлена устойчивости степени  $n = 31$  при  $p = 3$  приведен на рис. 4.

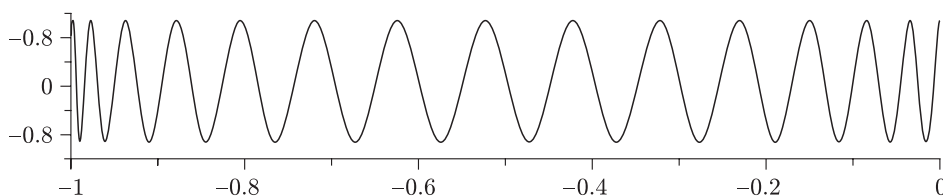


Рис. 4. Приведенный наилучший многочлен устойчивости для  $p = 3$  и  $n = 31$

## Список литературы

1. Штеттер Х. Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. М: Мир, 1978.
2. Хайрер Е., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.
3. Franklin J. N. Numerical stability in digital and analog computation for diffusion problems // J. Math. Phys. 1959. V. 37. №4. P. 305–315.
4. Lebedev V. I. Zolotarev polynomials and extremum problems // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1994. V. 9. №3. P. 231–263.
5. Riha W. Optimal stability polynomials // Computing. 1972. V. 9. P. 37–43.
6. Lebedev V. I. A new method for determining the roots of polynomials of least deviation on a segment with weight and subject to additional conditions. I, II // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. V. 8. №3. P. 195–222; 1993. V. 8. №5. P. 397–426.
7. Abdulle A. On roots and error constants of optimal stability polynomials // BIT. 2000. V. 40. №1. P. 177–182.
8. Verwer J. W. Explicit Runge–Kutta methods for parabolic partial differential equations // Appl. Numer. Math. 1996. V. 22. №1–3. P. 359–379.
9. Богатырёв А. Б. Эффективный подход к задачам о наименьшем уклонении // Матем. сб. 2002. Т. 193. №12. С. 21–40.
10. Богатырёв А. Б. Представление пространств модулей кривых и вычисление экстремальных многочленов // Матем. сб. 2003. Т. 194. №4. С. 3–28.
11. Богатырёв А. Б. Комбинаторное описание пространства модулей кривых и экстремальных многочленов // Матем. сб. 2003. Т. 194. №10. С. 27–48.
12. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства многочленов. М.–Л.: ОНТИ, 1937.
13. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.
14. Крушкаль С. Л., Апанасов Б. Н., Гусевский Н. А. Клейновы группы и униформизация в примерах и задачах. Новосибирск: СО Наука, 1981.
15. Курант Р. Геометрическая теория функций. М.: Наука, 1968.
16. Schottky F. Über eine specielle Function welche bei einer bestimmten linearen Transformation Ihres Argumenten unverändert bleibt // J. Reine Angew. Math. 1887. V. 101. P. 227–272.
17. Burnside W. On a class of automorphic functions // Proc. London Math. Soc. (3). 1892. V. 23. P. 49–88.
18. Богатырёв А. Б. Об эффективном вычислении многочленов Чебышёва для многих отрезков // Матем. сб. 1999. Т. 190. №11. С. 15–50.
19. Hejhal D. A. Sur les paramètres accessoires pour l'uniformization de Schottky // C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1974. V. 279. P. 713–716.