

УДК 517.9

А. Б. Богатырев

Интегральные уравнения ПС₃ и проективные структуры на римановых поверхностях

Построена комплексно-геометрическая теория интегрального уравнения Пуанкаре–Стеклова. Даны наглядные представления решений этого уравнения и локализован его спектр.

Библиография: 15 названий.

§ 1. Истоки уравнения ПС и обзор результатов

Всякая гладкая невырожденная замена переменных $R(t)$ на отрезке $[-1, 1]$ может служить функциональным параметром сингулярного интегрального уравнения (Пуанкаре–Стеклова) вида:

$$\lambda \text{ V.p. } \int_I \frac{u(t)}{t-x} dt - \text{V.p. } \int_I \frac{u(t) dR(t)}{R(t) - R(x)} = \text{const}, \quad x \in I := (-1, 1), \quad (1)$$

где λ – спектральный параметр, $u(t)$ – неизвестная функция, const – неизвестная константа. Задача состоит в нахождении собственных пар $(\lambda, u(t))$ уравнения (1) с нетривиальной функцией $u(t)$ из заранее оговоренного функционального класса.

Предметом этой работы являются уравнения Пуанкаре–Стеклова с параметром $R_3(t)$ – рациональной функцией третьей степени, которые в дальнейшем называем уравнениями Пуанкаре–Стеклова степени 3, или ПС₃. Основной результат статьи – это установление взаимно однозначного соответствия между собственными парами ПС₃ и линейно-полиномиальными функциями (= проективными структурами [1]) на римановых поверхностях, эффективно вычисляемых по R_3 . Полученный результат позволяет дать геометрически наглядные представления для собственных пар уравнения (1). В качестве побочного продукта мы получаем локализацию спектра уравнений ПС₃, вытекающую из ограничений на монодромию проективных структур.

При численном решении краевых задач для уравнения Лапласа применяют метод разделения области, для чего область решения Ω разбивают на подобласти меньшего размера, искусственно проводя внутренние границы. На искусственных границах ставят произвольные данные Дирихле и решают серию возникающих граничных задач в подобластях. Решения этих задач, конечно, не склеиваются в решение первоначальной задачи, ибо нормальные производные решений на внутренних границах терпят разрыв. На втором шаге процесса ставят новые граничные условия, зависящие от рассогласования нормальных производных решений на предыдущем шаге. Далее процедуру повторяют, пока скачок нормальной производной решений на внутренних границах не станет малым. Доказательство сходимости и оптимизация подобного итерационного процесса в частном случае требуют информацию о спектре приведенной ниже задачи.

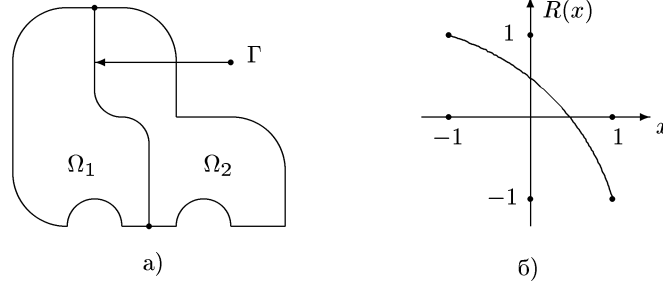


Рис. 1. а) Разбиение области решения; б) замена переменной $R: I \rightarrow I$

Пусть гладкая дуга Γ разбивает область Ω на плоскости на две подобласти Ω_1 и Ω_2 (см. рис. 1а)). Поставим задачу на собственные значения:

$$\begin{aligned}
 \Delta U_1 &= 0 \text{ в } \Omega_1; & U_1 &= 0 \text{ на } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma; \\
 \Delta U_2 &= 0 \text{ в } \Omega_2; & U_2 &= 0 \text{ на } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma; \\
 U_1 &= U_2 \text{ на } \Gamma; \\
 -\lambda \frac{\partial U_1}{\partial n} &= \frac{\partial U_2}{\partial n} \text{ на } \Gamma,
 \end{aligned} \tag{2}$$

здесь Δ – оператор Лапласа, λ – спектральный параметр, n – нормаль к Γ . Эта же спектральная задача возникает при исследовании устойчивости подвижной границы раздела двух жидкостей (вода – нефть) при вытеснении одной из них в пористой среде (песок). Схожие задачи со спектральным параметром в граничных условиях для одной области были исследованы А. Пуанкаре и В. А. Стекловым около ста лет назад.

Следы собственных функций задачи (2) на внутренней границе Γ удовлетворяют некоторому уравнению Пуанкаре–Стеклова (1). Действительно, если нормальные производные гармонических функций U_1, U_2 различаются на Γ в $-\lambda$ раз, то касательные к Γ производные сопряженных гармонических функций V_1, V_2 различаются также в $-\lambda$ раз. Интегрируя вдоль Γ , получаем

$$\lambda V_1(y) + V_2(y) = \text{const}, \quad y \in \Gamma. \tag{3}$$

Если область Ω_k ($k = 1, 2$) – полуплоскость, то граничное значение V_k является преобразованием Гильберта от граничного значения U_k . В случае произвольных (односвязных) областей Ω_1, Ω_2 рассмотрим их конформные отображения ω_1, ω_2 на верхнюю полуплоскость, нормированные условиями $\omega_k(\Gamma) = I$, $k = 1, 2$. Уравнение (3) переписется тогда в виде

$$-\frac{\lambda}{\pi} \text{V.p.} \int_I \frac{U_1(\omega_1^{-1}t)}{t - \omega_1 y} dt - \frac{1}{\pi} \text{V.p.} \int_I \frac{U_2(\omega_2^{-1}t')}{t' - \omega_2 y} dt' = \text{const}, \quad y \in \Gamma.$$

Вводя в последнем соотношении новые обозначения: $x := \omega_1 y \in I$; $R := \omega_2 \circ \omega_1^{-1}$: $I \rightarrow \Gamma \rightarrow I$; $u(t) := U_1(\omega_1^{-1}t)$ и делая во втором интеграле замену переменной $t' = R(t)$, мы приходим к уравнению Пуанкаре–Стеклова (1). Обращаем внимание, что функция $R(x)$ будет в данном случае убывающей.

Краевая задача (2), поставленная в пространстве Соболева W_2^1 , изучалась в работах [2]–[4]. В работе [2] было показано, что спектр задачи сосредоточен на

положительной полуоси; приведены оценки его верхней и нижней границ и методом разделения переменных решена модельная задача. В работе [4] изучен случай гладкой дуги Γ , касательная к которой в каждой из конечных точек Γ является биссектрисой угла между правой и левой касательными к границе $\partial\Omega$. При указанных предположениях спектр задачи (2) дискретный; он имеет единственную точку накопления $\lambda = 1$; величина $\sum_{\lambda \in S_p} |\lambda - 1|^2$ конечна и допускает конструктивную оценку, а следы собственных функций задачи на Γ образуют ортогональный базис в пространстве Соболева $\widetilde{W}_2^{1/2}(\Gamma)$. Напротив, если кривая Γ негладкая либо в одном из ее концов касательная к Γ не является биссектрисой, то появляется явно вычисляемый отрезок непрерывного спектра [3].

Попытки решить интегральное уравнение ПС в замкнутой форме [5] для конкретных аналитических функций $R(t)$ привели к открытию тесной связи уравнений с рациональным параметром R_n и классической задачей, поставленной Риманом [6], [7]: *найти совокупность из n функций, аналитичных на римановой сфере с выколотыми точками a_1, \dots, a_p , которые при обходе каждой из выколотых точек подвергаются действию заданной линейной подстановки с постоянными коэффициентами и имеют вблизи точек a_k рост не выше степенного.*

Смысл замены уравнения ПС на задачу монодромии Римана состоит в том, что появляется принципиальная возможность свести спектральную задачу для интегрального уравнения к *конечной системе трансцендентных уравнений*. Упомянутые уравнения связывают так называемые аксессуарные коэффициенты и положения ложных полюсов фуксова ОДУ n -го порядка с его монодромией [6]. Этот подход позволяет находить наглядные, в том числе явные формульные [5], [8], представления для собственных пар интегрального уравнения.

План предлагаемой работы таков: в следующем параграфе мы подробно остановимся на связи между уравнением ПС с рациональным параметром R и задачей Римана. В §3 мы находим монодромии, отвечающие различным рациональным функциям R_3 третьей степени. Эти монодромии всегда оказываются локально конечными, так что решение W задачи Римана, поднятое на специально подобранную в §4 компактную риманову поверхность $\mathcal{M}(R_3)$, аналитично. В §5 мы отмечаем, что матрицы монодромии нашей задачи (псевдо)ортогональны, и потому решение W лежит на (возможно, вырожденной) квадрике в \mathbb{C}^3 . невырожденная проективная квадрика изоморфна $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$, тем самым решение задачи монодромии определяет пару многозначных мероморфных функций p^+ и p^- на поверхности $\mathcal{M}(R_3)$. Эти функции оказываются линейно-полиморфными, т.е. подвергаются действию дробно-линейных подстановок при обходе их аргументом циклов на поверхности \mathcal{M} . Линейно-полиморфные функции имеют восходящее к работам Клейна геометрическое представление в виде так называемых мембран, которые и определяют собственные пары интегрального уравнения ПС₃. В последнем параграфе мы получаем границы спектра уравнения ПС₃, используя неунитарность монодромии проективной структуры.

§2. Уравнения ПС _{n} и задача монодромии Римана

Будем искать *гёльдеровы* решения u уравнения ПС _{n} , в котором $R = R_n$ — рациональная функция степени n , определяющая невырожденную¹ замену переменных

¹Условие невырожденности (4) означает выполнение сформулированных выше условий

на отрезке $[-1, 1]$, т.е.

$$\frac{d}{dt}R_n(t) \neq 0, \quad t \in [-1, 1]. \quad (4)$$

Разложим ядро второго интеграла в уравнении (1) на элементарные дроби, фиксировав $x \in I$:

$$\frac{\dot{R}_n(t)}{R_n(t) - R_n(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{t - z_k(x)} - \frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)}, \quad (5)$$

где $Q(t)$ – знаменатель представления $R_n(t)$ в виде несократимого отношения полиномов; $z_1(x) = x, z_2(x), \dots, z_n(x)$ – все (включая кратные и равные ∞) решения уравнения $R_n(z_k) = R_n(x)$. Обилие ядер Коши в этом разложении позволяет переписать интегральное уравнение (1) в терминах интеграла типа Коши

$$\Phi(x) := \int_I \frac{u(t)}{t - x} dt + \text{const}', \quad x \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{I}, \quad (6)$$

решение $u(t)$ из которого можно потом восстановить по формулам Сохоцкого–Племеля:

$$u(t) = (2\pi i)^{-1} [\Phi(t + i0) - \Phi(t - i0)], \quad t \in I. \quad (7)$$

Константа const' , которую мы принимаем равной

$$\text{const}' := \frac{1}{\lambda - n} \left[\int_I \frac{u(t)\dot{Q}(t)}{Q(t)} dt - \text{const} \right], \quad (8)$$

добавлена для того, чтобы компенсировать постоянные, возникающие при подстановке (6) в уравнение (1). Так доказывается

ЛЕММА 1 [8]. *При $\lambda \neq 1, n$ преобразования (6), (7) осуществляют взаимно однозначное соответствие между собственными парами $(\lambda, u(t))$ уравнения ПС_n и ненулевыми голоморфными в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{I}$ решениями $\Phi(x)$ функционального уравнения*

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \delta \sum_{k=2}^n \Phi(z_k(x)), \quad x \in I, \quad (9)$$

$$\delta = \frac{2}{\lambda - 1}, \quad (10)$$

границные значения $\Phi^\pm(x) := \Phi(x \pm i0)$ которого удовлетворяют условию Гёльдера на \overline{I} .

2.1. Мотивация введения монодромии. Функциональное уравнение (9) позволяет определить максимальную область голоморфности функции $\Phi(x)$, изначально заданной лишь на дополнении к разрезу I . Действительно, условие невырожденности (4) означает однолиственность $R_n(x)$ в некоторой окрестности $\mathcal{U} \supset I$. Если $x = z_1(x)$ – точка этой окрестности, то все оставшиеся точки $z_2(x), \dots, z_n(x)$ лежат вне \mathcal{U} , т.е. в области голоморфности Φ . Следовательно, правая часть (9) – голоморфная функция x в \mathcal{U} (хотя отдельные слагаемые в этой сумме могут иметь точки ветвления в \mathcal{U} , сумма в целом голоморфна). Теперь равенство $\Phi^+(x) =$

на Γ , при которых спектр задачи (2) дискретный.

$-\Phi^-(x) + \delta \sum_{k=2}^n \Phi(z_k(x))$ определяет аналитическое продолжение Φ^+ через разрез вниз. В частности, аналитическое продолжение ростка функции Φ^\pm через разрез вдоль пути, переходящего с одного берега разреза на другой, приводит к Φ^\mp . Другими словами, в малой окрестности I функция Φ голоморфна на римановой поверхности функции $\sqrt{1-x^2}$.

Для исследования глобальной области голоморфности функции $\Phi(x)$ полезно рассмотреть (определенный лишь локально) вектор $W(x) := (\Phi(z_1(x)), \Phi(z_2(x)), \dots, \Phi(z_n(x)))^t$. Его аналитичность может нарушаться по двум причинам: 1) в точках $x \in R_n^{-1}(\pm 1)$ аргумент $z_k(x)$ одной из компонент вектора W попадает в ± 1 – точки ветвления функции Φ и 2) в точках ветвления алгебраических функций $z_k(x)$ соответствующая компонента вектора также претерпевает ветвление. При обходе точек первого типа одна из компонент вектора заменяется в силу уравнения (9) на линейную комбинацию остальных компонент, скажем, при $x = \pm 1$ W_1 заменяется на $-W_1 + \delta \sum_{j=2}^n W_j$. Остальные же компоненты – как максимум – меняются местами. Обход точек второго типа приводит к перестановке компонент вектора. Тем самым, вектор W , построенный по решению интегрального уравнения ПС_{*n*}, является решением некоторой задачи монодромии Римана.

2.2. Монодромия уравнения ПС_{*n*}. Наша ближайшая цель – определить монодромию \mathbf{T} , соответствующую уравнению Пуанкаре–Стеклова *n*-й степени. Последняя получается в результате модификации монодромии \mathbf{T}_* *n*-листного накрытия $R_n(x) : \mathbb{C}\mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_1$.

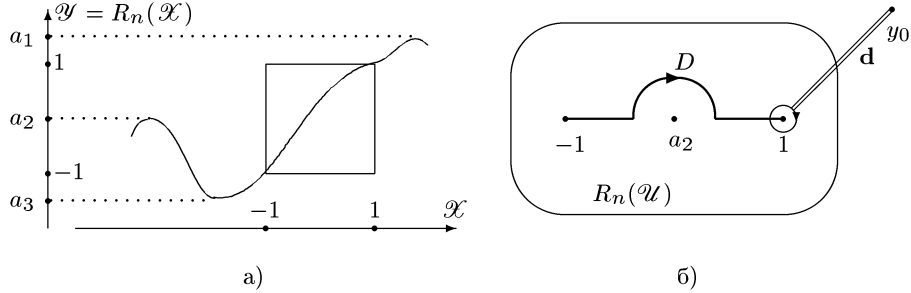


Рис. 2. а) Точки ветвления накрытия R_n ; б) выбор деформации разреза I

Пусть a_1, \dots, a_p – критические значения R_n , среди которых могут оказаться и требующие особого внимания точки ± 1 (см. рис. 2а)), ибо в них проецируются точки ветвления функции Φ . Обе монодромии зададим на проколотой сфере $\mathcal{Y} := \mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \{a_1, \dots, a_p, -1, 1\}$. Накрытие базы \mathcal{Y} пространством $\mathcal{X} := R_n^{-1}(\mathcal{Y})$ не разветвлено, поэтому можно обычным образом [9] определить представление \mathbf{T}_* из $\pi_1(\mathcal{Y})$ в группу матриц перестановок *n*-го порядка (монодромия накрытия). Именно, пусть $y_0 \in \mathcal{Y}$ – базовая точка фундаментальной группы, x_1, x_2, \dots, x_n – накрывающие ее точки пространства \mathcal{X} , $\mathbf{r} \subset \mathcal{Y}$ – петля с началом в y_0 , тогда существует единственная матрица перестановок \mathbf{T}_* такая, что

$$\mathbf{T}_*([\mathbf{r}]) \cdot (x_1, \dots, x_n)^t := (x_1 \cdot \mathbf{r}, x_2 \cdot \mathbf{r}, \dots, x_n \cdot \mathbf{r})^t. \quad (11)$$

Здесь путь \mathbf{r} из базы действует на точку x накрывающего пространства, если x проецируется в начальную точку \mathbf{r} , при этом $x \cdot \mathbf{r}$ обозначает конечную точку поднятия \mathbf{r} от x на накрывающую. Это действие ассоциативно, т.е. $(x \cdot \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{r}_2 = x \cdot (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)$. Групповое свойство отображения \mathbf{T}_* гарантирует

ЛЕММА 2 [8]. Пусть s – путь, \mathbf{r} – петля в \mathcal{Y} , начинающиеся в y_0 . Тогда

$$\mathbf{T}_*([\mathbf{r}]) (x_1 \cdot \mathbf{s}, x_2 \cdot \mathbf{s}, \dots, x_n \cdot \mathbf{s})^t = (x_1 \cdot \mathbf{r}\mathbf{s}, x_2 \cdot \mathbf{r}\mathbf{s}, \dots, x_n \cdot \mathbf{r}\mathbf{s})^t. \quad (12)$$

Монодромия $\mathbf{T}: \pi_1(\mathcal{Y}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ параметрически зависит от спектрального параметра λ . Для ее определения проведем из прокола -1 в прокол 1 простую дугу D , целиком содержащуюся в окрестности $R_n(\mathcal{U})$ интервала I и минуящую проколы пространства \mathcal{Y} . Примем в качестве D сам интервал I , если последний не содержит критических значений R_n , либо его малую деформацию в противном случае (см. рис. 2б)). Фиксируем лассо \mathbf{d} , огибающее одну из точек ± 1 и единожды пересекающее D для определенности справа налево. Теперь одну из точек множества $\{x_1, \dots, x_n\} := R_n^{-1}(y_0)$ выделяет

ЛЕММА 3 [8]. Полный прообраз $R_n^{-1}(y_0)$ содержит единственную точку x_1 такую, что поднятие петли \mathbf{d} от нее на \mathcal{X} есть лассо, охватывающее одну из точек ± 1 .

Фиксация разреза D и единожды пересекающей его петли \mathbf{d} приводит к разбиению фундаментальной группы на свободные порождающие:

$$\pi_1(\mathcal{Y}, y_0) = \langle \pi_1(\mathcal{Y} \setminus D, y_0), [\mathbf{d}] | \emptyset \rangle, \quad (13)$$

сужение представления \mathbf{T} на которые мы и зададим:

$$\mathbf{T}([\mathbf{d}]) := \mathbf{D}\mathbf{T}_*([\mathbf{d}]) = \mathbf{T}_*([\mathbf{d}])\mathbf{D}; \quad \mathbf{T}([\mathbf{r}]) := \mathbf{T}_*([\mathbf{r}]), \quad [\mathbf{r}] \in \pi_1(\mathcal{Y} \setminus D, y_0), \quad (14)$$

где

$$\mathbf{D} := \left\| \begin{array}{cccccc} -1 & \vdots & \delta & \delta & \dots & \delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \vdots & & 1 & & \\ & \vdots & & & 1 & \\ & \vdots & & & & \ddots \\ & \vdots & & & & & 1 \end{array} \right\| \in GL_n(\mathbb{C}); \quad (15)$$

в матрице отмечены лишь ненулевые элементы. Матрица \mathbf{D} коммутирует с любой матрицей перестановок, сохраняющей первый элемент, в частности, с $\mathbf{T}_*([\mathbf{d}])$, что следует из леммы 3. Квадрат \mathbf{D} – единичная матрица.

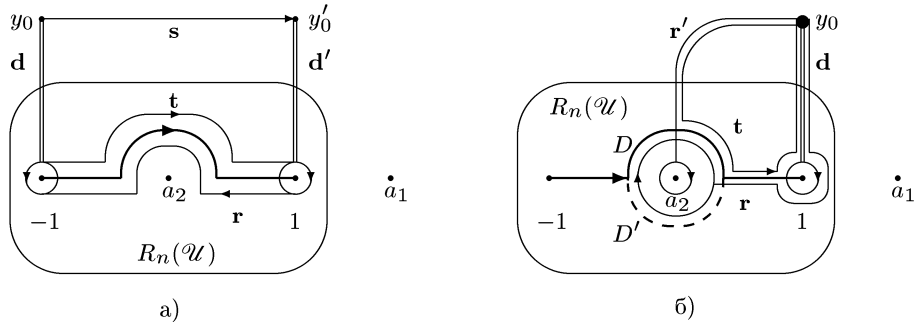


Рис. 3. а) Разложение лассо $\mathbf{s}\mathbf{d}'\mathbf{s}^{-1}$ по образующим; б) лассо \mathbf{r}' и его разложение по образующим

2.3. Неоднозначность в определении монодромии. Ниже будет показано, что произвол в выборе разреза D , лассо \mathbf{d} , базовой точки y_0 и порядка нумерации накрывающих ее точек x_2, x_3, \dots, x_n приводит – самое большее – к преобразованию подобия представления \mathbf{T} с помощью матрицы перестановок.

Выберем при фиксированном разрезе D два подходящих набора из лассо, базовой точки и точек, накрывающих базовую: $\{\mathbf{d}; y_0; x_1, \dots, x_n\}$ и $\{\mathbf{d}'; y'_0; x'_1, \dots, x'_n\}$. Точки x_1 и x'_1 считаем выбранными в соответствии с леммой 3. Две пары монодромий \mathbf{T}_* , \mathbf{T}'_* и \mathbf{T} , \mathbf{T}' , определенных по этим наборам, связывает

ЛЕММА 4. Пусть \mathbf{s} – не пересекающий D путь, ведущий из y_0 в y'_0 . Определим матрицу перестановок \mathbf{K} соотношением

$$\mathbf{K} \cdot (x_1 \cdot \mathbf{s}, x_2 \cdot \mathbf{s}, \dots, x_n \cdot \mathbf{s})^t := (x'_1, \dots, x'_n)^t.$$

Тогда монодромии, определенные по различным наборам, подобны:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'_*([\mathbf{s}^{-1}\mathbf{r}\mathbf{s}]) &= \mathbf{K}\mathbf{T}_*([\mathbf{r}])\mathbf{K}^{-1}, \\ \mathbf{T}'([\mathbf{s}^{-1}\mathbf{r}\mathbf{s}]) &= \mathbf{K}\mathbf{T}([\mathbf{r}])\mathbf{K}^{-1}, \end{aligned} \quad [\mathbf{r}] \in \pi_1(\mathcal{Y}, y_0). \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для монодромии накрытия имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'_*([\mathbf{s}^{-1}\mathbf{r}\mathbf{s}]) (x'_1, \dots, x'_n)^t &:= (x'_1 \cdot \mathbf{s}^{-1}\mathbf{r}\mathbf{s}, x'_2 \cdot \mathbf{s}^{-1}\mathbf{r}\mathbf{s}, \dots, x'_n \cdot \mathbf{s}^{-1}\mathbf{r}\mathbf{s})^t \\ &= \mathbf{K}(x_1 \cdot \mathbf{r}\mathbf{s}, x_2 \cdot \mathbf{r}\mathbf{s}, \dots, x_n \cdot \mathbf{r}\mathbf{s})^t \\ &= \mathbf{K}\mathbf{T}_*([\mathbf{r}])\mathbf{K}^{-1}(x'_1, \dots, x'_n)^t. \end{aligned}$$

Проверим на свободных порождающих (13) второе из равенств (16), связывающее монодромии \mathbf{T} и \mathbf{T}' . Для подгруппы $\pi_1(\mathcal{Y} \setminus D, y_0)$ равенство уже доказано и остается вычислить $\mathbf{T}'([\mathbf{s}^{-1}\mathbf{d}\mathbf{s}])$. Разложим петлю $\mathbf{s}\mathbf{d}'\mathbf{s}^{-1}$ по образующим (13):

$$\mathbf{s}\mathbf{d}'\mathbf{s}^{-1} = \mathbf{r}\mathbf{d}\mathbf{t}, \quad [\mathbf{r}], [\mathbf{t}] \in \pi_1(\mathcal{Y} \setminus D, y_0).$$

Конструкция петель \mathbf{r} , \mathbf{t} ясна из рис. 3а). Отметим следующие из построения петель равенства

$$x_1 \cdot \mathbf{r}^{-1}\mathbf{s} = x'_1, \quad x_1 \cdot \mathbf{t}\mathbf{s} = x'_1. \quad (17)$$

Справедлива выкладка

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'([\mathbf{s}^{-1}\mathbf{d}\mathbf{s}]) &= \mathbf{T}'([\mathbf{s}^{-1}\mathbf{r}^{-1}\mathbf{s}] \cdot [\mathbf{d}'] \cdot [\mathbf{s}^{-1}\mathbf{t}^{-1}\mathbf{s}]) \\ &:= \mathbf{K}\mathbf{T}_*([\mathbf{r}^{-1}])\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{K}\mathbf{T}_*([\mathbf{r}\mathbf{d}\mathbf{t}])\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{K}\mathbf{T}_*([\mathbf{t}^{-1}])\mathbf{K}^{-1} \\ &\stackrel{(*)}{=} \mathbf{K}\mathbf{D}\mathbf{T}_*([\mathbf{d}])\mathbf{K}^{-1} =: \mathbf{K}\mathbf{T}([\mathbf{d}])\mathbf{K}^{-1}. \end{aligned}$$

В равенстве, отмеченном (*), мы изменили порядок сомножителей $\mathbf{T}_*([\mathbf{r}^{-1}])\mathbf{K}^{-1}$ и \mathbf{D} , поскольку соответствующая перестановка сохраняет первый элемент:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_*([\mathbf{r}^{-1}])\mathbf{K}^{-1} \cdot (x'_1, \dots, x'_n)^t &= \mathbf{T}_*([\mathbf{r}^{-1}]) \cdot (x_1 \cdot \mathbf{s}, \dots, x_n \cdot \mathbf{s})^t \\ &= (x_1 \cdot \mathbf{r}^{-1}\mathbf{s}, \dots, x_n \cdot \mathbf{r}^{-1}\mathbf{s})^t \stackrel{(17)}{=} (x'_1, *, \dots, *)^t. \end{aligned}$$

Исследуем теперь влияние вариаций разреза D на монодромию \mathbf{T} . Фиксируем для двух разрезов D и D' общие: базовую точку y_0 , лассо \mathbf{d} , точки $x_1, \dots, x_n \in R_n^{-1}(y_0)$. Этим определены монодромии \mathbf{T} и \mathbf{T}' .

ЛЕММА 5. *Монодромии \mathbf{T} и \mathbf{T}' совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим элементарную перестройку разреза $D \rightarrow D'$, состоящую в замене обхода выколотой точки $a_k \in I$ слева на обход ее справа (см. рис. 3б)). Произвольная деформация разреза есть композиция таких элементарных перестроек.

Рассмотрим лассо \mathbf{r}' , охватывающее точку a_k и не пересекающее разрез D' . Справедливо разбиение фундаментальной группы на (свободные) порождающие:

$$\pi_1(\mathcal{Y}) = \langle \pi_1(\mathcal{Y} \setminus D) \cap \pi_1(\mathcal{Y} \setminus D'), [\mathbf{d}], [\mathbf{r}'] | \emptyset \rangle.$$

Для первых двух порождающих равенство $\mathbf{T} = \mathbf{T}'$ следует прямо из определения. Для проверки равенства $\mathbf{T}([\mathbf{r}']) = \mathbf{T}'([\mathbf{r}'])$ разложим $[\mathbf{r}']$ по образующим (13):

$$\mathbf{r}' = \mathbf{t}\mathbf{d}^{-1}\mathbf{r}\mathbf{d}\mathbf{t}^{-1}, \quad [\mathbf{r}], [\mathbf{t}] \in \pi_1(\mathcal{Y} \setminus D).$$

Конструкции петли \mathbf{t} и лассо \mathbf{r} ясны из рис. 3б), в частности, отметим равенство

$$x_1 \cdot \mathbf{r} = x_1. \quad (18)$$

Справедлива выкладка:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}([\mathbf{r}']) &:= \mathbf{T}_*([\mathbf{t}\mathbf{d}^{-1}])\mathbf{D}\mathbf{T}_*([\mathbf{r}])\mathbf{D}\mathbf{T}_*([\mathbf{d}\mathbf{t}^{-1}]) \\ &\stackrel{(*)}{=} \mathbf{T}_*([\mathbf{t}\mathbf{d}^{-1}\mathbf{r}\mathbf{d}\mathbf{t}^{-1}]) = \mathbf{T}_*([\mathbf{r}']) =: \mathbf{T}'([\mathbf{r}']). \end{aligned}$$

При переходе $(*)$ мы воспользовались перестановочностью \mathbf{D} с $\mathbf{T}_*([\mathbf{r}])$, вытекающей из равенства (18), и тем, что $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{-1}$.

2.4. Связь интегрального уравнения с задачей Римана. Для определенной нами монодромии \mathbf{T} справедлива

ТЕОРЕМА 1 [8]. *Собственные пары $(\lambda, u(t))$ уравнения ПС_n (1) при $\lambda \notin \{1, n\}$ взаимно однозначно соответствуют нетривиальным ограниченным вблизи проколов $\pm 1, a_1, \dots, a_p$ аналитичным на \mathcal{Y} решениям W задачи Римана с монодромией \mathbf{T} , определенной в (14), (15) при δ из (10).*

ПЛАН ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. 1) Определим по собственной паре $(\lambda, u(t))$ уравнения ПС_n решение W задачи монодромии Римана. Последнее неоднозначно на проколотой сфере \mathcal{Y} и корректно задано лишь на универсальной накрывающей $\tilde{\mathcal{Y}}$. Пусть точка $\tilde{y}_0 \in \tilde{\mathcal{Y}}$ накрывает базовую точку $y_0 \in \mathcal{Y}$, тогда всякая точка универсальной накрывающей имеет вид $\tilde{y} = \tilde{y}_0 \cdot \mathbf{s}$, где $\mathbf{s} \subset \mathcal{Y}$ – некоторый путь.

Для тех точек $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{Y}}$, которые не проецируются на разрез D , определим вектор W по правилу

$$W(\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{s}) := \mathbf{T}([\mathbf{r}])\mathbf{T}_*^{-1}([\mathbf{r}])\left(\Phi(x_1 \cdot \mathbf{s}), \Phi(x_2 \cdot \mathbf{s}), \dots, \Phi(x_n \cdot \mathbf{s})\right)^t, \quad (19)$$

где Φ – решение функционального уравнения (9), построенное по собственной паре $(\lambda, u(t))$, петля $\mathbf{r} := \mathbf{s} \cdot \mathbf{t}^{-1}$, а путь $\mathbf{t} \subset \mathcal{Y}$ – любой не пересекающий D . Это определение не зависит от выбора пути \mathbf{t} , замыкающего путь \mathbf{s} до петли.

Оказывается, что на компонентах прообраза D в $\tilde{\mathcal{Y}}$ правые и левые граничные значения вектора W совпадают из-за того, что Φ удовлетворяет функциональному уравнению (9). Следовательно, W продолжается до голоморфного вектора на

всей универсальной накрывающей. При преобразованиях скольжения вектор W домножается на постоянную матрицу:

$$W([\mathbf{r}] \cdot \tilde{y}) = W(\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) = \mathbf{T}([\mathbf{r}])W(\tilde{y}), \quad [\mathbf{r}] \in \pi_1(\mathcal{Y}, y_0), \quad \tilde{y} := \tilde{y}_0 \cdot \mathbf{s}, \quad \mathbf{s} \subset \mathcal{Y}. \quad (20)$$

2) Обратно, пусть W – решение задачи Римана, определенное на универсальной накрывающей $\tilde{\mathcal{Y}}$. На сфере с n разрезами $\mathcal{X} \setminus R_n^{-1}(D)$ определим голоморфную функцию

$$\Phi(x) = \Phi(x_k \cdot \mathbf{s}) := W_k(\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{s}), \quad k = 1, \dots, n; \quad (21)$$

здесь путь $\mathbf{s} \subset \mathcal{Y}$ не пересекает разрез D , $x_k \in R_n^{-1}(y_0)$. Это определение также не зависит от произвола в выборе пути \mathbf{s} и индекса k .

Оказывается, что на компоненте $R_n^{-1}(D)$, которая является малой деформацией I , функция Φ удовлетворяет соотношению (9), а на оставшемся $n - 1$ разрезе скачок Φ равен нулю. Аналитическое продолжение Φ является голоморфным в $\mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \bar{I}$, а на разрезе удовлетворяет соотношению (9). По лемме 1 функция

$$u(t) = (2\pi i)^{-1}[\Phi(t + i0) - \Phi(t - i0)], \quad t \in I, \quad (22)$$

и число $\lambda := 1 + 2/\delta$ образуют собственную пару уравнения ПС _{n} .

3) Соответствия пп. 1) и 2) доказательства являются взаимно обратными.

При выводе уравнения Пуанкаре–Стеклова видно, что замена переменных $R(t)$ неоднозначно определяется по областям, в которых поставлена дифференциальная задача (2), но с точностью до композиции с двумя дробно-линейными преобразованиями вида

$$\Lambda_\alpha(t) := \frac{t + \alpha}{\alpha t + 1}, \quad \alpha \in (-1, 1), \quad (23)$$

сохраняющими отрезок $[-1, 1]$. Ясно, что такие преобразования не должны влиять на спектр интегрального уравнения. Это же видно и из теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $(\lambda, u(t))$ – собственная пара уравнения ПС _{n} с рациональной функцией R_n . Тогда $(\lambda, u \circ \Lambda_\alpha(t))$ – собственная пара уравнения с параметром $\Lambda_{\alpha'} \circ R_n \circ \Lambda_\alpha$, $\alpha, \alpha' \in (-1, 1)$.

В дальнейшем мы не будем различать уравнения ПС, параметры которых связаны преобразованием

$$R_n \rightarrow \Lambda_{\alpha'} \circ R_n \circ \Lambda_\alpha, \quad \alpha, \alpha' \in (-1, 1), \quad (24)$$

в частности, исследуемое в этой статье пространство уравнений ПС₃, а также связанных с ними монодромий, обладает вещественной размерностью три.

§ 3. Вычисление монодромии для уравнения ПС₃

Покажем, как эффективно вычислить определенное в п. 2.2 представление \mathbf{T} через коэффициенты функции R_n для $n = 3$. Для наглядного задания монодромии будем использовать нагруженный матрицами граф, ребра которого соединяют граничные компоненты базового пространства. Проведем несколько простых попарно непересекающихся ориентированных кривых D_1, D_2, \dots, D_k , соединяющих граничные (= выколотые) точки \mathcal{Y} , и припишем им матрицы $\mathbf{T}(D_1), \mathbf{T}(D_2), \dots, \mathbf{T}(D_k)$

из $GL_n(\mathbb{C})$. Монодромию пути \mathbf{r} , трансверсально пересекающего подряд разрезы $D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_s}$, положим по определению равной

$$\mathbf{T}([\mathbf{r}]) := \mathbf{T}^{\varepsilon_1}(D_{i_1})\mathbf{T}^{\varepsilon_2}(D_{i_2}) \cdots \mathbf{T}^{\varepsilon_s}(D_{i_s}),$$

где $\varepsilon_k = 1$ при (локальном) пересечении путем \mathbf{r} разреза D_{i_k} справа налево и $\varepsilon_k = -1$ при пересечении в обратном направлении.

Введем обозначения для матриц перестановок размера 3×3 :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 \cdot (x_1, x_2, x_3)^t &:= (x_1, x_3, x_2)^t, \\ \mathbf{D}_2 \cdot (x_1, x_2, x_3)^t &:= (x_3, x_2, x_1)^t, \\ \mathbf{D}_3 \cdot (x_1, x_2, x_3)^t &:= (x_2, x_1, x_3)^t, \\ \mathbf{D}_0 \cdot (x_1, x_2, x_3)^t &:= (x_3, x_1, x_2)^t. \end{aligned} \tag{25}$$

3.1. Типичные накрытия. По формуле Римана–Гурвица накрытие R_3 имеет в общем случае четыре простых точки ветвления a_1, a_2, a_3, a_4 , т.е. над каждой точкой a_k лежат двойная точка b_k и простая точка c_k , $k = 1, \dots, 4$. Нахождение этих 12 точек потребует решения уравнения 4-й степени. Ниже мы классифицируем функции R_3 по расположению точек ветвления относительно действительной оси. Из этой классификации будет следовать, что точки ветвления всегда можно соединить двумя непересекающимися разрезами $D_1 = \overline{a_1 a_3}$, $D_2 = \overline{a_2 a_4}$ так, что в образовавшейся двусвязной области $\mathcal{O} := \mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \{D_1 \cup D_2\}$ монодромия накрытия R_3 тривиальна. Не теряя в общности, будем считать, что разрез D содержится в \mathcal{O} , при этом любой из его концов может оказаться точкой ветвления R_3 (см. рис. 4а)).

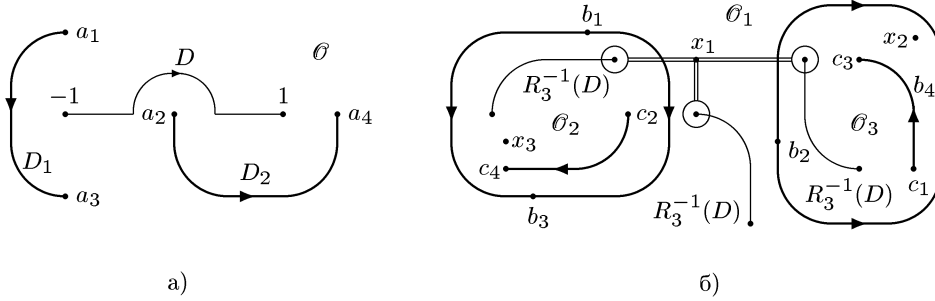


Рис. 4. а) Разрезы на \mathcal{Y} ; б) склейка компонент \mathcal{O}_k и три лассо

Простые комбинаторные рассуждения показывают, что три компонента $R_3^{-1}(\mathcal{O})$ — это (топологическое) кольцо \mathcal{O}_1 и два (топологических) диска $\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3$ со щелями, которые склеены так, как на рис. 4б).

Пусть базовая точка y_0 фундаментальной группы $\pi_1(\mathcal{Y})$ лежит в \mathcal{O} . Занумеруем накрывающие ее точки так, чтобы $x_1 \in \mathcal{O}_1$, $x_2 \in \mathcal{O}_3$, $x_3 \in \mathcal{O}_2$. Петля, не пересекающая разрезов D_1, D_2, D , обладает тривиальной монодромией (см. рис. 4б)). Петли, единожды пересекающие один из разрезов D_k , $k = 1, 2$, обладают монодромией \mathbf{D}_{k+1} (ориентация пересечения безразлична, ибо $\mathbf{D}_{k+1}^2 = \mathbf{1}$). Наконец, монодромия петли, единожды пересекающей разрез D , зависит от того, в какой компоненте $R_3^{-1}(\mathcal{O})$ лежит $R_3^{-1}(D) \cap \mathcal{U}$ — малая деформация интервала I . Взяв в качестве \mathbf{d} проекцию одного из трех лассо рис. 4б), убедимся, что эта монодромия есть $\mathbf{D}_k \mathbf{D}_k$, если указанная выше компонента есть \mathcal{O}_k , $k = 1, 2, 3$. Тем самым, доказана

ЛЕММА 6. С точностью до преобразования подобия монодромия \mathbf{T} в случае типичной функции R_3 задается тремя непересекающимися разрезами $D_1 = \overline{a_1 a_3}$, $D_2 = \overline{a_2 a_4}$, D и приписанными им соответственно матрицами $\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3, \mathbf{D}_k \mathbf{D} \mathbf{D}_k$, где k определяется из вложения $\mathcal{O}_k \supset \{R_3^{-1}(D) \cap \mathcal{U}\}$.

В оставшейся части этого пункта мы разбиваем пространство уравнений ПС₃ на характерные блоки, для каждого из которых решаем две задачи: определяем топологию разрезов D, D_1, D_2 и компоненту \mathcal{O}_k , в которую попадает (деформация) I , тем самым вычисляя монодромию \mathbf{T} .

3.1.1. Точки ветвления a_1, a_2, a_3, a_4 вещественны. Заметим, что точки расширенной вещественной оси $\widehat{\mathbb{R}}$, отличные от a_1, a_2, a_3, a_4 , могут быть двух типов: точки y типа 3:0 имеют три вещественных прообраза $R_3^{-1}(y)$, а точки типа 1:2 имеют один вещественный и два комплексно сопряженных прообраза. Тип точки локально постоянен и меняется при пересечении точек ветвления. В рассматриваемом случае на $\widehat{\mathbb{R}}$ имеется ровно два интервала, заполненных точками типа 1:2, которые мы обозначим $D_1 := (a_1, a_3)$ и $D_2 := (a_2, a_4)$ (см. рис. 5а)). На дополнении к этим интервалам монодромия накрытия тривиальна. Для доказательства тривиальности \mathbf{T}_* на $\mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \{D_1 \cup D_2\}$ используется налагающая ограничения на монодромию вещественного накрытия R_3

ЛЕММА 7. Пусть y_0 – вещественная базовая точка. Сопоставим ей матрицу перестановок \mathbf{K} размера 3×3 по правилу

$$\mathbf{K} \cdot (x_1, x_2, x_3)^t := (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3})^t.$$

Тогда монодромии комплексно сопряженных петель \mathbf{r} и $\overline{\mathbf{r}}$ связаны соотношением:

$$\mathbf{T}_*(\overline{[\mathbf{r}]}) = \mathbf{K} \mathbf{T}_*([\mathbf{r}]) \mathbf{K}. \tag{26}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_*(\overline{[\mathbf{r}]}) (x_1, x_2, x_3)^t &:= (x_1 \cdot \overline{\mathbf{r}}, x_2 \cdot \overline{\mathbf{r}}, x_3 \cdot \overline{\mathbf{r}})^t = \overline{(x_1 \cdot \mathbf{r}, x_2 \cdot \mathbf{r}, x_3 \cdot \mathbf{r})^t} \\ &= \mathbf{K} \overline{(x_1 \cdot \mathbf{r}, x_2 \cdot \mathbf{r}, x_3 \cdot \mathbf{r})^t} = \mathbf{K} \mathbf{T}_*([\mathbf{r}]) \mathbf{K} (x_1, x_2, x_3)^t. \end{aligned}$$

Рассмотрим начинающуюся в вещественной точке y_0 типа 3:0 симметричную относительно $\widehat{\mathbb{R}}$ петлю \mathbf{r} , огибающую интервал (a_1, a_3) (см. рис. 5а)). Эта петля охватывает две простые точки ветвления a_1 и a_3 , поэтому перестановка $\mathbf{T}_*([\mathbf{r}])$ есть произведение двух транспозиций, т.е. тождественная перестановка либо циклическая порядка 3. Последнее исключает лемма 7, согласно которой $\mathbf{T}_*([\mathbf{r}^{-1}]) = \mathbf{T}_*(\overline{[\mathbf{r}]}) \stackrel{(26)}{=} \mathbf{T}_*([\mathbf{r}])$.

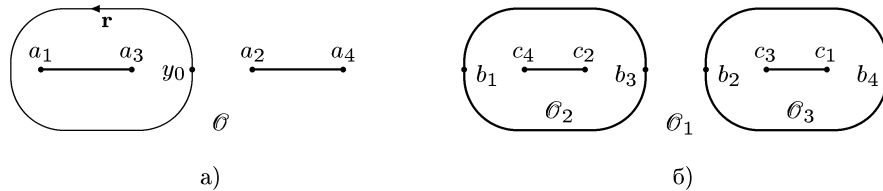


Рис. 5. Все точки ветвления a_1, a_2, a_3, a_4 вещественны

Для определения монодромии \mathbf{T} по лемме 6 нам достаточно найти пересечения окружности $\widehat{\mathbb{R}}$ с компонентами $\overline{\mathcal{O}}_k$, $k = 1, 2, 3$. Действительная окружность накрывающей сферы разбита восемью точками b_k, c_k , $k = 1, \dots, 4$, накрывающими точки ветвления, на восемь интервалов. Два из этих интервалов накрывают разрезы (a_1, a_3) и (a_2, a_4) , а оставшиеся шесть интервалов накрывают дополнения к разрезам, заполненные точками типа 3:0. Отношения соседства между упомянутыми восемью интервалами восстанавливаются единственным образом из следующего наблюдения. Два интервала, разделенные точкой b_k , накрывают один и тот же примыкающий к a_k интервал, заполненный точками типа 3:0. Два интервала, разделенные точкой c_k , накрывают различные примыкающие к a_k интервалы. В частности, восемь прообразов точек ветвлений расположены на $\widehat{\mathbb{R}}$ в следующем с точностью до ориентации порядке (см. рис. 5б): $b_1, c_4, c_2, b_3, b_2, c_3, c_1, b_4$. Тем самым, корректно определены четыре непересекающихся интервала (b_1, b_3) , (b_3, b_2) , (b_2, b_4) , (b_4, b_1) , задающие искомое разбиение действительной окружности накрывающей сферы:

$$\overline{\mathcal{O}}_1 \cap \widehat{\mathbb{R}} = [b_3, b_2] \cup [b_4, b_1], \quad \overline{\mathcal{O}}_2 \cap \widehat{\mathbb{R}} = [b_1, b_3], \quad \overline{\mathcal{O}}_3 \cap \widehat{\mathbb{R}} = [b_2, b_4].$$

Приведенным рассуждением доказана

ТЕОРЕМА 2.1.1. *В случае четырех вещественных точек ветвления a_1, a_2, a_3, a_4 монодромия \mathbf{T} задается тремя интервалами $D_1 := (a_1, a_3)$, $D_2 := (a_2, a_4)$, $D := (-1, 1)$, которым приписаны матрицы в соответствии со следующей таблицей.*

Условие	$\mathbf{T}(D_1)$	$\mathbf{T}(D_2)$	$\mathbf{T}(D)$	Замечание
$I \subset (b_1, b_3)$	\mathbf{D}_2	\mathbf{D}_1	\mathbf{D}	+
$I \subset (b_2, b_4)$	\mathbf{D}_1	\mathbf{D}_3	\mathbf{D}	+
$I \subset (b_3, b_2) \cup (b_4, b_1)$	\mathbf{D}_3	\mathbf{D}_2	\mathbf{D}	

ЗАМЕЧАНИЕ. Строкам таблицы, отмеченным “+”, могут соответствовать два пересекающихся интервала: D и D_k , $k = 1, 2$. В этой ситуации интервалы следует слегка деформировать с тем, чтобы они не пересекались, причем вид деформации роли не играет. Другой выход – это заменить два пересекающихся интервала на три: их пересечение и два интервала из симметрической разности. Пересечению соответствует произведение матриц, приписанных пересекающимся интервалам (в любом порядке, поскольку это \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}), а “остаткам” – матрицы, соответствующие “полным” интервалам.

3.1.2. Точки a_1, a_3 вещественны, a_2, a_4 комплексно сопряжены. Если на расширенной вещественной оси находятся две точки ветвления, то они ограничивают интервал, заполненный точками типа 1:2, – его мы и примем за $D_1 := (a_1, a_3)$. В качестве второго разреза $D_2 := \widetilde{a_2 a_4}$ возьмем симметричную относительно $\widehat{\mathbb{R}}$ дугу, минуящую I и соединяющую комплексно сопряженные точки ветвления. В общем случае есть два неэквивалентных способа выбрать такую дугу.

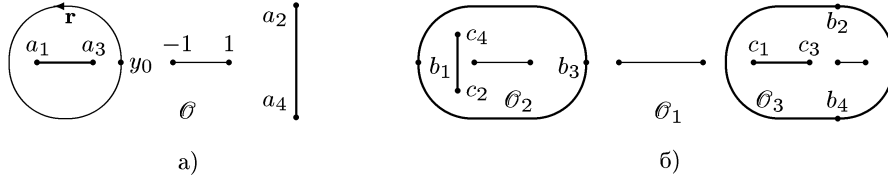


Рис. 6. Точки a_1, a_3 вещественны; a_2, a_4 комплексно сопряжены

Переобозначая в противном случае концы первого разреза, будем считать, что D_2 пересекает действительную ось “между” a_1 и I (см. рис. 6а).

Буквальным повторением абзаца после леммы 7 доказывается тривиальность монодромии накрытия в образовавшейся двусвязной области \mathcal{O} . Поднимая интервал (a_1, a_3) и дополняющий его интервал (a_3, a_1) , заполненный точками типа 3:0, на накрывающую сферу, убеждаемся, что прообразы действительных точек ветвления a_1, a_3 расположены на \mathbb{R} в следующем с точностью до ориентации порядке: b_1, b_3, c_1, c_3 . Тем самым, корректно определены четыре непересекающихся интервала $(b_1, b_3), (b_3, c_1), (c_1, c_3), (c_3, b_1)$ действительной окружности. В этих обозначениях справедлива (см. рис. 6б))

ТЕОРЕМА 2.1.2. *При двух вещественных a_1, a_3 и двух комплексно сопряженных a_2, a_4 точка ветвления монодромия \mathbf{T} задается тремя разрезами $D_1 = (a_1, a_3), D_2 = a_2 a_4, D := (-1, 1)$, которым приписаны матрицы в соответствии со следующей таблицей.*

Условие	$\mathbf{T}(D_1)$	$\mathbf{T}(D_2)$	$\mathbf{T}(D)$	Замечание
$I \subset (b_1, b_3)$	\mathbf{D}_2	\mathbf{D}_1	\mathbf{D}	
$I \cap (c_1, c_3) \neq \emptyset$	\mathbf{D}_1	\mathbf{D}_3	\mathbf{D}	+
$I \subset (c_3, b_1)$	\mathbf{D}_1	\mathbf{D}_3	\mathbf{D}	
$I \subset (b_3, c_1)$	\mathbf{D}_3	\mathbf{D}_2	\mathbf{D}	

3.1.3. Две пары сопряженных точек ветвления; тип $\widehat{\mathbb{R}} - 1:2$. Если на действительной оси нет точек ветвления, то все ее точки имеют один тип, в рассматриваемом случае 1:2. Примем за разрезы комплексно сопряженные прямолинейные интервалы $D_1 := (a_1, a_3)$ и $D_2 := (a_2, a_4)$, целиком лежащие в верхней и нижней полуплоскостях соответственно (см. рис. 7а).



Рис. 7. Четыре комплексных точки ветвления; $R_3^{-1}(\widehat{\mathbb{R}})$ из трех компонент

Пусть \mathbf{r} – действительная ось. Как и ранее, $\mathbf{T}_*(\mathbf{r})$ – либо тождественная перестановка, либо циклическая перестановка порядка три. Последнее запрещает лемма 7, согласно которой $\mathbf{T}_*(\mathbf{r}) = \mathbf{T}_*(\overline{\mathbf{r}}) \stackrel{(26)}{=} \mathbf{K}\mathbf{T}_*(\mathbf{r})\mathbf{K} = \mathbf{T}_*^{-1}(\mathbf{r})$, где \mathbf{K} – перестановка второго порядка. Для данной конфигурации всегда $I \subset \mathcal{O}_1$ (см. рис. 7б)), так что справедлива

ТЕОРЕМА 2.1.3. *Если накрытие R_3 имеет две пары комплексно сопряженных точек ветвления $a_1 = \bar{a}_2$, $a_3 = \bar{a}_4$, а действительная ось образована точками типа 1:2, то монодромия \mathbf{T} задается тремя непересекающимися прямолинейными разрезами $D_1 := (a_1, a_3)$, $D_2 := (a_2, a_4)$, $D := (-1, 1)$, которым приписаны матрицы \mathbf{D}_3 , \mathbf{D}_2 , \mathbf{D} соответственно.*

3.1.4. Две пары сопряженных точек ветвления; тип $\widehat{\mathbb{R}} - 3:0$. В оставшемся случае все точки действительной окружности имеют тип 3:0. Соединяя комплексно сопряженные точки ветвления, как на рис. 8а), разрезами $D_1 := a_1\bar{a}_3$ и $D_2 := a_2\bar{a}_4$, минуя I и симметричными относительно $\widehat{\mathbb{R}}$, мы получим двусвязную область \mathcal{O} , монодромия накрытия R_3 в которой тривиальна. Для доказательства рассмотрим симметричную петлю \mathbf{r} , гомотопический класс которой порождает $\pi_1(\mathcal{O})$. Эта петля охватывает пару точек ветвления R_3 и $\overline{\mathbf{r}} \sim \mathbf{r}^{-1}$, так что монодромия вдоль \mathbf{r} тривиальна – см. абзац, следующий за доказательством леммы 7.

Найдем разбиение действительной окружности накрывающей сферы компонентами $\overline{\mathcal{O}}_j$. Полные прообразы точки пересечения разреза D_k , $k = 1, 2$, с $\widehat{\mathbb{R}}$ обозначим $\{e_1^k, e_2^k, e_3^k\}$, причем точка e_1^k лежит на соединяющей простые точки c_k, c_{k+2} компоненте прообраза разреза. Поднимая интервал за интервалом действительную окружность на накрывающую сферу, мы убеждаемся, что точки e_*^* с верхними индексами 1 и 2 перемежаются, а точки с нижними индексами 1 лежат через две. Без потери общности считаем, что эти точки расположены на окружности в порядке $e_1^1, e_2^1, e_3^1, e_1^2, e_2^2, e_3^2$ и корректно определяют четыре непересекающихся интервала (e_3^1, e_2^1) , (e_2^1, e_3^2) , (e_3^2, e_2^2) , (e_2^2, e_3^1) . Эти интервалы и образуют искомое разбиение (см. рис. 8б)):

$$\overline{\mathcal{O}}_1 \cap \widehat{\mathbb{R}} = [e_2^1, e_3^2] \cup [e_2^2, e_3^1], \quad \overline{\mathcal{O}}_2 \cap \widehat{\mathbb{R}} = [e_3^1, e_2^1], \quad \overline{\mathcal{O}}_3 \cap \widehat{\mathbb{R}} = [e_3^2, e_2^2].$$

Приведенным рассуждением доказана

ТЕОРЕМА 2.1.4. *Если накрытие R_3 имеет две пары комплексно сопряженных точек ветвления $a_1 = \bar{a}_3$, $a_2 = \bar{a}_4$, а действительная ось образована точками типа 3:0, то монодромия задается тремя непересекающимися симметричными относительно $\widehat{\mathbb{R}}$ разрезами $D_1 := a_1\bar{a}_3$, $D_2 := a_2\bar{a}_4$ и $D := (-1, 1)$, которым приписаны матрицы в соответствии со следующей таблицей.*

Условие	$\mathbf{T}(D_1)$	$\mathbf{T}(D_2)$	$\mathbf{T}(D)$
$I \subset (e_3^1, e_2^1)$	\mathbf{D}_2	\mathbf{D}_1	\mathbf{D}
$I \subset (e_3^2, e_2^2)$	\mathbf{D}_1	\mathbf{D}_3	\mathbf{D}
$I \subset (e_2^1, e_3^2) \cup (e_2^2, e_3^1)$	\mathbf{D}_3	\mathbf{D}_2	\mathbf{D}

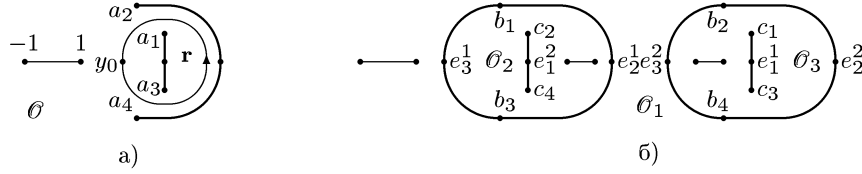


Рис. 8. а) Четыре комплексных точки ветвления; б) $R_3^{-1}(\widehat{\mathbb{R}})$ из одной компоненты

3.2. Однократное вырождение накрытия. Под однократным вырождением мы понимаем образование сложной точки ветвления накрытия при слиянии двух простых. Все предположения этого пункта можно получить, формально полагая $a_1 = a_4$ в п. 3.1.

Пусть a_2, a_3 – простые точки ветвления накрытия R_3 и a_1 – сложная, т.е. над последней лежит тройная точка b_1 . Соединим три точки ветвления простыми непересекающимися дугами $D_1 := a_1a_3, D_2 := a_2a_1$, минуя разрез D (см. рис. 9а)). Три прообраза односвязной области $\mathcal{O} := \mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \{D_1 \cup D_2\}$ склеены так, как показано на рис. 9б). Полным аналогом леммы 6 является

ЛЕММА 8. *С точностью до преобразования подобия монодромия \mathbf{T} в случае однократно вырожденного накрытия R_3 задается тремя непересекающимися разрезами $D_1 := a_1a_3, D_2 := a_2a_1, D$ и приписанными им соответственно матрицами $\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3, \mathbf{D}_k\mathbf{D}\mathbf{D}_k$, где k определяется из вложения $\mathcal{O}_k \supset \{R_3^{-1}(D) \cap \mathcal{U}\}$.*

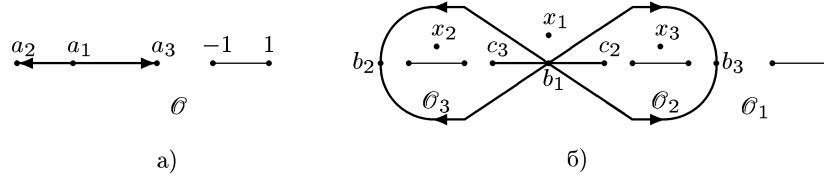


Рис. 9. Однократное вырождение накрытия R_3 : а) разрезы на базе \mathcal{U} ; б) склейка компонент \mathcal{O}_k

Определяемые ниже блоки пространства уравнений ПС₃ имеют вещественную размерность 2 и лежат на границе трехмерных блоков, рассмотренных в п. 3.1.

3.2.1. Простые точки ветвления a_2, a_3 вещественны. Это предельный случай п. 3.1.1. Действительная окружность накрываемой сферы содержит два примыкающих к a_1 интервала, заполненных точками 1:2. Примем эти интервалы за разрезы (a_1, a_3) и (a_2, a_1) . Прообразы точек ветвления расположены на окружности $\widehat{\mathbb{R}}$ в порядке b_1, c_2, b_3, b_2, c_3 и определяют разбиение этой окружности компонентами $\overline{\mathcal{O}}_k$:

$$\overline{\mathcal{O}}_1 \cap \widehat{\mathbb{R}} = [b_3, b_2], \quad \overline{\mathcal{O}}_2 \cap \widehat{\mathbb{R}} = [b_1, b_3], \quad \overline{\mathcal{O}}_3 \cap \widehat{\mathbb{R}} = [b_2, b_1].$$

Отрезки здесь являются замыканиями трех непересекающихся интервалов $(b_1, b_2), (b_2, b_3), (b_3, b_1)$, на которые точки b_1, b_2, b_3 разбивают действительную окружность. Доказана

ТЕОРЕМА 2.2.1. *В случае вещественных простых точек ветвления a_2, a_3 монодромия \mathbf{T} задается тремя интервалами $D_1 := (a_1, a_3)$, $D_2 := (a_2, a_1)$, $D := (-1, 1)$, которым приписаны матрицы в соответствии со следующей таблицей.*

Условие	$\mathbf{T}(D_1)$	$\mathbf{T}(D_2)$	$\mathbf{T}(D)$	Замечание
$I \subset (b_1, b_3)$	\mathbf{D}_2	\mathbf{D}_1	\mathbf{D}	+
$I \subset (b_2, b_1)$	\mathbf{D}_1	\mathbf{D}_3	\mathbf{D}	+
$I \subset (b_2, b_3)$	\mathbf{D}_3	\mathbf{D}_2	\mathbf{D}	

3.2.2. Простые точки ветвления a_2, a_3 комплексно сопряжены. Это предельный случай конфигурации, рассмотренной в п. 3.1.3. Соединим a_1 с a_2 и a_3 комплексно сопряженными прямолинейными разрезами. Разрез I накрывающей сферы Римана будет лежать в компоненте \bar{b}_1 , поэтому справедлива

ТЕОРЕМА 2.2.3. *Если покрытие R_3 имеет пару комплексно сопряженных простых точек ветвления $a_2 = \bar{a}_3$, то монодромия \mathbf{T} задается тремя непересекающимися прямолинейными разрезами $D_1 := (a_1, a_3)$, $D_2 := (a_2, a_1)$, $D := (-1, 1)$, которым приписаны матрицы $\mathbf{D}_3, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}$ соответственно.*

3.3. Двукратное вырождение накрытия. Рассмотрим случай, когда имеются две сложные точки ветвления a_1, a_2 – вещественных или комплексно сопряженных. Соединим точки ветвления простой дугой $D_0 := \widetilde{a_1 a_2}$, минуящей разрез I . Справедлива

ТЕОРЕМА 2.3. *Если покрытие R_3 имеет две точки ветвления a_1, a_2 , то монодромия \mathbf{T} с точностью до преобразования подобия задается двумя непересекающимися разрезами $D_0 := \widetilde{a_1 a_2}$, $D := (-1, 1)$, которым приписаны матрицы \mathbf{D}_0, \mathbf{D} соответственно.*

Обращению ориентации D_0 соответствует подобное представление \mathbf{T} с матрицей подобия \mathbf{D}_1 , поэтому фиксируем на $\widetilde{a_1 a_2}$ произвольную ориентацию.

§ 4. Задача монодромии на римановой поверхности

Каждый из проколов $a = \pm 1, a_1, a_2, a_3, a_4$ пространства \mathcal{Y} является точкой ветвления решения $W(y)$ задачи монодромии Римана. Порядок $r(a)$ этого ветвления конечен и равен двум либо трем, ибо матрица локальной монодромии подобна одной из матриц $\mathbf{D}, \mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3, \mathbf{D}\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_1\mathbf{D}$. Нам будет удобно перейти к задаче монодромии, решение которой не имеет локальных ветвлений. Для этого мы введем компактную риманову поверхность $\mathcal{M} = \mathcal{M}(R_3)$, разветвленную с порядком $r(a)$ над каждым проколом a . Так, в случае общего положения все шесть проколов a различны, все $r(a)$ равны двум и поэтому $\mathcal{M} = \{w^2 = (y^2 - 1) \prod_{k=1}^4 (y - a_k)\}$ – гиперэллиптическая поверхность рода 2. Решение $W(y)$ задачи монодромии из теоремы 1, поднятое на поверхность \mathcal{M} , будет голоморфным вектором $W_{\mathcal{M}}$ с новой монодрией $\mathbf{T}_{\mathcal{M}}$ и дополнительными симметриями, связанными с конформными движениями \mathcal{M} .

4.1. Риманова поверхность \mathcal{M} . Пусть $D_1 = \widetilde{a_1 a_3}$, $D_2 = \widetilde{a_2 a_4}$, $D = \widetilde{-1 1}$ – определяющие монодрию \mathbf{T} разрезы \mathcal{Y} (в случае двукратного вырождения R_3

рассмотрим разрезы D и D_0). Зададим представление \mathbf{T}_{*l} из фундаментальной группы \mathcal{Y} в симметрическую группу S_l , сопоставив каждому из разрезов перестановку в соответствии с количеством выколотых точек a и приписанных им порядков $r(a)$ по табл. 1.

ТАБЛИЦА 1

Тип R_3	l	$\mathbf{T}_{*l}(D_{\bullet})(m_1, m_2, \dots, m_l)$				$g(\mathcal{M})$	$\dim H_s^1(\mathcal{M})$
		$D_{\bullet} = D_1$	$D_{\bullet} = D_2$	$D_{\bullet} = D$	$D_{\bullet} = D_0$		
$2_6\mathbf{3}_0$	2	(m_2, m_1)	(m_2, m_1)	(m_2, m_1)	–	2	2
$2_5\mathbf{3}_0$	4	(m_4, m_3, m_2, m_1)	(m_4, m_3, m_2, m_1)	(m_2, m_1, m_4, m_3)	–	2	1
$2_4\mathbf{3}_0$	4	(m_2, m_1, m_4, m_3)	(m_4, m_3, m_2, m_1)	(m_1, m_2, m_3, m_4)	–	1	0
$2_4\mathbf{3}_1$	6	$(m_2, m_1, m_4, m_3, m_6, m_5)$	$(m_6, m_3, m_2, m_5, m_4, m_1)$	$(m_6, m_3, m_2, m_5, m_4, m_1)$	–	3	1
$2_3\mathbf{3}_1$	12	$(m_2, m_1, m_4, m_3, m_6, m_5, m_8, m_7, m_{10}, m_9, m_{12}, m_{11})$	$(m_6, m_3, m_2, m_5, m_4, m_1, m_{12}, m_9, m_8, m_{11}, m_{10}, m_7)$	$(m_7, m_8, m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6)$	–	2	0
$2_2\mathbf{3}_2$	6	–	–	$(m_4, m_5, m_6, m_1, m_2, m_3)$	$(m_2, m_3, m_1, m_5, m_6, m_4)$	2	0

В первой колонке таблицы запись $2_{\alpha}\mathbf{3}_{\beta}$ означает, что пространство \mathcal{Y} имеет α проколов с числом $r = 2$ и β проколов с $r = 3$. Вторая колонка показывает порядок симметрической группы. В колонках с третьей по шестую перечислены перестановки, соответствующие разрезам проколотой сферы \mathcal{Y} .

Возьмем теперь l экземпляров поверхности $\mathcal{Y} \setminus \{D \cup D_1 \cup D_2\}$ (в случае двукратного вырождения – поверхности $\mathcal{Y} \setminus \{D \cup D_0\}$) и склеим правый берег каждого разреза D_{\bullet} на k -м листе с левым берегом того же разреза на s -м листе при условии, что перестановка \mathbf{T}_{*l} переводит m_k в m_s , $k = 1, \dots, l$; $D_{\bullet} = D, D_1, D_2$. Обозначим полученную поверхность \mathcal{M}_o и, заклеив в ней наследуемые от \mathcal{Y} проколы, получим компактную поверхность \mathcal{M} . Две такие поверхности изображены на рис. 10а),б). Если считать m_k накрывающей y_0 точкой k -го листа, то \mathbf{T}_{*l} будет монодромией (регулярного, как покажем далее) l -листного накрытия pr в диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}_o & \xrightarrow{v} & \mathcal{M} \\
 \downarrow pr & & \downarrow pr \\
 \mathcal{Y} & \xrightarrow{v} & \mathbb{C}P_1
 \end{array} \quad (27)$$

Здесь i – естественное вложение.

Построенная как l -листная накрывающая сферы Римана поверхность \mathcal{M} не является единственной, отвечающей нашим целям, но в известном смысле является самой простой, например, имеет минимальный род $g(\mathcal{M})$.

4.2. Геометрия поверхности \mathcal{M} . При исследовании задачи монодромии нам потребуются различные сведения о геометрии построенной в п. 4.1 поверхности \mathcal{M} , в частности, о группе ее конформных движений и существовании голоморфных дифференциалов с определенной симметрией.

Справедлива

ЛЕММА 9. (i) *Накрытие pr в (27) разветвлено с порядком $r(a)$ над каждым проколом a поверхности \mathcal{Y} .*

(ii) *Род поверхности \mathcal{M} приведен в седьмом столбце табл. 1.*

(iii) *Пусть pr_* и i_* – индуцированные диаграммой (27) отображения фундаментальных групп, тогда подгруппы $pr_*\pi_1(\mathcal{M}_o, m_1)$ и $pr_*\ker i_*$ нормальны в $\pi_1(\mathcal{Y}, y_0)$. Первая из этих подгрупп совпадает с ядром представления \mathbf{T}_{*1} , вторая же лежит в ядре представления \mathbf{T} , что позволяет естественно определить монодромию $\mathbf{T}_{\mathcal{M}}$, коммутативно замыкая диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{M}_o, m_1) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(\mathcal{M}, m_1) \\ \downarrow pr_* & & \downarrow \mathbf{T}_{\mathcal{M}} \\ \pi_1(\mathcal{Y}, y_0) & \xrightarrow{\mathbf{T}} & GL_3(\mathbb{C}) \end{array} \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Проверим утверждение леммы, например, для случая $\mathbf{2}_4\mathbf{3}_1$, соответствующего многочлену R_3 в общем положении. В указанном случае имеются четыре прокола a с $r(a) = 2$ (свободные концы разрезов D, D_1, D_2) и один прокол с $r(a) = 3$ (общий конец разрезов D_1, D_2 – см. рис. 11). Обходам первых четырех точек соответствуют перестановки $\mathbf{T}_{*6}(D), \mathbf{T}_{*6}(D_1), \mathbf{T}_{*6}(D_2)$, составленные из циклов длины 2; пятой точке соответствует перестановка $\mathbf{T}_{*6}(D_1)\mathbf{T}_{*6}(D_2)$, составленная из циклов длины 3.

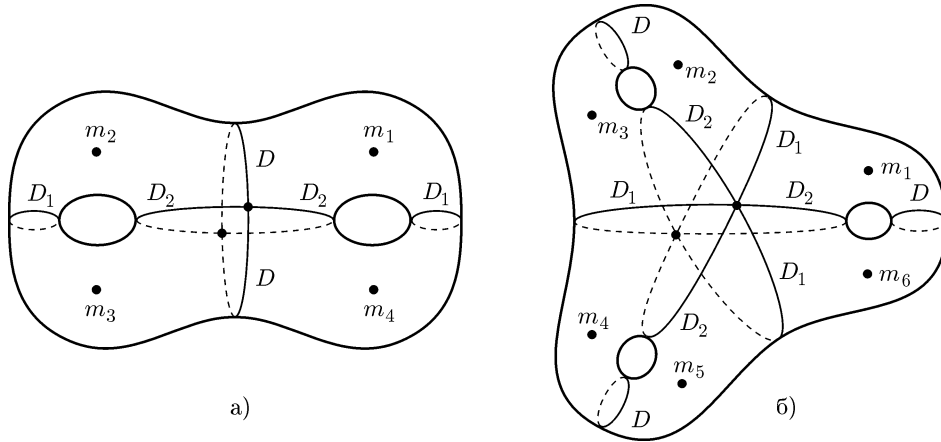


Рис. 10. Поверхность \mathcal{M} в случаях а) $\mathbf{2}_5\mathbf{3}_0$; б) $\mathbf{2}_4\mathbf{3}_1$

(ii) Для накрытия pr применим формулу Римана–Гурвица.

(iii) Покажем, что группа накрытия pr совпадает с $\ker \mathbf{T}_{*l}$ и потому нормальна в $\pi_1(\mathcal{Y})$. Пусть m_1 – базовая точка фундаментальной группы \mathcal{M}_o , тогда проекция $\pi_1(\mathcal{M}_o, m_1)$ в $\pi_1(\mathcal{Y}, y_0)$ образована классами таких петель $\mathbf{r} \subset \mathcal{Y}$, что перестановка $\mathbf{T}_{*l}([\mathbf{r}])$ сохраняет первый элемент. Группа же монодромии устроена так, что ее перестановки не содержат циклов единичной длины, за исключением тривиальной. Продемонстрируем это на примере случая $\mathbf{2}_4\mathbf{3}_1$. Введем две перестановки, коммутирующие с перестановками группы монодромии \mathbf{T}_{*6} :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1(m_1, m_2, \dots, m_6) &= (m_3, m_4, m_5, m_6, m_1, m_2), \\ \mathbf{S}_2(m_1, m_2, \dots, m_6) &= (m_2, m_1, m_6, m_5, m_4, m_3). \end{aligned}$$

Если перестановка $\mathbf{K} := \mathbf{T}_{*6}([\mathbf{r}])$ сохраняет первый элемент, то перестановки $\mathbf{S}_1^{\pm 1} \mathbf{K} \mathbf{S}_1^{\mp 1}$ ($= \mathbf{K}$) сохраняют третий и пятый элементы, а перестановка $\mathbf{S}_2 \mathbf{K} \mathbf{S}_2^{-1}$ ($= \mathbf{K}$) сохраняет второй, четвертый и шестой элементы. Следовательно, перестановка \mathbf{K} тривиальна.

Обратимся ко второй подгруппе: $pr_* \ker \iota_*$. Ядро отображения ι_* порождено всевозможными лассо в \mathcal{M}_o , охватывающими выколотые точки. Рассматриваемая подгруппа соответственно порождена всевозможными лассо в \mathcal{Y} , которые охватывают проколы a , обходя их $r(a)$ раз. Описанный класс порождающих инвариантен при сопряжении в $\pi_1(\mathcal{Y}, y_0)$ и в соответствии с п. (i) леммы лежит в ядре представления \mathbf{T} .

4.2.1. Движения поверхности. Фундаментальная группа $\pi_1(\mathcal{Y})$ естественно действует на поверхности \mathcal{M} и ее универсальной накрывающей $\widetilde{\mathcal{M}}$, так что $\mathcal{M}/\pi_1(\mathcal{Y}) = \widetilde{\mathcal{M}}/\pi_1(\mathcal{Y}) = \mathbb{C}\mathbb{P}_1$. Для точки $m \in \mathcal{M}_o$ это действие задается формулой

$$[\mathbf{r}] \cdot m = [\mathbf{r}] \cdot (m_1 \cdot \mathbf{s}) := m_1 \cdot \mathbf{r}\mathbf{s}, \quad [\mathbf{r}] \in \pi_1(\mathcal{Y})/pr_*\pi_1(\mathcal{M}_o),$$

в которой путь \mathbf{s} есть проекция на \mathcal{Y} пути в \mathcal{M}_o , связывающего базовую точку m_1 с аргументом m . Ввиду нормальности подгруппы $pr_*\pi_1(\mathcal{M}_o)$ в группе $\pi_1(\mathcal{Y})$ правая часть формулы не зависит от выбора пути \mathbf{s} .

Определение действия группы $\pi_1(\mathcal{Y})$ на универсальной накрывающей $\widetilde{\mathcal{M}}$ лишь немногим более сложно. Вложение $\iota: \mathcal{M}_o \rightarrow \mathcal{M}$ порождает отображение универсальных накрывающих:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{Y}} = \widetilde{\mathcal{M}}_o & \xrightarrow{\widetilde{\iota}} & \widetilde{\mathcal{M}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_o & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{M} \end{array}. \quad (29)$$

Выберем на $\widetilde{\mathcal{Y}}$ базовую точку \widetilde{y}_0 , накрывающую m_1 , и для точек $\widetilde{\iota}(\widetilde{y}_0 \cdot \mathbf{s}) = \widetilde{m} \in \widetilde{\mathcal{M}}$, не проецирующихся в проколы поверхности \mathcal{M}_o , положим

$$[\mathbf{r}] \cdot \widetilde{m} = [\mathbf{r}] \cdot \widetilde{\iota}(\widetilde{y}_0 \cdot \mathbf{s}) := \widetilde{\iota}(\widetilde{y}_0 \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \subset \mathcal{Y}, \quad [\mathbf{r}] \in \pi_1(\mathcal{Y})/pr_* \ker \iota_*. \quad (30)$$

Результат действия не зависит от произвола в выборе пути \mathbf{s} : если $\widetilde{\iota}$ склеивает точки $\widetilde{y}_0 \cdot \mathbf{s}_1$ и $\widetilde{y}_0 \cdot \mathbf{s}_2$, то $[\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2^{-1}] \in pr_* \ker \iota_*$. Подгруппа $pr_* \ker \iota_*$ нормальна в $\pi_1(\mathcal{Y})$, поэтому элемент $[\mathbf{r}\mathbf{s}_1 \cdot (\mathbf{r}\mathbf{s}_2)^{-1}]$ также лежит в $pr_* \ker \iota_*$ и, следовательно, $\widetilde{\iota}$ склеивает точки $\widetilde{y}_0 \cdot \mathbf{r}\mathbf{s}_1$ и $\widetilde{y}_0 \cdot \mathbf{r}\mathbf{s}_2$.

Действие группы $\pi_1(\mathcal{Y})$ на проколах поверхности \mathcal{M}_o и проецирующихся в них точках универсальной накрывающей $\widetilde{\mathcal{M}}$ доопределяется по непрерывности.

4.2.2. Четные пути и симметричные дифференциалы на \mathcal{M} . Начнем с двух определений. Зададим представление $\text{sign}: \pi_1(\mathcal{Y}) \rightarrow \{\pm 1\}$ по правилу

$$\text{sign}([\mathbf{r}]) := \det \mathbf{T}([\mathbf{r}]), \quad [\mathbf{r}] \in \pi_1(\mathcal{Y}). \quad (31)$$

Классы петель из ядра sign назовем *четными*, остальные – *нечетными*. Четность класса петли равна четности числа пересечений петли с разрезами D, D_1, D_2 при условии трансверсальности всех пересечений.

Голоморфный дифференциал ω на поверхности \mathcal{M} назовем *симметричным*, если

$$\omega([\mathbf{r}] \cdot m) = \text{sign}([\mathbf{r}])\omega(m), \quad m \in \mathcal{M}, \quad [\mathbf{r}] \in \pi_1(\mathcal{Y})/pr_*\pi_1(\mathcal{M}_o). \quad (32)$$

Множества всех четных петель и всех симметричных дифференциалов описывают две приведенные ниже леммы.

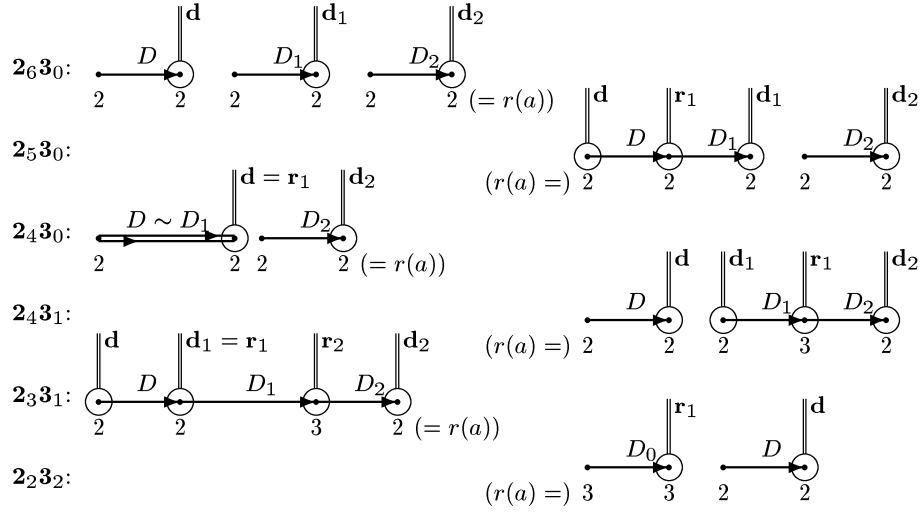


Рис. 11. Варианты расположения разрезов и образующие $\mathbf{d}, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \pi_1(\mathcal{Y}, y_0)$

ЛЕММА 10. *Группа $\ker \text{sign}$ всех четных петель на поверхности \mathcal{Y} порождена группой накрытия $pr_*\pi_1(\mathcal{M}_o)$, а также одним (в случаях **2₅3₀**, **2₄3₁**, **2₄3₀**, **2₂3₂**) либо двумя (в случае **2₃3₁**) классами $[\mathbf{r}_1], [\mathbf{r}_2]$, представители которых указаны на рис. 11.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая проверка на образующих группы накрытия показывает, что все петли из $pr_*\pi_1(\mathcal{M}_o)$ четные. Определим недостающие образующие. Классы трех лассо $\mathbf{d}, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ рис. 11 (случаи **2₄3₀** и **2₂3₂** требуют особого рассмотрения, но рассуждения аналогичны приведенным ниже) совместно с подгруппой $\pi_1(\mathcal{Y} \setminus \{D \cup D_1 \cup D_2\})$ порождают всю фундаментальную группу $\pi_1(\mathcal{Y}, y_0)$. Фундаментальная группа сферы с разрезами лежит в (нормальной) группе накрытия pr , поэтому любой четный элемент из $\pi_1(\mathcal{Y})$ имеет представление $[\mathbf{m}\mathbf{d}_*]$, в котором $[\mathbf{m}] \in pr_*\pi_1(\mathcal{M}_o)$, а элемент $[\mathbf{d}_*]$ есть произведение четного числа элементов множества $\{[\mathbf{d}]^{\pm 1}, [\mathbf{d}_1]^{\pm 1}, [\mathbf{d}_2]^{\pm 1}\}$. Элемент $[\mathbf{d}_*]$ можно составить из квадратов элементов $[\mathbf{d}], [\mathbf{d}_1], [\mathbf{d}_2]$, которые всегда лежат в $\ker \mathbf{T}_{*l}$, и из попарных произведений $[\mathbf{d}\mathbf{d}_2], [\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2]$. В случае **2₃3₁** два последних произведения не лежат в

ядре \mathbf{T}_{*l} ; в случаях $2_5\mathbf{3}_0$ и $2_4\mathbf{3}_1$ одно из этих произведений не лежит в ядре \mathbf{T}_{*l} ; наконец, в случае общего положения $2_6\mathbf{3}_0$ оба произведения попадают в $\ker \mathbf{T}_{*l}$. Те из попарных произведений, которые не лежат в $\ker \mathbf{T}_{*l} = pr_*\pi_1(\mathcal{M}_o)$, совпадают с точностью до элемента из группы накрытия pr с классами $[\mathbf{r}_1]$, $[\mathbf{r}_2]$ рис. 11.

ЛЕММА 11. *Размерность пространства $H_s^1(\mathcal{M})$ симметричных голоморфных дифференциалов ω на поверхности \mathcal{M} приведена в последнем столбце табл. 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω – симметричный дифференциал на \mathcal{M} . Равенства (32) для четных движений $[\mathbf{r}]$ говорят о том, что ω опускается до голоморфного дифференциала на факторповерхность \mathcal{M} по группе $\ker \text{sign} / pr_*\pi_1(\mathcal{M}_o)$ ее четных движений. Но двулистно накрывающая $\mathbb{C}P_1$ поверхность

$$\mathcal{N} = \mathcal{M} / (\ker \text{sign} / pr_*\pi_1(\mathcal{M}_o))$$

есть сфера Римана в случаях $2_4\mathbf{3}_0$, $2_3\mathbf{3}_1$, $2_2\mathbf{3}_2$; тор в случаях $2_5\mathbf{3}_0$, $2_4\mathbf{3}_1$ и сама поверхность \mathcal{M} в случае общего положения $2_6\mathbf{3}_0$. На сфере голоморфных дифференциалов нет; на торе есть лишь один и на поверхности рода 2 – пара линейно независимых голоморфных дифференциалов. Поднимая эти голоморфные дифференциалы с \mathcal{N} на \mathcal{M} , мы получаем как раз симметричные дифференциалы, ибо нечетное движение \mathcal{M} приводит к смене листов (= инволюции) \mathcal{N} и замене знака у голоморфного дифференциала на \mathcal{N} .

Если \mathcal{N} – тор, то дивизор (ω) симметричного дифференциала является в точности дивизором ветвления накрытия $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, т.е. носитель (ω) – это две неподвижные точки вращения $[\mathbf{r}_1]$ поверхности \mathcal{M} , отмеченные жирной точкой на рис. 10а),б).

4.3. Поднятие задачи монодромии. Решение $W(\tilde{y})$ задачи Римана из теоремы 1 можно поднять на \mathcal{M} . Полученный вектор $W_{\mathcal{M}}$ будет аналитичен на \mathcal{M} и иметь монодромию $\mathbf{T}_{\mathcal{M}}$, а также дополнительные симметрии, связанные с движениями \mathcal{M} из группы скольжений (разветвленного) накрытия pr .

Пусть $\tilde{m} = \tilde{i}(\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{s})$ – не проецирующаяся в проколы поверхности \mathcal{M}_o точка универсальной накрывающей $\tilde{\mathcal{M}}$. Положим по определению

$$W_{\mathcal{M}}(\tilde{m}) = W_{\mathcal{M}}(\tilde{i}(\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{s})) := W(\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \mathcal{Y}. \quad (33)$$

Это определение непротиворечиво: если отображение \tilde{i} склеивает пару точек $\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{s}_1$, $\tilde{y}_0 \cdot \mathbf{s}_2$ универсальной накрывающей $\tilde{\mathcal{Y}}$, то класс $[\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2^{-1}]$ лежит в $pr_* \ker \iota_*$ и по п. (iii) леммы 9 – в ядре \mathbf{T} , следовательно, вектор W принимает в этих двух точках одинаковые значения. Точки $\tilde{\mathcal{M}}$, накрывающие проколы поверхности \mathcal{M}_o , расположены дискретно, и вектор $W_{\mathcal{M}}$ можно доопределить в них по непрерывности, ибо решение W ограничено вблизи проколов \mathcal{Y} .

Определенный нами вектор $W_{\mathcal{M}}$ естественно наследует симметрии (20) решения W . В терминах действия фундаментальной группы $\pi_1(\mathcal{Y})$ на накрывающей $\tilde{\mathcal{M}}$ закон преобразования вектора $W_{\mathcal{M}}$ записывается в виде:

$$W_{\mathcal{M}}([\mathbf{r}] \cdot \tilde{m}) = \mathbf{T}([\mathbf{r}])W_{\mathcal{M}}(\tilde{m}), \quad \tilde{m} \in \tilde{\mathcal{M}}, \quad [\mathbf{r}] \in \pi_1(\mathcal{Y}, y_0). \quad (34)$$

В частности, монодромия $W_{\mathcal{M}}$ на \mathcal{M} есть $\mathbf{T}_{\mathcal{M}}$.

Все приведенные рассуждения обратимы, поэтому справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Собственные пары $(\lambda, u(x))$ уравнения ПС₃ при $\lambda \notin \{1, 3\}$ взаимно однозначно соответствуют нетривиальным голоморфным на $\mathcal{M}(R_3)$ векторам $W_{\mathcal{M}}$, подчиняющимся симметриям (34).*

§ 5. Проективные структуры на $\mathcal{M}(R_3)$

Проективная структура [1], [10]–[13] на римановой поверхности \mathcal{M} – это многозначная мероморфная функция $p(\tilde{m})$, преобразующая дробно-линейно при обходе замкнутых путей на \mathcal{M} . Соответствующий гомоморфизм $\pi_1(\mathcal{M}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ называется монодромией структуры. Классическим – восходящим к Пуанкаре – примером является фуксова проективная структура, отображающая универсальную накрывающую гиперболической поверхности \mathcal{M} на единичный круг. Проективная структура $p(\tilde{m})$ с критическими точками называется структурой с ветвлением. Для такой структуры определяют дивизор ветвления

$$D(p) := \sum_{m \in \mathcal{M}} (k(p, m) - 1) \cdot m. \quad (35)$$

Здесь $k(p, m)$ – индекс ветвления p в точке m , а его степень $\deg D(p)$ называют (общим) числом ветвления проективной структуры.

В этом параграфе мы покажем, что всякая собственная пара (λ, u) интегрального уравнения ПС₃ связана с существованием на поверхности $\mathcal{M}(R_3)$ проективной структуры специального вида.

5.1. Инвариант группы монодромии. Ключевой факт, связывающий уравнения ПС₃ с проективными структурами, – это существование у задаваемой равенствами (14) монодромии \mathbf{T} квадратичного инварианта

$$J(W) := \sum_{k=1}^n W_k^2 - \delta \sum_{j < s} W_j W_s. \quad (36)$$

При $n = 3$ форма J невырождена, если $-2 \neq \delta \neq 1$. Значение инварианта J на решении $W(\tilde{y})$ задачи Римана постоянно, ибо последнее ограничено вблизи проколов \mathcal{Y} . Итак, при $0 \neq \lambda \neq 3$ решение W лежит либо на невырожденной квадрике $\{J(W) = J_0\}$, либо на конусе $\{J(W) = 0\}$.

5.2. Геометрия квадрики и конуса.

5.2.1. Координаты p^\pm на квадрике. На невырожденной проективной квадрике $\{J(W) = J_0\}$ мы введем глобальные координаты p^+ и p^- , изменяющиеся на сфере Римана. Напомним, что невырожденная квадрика содержит два семейства прямолинейных образующих, условно обозначим их “+” и “–”. Различные прямые одного семейства не пересекаются, а пара прямых разных семейств непременно пересекается. Выпустим из произвольной точки $W := (W_1, W_2, W_3)^t$ на квадрике пару прямых до пересечения с бесконечно удаленной плоскостью в точках

$$W^\pm(W) = (W_1^\pm : W_2^\pm : W_3^\pm)^t \sim \begin{pmatrix} \tau \Sigma W_1 \pm (W_2 - W_3) + \tau^{-1} \\ \tau \Sigma W_2 \pm (W_3 - W_1) + \tau^{-1} \\ \tau \Sigma W_3 \pm (W_1 - W_2) + \tau^{-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}P_2, \quad (37)$$

$$\Sigma := W_1 + W_2 + W_3, \quad \tau := \sqrt{\frac{\delta - 1}{J_0}},$$

лежащих на невырожденной бесконечно удаленной конике

$$\mathcal{C} := \{(W_1 : W_2 : W_3)^t \in \mathbb{C}P_2 : J(W) = 0\}. \quad (38)$$

Обратно, всякой паре точек W^\pm на конике \mathcal{C} соответствует единственная точка W на проективной квадрике. Эта точка лежит на пересечении образующей семейства “+”, выпущенной из точки W^+ , и выпущенной из W^- образующей семейства “-”. Однородные координаты W являются билинейными формами от однородных координат точек W^+ и W^- , явные выражения для которых громоздки и мы их не приводим.

При отождествлении коники \mathcal{C} с проективной прямой посредством стереографической проекции мы можем каждой точке проективной квадрики сопоставить упорядоченную пару комплексных “чисел” $p^\pm \in \mathbb{C}\mathbb{P}_1$ – стереографических координат точек W^\pm . Бесконечно удаленной части квадрики ($= \mathcal{C}$) соответствует диагональ $\{p^+ = p^-\}$ в $\mathbb{C}\mathbb{P}_1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}_1$.

Сохраняющие форму J линейные преобразования \mathbf{T} образуют комплексную группу $O_3(J)$ и естественно действуют на бесконечно удаленной конике $\mathcal{C} \cong \mathbb{C}\mathbb{P}_1$. Это действие задает с точностью до сопряжения (спинорное) представление в группу дробно-линейных преобразований:

$$\chi: O_3(J) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C}). \quad (39)$$

Преобразование координат p^\pm на квадрике под действием $\mathbf{T} \in O_3(J)$ зависит от того, сохраняет ли \mathbf{T} семейства образующих “ \pm ” или переводит одно в другое:

$$\begin{aligned} p^\pm(\mathbf{T}W) &= \chi(\mathbf{T})p^\pm(W), & \mathbf{T} &\in SO_3(J), \\ p^\pm(\mathbf{T}W) &= \chi(\mathbf{T})p^\mp(W), & \mathbf{T} &\in O_3(J) \setminus SO_3(J). \end{aligned} \quad (40)$$

Чтобы дать явные выражения для стереографической координаты $p(W)$ и дробно-линейного преобразования $\chi(\mathbf{T})$, приведем квадратичную форму $J(W)$ к удобной для вычислений форме $J_\bullet(V) := V_1V_3 - V_2^2$ преобразованием $W = \mathbf{K}V$ с матрицей

$$\mathbf{K} := (3\delta + 6)^{-1/2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \mu^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (41)$$

$$\varepsilon := \exp(2\pi i/3), \quad \mu := \sqrt{\frac{\delta-1}{\delta+2}} = \sqrt{\frac{3-\lambda}{2\lambda}}.$$

Изоморфизм $(W_1 : W_2 : W_3)^t \in \mathcal{C} \cong \mathbb{C}\mathbb{P}_1 \ni p$ устанавливают формулы

$$\begin{aligned} p(W) &:= \frac{V_2(W)}{V_1(W)} = \frac{V_3(W)}{V_2(W)} = \mu \frac{W_1 + W_2 + W_3}{W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \varepsilon W_3} = \mu^{-1} \frac{W_1 + \varepsilon W_2 + \varepsilon^2 W_3}{W_1 + W_2 + W_3}, \\ (W_1 : W_2 : W_3)^t(p) &\sim \begin{pmatrix} p^2\mu + p + \mu \\ p^2\mu\varepsilon^2 + p + \mu\varepsilon \\ p^2\mu\varepsilon + p + \mu\varepsilon^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (43)$$

Фиксация стереографической координаты на конике полностью определяет гомоморфизм (39), дальнейшие свойства которого перечисляет

ЛЕММА 12. (i) Действие (псевдо)ортогональной группы $O_3(J)$ определяет представление χ из (39) такое, что

$$p(\mathbf{T}W) = \chi(\mathbf{T})p(W), \quad W = (W_1 : W_2 : W_3)^t \in \mathcal{C}, \quad \mathbf{T} \in O_3(J). \quad (44)$$

Сужение χ на компоненту связности $SO_3(J)$ есть изоморфизм.

(ii) Для действия $O_3(J)$ на конусе $\{J(W) = 0\}$ в \mathbb{C}^3 справедливо тождество

$$\begin{aligned} (\det \mathbf{T}) \mathbf{TK} \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ p^2 \end{pmatrix} &= \left[\frac{d}{dp} \chi(\mathbf{T})p \right]^{-1} \mathbf{K} \begin{pmatrix} 1 \\ \chi(\mathbf{T})p \\ (\chi(\mathbf{T})p)^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{T} \in O_3(J), \quad p \in \mathbb{C}, \quad \chi(\cdot) &\in PSL_2(\mathbb{C}), \end{aligned} \quad (45)$$

позволяющее восстановить выражение для $\chi(\mathbf{T})$. В частности,

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{D}_0)p &= \varepsilon p, \quad \varepsilon := \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right), \\ \chi(\mathbf{D}_1)p &= \frac{1}{p}, \\ \chi(\mathbf{D})p &= \frac{\mu p - 1}{p - \mu}, \quad \mu := \sqrt{\frac{\delta - 1}{\delta + 2}} = \sqrt{\frac{3 - \lambda}{2\lambda}}. \end{aligned} \quad (46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрица $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{TK}$ является J_\bullet -ортогональной и переводит вектор $V := (1, p, p^2)^t$ конуса $\{J_\bullet(V) = 0\}$ в вектор $(P_1(p), P_2(p), P_3(p))^t$ того же конуса, $P_k(p)$ – многочлены степени не выше второй. Всякий корень многочлена $P_2(p)$ простой, и он же является корнем ровно одного из многочленов $P_1(p), P_3(p)$, причем двойным. Это вытекает из невырожденности матрицы $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{TK}$. Образ вектора V единственным образом с точностью до одновременной смены знаков у комплексных чисел a, b, c, d представим в виде:

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{TK}V = \begin{pmatrix} (cp + d)^2 \\ (ap + b)(cp + d) \\ (ap + b)^2 \end{pmatrix} = (ad - bc) \left[\frac{d}{dp} \chi(\mathbf{T}, p) \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \chi(\mathbf{T}, p) \\ \chi^2(\mathbf{T}, p) \end{pmatrix}, \quad (47)$$

где мы по определению положили $\chi(\mathbf{T}, p) := \frac{ap + b}{cp + d} =: \chi(\mathbf{T})p$.

Покажем, что $\det \mathbf{T} = ad - bc$. Основанное на равенстве (47) прямое вычисление показывает, что $\det \mathbf{T} = (ad - bc)^3$. Равенство $(ad - bc)^2 = 1$ вытекает из (псевдо)ортогональности инвариантной билинейной формы $J_\bullet(\cdot, \cdot)$, полярной к квадратичной форме $J_\bullet(\cdot)$. Пусть $V^{(1)} := (1, p_1, p_1^2)^t$, $V^{(2)} := (1, p_2, p_2^2)^t$ – векторы конуса $\{J_\bullet(V) = 0\}$, тогда

$$\begin{aligned} J_\bullet(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{TK}V^{(1)}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{TK}V^{(2)}) &= (ad - bc)^2 \frac{(\chi(\mathbf{T}, p_1) - \chi(\mathbf{T}, p_2))^2}{\dot{\chi}(\mathbf{T}, p_1)\dot{\chi}(\mathbf{T}, p_2)} \\ &= (ad - bc)^2 (p_1 - p_2)^2 \\ &= (ad - bc)^2 J_\bullet(V^{(1)}, V^{(2)}) \\ &= J_\bullet(V^{(1)}, V^{(2)}). \end{aligned} \quad (48)$$

Для определенной нами дробно-линейной функции χ мы доказали тождество (45). Установим закон (44) преобразования стереографической координаты (42). Координата точки $W \sim \mathbf{K}(1 : p : p^2)^t \in \mathcal{C}$ совпадает с p ; координата точки $\mathbf{TW} \sim \mathbf{K}(1 : \chi(\mathbf{T}, p) : \chi^2(\mathbf{T}, p))^t$ есть $\chi(\mathbf{T}, p)$, так что равенство (44) справедливо.

Нам осталось показать, что χ – изоморфизм $SO_3(J)$ на PSL_2 . Мономорфность χ вытекает из тождества (45). Остановимся на эпиморфности χ . Всякий элемент

$\chi \in SL_2$ определяет при помощи равенства (47) некоторую матрицу $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{TK}$, являющуюся, как мы покажем, J_\bullet -ортогональной. Достаточно показать, что эта матрица сохраняет квадратичную форму $J_\bullet(\cdot)$ и билинейную форму $J_\bullet(\cdot, \cdot)$ для векторов конуса $\{J_\bullet(V) = 0\}$. Первое видно из (47), второе – из (48). Равенство $\det \mathbf{T} = (ad - bc)^3 = 1$ мы уже отмечали.

5.2.2. Координата p и форма ω_J на конусе. К сожалению, на конусе $\{W \in \mathbb{C}^3 : J(W) = 0\}$ нельзя ввести пару глобальных координат. Тем не менее, проектируя конус из начала координат на бесконечно удаленную конику \mathcal{C} , можно при $W \neq 0$ определить координату $p(W)$ по формуле (42). Роль второй “координаты” при исследовании задачи монодромии будет играть 1-форма, которую задает

ЛЕММА 13. (i) Пусть $W \neq 0$ – точка конуса $\{J(W) = 0\}$ и Z – касательный к конусу в точке W вектор. Форма ω_J , определяемая как отношение двух сонаправленных векторов

$$\langle \omega_J(W), Z \rangle := (W \times Z) : \nabla J(W) \quad (49)$$

(\times – векторное произведение в \mathbb{C}^3 , ∇ – оператор градиента), голоморфна при $W \neq 0$.

(ii) Форма ω_J инвариантна при движениях конуса:

$$\omega_J(\mathbf{T}W) = (\det \mathbf{T})\omega_J(W), \quad \mathbf{T} \in O_3(J). \quad (50)$$

(iii) Формы ω_J и dp пропорциональны:

$$(\det \mathbf{K})W dp(W) = \mathbf{K} \begin{pmatrix} 1 \\ p(W) \\ p^2(W) \end{pmatrix} \omega_J; \quad (51)$$

здесь $W \neq 0$ – точка конуса и \mathbf{K} – матрица (41), приводящая форму J к форме J_\bullet .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Покажем, что векторы в определении формы ω_J сонаправлены:

$$\nabla J(W) \times (W \times Z) = 2WJ(W, Z) - 2ZJ(W) = 0;$$

здесь $J(\cdot, \cdot)$ – билинейная форма, полярная квадратичной форме $J(\cdot)$. Форма ω_J имеет координатное представление

$$\omega_J(W) = \frac{W_1 dW_2 - W_2 dW_1}{2W_3 - \delta W_1 - \delta W_2} = \frac{W_2 dW_3 - W_3 dW_2}{2W_1 - \delta W_2 - \delta W_3} = \frac{W_3 dW_1 - W_1 dW_3}{2W_2 - \delta W_3 - \delta W_1}, \quad (52)$$

из которого видна голоморфность формы при $W \neq 0$.

(ii) Справедлива выкладка

$$\begin{aligned} \langle \omega_J(\mathbf{T}W), \mathbf{T}Z \rangle &:= (\mathbf{T}W \times \mathbf{T}Z) : \nabla J(\mathbf{T}W) \\ &= (\det \mathbf{T})\mathbf{T}^{-1t}(W \times Z) : \mathbf{T}^{-1t}\nabla J(W) \\ &= (\det \mathbf{T})(W \times Z) : \nabla J(W) =: (\det \mathbf{T})\langle \omega_J(W), Z \rangle. \end{aligned}$$

(iii) Формула (51) справедлива для любой невырожденной формы $J(W)$, если стереографическая координата p на конусе выбрана согласованно с матрицей \mathbf{K} ,

приводящей форму к виду $J_{\bullet}(V)$, т.е. $p(W) = V_2(W)/V_1(W)$, $W = \mathbf{K}V$. Для формы $J = J_{\bullet}$ равенство проверяется непосредственно:

$$(V_1, V_2, V_3)^t d(V_3/V_2) = ((V_2/V_3)dV_3 - dV_2)(1, V_3/V_2, (V_3/V_2)^2)^t.$$

Для произвольной формы J необходимо сделать линейную замену $\mathbf{K}V = W$, оставив прежним определение стереографической координаты p . Принимая во внимание тождество $\omega_J(\mathbf{K}V) = (\det \mathbf{K})\omega_{J_{\bullet}}(V)$, мы приходим к соотношению (51).

5.3. Решение на невырожденной квадрике. В этом пункте доказывается

ТЕОРЕМА 4. *При $\lambda \notin \{0, 1, 3\}$ собственные пары $(\lambda, u(t))$ интегрального уравнения ПС₃ с ненулевым инвариантом J_0 взаимно однозначно соответствуют проективным структурам $p(\tilde{m})$ на $\mathcal{M}(R_3)$ с общим числом ветвления $2g(\mathcal{M}) - 2$, для которых симметрии*

$$p([\mathbf{r}] \cdot \tilde{m}) = \chi \circ \mathbf{T}([\mathbf{r}])p(\tilde{m}) \quad (53)$$

выполнены для всех $\tilde{m} \in \tilde{\mathcal{M}}$ и всех четных классов $[\mathbf{r}] \in \pi_1(\mathcal{Y})$ и не выполнены хотя бы в одной точке \tilde{m} и для одного нечетного класса $[\mathbf{r}]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. По лемме 10 наличие симметрий (53) для всех четных петель $[\mathbf{r}]$ означает, что монодромия структуры есть $\chi \circ \mathbf{T}_{\mathcal{M}}$, а также наличие одной (случай $2_5\mathbf{3}_0$, $2_4\mathbf{3}_1$, $2_4\mathbf{3}_0$, $2_2\mathbf{3}_2$) либо двух (случай $2_3\mathbf{3}_1$) дополнительных симметрий. В случае уравнения общего положения $2_6\mathbf{3}_0$ дополнительных симметрий нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. 1. Соответствие $(\lambda, u) \rightarrow p$. Пусть $(\lambda, u(t))$ – собственная пара уравнения ПС₃ требуемого вида. По теореме 3 ей соответствует аналитический на поверхности $\mathcal{M}(R_3)$ вектор $W_{\mathcal{M}}(\tilde{m})$, лежащий на невырожденной квадрике $\{J(W) = J_0\}$. Этот вектор по формулам (37), (42) определяет пару мероморфных на \mathcal{M} функций $p^{\pm}(\tilde{m})$, для которых симметрии (34) переписываются в виде

$$p^{\pm}([\mathbf{r}] \cdot \tilde{m}) = \chi \circ \mathbf{T}([\mathbf{r}])p^{\pm}(\tilde{m}), \quad [\mathbf{r}] \in \ker \text{sign} \subset \pi_1(\mathcal{Y}), \quad (54)$$

$$p^{\pm}([\mathbf{r}] \cdot \tilde{m}) = \chi \circ \mathbf{T}([\mathbf{r}])p^{\mp}(\tilde{m}), \quad [\mathbf{r}] \in \pi_1(\mathcal{Y}) \setminus \ker \text{sign}. \quad (55)$$

Последнее равенство показывает, как восстановить одну из структур p^{\pm} , зная другую. В частности, дивизор ветвления $D(p^+)$ получается из дивизора $D(p^-)$ любым нечетным скольжением поверхности \mathcal{M} .

Покажем, что обе структуры p^{\pm} имеют одинаковые числа ветвления, равные $2g(\mathcal{M}) - 2$, для чего рассмотрим квадратичный дифференциал (Клейна):

$$\Omega(m) = \frac{dp^+(\tilde{m})dp^-(\tilde{m})}{(p^+(\tilde{m}) - p^-(\tilde{m}))^2}, \quad m \in \mathcal{M}, \quad \tilde{m} \in \tilde{\mathcal{M}}. \quad (56)$$

Это выражение является инфинитезимальной формой двойного отношения четырех точек и потому неизменно при одновременной дробно-линейной замене переменных p^+ , p^- (ср. с равенством (48)). Голоморфность $W_{\mathcal{M}}$ эквивалентна тому, что $p^+(\tilde{m}) \neq p^-(\tilde{m})$ везде на $\tilde{\mathcal{M}}$, поэтому для всякой точки \tilde{m} можно одновременной дробно-линейной заменой привести функции p^{\pm} к значениям $p^+(\tilde{m}) = 1$, $p^-(\tilde{m}) = 0$. Используя теперь разложение функций вблизи \tilde{m} по локальной координате, убеждаемся, что

$$D(p^+) + D(p^-) = (\Omega).$$

Степень же дивизора нулей квадратичного дифференциала равна $4g(\mathcal{M}) - 4$.

За искомую проективную структуру p возьмем структуру $p^+(\tilde{m})$. Последняя имеет число ветвления $2g - 2$, и равенства (53) выполнены для всех четных $[\mathbf{r}]$, для нечетных же $[\mathbf{r}]$ симметрия (53) переписывается в виде $p^+(\tilde{m}) = p^-(\tilde{m})$ и не выполнена ни для одного \tilde{m} . Заметим, что структура $p^-(\tilde{m})$ обладает всеми теми же свойствами.

2. *Соответствие* $p \rightarrow (\lambda, u)$. Пусть проективная структура $p(\tilde{m})$ обладает всеми свойствами из формулировки теоремы. Положим $p^+(\tilde{m}) := p(\tilde{m})$, тогда равенство (55) определит новую проективную структуру p^- . Нетрудно проверить, что определение этой новой структуры не зависит от выбора нечетного класса $[\mathbf{r}]$, а закон преобразования p^- такой же, как в (54).

Покажем, что везде $p^+(\tilde{m}) \neq p^-(\tilde{m})$. По условию теоремы $p^+(\tilde{m}) \not\equiv p^-(\tilde{m})$, поэтому формула (56) определяет мероморфный квадратичный дифференциал на поверхности \mathcal{M} . Приводя локально функции p^\pm к удобной для оценок форме, убеждаемся, что

$$D(p^+) + D(p^-) \geq (\Omega),$$

причем неравенство означает наличие точек, в которых $p^+ = p^-$. Но

$$\deg D(p^+) + \deg D(p^-) = 4g(\mathcal{M}) - 4 = \deg(\Omega),$$

поэтому таких точек нет.

Восстанавливая по стереографическим координатам (43) точки W^\pm на конике \mathcal{C} (43) и по паре точек коники точку на квадрике (используем значение инварианта J_0), из $p^\pm(\tilde{m})$ получаем голоморфный вектор $W_{\mathcal{M}}$. Законы преобразования пары структур (54), (55) переходят в закон (34) преобразования вектора $W_{\mathcal{M}}$. По теореме 3 этому вектору соответствует собственная пара интегрального уравнения ПС₃.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства теоремы видно, что соответствий $(\lambda, u) \leftrightarrow p$, сопоставляющих собственной паре ПС₃ специальную проективную структуру, на самом деле два: одно из них переводит пару (λ, u) в структуру p^+ , другое – в структуру p^- . Смена индексов у p^\pm приводит к смене знака у собственной функции $u(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из симметрий (53) проективной структуры p следует инвариантность дивизора ветвления p при четных скольжениях $[\mathbf{r}] \in \ker \text{sign} / pr_* \pi_1(\mathcal{M}_\circ)$ поверхности \mathcal{M} . Так, в случаях $\mathbf{2}_3\mathbf{3}_1$, $\mathbf{2}_2\mathbf{3}_2$ дивизор $D(p)$ содержит две (из четырех) неподвижных точек вращения \mathcal{M} третьего порядка (см. рис. 11).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае $\mathbf{2}_4\mathbf{3}_0$ поверхность \mathcal{M} является тором, а проективная структура на нем есть – с точностью до дробно-линейного преобразования – экспонента от абелева интеграла первого рода. Здесь решение можно довести до явных формул, что другим способом было сделано в [8].

5.4. Решение на конусе.

ТЕОРЕМА 5. При $\lambda \notin \{0, 1, 3\}$ собственные пары $(\lambda, u(t))$ интегрального уравнения ПС₃ с нулевым инвариантом J_0 взаимно однозначно соответствуют парам из проективной структуры $p(\tilde{m})$ и нетривиального голоморфного дифференциала $\omega(m)$ на $\mathcal{M}(R_3)$, обладающих симметриями

$$p([\mathbf{r}] \cdot \tilde{m}) = \chi \circ \mathbf{T}([\mathbf{r}])p(\tilde{m}), \quad \tilde{m} \in \widetilde{\mathcal{M}}, \quad [\mathbf{r}] \in \pi_1(\mathcal{Y}), \quad (57)$$

$$\omega([\mathbf{r}] \cdot m) = \text{sign}([\mathbf{r}])\omega(m), \quad m \in \mathcal{M}, \quad [\mathbf{r}] \in \pi_1(\mathcal{Y}) / pr_* \pi_1(\mathcal{M}_\circ), \quad (58)$$

и дивизоры которых связаны неравенством

$$D(p) \leq (\omega). \quad (59)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. *Соответствие* $(\lambda, u) \rightarrow (p, \omega)$. Пусть $(\lambda, u(t))$ – такая собственная пара уравнения ПС₃, что для соответствующего ей по теореме 3 голоморфного вектора $W_{\mathcal{M}}$ инвариант J_0 равен нулю. Решение $W_{\mathcal{M}}$ переносит с конуса $\{J(W) = 0\}$ на поверхность \mathcal{M} функцию p и голоморфный дифференциал ω_J . Коль скоро вектор $W_{\mathcal{M}}$ – не тождественный нуль, то формулы (42) и (52) корректно определяют мероморфную функцию $p(\tilde{m})$ и голоморфный дифференциал $\omega(m)$ также и в нулях векторного поля. Форма ω на поверхности наследует закон (50) преобразования формы ω_J на конусе; закон преобразования функции $p(\tilde{m})$ определяется из симметрий (34) вектора $W_{\mathcal{M}}$.

Покажем, наконец, что дивизор ветвления структуры $p(\tilde{m})$ не превосходит дивизора нулей формы ω . Из соотношения (51) видно, что функции ω/dp и $\omega/d(1/p)$ голоморфны, ибо являются линейными комбинациями компонент W_1, W_2, W_3 решения. Это и значит, что локальное число ветвления p не превосходит порядка нуля дифференциала ω .

2. *Соответствие* $(p, \omega) \rightarrow (\lambda, u)$. Пусть, обратно, $p(\tilde{m})$ – проективная структура с симметриями (57) и $\omega(m)$ – нетривиальный симметричный голоморфный дифференциал на \mathcal{M} . Положим по определению

$$W_{\mathcal{M}}(\tilde{m}) := (\det \mathbf{K})^{-1} \frac{\omega(\tilde{m})}{dp(\tilde{m})} \mathbf{K} \begin{pmatrix} 1 \\ p(\tilde{m}) \\ p^2(\tilde{m}) \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Такой вектор – голоморфная функция от \tilde{m} ввиду соотношения (59) между дивизором ветвления p и дивизором нулей ω . Определенный нами вектор $W_{\mathcal{M}}$ обладает требуемым законом преобразования:

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{M}}([\mathbf{r}] \cdot \tilde{m}) &= (\dot{\chi}(T([\mathbf{r}], p(\tilde{m})))^{-1} \text{sign}([\mathbf{r}]) (\det \mathbf{K})^{-1} \\ &\quad \times \frac{\omega(\tilde{m})}{dp(\tilde{m})} \mathbf{K} \begin{pmatrix} 1 \\ \chi \circ \mathbf{T}([\mathbf{r}]) p(\tilde{m}) \\ (\chi \circ \mathbf{T}([\mathbf{r}]) p(\tilde{m}))^2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(45)}{=} (\det \mathbf{K})^{-1} \frac{\omega(\tilde{m})}{dp(\tilde{m})} \mathbf{T}([\mathbf{r}]) \mathbf{K} \begin{pmatrix} 1 \\ p(\tilde{m}) \\ p^2(\tilde{m}) \end{pmatrix} := \mathbf{T}([\mathbf{r}]) W_{\mathcal{M}}(\tilde{m}). \end{aligned}$$

По теореме 3 пара (p, ω) порождает собственную пару (λ, u) уравнения ПС₃.

Применяя к вновь построенному вектору $W_{\mathcal{M}}(\tilde{m})$ процедуру п. 1 настоящего доказательства, мы вернемся к исходным проективной структуре p и голоморфному дифференциалу ω – это следует из тождества (51). Так что соответствия из пп. 1 и 2 являются взаимно обратными.

ЗАМЕЧАНИЕ. Симметричные голоморфные формы на поверхности описывает лемма 11. Из нее, в частности, следует, что уравнения ПС₃ типов $2_4\mathbf{3}_0, 2_3\mathbf{3}_1, 2_2\mathbf{3}_2$ не имеют решений с нулевым инвариантом J_0 .

§6. Приложения

В этом параграфе даны приложения развитой выше комплексно геометрической теории интегрального уравнения ПС₃. Так, суммируя утверждения теорем 4, 5, мы получаем критерий для собственных чисел уравнений общего вида.

ТЕОРЕМА 6. *Комплексное число $\lambda \notin \{0, 1, 3\}$ является собственным числом уравнения ПС₃ типа 2_63_0 тогда и только тогда, когда на римановой поверхности $\mathcal{M}(R_3)$ существует проективная структура без ветвления или с общим числом ветвления 2 и с монодромией $\chi \circ \mathbf{T}_{\mathcal{M}}$, параметрически зависящей от λ . Структурам без ветвления соответствуют собственные числа кратности 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если (λ, u) – собственная пара типичного уравнения ПС₃, то по теоремам 4 и 5 на $\mathcal{M}(R_3)$ есть проективная структура $p(\tilde{m})$ с требуемой монодромией и числом ветвления, не большим двух. Пусть $\deg D(p) = 1$, тогда в силу симметрии (57) с нечетной петлей $[\mathbf{r}]$ точка $D(p)$ неподвижна при гиперэллиптической инволюции поверхности \mathcal{M} . Выберем в окрестности $D(p)$ локальную координату w , меняющую знак при инволюции. После подходящей дробно-линейной замены p симметрия (57) для нечетных петель в окрестности точки ветвления запишется в виде $p(-w) = -p(w)$, откуда $\deg D(p)$ – четное число. Другая причина четности числа ветвления в том, что монодромия $\mathbf{T}_{\mathcal{M}}$ тривиальна вдоль половины циклов канонического базиса $\pi_1(\mathcal{M})$, а потому $\chi \circ \mathbf{T}_{\mathcal{M}}$ поднимается до представления $\pi_1(\mathcal{M}) \rightarrow SL_2$. Подробности см. в [11].

2) Обратно, пусть на \mathcal{M} есть проективная структура p с монодромией $\chi \circ \mathbf{T}_{\mathcal{M}}$. Для типичного уравнения по лемме 10 это означает выполнение равенства (53) для всех четных путей $[\mathbf{r}]$. Пусть число ветвления структуры – два. Если симметрия (53) не выполнена для нечетных петель, то λ – собственное число по теореме 4. Если же эта симметрия имеет место, то дивизор ветвления p инвариантен при гиперэллиптической инволюции, а значит, совпадает с дивизором нулей некоторой голоморфной формы ω , конечно, меняющей знак при инволюции. В этом случае λ – собственное число по теореме 5.

Пусть теперь p – структура без ветвления и $[\mathbf{r}]$ – любая нечетная петля. Две проективные структуры $p(\tilde{m})$ и $p_1(\tilde{m}) := \chi \circ \mathbf{T}([\mathbf{r}]^{-1})p([\mathbf{r}] \cdot \tilde{m})$ имеют одну монодромию и не имеют ветвления. По теореме Пуанкаре эти структуры совпадают, т.е. симметрия (57) имеет место и для нечетных петель $[\mathbf{r}]$. В качестве ω можно взять любой голоморфный дифференциал на \mathcal{M} , поэтому проективная структура без ветвления порождает двумерное собственное подпространство уравнения ПС₃. Других собственных векторов в этом случае нет, ибо теорема Пуанкаре утверждает [12], [13], что две проективные структуры с одинаковой монодромией и совкупным числом ветвления, меньшим $4g(\mathcal{M}) - 4$, совпадают.

Поясним, как возникает спектр типичного уравнения ПС₃ с точки зрения геометрии. Пространство $\mathcal{P}_2(\mathcal{M})$ проективных структур на $\mathcal{M}(R_3)$ с парой точек ветвления (определения см. в [11]–[13]) есть 5-мерное комплексное многообразие (variety). Отображение, сопоставляющее проективной структуре ее монодромию, вкладывает $\mathcal{P}_2(\mathcal{M})$ в 6-мерное комплексное пространство монодромий $\text{Hom}(\pi_1(\mathcal{M}), PSL_2)/PSL_2$. В этом пространстве представление $\chi \circ \mathbf{T}_{\mathcal{M}}$ задает комплексную кривую, параметризованную спектральным параметром λ . Точки пересечения кривой с 5-мерным образом $\mathcal{P}_2(\mathcal{M})$ и соответствуют собственным значениям уравнения ПС₃. Пространство $\mathcal{P}_2^s(\mathcal{M})$ структур с дополнительной

симметрией, отвечающей гиперэллиптической инволюции \mathcal{M} , имеет комплексную размерность 4. Можно предположить, что образ $\mathcal{P}_2^s(\mathcal{M})$ в пространстве монодромий пересекается с кривой, определяемой представлением $\chi \circ \mathbf{T}_{\mathcal{M}}$ лишь для поверхностей \mathcal{M} , образующих многообразие коразмерности 1 в пространстве Тейхмюллера $\mathcal{T}(2)$. Точки \mathcal{M} пространства Тейхмюллера, несущие нужные структуры без ветвления, еще более редки.

6.1. Локализация спектра. Операторный подход к исследованию уравнения ПС дает [2], [4] верхние и нижние границы для собственных чисел λ уравнения. Эти границы зависят от метрических свойств замены переменных $R(t)$. Равномерные для всех рациональных функций третьего порядка границы спектра уравнения ПС устанавливает

ТЕОРЕМА 7. *Спектр любого интегрального уравнения ПС с рациональной заменой переменных R_3 третьей степени лежит на отрезке $[0, 3]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся одним фактом из операторного анализа уравнения ПС [2], [4], именно, тем фактом, что спектр лежит на действительной оси. (Полезно интерпретировать его на языке геометрии.) Для действительных $\lambda \notin [0, 3]$, как следует из леммы 12 (см. (46)), монодромия $\chi \circ \mathbf{T}_{\mathcal{M}}$ унитарна. С учетом теорем 4, 5 доказательство завершает

ЛЕММА 14. *Если число ветвления проективной структуры p на римановой поверхности \mathcal{M} рода g не превышает $2g - 2$, то монодромия p неунитарна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Пуанкаре доказал это утверждение для структур без ветвления. Та же идея работает, если число ветвления p не превосходит абсолютной величины эйлеровой характеристики поверхности \mathcal{M} . Пусть монодромия p унитарна, тогда выражение

$$ds^2 = (1 + p\bar{p})^{-2} dp d\bar{p}$$

определяет на \mathcal{M} конформную метрику, вырожденную в точках дивизора ветвления. Форма гауссовой кривизны этой метрики

$$\Theta = -(2\pi i)^{-1} d'' d' \ln(1 + p\bar{p})^{-2} |dp/dx|^2,$$

где x – локальная координата, положительна на $\mathcal{M} \setminus |D(p)|$, однако по формуле Гаусса–Бонне

$$0 < \int_{\mathcal{M}} \Theta \stackrel{(*)}{=} 2 - 2g + \deg D(p) \leq 0.$$

Для экономии места мы опустили (см. [14]) промежуточную выкладку (*).

6.2. Представление решений уравнения ПС₃. Наглядный, использовавшийся еще Ф. Клейном, способ задания проективных структур состоит в следующем. Разрежем поверхность \mathcal{M} с заданной на ней линейно полиморфной функцией p так, чтобы в образовавшейся (возможно многосвязной) области существовала однозначная ветвь p ; p -образ разрезанной поверхности есть поверхность \mathcal{F} (возможно, многолистно и с ветвлением), распростертая над римановой сферой. Граничные компоненты \mathcal{F} разбиты на пары $(\partial\mathcal{F})_s^+$, $(\partial\mathcal{F})_s^-$, $s = 1, 2, \dots$, каждой из которых отвечает обрашающее естественную ориентацию границы дробно-линейное преобразование $(\partial\mathcal{F})_s^+ \rightarrow (\partial\mathcal{F})_s^-$ из группы монодромии p . Такие поверхности \mathcal{F} называют *мембранами*. Ниже построен пример мембраны для проективной структуры, порождающей собственную пару уравнения ПС₃.

6.2.1. Мембрана. Пусть λ – любое число из интервала $(1, 2)$. Неподвижные точки вращения второго порядка $\chi(\mathbf{D})$, зависящего от λ как от параметра, комплексно сопряжены и лежат на дуге $\{p \in \mathbb{C} : |p| = 1, |\arg p| < \pi/3\}$ единичной окружности. Проведем через неподвижные точки $\chi(\mathbf{D})$ окружность C , ортогональную единичной. В плоскости комплексного переменного p окружность C и повернутая действительная ось $\varepsilon\widehat{\mathbb{R}}$ ограничивают кольцевую область \mathcal{F}_1 ; другая кольцевая область \mathcal{F}_2 ограничена действительной осью \mathbb{R} и окружностью εC . Двухлистная мембрана \mathcal{F} состоит из колец $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, склеенных крест накрест через разрез Γ , симметричный относительно единичной окружности (см. рис. 12).

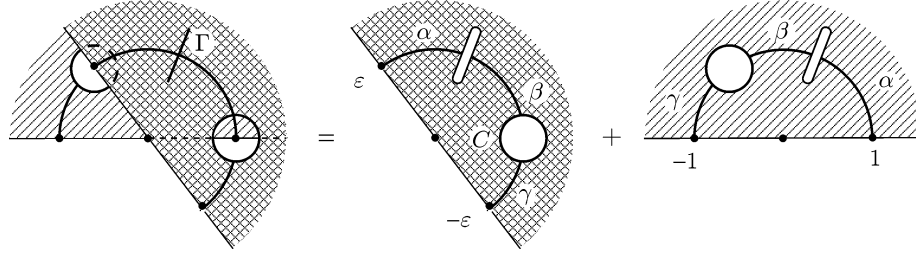


Рис. 12. Мембрана \mathcal{F} в плоскости комплексной переменной p

6.2.2. Вещественная алгебраическая кривая. отождествляя границы четырехсвязной области \mathcal{F} при помощи обрабатывающих ориентацию дробно-линейных отображений

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{D}_2\mathbf{D}_3): \widehat{\mathbb{R}} &\rightarrow \varepsilon\widehat{\mathbb{R}}, \\ \chi(\mathbf{D}_3\mathbf{D}): C &\rightarrow \varepsilon C, \end{aligned} \tag{61}$$

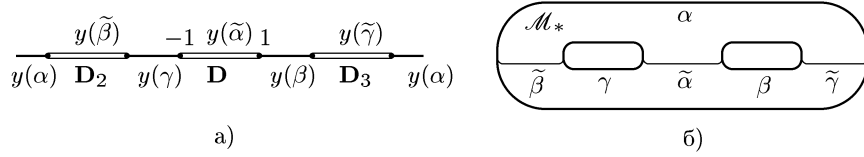
мы превращаем \mathcal{F} в компактную риманову поверхность $\mathcal{M}_* = \mathcal{M}_*(\lambda, \partial\Gamma)$. Эта поверхность зависит от трех действительных параметров и гиперэллиптическая, поскольку имеет род $g = 2$. Для построенной поверхности можно в явном виде указать антиконформную инволюцию \overline{H} , так что алгебраическая кривая \mathcal{M}_* является вещественной. Действительно, на каждом листе $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ отражение \overline{H} действует как инверсия относительно единичной окружности: $p \rightarrow 1/\overline{p}$. Действие \overline{H} согласовано на разрезе Γ и сохраняет граничные отождествления (61).

На \mathcal{M}_* существует (единственный с точностью до вещественного дробно-линейного преобразования) элемент второго порядка $y(m) \in \mathbb{C}(\mathcal{M}_*)$, подвергающийся комплексному сопряжению при отражении:

$$y(\overline{H}m) = \overline{y(m)}, \quad m \in \mathcal{M}_*. \tag{62}$$

Если разрез Γ трансверсален единичной окружности, то неподвижные точки отражения \overline{H} образуют три овала α, β, γ , как на рис. 12. Образы $y(\alpha), y(\beta), y(\gamma)$ этих овалов суть три непересекающихся действительных отрезка, концы которых – точки ветвления гиперэллиптической поверхности \mathcal{M}_* (рис. 13а)). Помимо α, β, γ на \mathcal{M}_* есть еще три овала $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$, где функция $y(m)$ принимает действительные значения. Каждый из овалов одной группы пересекается ровно с двумя овалами другой группы (рис. 13б)).

6.2.3. Проективная структура. Сопоставив каждой точке $m \in \mathcal{M}_*$ точку $p(m)$ на мембране \mathcal{F} , мы получим однозначную ветвь проективной структуры p

Рис. 13. а) Двухлистная форма поверхности $\mathcal{M}_*(\lambda, \partial\Gamma)$; б) шесть овалов

на \mathcal{M}_* , разрезанной вдоль двух циклов. Эта структура имеет пару простых точек ветвления, а ее монодромию можно задать, приписав трем циклам $C \subset \overline{\mathcal{F}}_1$, $\widehat{\mathbb{R}} \subset \overline{\mathcal{F}}_2$, Γ на поверхности три дробно-линейных преобразования $\chi(\mathbf{D})$, $\chi(\mathbf{D}_2)$, $\chi(\mathbf{D}_3)$ соответственно. Из следующего пункта будет ясно, что эти три цикла можно изотопией перевести в три овала $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ соответственно, на которых вещественна функция $y(m)$. Итак, монодромия структуры p возникает из монодромии на римановой сфере с шестью проколами, которая задается тремя вещественными разрезами $y(\tilde{\alpha})$, $y(\tilde{\beta})$, $y(\tilde{\gamma})$ с сопоставлением им матриц \mathbf{D} , \mathbf{D}_2 , \mathbf{D}_3 . Теперь нетрудно подобрать рациональную функцию R_3 третьей степени такую, что $\mathcal{M}(R_3) = \mathcal{M}_*(\lambda, \partial\Gamma)$, а монодромия структуры p совпадает с $\chi \circ \mathbf{T}_\mathcal{M}$ (см. последнюю строчку таблицы теоремы 2.1.1). С точностью до преобразований (24) функцию R_3 можно восстановить по ее критическим значениям – концам отрезков $y(\tilde{\beta})$, $y(\tilde{\gamma})$, а также по ее монодромии \mathbf{T}_* . По теореме 6 λ является собственным числом уравнения ПС₃ с указанным рациональным параметром R_3 . Доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Всякое число $\lambda \in (1, 2)$ является собственным числом некоторого (зависящего от λ) интегрального уравнения ПС₃.*

Нетрудно понять, что следует изменить, чтобы получить представления других собственных пар данного уравнения ПС₃. Изменить нужно конструкцию мембраны \mathcal{F} . Так, с помощью процедуры графтинга [11], [12], [15], при которой в мембрану “вшивается” кольцо, можно модифицировать проективную структуру, не меняя ее монодромии, но меняя комплексную структуру подлежащей поверхности \mathcal{M} . Чтобы вернуться к прежней комплексной структуре на \mathcal{M} , необходимо изменить три параметра, от которых зависит комплексная структура поверхности \mathcal{M}_* , задаваемой мембраной. Один из этих параметров и есть спектральный параметр λ . Было бы полезно перечислить все проективные структуры (= конструкции мембран), порождающие собственные пары уравнения ПС₃ в духе статьи [15].

6.2.4. Мембрана с дополнительной симметрией. Решение задачи монодромии Римана, восстановленное из проективной структуры предыдущего пункта, вообще говоря, лежит на невырожденной квадратике. Условие (53) для нечетных петель $[\mathbf{r}]$ означает, что точки ветвления мембраны \mathcal{F} переходят друг в друга при вращении второго порядка $\chi(\mathbf{D}_3)$. Двупараметрическое семейство таких мембран и рассматривается в этом пункте.

Пусть разрез Γ не только симметричен относительно единичной окружности, но и лежит на прямой $\varepsilon^2 \widehat{\mathbb{R}}$. В этом случае можно явно указать гиперэллиптическую инволюцию H поверхности \mathcal{M}_* . Именно, точка p одного из листов \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 переходит в точку $\chi(\mathbf{D}_3)p$ другого листа. Нетрудно проверить согласованность этого определения на циклах $C \subset \overline{\mathcal{F}}_1$, $\widehat{\mathbb{R}} \subset \overline{\mathcal{F}}_2$, Γ . Инволюция H имеет шесть неподвижных точек a, b, c, d, e, f , которые показаны на листе \mathcal{F}_2 слева на рис. 14.

Укажем явное представление для функции $y(m)$ из (62) и для точек ветвления двухлистной поверхности \mathcal{M}_* . Элемент второго порядка y инвариантен при гипер-

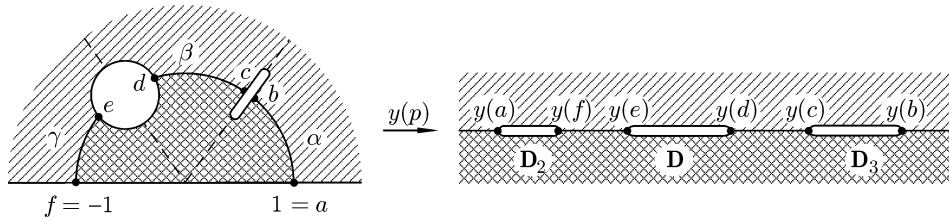


Рис. 14. Представление функции $y(p)$ для симметричной мембраны \mathcal{F}

эллиптической инволюции, а потому принимает вещественные значения на циклах $C = \tilde{\alpha}$, $\mathbb{R} = \tilde{\beta}$, $\Gamma = \tilde{\gamma}$ поверхности. Тем самым, функция $y(m)$ осуществляет конформное отображение каждой из четырех областей, образуемых при разрезании листов $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ вдоль единичной окружности и Γ , на верхнюю либо на нижнюю полуплоскости в соответствии с принципом симметрии. Легко видеть, что для рассматриваемого семейства поверхностей $\mathcal{M}_*(\lambda, \partial\Gamma)$ связанная с ним проективная структура p обладает симметрией (57) для нечетных петель, а потому решение W задачи монодромии Римана лежит на конусе.

§7. Заключение

Приходится сталкиваться с различными толкованиями понятия *решения* уравнений математической физики. В этом вопросе можно выделить три традиции. Представители первой из них считают задачу решенной, если доказано *существование* решения в каком-то функциональном классе, тем самым фиксированы особенности решения, определены его гладкость и суммируемость. Такое решение не удовлетворит физика, ибо за всякой грамотно поставленной задачей стоит физическая реальность, в существовании которой он не сомневается.

Другая традиция состоит в *численном* решении задач, например, в инженерных расчетах. Важность этого направления – в его связи с практическими приложениями математической науки. Вместе с тем численное решение само по себе не является удовлетворительным для ума, ибо трудно считать решением континуальной задачи дискретный набор чисел. С известными оговорками можно сказать, что численный подход неадекватен природе решения.

Третья традиция – это нахождение *явных представлений* для решения, скажем формул. Такое решение следует признать самым ценным, ибо из формулы видно существование решения, понятны его глобальные и локальные свойства, по формуле же можно провести и численные расчеты. Существуют, конечно, обескураживающие результаты о несуществовании тех или иных представлений. Так, общие полиномиальные уравнения неразрешимы в радикалах, общие ОДУ неразрешимы в квадратурах и т. д. В этой связи А. Пуанкаре писал: “После длинных и тщетных усилий свести проблемы к более простым геометры уступили необходимости изучения проблем самих по себе, и они были вознаграждены.” Это означает, что нужно находить новые виды конструктивных представлений решений. По мысли Пуанкаре, с каждым уравнением естественно связано некое семейство трансцендентных функций, изучение свойств которых (в том числе и методов вычисления) позволяет понять исходное физическое явление. В духе этого подхода и выполнена настоящая работа.

Список литературы

1. *Gunning R. C.* Special coordinate coverings of Riemann surfaces // *Math. Ann.* 1967. V. 170. P. 67–86.
2. *Лебедев В. И., Агошков В. И.* Операторы Пуанкаре–Стеклова и их применение в анализе. М.: ОВМ АН, 1983.
3. *Овчинников Е. Э.* Сопряженные уравнения, алгоритмы возмущений и оптимальное управление // Сб. научн. тр. ИВМ РАН / ред. В. И. Агошкова, В. П. Шутяева. Депонировано в ВИНТИ 25.03.93, № 453В93. С. 64–100.
4. *Богатырев А. Б.* Дискретный спектр задачи для пары операторов Пуанкаре–Стеклова // Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 3. С. 295–297.
5. *Богатырев А. Б.* Геометрический способ решения серии интегральных уравнений Пуанкаре–Стеклова // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 3. С. 343–353.
6. *Большух А. А.* Проблема Римана–Гильберта // УМН. 1990. Т. 45. № 2. С. 3–47.
7. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в 19 столетии. М.: Наука, 1989.
8. *Богатырев А. Б.* Интегральные уравнения Пуанкаре–Стеклова и задача монодромии Римана // Функци. анализ и его прилож. 2000. Т. 34. № 2. С. 9–22.
9. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1986.
10. *Тюрин А. Н.* О периодах квадратичных дифференциалов // УМН. 1978. Т. 33. № 6. С. 149–195.
11. *Gallo D., Karovich M., Marden A.* The monodromy groups of Schwarzian equations on closed Riemann surfaces // Preprint. Minneapolis: Minneapolis Univ., 1999.
12. *Hejhal D. A.* Monodromy groups and linearly polymorphic functions // *Acta Math.* 1975. V. 135. P. 1–55.
13. *Mandelbaum R.* Branched structures and affine and projective bundles on Riemann surfaces // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1973. V. 183. P. 37–58.
14. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.
15. *Goldman W.* Projective structures with fuchsian holonomy // *J. Differential Geom.* 1987. V. 25. P. 297–326.

Институт вычислительной математики РАН
E-mail: gourmet@inm.ras.ru

Поступила в редакцию
 15.12.1999