

УДК 517.545+517.518.826

А. Б. Богатырёв

Комбинаторное описание пространства модулей кривых и экстремальных многочленов

При описании экстремальных многочленов (т.е. типичных решений задач о наименьшем уклонении) используются вещественные гиперэллиптические кривые. В работе рассмотрено разбиение пространства модулей таких кривых на клетки, перечисляемые деревьями. В качестве приложения этой техники явно вычислен образ отображения периодов, заданного на универсальной накрывающей пространства модулей. Дополнительно мы перечисляем экстремальные многочлены с помощью взвешенных графов.

Библиография: 12 названий.

§1. История вопроса

Вещественный многочлен $P(x)$ от одной переменной назовем (нормированным) g -экстремальным, если все его критические точки, за исключением g из них, являются простыми со значениями ± 1 . Количество исключительных критических точек подсчитывается по формуле

$$g = \sum_{x: P(x) \neq \pm 1} \text{ord } P'(x) + \sum_{x: P(x) = \pm 1} \left[\frac{1}{2} \text{ord } P'(x) \right], \quad (1)$$

где $\text{ord } P'(x)$ – порядок нуля производной многочлена P в точке $x \in \mathbb{C}$, $[\cdot]$ – целая часть числа. Экстремальные многочлены с $g = 0$ (П. Л. Чебышёв, 1853) и $g = 1$ (Е. И. Золотарёв, 1868) хорошо изучены и используются при решении целого ряда задач о наименьшем уклонении в равномерной метрике [1]. Общие экстремальные многочлены позволяют значительно расширить круг эффективно решаемых оптимизационных задач этого вида [2]. В общем случае g -экстремальные многочлены описываются при помощи вещественных гиперэллиптических кривых рода g и зависят от g целочисленных и g непрерывных параметров. Перечисление допустимых наборов дискретных параметров и стимулировало написание настоящей работы.

При небольшом g (насколько позволяет мощность используемого компьютера) экстремальные многочлены можно эффективно вычислять [3], [4], отталкиваясь от восходящего к П. Л. Чебышёву и подробно описанного в [2] представления этих многочленов. Характерной чертой чебышёвского представления является независимость сложности вычисления многочленов от их степени n при фиксированном g .

Работа выполнена при поддержке Фонда содействия отечественной науке, Программы РАН “Современные проблемы теоретической математики” (проект “Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики”) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-06299).

Изложим идею этого представления, основанного на геометрической интерпретации уравнения Пелля с полиномиальным коэффициентом. Последнее традиционно используется при анализе задач о наименьшем уклонении [5], а методы исследования восходят к известной работе Н. Х. Абеля 1826 года. Мы сопоставляем всякому многочлену $P(x)$ гиперэллиптическую кривую

$$M = M(\mathbf{e}) = \left\{ (x, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = \prod_{s=1}^{2g+2} (x - e_s) \right\} \quad (2)$$

с дивизором ветвления $\mathbf{e} := \{e_s\}_{s=1}^{2g+2}$, e_s – нули нечетной кратности многочлена $P^2(x) - 1$. Род g этой кривой равен количеству исключительных критических точек многочлена $P(x)$ при подсчете (1) с учетом кратностей. Многочлен $P(x)$ естественно порождает отображение¹ $\tilde{P}(x, w)$ накрывающих пространств в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} (x, w) \in M(\mathbf{e}) & \xrightarrow{\tilde{P}} & \mathbb{CP}_1 \ni u \\ \downarrow \chi & & \downarrow \sigma \\ x \in \mathbb{CP}_1 & \xrightarrow{P} & \mathbb{CP}_1 \end{array}, \quad (3)$$

где $\chi(x, w) := x$ – двулистное накрытие, ветвящееся над точками \mathbf{e} ; $\sigma(u) := \frac{1}{2}(u + \frac{1}{u})$ – двулистное накрытие, ветвящееся над ± 1 . Отображение $\tilde{P}(x, w)$ оказывается эквивариантным по отношению к скольжениям (смене листов) на накрывающих: $\tilde{P}(x, -w) = 1/\tilde{P}(x, w)$, поэтому дивизор функции $\tilde{P}(x, w)$ состоит из двух точек: полюса порядка $n := \deg P$ на бесконечности ∞_+ одного листа и нуля того же порядка на бесконечности ∞_- другого листа. Верно и обратное: всякая мероморфная функция \tilde{P} на $M(\mathbf{e})$ с дивизором $n(\infty_- - \infty_+)$ удовлетворяет (после перенормировки) условию эквивариантности и опускается до отображения $P(x)$ в базах. Последнее оказывается многочленом степени n и автоматически будет иметь нужное количество простых критических точек со значениями ± 1 .

В рамках этой конструкции задача описания g -экстремальных многочленов данной степени n эквивалентна перечислению кривых M вида (2), допускающих мероморфную функцию с дивизором $n(\infty_- - \infty_+)$. Задача о существовании и представлении такой функции замкнуто решается в терминах самой кривой M при помощи критерия Абеля [6]. На всякой кривой (2) существует единственный абелев дифференциал 3-го рода

$$d\eta_M = \left(x^g + \sum_{s=0}^{g-1} c_s x^s \right) \frac{dx}{w} \quad (4)$$

с чисто мнимыми периодами. Указанная нормировка имеет ясный физический смысл: в точки ∞_{\pm} нужно поместить электрические заряды ± 1 , тогда возникающее распределение потенциала на римановой поверхности M будет вещественной частью соответствующего абелева интеграла η_M . В терминах дифференциала, приписанного кривой M , многочлен $P(x)$ степени n можно восстановить с точностью до знака по явной формуле

$$P(x) = \pm \cos \left(ni \int_{(e,0)}^{(x,w)} d\eta_M \right), \quad x \in \mathbb{C}, \quad (x, w) \in M, \quad (5)$$

¹Это отображение известно также как функция Ахиезера $P(x) + \sqrt{P^2(x) - 1}$.

где выражение в левой части не зависит от выбора пути интегрирования, точки ветвления $(e, 0)$ и точки (x, w) на кривой M , накрывающей аргумент многочлена. Для кривой M , порожденной многочленом степени n , дифференциал $d\eta_M$ совпадает с $n^{-1}d\log\tilde{P}(x, w)$, поэтому те и только те кривые M порождаются многочленами степени n , для которых периоды связанного с кривой дифференциала $d\eta_M$ лежат в решетке $2\pi in^{-1}\mathbb{Z}$.

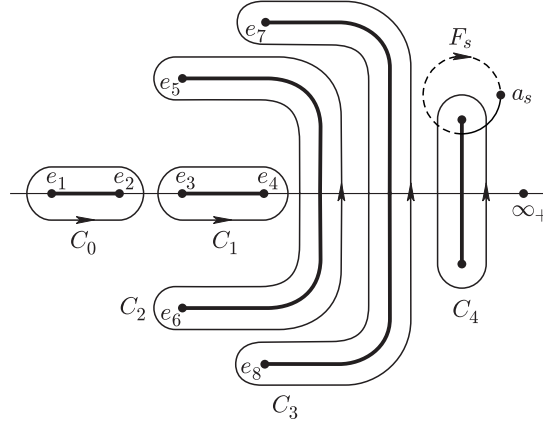


Рис. 1. Система разрезов Λ на плоскости при $g = 4, k = 2$ и целый базис в $H_1^-(M, \mathbb{R})$

В дальнейшем мы рассматриваем только вещественные многочлены $P(x)$. Им соответствуют *вещественные кривые* M , т.е. допускающие *антиконформную инволюцию* (отражение) $\bar{J}(x, w) := (\bar{x}, \bar{w})$. Отражение \bar{J} естественно действует на *пространстве гомологий* $H_1(M, \mathbb{R})$ кривой M , которое получается из гомологий компактной кривой $M_c := M \cup \infty_+ \cup \infty_-$ добавлением одной образующей $-$ цикла, окружающего прокол ∞_+ или ∞_- . Базис C_0, C_1, \dots, C_g подпространства нечетных циклов $H_1^-(M, \mathbb{R}) := \{C \in H_1(M, \mathbb{R}) : \bar{J}C = -C\}$ изображен на рис. 1, где жирными линиями показана система разрезов плоскости, попарно соединяющих точки ветвления кривой M . Связанный с вещественной кривой дифференциал (4) сам оказывается вещественным, т.е. его коэффициенты $c_s \in \mathbb{R}$. Периоды вещественного дифференциала $d\eta_M$ по четным циклам $-$ неизменным при отражении \bar{J} $-$ равны нулю и автоматически лежат в решетке $2\pi in^{-1}\mathbb{Z}$. Вещественная кривая M порождена вещественным многочленом P степени n , если и только если выполнена система уравнений Абеля [2]:

$$-i \int_{C_s} d\eta_M = 2\pi \frac{m_s}{n}, \quad m_s \in \begin{cases} \mathbb{Z}, & s = 0, 1, \dots, k-1, \\ 2\mathbb{Z}, & s = k, \dots, g, \end{cases} \quad (6)$$

здесь C_s $-$ выбранный базис в решетке нечетных циклов; k $-$ число ковещественных овалов кривой M . Некоторые из чисел m_s должны быть четными, поскольку целые 1 -циклы при проекции на нечетные 1 -циклы могут оказаться полуцелыми.

Левые части уравнений Абеля являются локально однозначными аналитическими функциями точек ветвления кривой, но глобально они неоднозначны. Поменяйте местами пару точек ветвления из верхней полуплоскости $-$ и вы придете к

другому базису в решетке нечетных циклов. Левые части уравнений Абеля – периоды ассоциированного с кривой дифференциала – живут на универсальной накрывающей пространства модулей вещественных кривых M , которое является клеткой размерности $2g$. Среди равенств (6) только g независимых, ибо цикл $\sum_{s=0}^g C_s$ стягивается к полюсу дифференциала $d\eta_M$ с известным вычетом. Так возникает имеющее полный ранг [2] *отображение периодов* $\Pi: \mathbb{R}^{2g} \rightarrow \mathbb{R}^g$. В настоящей статье полностью решены два вопроса, касающиеся отображения периодов:

1. найден образ универсальной накрывающей пространства модулей вещественных кривых (2) при отображении периодов;
2. приведен пример слоя отображения периодов, инвариантный при скольжении универсальной накрывающей; это означает, что проекция слоев отображения периодов на пространство модулей, вообще говоря, не является вложением.

§ 2. Основная теорема

Для формулировки главного результата работы нужно строго определить отображение периодов на универсальной накрывающей пространства модулей кривых (2). Введем необходимые понятия.

2.1. Пространства модулей кривых. Пусть \mathbf{e} – неупорядоченный набор различных точек e_1, \dots, e_{2g+2} , включающий $2k$ вещественных точек и $g - k + 1$ пар комплексно-сопряженных точек. На подобных наборах свободно действует группа \mathfrak{A}_1^+ сохраняющих ориентацию аффинных движений вещественной оси: $\mathbf{e} = \{e_s\}_{s=1}^{2g+2} \rightarrow A\mathbf{e} + B = \{Ae_s + B\}_{s=1}^{2g+2}$, $A > 0, B \in \mathbb{R}$. Орбиты этого действия назовем *пространством \mathcal{H}_g^k* . Сопоставив всякому симметричному простому дивизору \mathbf{e} гиперэллиптическую кривую (2), мы приходим к эквивалентному определению \mathcal{H}_g^k как *пространства модулей (конформных классов) вещественных гиперэллиптических кривых рода g с k ковещественными овалами и с отличной от точек ветвления отмеченной точкой ∞_+ на ориентированном вещественном овале*.

Пространство \mathcal{H}_g^k является $2g$ -мерным вещественным многообразием. Для введения координат локально занумеруем точки набора \mathbf{e} и зафиксируем пару комплексно-сопряженных либо пару вещественных точек e_{2g+1}, e_{2g+2} . В качестве локальных координат в пространстве модулей возьмем переменные величины $\operatorname{Re} e_s$ для вещественных точек e_s и $\operatorname{Re} e_s, \operatorname{Im} e_s$ для точек e_s из открытой верхней полуплоскости \mathbb{H} , $1 \leq s \leq 2g$. Топологически это пространство при $k > 0$ представляет собой произведение клетки размерности $2k - 2$ на конфигурационное пространство полуплоскости \mathbb{H} . В частности, фундаментальная группа $\pi_1(\mathcal{H}_g^k)$ изоморфна [2] группе кос $g - k + 1$ нитями $\operatorname{Vr}_{g-k+1}$ (также и при $k = 0$).

Существует несколько представлений *универсальной накрывающей $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$* пространства модулей [4], самое наглядное из которых – это *пространство лабиринтов*. Лабиринтом (\mathbf{e}, Λ) с инвариантами g, k назовем пару, состоящую из описанного выше дивизора \mathbf{e} и набора $\Lambda = (\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_g)$ непересекающихся простых гладких дуг, попарно соединяющих точки дивизора (см. рис. 2). Первые k дуг лабиринта – это проекции ковещественных овалов $\{x \in \mathbb{R} : w^2(x) < 0\}$ кривой $M(\mathbf{e})$. Оставшиеся $g - k + 1$ дуг соединяют комплексно-сопряженные точки \mathbf{e} , инвариантны при отражении в вещественной оси и обходят первую группу дуг справа. Пере-

сечения с вещественной осью естественно упорядочивают дуги Λ_j . Два лабиринта (\mathbf{e}, Λ) и (\mathbf{e}', Λ') считаем эквивалентными, если найдется движение из \mathfrak{A}_1^+ , переводящее \mathbf{e} в \mathbf{e}' , а пути Λ – в пути, которые можно непрерывно продеформировать в пути Λ' , при этом деформируемые пути и набор точек \mathbf{e}' в любой момент времени образуют лабиринт. Всевозможные лабиринты по модулю этого отношения эквивалентности назовем пространством лабиринтов \mathcal{L}_g^k .

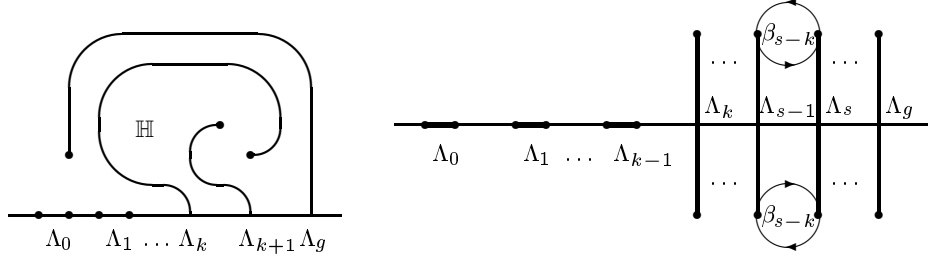


Рис. 2. а) \mathbb{H} с разрезом вдоль Λ ; б) полускручивания Дэна $\beta_1, \dots, \beta_{g-k}$ как скольжения \mathcal{L}_g^k

ТЕОРЕМА 1 [4]. *Пространство лабиринтов \mathcal{L}_g^k гомеоморфно универсальной накрывающей $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$ пространства модулей и является клеткой размерности $2g$.*

И пространство лабиринтов, и универсальная накрывающая пространства модулей порознь гомеоморфны пространству Тайхмюллера $g - k + 1$ раз проколотого диска с $2k + 1$ отмеченными точками на его границе. Пространство Тайхмюллера и есть клетка размерности $2g$. Детальное доказательство указанных совпадений выходит за рамки настоящей работы, поскольку требует специального аппарата. Говоря же неформально, универсальная накрывающая пространства модулей – это совокупность дивизоров ветвления \mathbf{e} вместе с историей их движения от отмеченного дивизора \mathbf{e}^0 . Считая разрезы лабиринта следами движения дивизора, эту историю мы можем восстановить.

Группа кос Vg_{g-k+1} действует скольжениями на универсальной накрывающей пространства модулей, в том числе и на пространстве лабиринтов \mathcal{L}_g^k . Реализуем Vg_{g-k+1} в виде модулярной группы – группы $\mathrm{Mod}(\mathbb{H} \setminus \mathbf{e})$ изотопических классов диффеоморфизмов проколотого диска $\mathbb{H} \setminus \mathbf{e}$, неподвижных на его границе [7]. Образующие этой группы суть скручивания Дэна $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{g-k}$ на полоборота по кривым, охватывающим пару проколов диска (см. рис. 2б)). Преобразование $f \in \mathrm{Mod}(\mathbb{H} \setminus \mathbf{e})$, симметрично продолженное в нижнюю полуплоскость, переводит лабиринт (\mathbf{e}, Λ) в лабиринт $(\mathbf{e}, f\Lambda)$.

Рассмотрение лабиринтов вызвано тем, что на кривой $M(\mathbf{e})$ нет выделенного базиса в пространстве нечетных гомологий, а лабиринт (\mathbf{e}, Λ) такой базис дает.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обход против часовой стрелки по берегу разрезов $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_g$ на верхнем листе $M(\mathbf{e})$ задает *выделенный базис* C_0, C_1, \dots, C_g в пространстве $H_1^-(M, \mathbb{R})$, см. рис. 1.

2.2. Перенос 1-циклов и отображение периодов. Для исследования периодов дифференциала $d\eta_M$ как функций переменной кривой M построим *гомологическое расслоение* [8], базой которого будет пространство модулей. Слоем

вещественного ранга $2g + 1$ векторного расслоения $H_1 \mathcal{H}_g^k \rightarrow \mathcal{H}_g^k$ над точкой M является пространство гомологий $H_1(M, \mathbb{R})$ кривой M . Напомним, что M получается из компактной кривой двумя проколами на бесконечности, поэтому к привычным $2g$ независимым 1-циклам добавляется 1-цикл, окружающий (любой) прокол. Гомологическое расслоение естественно расщепляется в сумму подрасслоений $H_1^+ \mathcal{H}_g^k$ и $H_1^- \mathcal{H}_g^k$, слои которых являются отвечающими значениям ± 1 собственными подпространствами оператора отражения $\overline{J}(x, w) := (\overline{x}, \overline{w})$, действующего на гомологиях. Локальная тривиализация гомологического расслоения определяется следующим образом.

Пусть точка $M(\mathbf{e})$ базы расслоения пробегает достаточно малую окрестность выделенной точки $M_0 = M(\mathbf{e}^0)$ в пространстве модулей. Рассмотрим перестановочный с комплексным сопряжением диффеоморфизм плоскости, переводящий выделенный дивизор \mathbf{e}^0 в заданный \mathbf{e} и тождественный вне малой окрестности точек выделенного дивизора. Указанное отображение плоскости поднимается до отображения ее двулистных накрывающих $M(\mathbf{e}^0) \rightarrow M(\mathbf{e})$ и порождает изоморфизм их пространств гомологий. Этот изоморфизм $H_1(M(\mathbf{e}^0)) \simeq H_1(M(\mathbf{e}))$ уважает расщепление на четные и нечетные 1-циклы, а также целочисленные гомологии. Полученное естественное отождествление гомологий в близких точках \mathbf{e}, \mathbf{e}^0 пространства модулей можно использовать для локальной тривиализации гомологического расслоения, поскольку оно не зависит от произвола в выборе диффеоморфизма плоскости. Все диффеоморфизмы с указанными ограничениями изотопны на проколотеи плоскости $\mathbb{C} \setminus \mathbf{e}^0$.

Функции склейки построенного расслоения локально постоянны, поэтому оно обладает естественной плоской связностью (Гаусса–Манина [8]). Связность позволяет переносить гомологии в соседние слои, а ее действие на циклы из $H_1(M, \mathbb{Z})$ можно представить себе так. На двулистной модели кривой M нарисуем представляющий 1-цикл замкнутый контур, не проходящий через точки ветвления. Оставляя контур на месте и шевеля точки ветвления, мы переносим 1-цикл на соседние кривые M . Параллельный перенос циклов согласован с отмеченным выше расщеплением гомологического расслоения на подрасслоения $H_1^\pm \mathcal{H}_g^k$ и сохраняет решетку целочисленных гомологий. Выделенный базис лабиринта из п. 2.1, очевидно, сохраняется при параллельном переносе по связности Гаусса–Манина.

ПРИМЕР. Полускручивание Дэна β_{s-k} , $s = k + 1, \dots, g$, на рис. 2б) соответствует элементарной косе в группе Vg_{g-k+1} , а также петле в пространстве модулей. Перенос выделенного базиса лабиринта вдоль этой петли меняет только два элемента: $(C_{s-1}, C_s)^t \rightarrow (-C_s, 2C_s + C_{s-1})^t$. В процессе деформации цикл C_{s-1} уходит на нижний лист римановой поверхности, и его перетаскивание на верхний лист дает смену знака. Как видим, монодромия связности Гаусса–Манина нетривиальна, если нетривиальна топология пространства модулей.

Плоская связность позволяет определить *действие группы кос* Vg_{g-k+1} на пространстве когомологий $H^1(M_0, \mathbb{R})$ отмеченной кривой. Именно действие петель $\beta \in \pi_1(\mathcal{H}_g^k, M_0)$ на функционале $C_* \in (H_1(M_0))^*$ определим формулой

$$\langle \beta \cdot C_* \mid C \rangle := \langle C_* \mid \text{параллельный перенос } C \text{ вдоль } \beta \rangle, \quad C \in H_1(M_0).$$

Отображение периодов Π переводит универсальную накрывающую $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$ пространства модулей в функционалы над пространством нечетных гомологий отме-

ченной кривой по правилу

$$\langle \Pi(\widetilde{M}) \mid C \rangle := -i \int_C d\eta_M, \quad \widetilde{M} \in \widetilde{\mathcal{H}}_g^k, \quad C \in H_1^-(M_0, \mathbb{R}). \quad (7)$$

Здесь интегрирование дифференциала на кривой M по циклам, лежащим на отмеченной (т.е., вообще говоря, другой) кривой M_0 , осуществляется при помощи связности Гаусса–Манина в гомологическом расслоении над универсальной накрывающей $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$. Справедлива

ЛЕММА 1 [2]. *Отображение периодов $\Pi: \widetilde{\mathcal{H}}_g^k \rightarrow (H_1^-(M_0, \mathbb{R}))^*$ перестановочно с действием кос из Vr_{g-k+1} .*

Образ отображения периодов явно описан в теореме 2, для формулировки которой дадим ряд определений.

2.3. Формулировка основной теоремы. Отметим на универсальной накрывающей $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$ точку $\widetilde{M}_0 = (\mathbf{e}^0, \Lambda^0)$. Выделенный базис C_0, C_1, \dots, C_g лабиринта Λ^0 , введенный в п. 2.1, дает координаты $\gamma_s := \langle \cdot \mid C_s \rangle$ в пространстве функционалов над нечетными 1-циклами $(H_1^-(M_0, \mathbb{R}))^* \cong \mathbb{R}^{g+1}$. В последнем на гиперплоскости $\{\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_g = 2\pi\}$ лежит образ $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$ при отображении периодов Π .

Фиксируем топологические инварианты $g \geq 0, 0 < k \leq g + 1$. Точки $h := (h_0, h_1, \dots, h_{g+1})^t$ евклидова пространства \mathbb{R}^{g+2} , координаты которых удовлетворяют ограничениям

$$0 = h_0 < h_1 < h_2 < \dots < h_g < h_{g+1} = \pi, \quad (8)$$

заполняют открытый g -мерный симплекс Δ_g . Действие группы кос Vr_{g+2} на объемлющем пространстве симплекса зададим на образующих (Бурау, 1932):

$$\left[\begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ \times \text{---} \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \end{array} \begin{array}{l} s-1 \\ s \end{array} \right] \cdot (\dots, h_{s-1}, h_s, \dots)^t := (\dots, h_s, 2h_s - h_{s-1}, \dots)^t, \quad (9)$$

$s = 1, 2, \dots, g + 1$, переплетение нитей с номерами $s - 1$ и s действует только на координаты h_{s-1}, h_s .

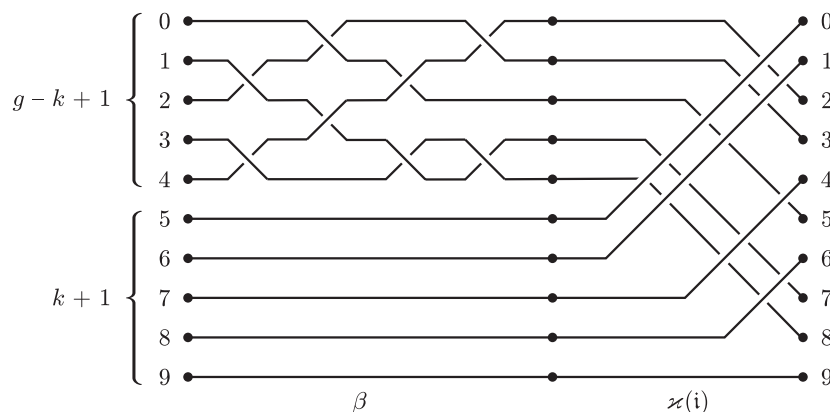


Рис. 3. Косы $\beta \in \text{Vr}_{g-k+1}$ и $\varkappa(i) \in \text{Vr}_{g+2}$ при $g = 8, k = 4, i = \{2, 3, 5, 7, 8\}$

Всякому $(g-k+1)$ -элементному подмножеству i множества индексов $\{1, 2, \dots, g\}$ сопоставим косу $\varkappa(i) \in \text{Gr}_{g+2}$ (см. рис. 3). Нити тривиальной косы с номерами из i отведем за плоскость рисунка и при закрепленных правых краях сдвинем без переплетений вверх, остальные нити без переплетений сдвинем вниз. Коса $\varkappa(i)$ на точку $h \in \mathbb{R}^{g+2}$ действует так: переменные $h_s, s \in i$, перемещаются на первые $g-k+1$ позиций с сохранением порядка индексов s . Остальные переменные $h_j, j \notin i$, испытывают последовательные отражения во всех точках $h_s, s \in i$, с бóльшим индексом $s > j$ и после этих преобразований занимают последние $k+1$ позиций с сохранением порядка индексов j .

Косы β из $g-k+1$ нитей считаем вложенными в Gr_{g+2} , дополняя их снизу горизонтальными нитями, как на рис. 3.

ТЕОРЕМА 2. *Множество $\Pi(\widetilde{\mathcal{H}}_g^k), k > 0$, есть образ лежащего в \mathbb{R}^{g+2} объединения открытых симплексов $\beta \cdot \varkappa(i) \cdot \Delta_g$ по всем $\binom{k-1}{g}$ подмножествам i и косам β из Gr_{g-k+1} при линейном отображении $\mathbb{R}^{g+2} \rightarrow \mathbb{R}^{g+1}$:*

$$\gamma_s := \begin{cases} 2(h_{g-s+1} - h_{g-s}), & s = 0, \dots, k-1, \\ 4(-1)^{g+s} h_{s-k}, & s = k, \dots, g. \end{cases} \quad (10)$$

ПРИМЕР. Двух- и трехмерные образы $\Pi(\widetilde{\mathcal{H}}_g^k)$ показаны на рис. 4, 5.

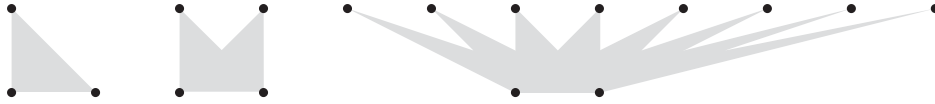


Рис. 4. Образ отображения периодов $\Pi(\widetilde{\mathcal{H}}_2^k)$ при $k = 3, 2, 1$ (слева направо)

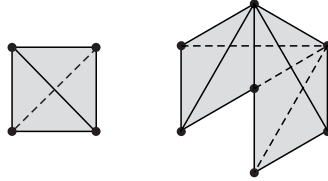


Рис. 5. Образ отображения периодов $\Pi(\widetilde{\mathcal{H}}_3^k)$ при $k = 4, 3$ (слева направо)

§3. Разбиение пространства модулей на клетки

Ниже разработан комбинаторно-геометрический подход к исследованию отображения периодов. Кривым M пространства модулей будем взаимно однозначно сопоставлять деревья Γ специального вида, ребра которых нагружены положительными числами. Этим мы разбиваем тотальное пространство модулей $\mathcal{H} := \prod_{g=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{g+1} \mathcal{H}_g^k$ на перечисляемые деревьями клетки $\mathcal{A}[\Gamma]$, в которых часть глобальных координат – периоды связанного с кривой дифференциала. Похожая конструкция разбиения пространств модулей кривых на клетки применяется в конформной теории поля (Р. Пеннер, М. Л. Концевич, Л. О. Чехов; см. ссылки в обзоре [9]). Приложения этой техники будут даны в двух последних параграфах работы.

3.1. Кривые и деревья. Абелев интеграл 3-го рода $\eta_M(x) := \int^x d\eta_M$ является интегралом Кристоффеля–Шварца и отображает надлежаще разрезанную верхнюю полуплоскость \mathbb{H} на некоторую гребенчатую область, геометрические параметры которой позволяют восстановить все периоды дифференциала $d\eta_M$. Это важное наблюдение для частного случая было впервые сделано Н. И. Ахиезером, см. обсуждение в [3], и в более общей ситуации Н. Н. Мейманом [10]. Описывать систему разрезов удобно при помощи Штребелевой теории слоений, связанных с квадратичными дифференциалами [11]. На протяжении п. 3.1 кривая M предполагается фиксированной, поэтому соответствующий индекс у ассоциированного дифференциала $d\eta_M$ опущен.

3.1.1. Глобальная функция ширины и слоение. Функция

$$W(x) := \left| \operatorname{Re} \int_{(e_s, 0)}^{(x, w)} d\eta \right|$$

в силу нормировки $d\eta$ корректно определена на плоскости переменной x , обращается в нуль во всех точках ветвления $x = e_j, j = 1, \dots, 2g+2$, имеет логарифмический полюс на бесконечности и гармонична там, где не обращается в нуль. Другими словами, *функция ширины* $W(x)$ является функцией Грина плоскости с разрезом вдоль кусочно гладкого множества $\Gamma_1 := \{x \in \mathbb{C} : W(x) = 0\}$, проходящего через все точки ветвления. Слоение $(d\eta)^2(x) > 0$ ортогонально линиям уровня $W(x)$, а потому не может содержать ни циклов, ни предельных циклов. В терминах Штребеля [11] глобальная структура траекторий слоения такова: листы, начинающиеся в конечных *критических точках* (т.е. в точках дивизора $(d\eta)^2$), разбивают комплексную плоскость на полосы, каждая из которых выходит из бесконечности, проходит через компоненту нулевого уровня $W(x)$ и снова уходит на бесконечность. Локальная структура слоения $(d\eta)^2(x) > 0$ вблизи его критических точек показана на рис. 6.

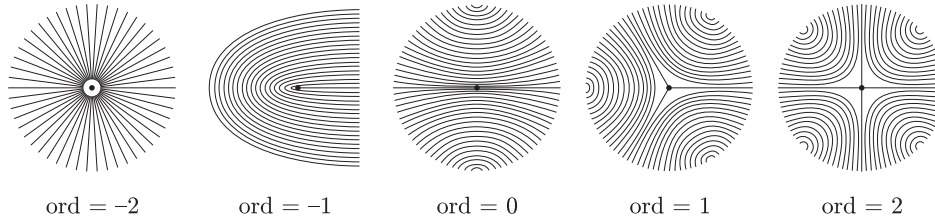


Рис. 6. Слоение $(d\eta)^2 > 0$ вблизи точек с $\operatorname{ord}(d\eta)^2 = -2, -1, 0, 1, 2$

3.1.2. Граф Γ кривой M .

ПОСТРОЕНИЕ. Всякой кривой $M \in \mathcal{H}$ сопоставим состоящий из двух частей, Γ_1 и Γ_- , компактный граф $\Gamma = \Gamma(M)$ на плоскости. Компоненту $\Gamma_1 := \{x \in \mathbb{C} : W(x) = 0\}$ назовем *вертикальной*. *Горизонтальной* компонентой Γ_- назовем совокупность всевозможных ориентированных по возрастанию $W(x)$ отрезков слоения $(d\eta)^2(x) > 0$, соединяющих конечные критические точки слоения между собой

или с Γ_+ . Вершинами V графа Γ служат все конечные точки дивизора $(d\eta)^2$, а также точки пересечения $\Gamma_+ \cap \Gamma_-$. За вычетом вершин граф есть совокупность конечного числа интервалов вертикальных и горизонтальных траекторий квадратичного дифференциала $(d\eta)^2$, которые мы называем его ребрами R . Две связанные с $(d\eta)^2$ меры $|\operatorname{Re}(d\eta)|$ и $|\operatorname{Im}(d\eta)|$ позволяют определить соответственно *ширину* W и *высоту* H каждой гладкой кривой на плоскости. Например, ширина $W(R)$ всякого ребра $R \subset \Gamma$ равна приращению функции ширины $W(x)$ вдоль R , а высота $H(R)$ всякого горизонтального ребра R равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ. В терминах многочленов $P(x)$ общего положения граф Γ впервые появился в работе [10]. Часть этого графа, $\Gamma_+ := P^{-1}([-1, 1])$, ранее рассматривалась разными авторами (ссылки см. в [3]) при изучении многочленов наименьшего уклонения на нескольких отрезках и имеет названия *опорное множество многочлена*, *n -правильное множество*, *максимальное множество наименьшего уклонения*.

Итак, всякая вещественная гиперэллиптическая кривая порождает плоский граф Γ с ребрами двух типов: ориентированными горизонтальными ребрами, нагруженными их шириной W , и неориентированными вертикальными ребрами, нагруженными их высотой H . Несколько типичных графов $\Gamma(M)$ показаны на рис. 7а), 9б), 10, 11а), где *двойной линией обозначена вертикальная компонента*. В дальнейшем граф будет нас интересовать лишь как комбинаторный объект, нагруженный числами. Два частично ориентированных графа на плоскости считаем эквивалентными, если один в другой переводится сохраняющим ориентацию движением \mathbb{H} , симметрично продолженным на всю плоскость. Класс эквивалентности графа Γ обозначим через $[\Gamma]$, класс эквивалентности графа с ребрами, нагруженными положительными числами, обозначим через $\{\Gamma\}$.

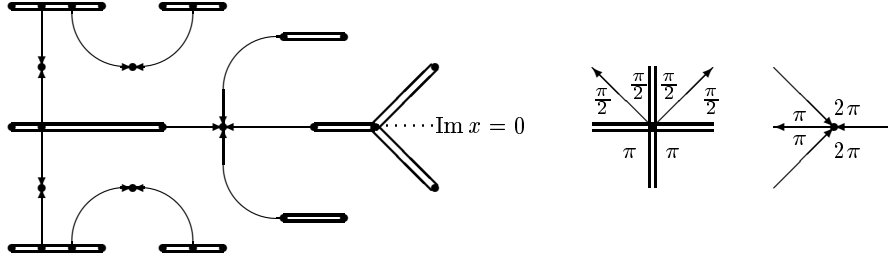


Рис. 7. а) Допустимый граф кривой $M \in \mathcal{H}_8^2$; б) вычисление порядка $(d\eta)^2$ в вершине графа

3.1.3. Функции графа $\Gamma(M)$. Введем несколько комбинаторных характеристик графа, смысл которых станет ясен из дальнейшего. Различные подграфы Γ , лежащие в верхней полуплоскости или на вещественной оси, обозначим через $\Gamma_\star^+ := \Gamma_\star \cap \mathbb{H}$, $\Gamma_\star^0 := \Gamma_\star \cap \mathbb{R}$, индекс \star – пустой, $+$ или $-$. Степень вершины V относительно графа Γ_\star^\bullet обозначим через $d_\star^\bullet = d_\star^\bullet(V)$. Горизонтальные ребра ориентированы, поэтому имеют смысл также числа $d_{\text{in}}^\bullet(V)$ и $d_{\text{out}}^\bullet(V)$, означающие соответственно число входящих и выходящих из вершины V ребер графа Γ_\star^\bullet , индекс \bullet – пустой, 0 или $+$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \text{ord}(V) &:= d_1(V) + 2d_{\text{in}}(V) - 2, \\ g(\Gamma) &:= \#\{V \in \Gamma : \text{ord}(V) \equiv 1 \pmod{2}\}/2 - 1, \\ k(\Gamma) &:= \#\{V \in \Gamma^0 : \text{ord}(V) \equiv 1 \pmod{2}\}/2, \\ \dim(\Gamma) &:= \#\{R \subset (\Gamma_+^+ \cup \Gamma_+^0)\} + \#\{V \in (\Gamma_-^+ \cup \Gamma_-^0) \setminus \Gamma_+\} - 1, \\ \text{codim}(\Gamma) &:= 2g(\Gamma) - \dim(\Gamma), \\ \text{codim}(V) &:= d_{\text{out}}^+(V) + \begin{cases} 2d_{\text{in}}(V) - 4, & V \in \Gamma_-^+ \setminus \Gamma_+^+, \\ d_{\text{in}}(V) - 2, & V \in \Gamma_-^0 \setminus \Gamma_+^0, \\ 2(d_1(V) \pmod{2}) + d_1^+(V) - 3, & V \in \Gamma_+^+, \\ d_1(V) \pmod{2} + d_1^+(V) - 1, & V \in \Gamma_+^0, \end{cases} \end{aligned}$$

в последнем определении $V \in \Gamma^0 \cup \Gamma^+$, а вычет по модулю 2 равен нулю или единице.

3.1.4. Свойства графа $\Gamma(M)$. Комбинаторные характеристики ord , g , k на языке исходной кривой M выражает

ЛЕММА 2. Пусть $\Gamma(M)$ – граф, соответствующий кривой $M \in \mathcal{H}_g^k$. Тогда

- 1) $\text{ord}(V)$ есть порядок квадратичного дифференциала $(d\eta)^2$ в вершине V ,
- 2) $g(\Gamma)$ – род кривой M ,
- 3) $k(\Gamma)$ – число ковещественных овалов кривой M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Число $2 + \text{ord}(V)$, равное d_1 при $W(V) = 0$ либо $2d_{\text{in}}$ при $W(V) > 0$, имеет смысл количества траекторий (вертикального либо горизонтального) слоения квадратичного дифференциала $(d\eta)^2$, инцидентных V , а значит [11], это число на два больше порядка $(d\eta)^2$ в этой точке.

2) Точки с нечетным порядком дифференциала $(d\eta)^2$ – это точки ветвления M .

3) $2k(M)$ – число точек ветвления M на вещественной оси.

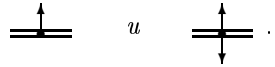
Нагруженные графы $\{\Gamma\}$, порождаемые кривыми, обладают рядом структурных и количественных ограничений, полный список которых дает

ЛЕММА 3. (A₁) $[\Gamma]$ – симметричное относительно вещественной оси (включая все нагруженные структуры) конечное дерево.

(A₂) Выходящие из одной вершины горизонтальные ребра разделены входящими либо вертикальными ребрами. В частности, запрещены висячие вершины вида:



(A₃) Вершины с $\text{ord}(V) = 0$ бывают только двух видов:



(A₄) Сумма высот H всех вертикальных ребер дерева равна π .

(A₅) Если вершина $V \in \Gamma_+$, то $W(V) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (A₁) Покажем, что Γ связан и не имеет циклов. Предположим, что граф содержит циклы, тогда в дополнении к нему есть ограниченная область. Проинтегрировав по последней квадрат градиента $W(x)$, мы получим нуль. Действительно, функция W гармонична вне Γ , обращается в нуль на вертикальных

ребрах графа, а ее нормальная производная обращается в нуль на горизонтальных ребрах. Граф также связан. Сумма $\text{ord}(V)$ по всем вершинам графа равна удвоенному числу ребер минус удвоенное число вершин, т.е. числу связных компонент Γ , умноженному на -2 . По лемме 2 это же число равно степени дивизора квадратичного дифференциала $(d\eta)^2$ на сфере плюс порядок его полюса на бесконечности, т.е. -2 . Симметричность нагруженного графа следует из вещественности квадратичного дифференциала: $(d\eta)^2(\bar{x}) = (d\bar{\eta})^2(x)$.

(A₂) Если $W(V) > 0$, то на начинающихся в V горизонтальных траекториях $(d\eta)^2$ функция W попеременно возрастает и убывает. Траектории последнего типа локально совпадают с входящими в V горизонтальными ребрами Γ . Если же $W(V) = 0$, то выходящие из V горизонтальные траектории перемежаются с вертикальными траекториями, последние локально совпадают с вертикальными ребрами Γ .

(A₃) $\text{ord}(V) = 0$, только если $V \in \Gamma_+ \cap \Gamma_-$.

(A₄) В области $\mathbb{C} \setminus \Gamma_+$ существует однозначная ветвь дифференциала $d\eta(x)$, ибо всякая компонента Γ_+ содержит четное число точек ветвления кривой M . Деформируя границу области в большой круг, имеем:

$$\pm 2\pi i = \int_{\partial(\mathbb{C} \setminus \Gamma_+)} d\eta = i \int_{\partial(\mathbb{C} \setminus \Gamma_+)} \text{Im}(d\eta) = \pm 2i \int_{\Gamma_+} |\text{Im}(d\eta)| = \pm 2i \sum_{R \subset \Gamma_+} H(R).$$

(A₅) Справедливо по определению.

Следующая лемма подсказывает, как по нагруженному дереву восстановить гиперэллиптическую кривую.

ЛЕММА 4 [10]. *Абелев интеграл 3-го рода $\eta(x)$ взаимно однозначно отображает верхнюю полуплоскость, разрезанную вдоль Γ , на горизонтальную полуполосу высоты π с конечным числом горизонтальных разрезов, начинающихся на вертикальной границе полуполосы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Абелев интеграл имеет вид $\eta(x) = W(x) + iH(x)$, $x \in \mathbb{H} \setminus \Gamma$, где $W(x)$ – глобальная функция ширины, $H(x)$ – сопряженная к ней гармоническая функция, однозначная ветвь которой в односвязной области $\mathbb{H} \setminus \Gamma$ нормирована условием $H(x) = 0$, $x > \Gamma^0$. Интерпретируем функцию высоты $H(x)$ в терминах слоения $(d\eta)^2 > 0$, суженного на область $\mathbb{H} \setminus \Gamma$.

Каждый лист этого слоения начинается и заканчивается на границе области. Граница состоит из следующих частей: ∞ , $\mathbb{R} \setminus \Gamma$, Γ_- , Γ_+ . Перебором вариантов можно прийти к следующему поведению ориентированных по возрастанию $W(x)$ листов слоения: *конечное число листов начинается в вершинах Γ_- , остальные листы начинаются на Γ_+ ; все листы уходят на бесконечность, оставаясь в верхней полуплоскости.* Например, лист не может начинаться или заканчиваться на $\mathbb{R} \setminus \Gamma$. В противном случае начальная либо конечная точка листа будет критической точкой слоения (так как слоение обладает зеркальной симметрией) и, следовательно, лежит на Γ .

Функция H постоянна на каждом листе и равна $\lim \text{Arg}(x)$ при $x \rightarrow \infty$ вдоль листа. Каждому значению $H \in (0, \pi)$ соответствует единственный лист на разрезанной полуплоскости, а функция ширины W позволяет различать точки на этом листе. Следовательно, функция $\eta(x)$ взаимно однозначно отображает $\mathbb{H} \setminus \Gamma$ на некоторую гребенчатую область.

3.1.5. Восстановление кривой M по ее графу Γ . Пусть $\{\Gamma\}$ – дерево на плоскости с ребрами двух типов: неориентированными “вертикальными” и ориентированными “горизонтальными”. Положительные числа, приписанные ребрам R , назовем их шириной $W(R)$, если $R \subset \Gamma_-$, либо высотой $H(R)$, если $R \subset \Gamma_+$. Высоту горизонтальных, как и ширину вертикальных ребер полагаем равной нулю. На вершинах V дерева можно по существу единственным образом ввести функцию ширины $W(V)$, строго возрастающую на горизонтальных (ориентированных) ребрах и такую, что ширина всякого ребра равна приращению функции ширины его концов. Если дерево удовлетворяет условиям (A_1) – (A_5) , мы сможем сопоставить ему вещественную гиперэллиптическую кривую $M = M\{\Gamma\}$.

ПОСТРОЕНИЕ. Из (A_1) следует, что область $\mathbb{H} \setminus \Gamma$ односвязна. Кусок ее границы наследует от $\{\Gamma\}$ понятия вершин v , вертикальных и горизонтальных ребер r , функций высоты $H(r)$ и ширины $W(v)$. Обход границы разрезанной полуплоскости от $-\infty$ до $+\infty$ строго упорядочивает по возрастанию вершины v и ребра r , поэтому на вершинах границы можно ввести функцию высоты

$$H(v) := \sum_{r > v} H(r).$$

Условия (A_2) , (A_5) обеспечивают тот же, что и на рис. 8, характер монотонности функций высоты и ширины вершин v при положительном обходе границы $\mathbb{H} \setminus \Gamma$.

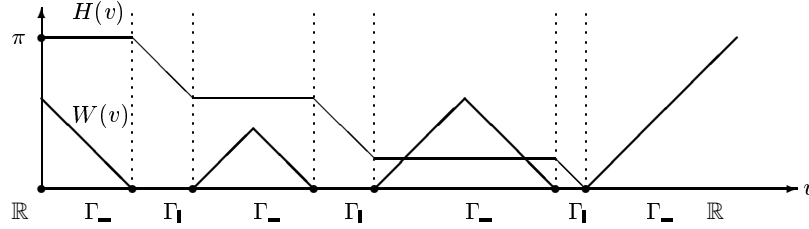


Рис. 8. Монотонность функций $H(v)$, $W(v)$ на границе $\mathbb{H} \setminus \Gamma$

Рассмотрим в плоскости переменной η гребенчатую область

$$\Sigma\{\Gamma\} := \{\eta \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} \eta, 0 < \operatorname{Im} \eta < \pi\} \setminus \bigcup_{v \in \partial(\mathbb{H} \setminus \Gamma)} \left[iH(v), iH(v) + \max_{H(v')=H(v)} W(v') \right], \quad (11)$$

на границу которой отобразим вершины границы $\mathbb{H} \setminus \Gamma$ по правилу

$$v \rightarrow \eta(v) := W(v) + iH(v) \pm i0, \quad (12)$$

где знак \pm совпадает со знаком монотонности W в вершине v . Из графика на рис. 8 видно, что отображение вершин с границы на границу монотонно, поэтому ребрам r границы $\mathbb{H} \setminus \Gamma$ взаимно однозначно сопоставлены ребра $\eta(r)$ на $\partial\Sigma\{\Gamma\}$. Всякому ребру $R \subset \Gamma^+$ на границе разрезанной по Γ полуплоскости соответствует

пара ребер r^- , r^+ – его берега. Линейное отображение отрезка $\eta(r^-)$ на $\eta(r^+)$, обращающее ориентацию границы гребенки, имеет вид

$$\eta \rightarrow \begin{cases} \eta + iH^+ - iH^-, & R \subset \Gamma_{\pm}^+, \\ -\eta + iH^+ + iH^-, & R \subset \Gamma_{\pm}^-, \end{cases} \quad (13)$$

где H^{\pm} – среднее значение высоты $H = \text{Im } \eta$ на отрезке $\eta(r^{\pm})$. Отрезки $\eta(r^-)$ и $\eta(r^+)$ будем считать отождествленными по правилу (13).

Гребенчатая область $\Sigma\{\Gamma\}$ вместе со всеми граничными отождествлениями является абстрактной римановой поверхностью $\mathbb{H}\{\Gamma\}$, гомеоморфной диску. Конформное отображение $x(\eta): \mathbb{H}\{\Gamma\} \rightarrow \mathbb{H}$ с неподвижной бесконечностью определено с точностью до движений из \mathfrak{A}_1^+ . Из формулы склейки (13) видно, что на полуплоскости \mathbb{H} корректно определен мероморфный квадратичный дифференциал $(d\eta(x))^2$. Этот дифференциал вещественен на границе, потому симметрично продолжается в нижнюю полуплоскость. Возьмем в качестве $M\{\Gamma\}$ двулистную поверхность (2) с точками ветвления в нулях (полюсах) нечетной кратности квадратичного дифференциала $(d\eta)^2(x)$, $x \in \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 3. *Построения пп. 3.1.2 и 3.1.5 осуществляют взаимно однозначное соответствие между гиперэллиптическими кривыми $M \in \mathcal{H}$ и нагруженными графами $\{\Gamma\}$, удовлетворяющими условиям (A₁)–(A₅).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\Gamma\} \rightarrow M\{\Gamma\} \rightarrow \Gamma'(M)$ – последовательные отображения пп. 3.1.5 и 3.1.2. Конструкция первого из этих отображений сопоставляет абстрактному графу $\{\Gamma\}$ его реализацию $x(\Gamma)$ на плоскости переменной x с вершинами $x(V)$, гладкими ребрами $x(R)$ и различными подграфами $x(\Gamma_{\mathbf{I}})$, $x(\Gamma_{\mathbf{-}})$, \dots . Покажем, что нагруженные графы $x(\Gamma)$ и Γ' совпадают.

Подсчет углов во всех вершинах $\eta(v)$ границы гребенки $\Sigma\{\Gamma\}$, отвечающих вершине $V \in [\Gamma]$, показывает (см. рис. 76), что $\text{ord}(V)$ равен порядку $(d\eta)^2$ в точке $x(V)$. Это значит, что все точки ветвления кривой $M\{\Gamma\}$ лежат на концах ребер из $x(\Gamma_{\mathbf{I}})$. Всякая связная компонента $x(\Gamma_{\mathbf{I}})$ содержит четное число точек ветвления, поэтому $M\{\Gamma\}$ реализуется как два листа $\mathbb{C} \setminus x(\Gamma_{\mathbf{I}})$, склеенные крест накрест по ребрам $x(\Gamma_{\mathbf{I}})$. Отождествления (13) показывают, что $d\eta(x)$ на верхнем листе и $-d\eta(x)$ на нижнем листе склеиваются в единый мероморфный дифференциал на M с парой простых полюсов на бесконечности. Покажем, что это – ассоциированный с кривой M дифференциал $d\eta_M$, для чего определим его периоды.

Пусть $\mathbb{R} \cup x(\Gamma)$ трансверсально пересекает проекцию цикла $C \subset M$ на плоскость переменной x , разбивая тем самым проекцию на куски C_1, C_2, C_3, \dots . Сменим ориентацию кусков C , отвечающих нижнему листу M , тогда интеграл $d\eta$ по C равен сумме приращений аргумента η на образах кусков C_1, C_2, C_3, \dots в двух гребенках $\Sigma\{\Gamma\} \cup \overline{\Sigma\{\Gamma\}}$. Каждое пересечение проекции цикла C с $\mathbb{R} \cup x(\Gamma_{\mathbf{-}})$ дает нам пару точек на горизонтальной границе гребенок, которые входят в указанную знакопеременную сумму с разными знаками. Каждое пересечение с $x(\Gamma_{\mathbf{I}})$ дает пару точек на вертикальной границе, которые входят с одним знаком. Правила (13) отождествления граничных ребер гребенок позволяют теперь утверждать, что интеграл $d\eta$ по любому замкнутому циклу C поверхности M есть целочисленная линейная комбинация величин $iH(R)$, $R \subset \Gamma_{\mathbf{I}}$. В частности, все периоды дифференциала чисто мнимые. Условие (A₄) дает возможность вычислить полярный период: вычет $d\eta$ на бесконечности верхнего листа равен -1 .

Остается рутинная проверка того, что нагруженные графы $\Gamma'(M)$ и $x(\Gamma)$ совпадают. Еще не использованное условие (A_3) гарантирует, что на $x(\Gamma)$ нет вершин, отличных от конечных точек дивизора $(d\eta)^2$, и $x(\Gamma_+) \cap x(\Gamma_-)$.

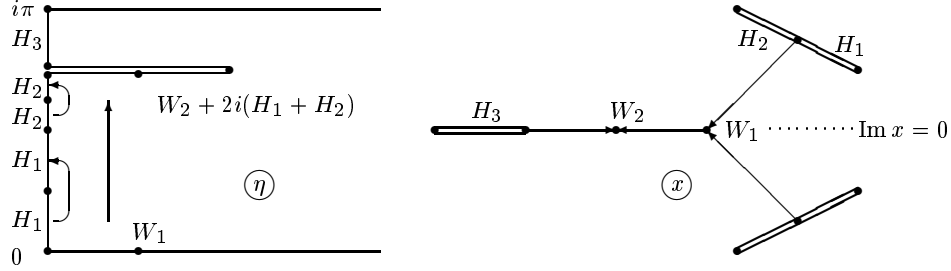


Рис. 9. а) Гребенчатая область с отождествлениями сторон; б) нагруженное дерево Γ

Обратно, пусть $M \rightarrow \Gamma(M) \rightarrow M'\{\Gamma\}$ – последовательные отображения ш. 3.1.2 и 3.1.5. Конформное отображение $x(\eta)$ второй конструкции построено как обратное к отображению абелева интеграла $\eta(x)$ из леммы 4 – именно так возникают отображение (12) и склейки (13). Следовательно, $M = M'$ с точностью до аффинного движения из \mathfrak{A}_1^+ .

3.2. Координатное пространство графа. Фиксируем топологический класс $[\Gamma]$ графа. Наборы весов графа, допускаемых условиями (A_1) – (A_5) , удовлетворяют ограничениям

$$H(R) > 0, \quad \sum_{R \subset \Gamma_+^0} H(R) + 2 \sum_{R \subset \Gamma_+^+} H(R) = \pi, \quad \text{ребро } R \subset \Gamma_+^+ \cup \Gamma_+^0; \quad (14)$$

$$W(V) > 0, \quad W(V') > W(V) \quad \text{при } V' > V, \quad \text{вершины } V, V' \in (\Gamma_-^+ \cup \Gamma_-^0) \setminus \Gamma_+, \quad (15)$$

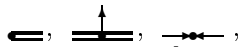
напомним, что вершины горизонтальной части Γ_- графа частично упорядочены. Этот набор чисел параметризует некоторое зависящее от $[\Gamma]$ многообразие в тотальном пространстве модулей \mathcal{H} , распадающемся, таким образом, на непересекающиеся многообразия, перечисляемые допустимыми топологическими типами $[\Gamma]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Координатным пространством $\mathcal{A}[\Gamma]$ графа Γ назовем произведение открытого симплекса (14), заматаемого переменными $H(R)$, на открытый конус (15), заматаемый переменными $W(V)$.

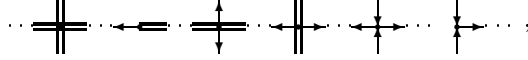
ПРИМЕР. Для графа, изображенного на рис. 9б), координатным пространством будет открытый четырехмерный многогранник пространства $\mathbb{R}^5 \ni (H_1, H_2, H_3, W_1, W_2)$, выделяемый ограничениями $2(H_1 + H_2) + H_3 = \pi$; $H_s > 0$, $s = 1, 2, 3$; $W_2 > W_1 > 0$.

Справедлива

ЛЕММА 5. Размерность $\dim(\Gamma)$ клетки $\mathcal{A}[\Gamma]$ не превосходит $2g(\Gamma)$ и равна $2g$, если и только если все вершины $V \in \Gamma$ имеют вид:



а вершины $V \in \Gamma^0$ вещественной оси дополнительно могут иметь (с точностью до симметрии $x \rightarrow -x$) вид:



ось \mathbb{R} обозначена пунктиром.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перебором можно убедиться, что дефект $\text{codim}(V) \geq 0$, $V \in \Gamma^0 \cup \Gamma^+$, и только для перечисленных выше вершин $\text{codim}(V) = 0$. Следующая выкладка показывает, что сумма дефектов вершин V равна коразмерности клетки $\mathcal{A}[\Gamma]$ в соответствующем пространстве модулей \mathcal{H}_g^k :

$$\begin{aligned}
 \sum_{V \in \Gamma^0 \cup \Gamma^+} \text{codim}(V) &= \sum_{V \in \Gamma^0 \cup \Gamma^+} d_{\text{out}}^+ + 2 \sum_{V \in \Gamma_{\mathbf{1}}^+ \setminus \Gamma_{\mathbf{1}}} (d_{\text{in}} - 2) + \sum_{V \in \Gamma_{\mathbf{1}}^0 \setminus \Gamma_{\mathbf{1}}} (d_{\text{in}} - 2) \\
 &\quad + \sum_{V \in \Gamma_{\mathbf{1}}^+} (2(d_{\mathbf{1}} \pmod{2}) + d_{\mathbf{1}}^+ - 3) + \sum_{V \in \Gamma_{\mathbf{1}}^0} (d_{\mathbf{1}} \pmod{2} + d_{\mathbf{1}}^+ - 1) \\
 &= (2g(\Gamma) + 2) + \sum_{R \subset \Gamma_{\mathbf{1}}^+} (1 + 2) + \sum_{R \subset \Gamma_{\mathbf{1}}^0} 1 + \sum_{R \subset \Gamma_{\mathbf{1}}^+} 2 \\
 &\quad - \sum_{V \in \Gamma_{\mathbf{1}}^+ \setminus \Gamma_{\mathbf{1}}} 4 - \sum_{V \in \Gamma_{\mathbf{1}}^0 \setminus \Gamma_{\mathbf{1}}} 2 - \sum_{V \in \Gamma_{\mathbf{1}}^+} 3 - \sum_{V \in \Gamma_{\mathbf{1}}^0} 1 \\
 &= (2g(\Gamma) + 2) + \left\{ \sum_{R \subset \Gamma^+} 3 - \sum_{V \in \Gamma^+} 3 \right\} + \left\{ \sum_{R \subset \Gamma^0} 1 - \sum_{V \in \Gamma^0} 1 \right\} \\
 &\quad - \sum_{R \subset \Gamma_{\mathbf{1}}^+} 1 - \sum_{R \subset \Gamma_{\mathbf{1}}^0} 1 - \sum_{V \in \Gamma_{\mathbf{1}}^+ \setminus \Gamma_{\mathbf{1}}} 1 - \sum_{V \in \Gamma_{\mathbf{1}}^0 \setminus \Gamma_{\mathbf{1}}} 1 \\
 &= 2g(\Gamma) - \dim(\Gamma).
 \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы учли, что выражение в первых фигурных скобках равно нулю (каждая компонента Γ^+ – дерево с одной выброшенной вершиной), а выражение во вторых фигурных скобках равно -1 (Γ^0 – дерево).

ПРИМЕР. Пространству модулей \mathcal{H}_3^2 отвечают 20 графов $[\Gamma]$ с максимальной размерностью координатного пространства $\dim(\Gamma) = 6$. Они показаны на рис. 10 с точностью до симметрии относительно вертикальной оси.

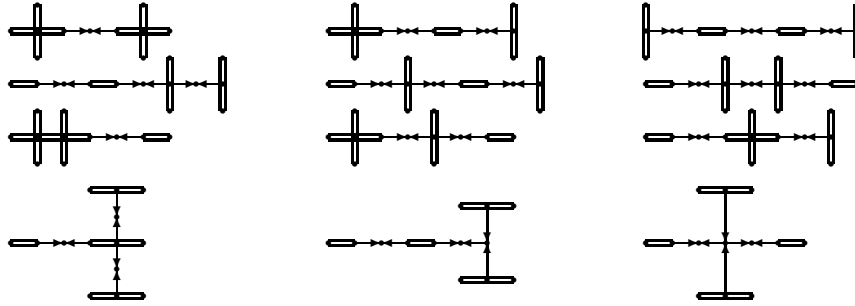


Рис. 10. Устойчивые графы пространства \mathcal{H}_3^2

ТЕОРЕМА 4. Координатное пространство $\mathcal{A}[\Gamma]$ вещественно аналитично вложено в тотальное пространство модулей \mathcal{H} .

комбинации переменных $H(R)$. Разбиение пространства модулей на координатные пространства графов, таким образом, порождает разбиение слоев отображения Π на клетки и позволяет изучить их топологию. К сожалению, подобные вычисления становятся слишком трудоемкими уже для небольшого рода g .

§ 4. Образ отображения периодов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Отображение периодов по лемме 1 перестановочно с действием группы Kos Br_{g-k+1} , поэтому нахождение образа Π в пространстве функционалов естественно разбить на два этапа:

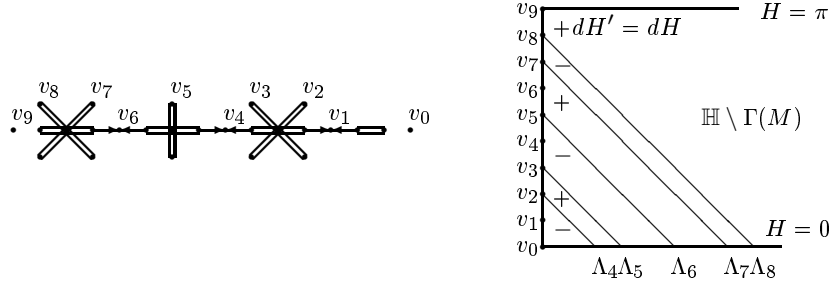
- 1) определим действие группы Kos Br_{g-k+1} на функционалы из $(H_1^-(M_0))^*$,
- 2) найдем образ Π для некоторого представителя из каждой орбиты группы скольжений в $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$.

1) Группа $\text{Kos Br}_{g-k+1} \cong \text{Mod}(\mathbb{H} \setminus \mathbf{e}^0)$ порождена $g - k$ образующими $\beta_1, \dots, \beta_{g-k}$, представленными скручиваниями на полоборота по кривым, охватывающим пару проколов $\mathbb{H} \setminus \mathbf{e}^0$ (см. рис. 2б)) [7]. Скручивание β_s сохраняет все элементы выделенного базиса нечетных гомологий, кроме C_{s+k-1}, C_{s+k} , которые изменяются по формуле Пикара–Лефшеца [8]. Соответствующее действие образующей на пространстве функционалов сохраняет все координаты, кроме двух: $\beta_s \cdot (\gamma_{s+k-1}, \gamma_{s+k})^t = (-\gamma_{s+k}, 2\gamma_{s+k} + \gamma_{s+k-1})^t$. В терминах переменных h , связанных с координатами γ формулами (10), это соответствует умножению Бурау (9) Kos на векторы.

2) Всякую кривую M пространства модулей \mathcal{H}_g^k , представленную дивизором \mathbf{e} , дополним специальным лабиринтом Λ , подняв тем самым на универсальную накрывающую. Отметим на границе области $\mathbb{H} \setminus \Gamma(M)$ точки v_0, v_1, \dots, v_{g+1} : две на вещественной оси левее и правее отрезка Γ^0 ; по одной точке на проекции каждого конечного вещественного овала; и по одной точке в каждой вершине $V \in \mathbf{e} \cap \mathbb{H}$. Индексы $g - k + 1$ точек последней группы обозначим через i . Неоднозначность в выборе отмеченных точек всегда можно распорядиться так, чтобы высоты $h_s := H(v_s)$ удовлетворяли ограничениям (8). Обратно: любая точка h симплекса (8) и любое допустимое подмножество i индексов могут быть получены при рассмотрении деревьев вида, указанного на рис. 11а). Первые k отрезков специального лабиринта Λ определены однозначно – это ковещественные овалы. Оставшиеся дуги лабиринта соединяют пары комплексно-сопряженных точек $v_s, \bar{v}_s, s \in i$, не пересекают дерева $\Gamma(M)$ (разумеется, за исключением своих концов) и встречаются с вещественной осью правее точки v_0 (см. рис. 11б)). Чтобы вычислить отображение периодов в точке (\mathbf{e}, Λ) универсальной накрывающей пространства модулей, нужно проинтегрировать $d\eta_M$ по элементам базиса нечетных гомологий этой точки, перенесенных из отмеченной точки $\widetilde{M}_0 \in \widetilde{H}_g^k$. Мы знаем, что при снос выделенного базиса из \widetilde{M}_0 по естественной плоской связности мы получим выделенный базис лабиринта Λ . Интегралы по последнему выражаются через высоты h_s . Проведем вычисления.

Дифференциал $d\eta_M$ голоморфен в односвязной области $\mathbb{H} \setminus \Lambda$, поэтому в ней определена глобальная функция высоты

$$H'(x) := \text{Im} \int_{x_0}^x d\eta_M, \quad x_0 > \Gamma^0,$$

Рис. 11. а) Дерево, порождающее $i = \{2, 3, 5, 7, 8\}$; б) специальный лабиринт Λ в $\mathbb{H} \setminus \Gamma$

ветвь дифференциала нормирована условием $\text{Res } d\eta_M|_{\infty} = -1$. То же равенство определяет глобальную функцию высоты $H(x)$ в области $\mathbb{H} \setminus \Gamma(M)$. В компонентах $\mathbb{H} \setminus (\Gamma \cup \Lambda)$ дифференциалы $dH(x)$, $dH'(x)$ совпадают с точностью до знака, меняющегося при пересечении Λ или Γ . В ограниченной Λ_s , Λ_{s+1} и Γ области $dH'(x) = (-1)^{g+s} dH(x)$.

Значение Π на цикле C_s , $s = k, \dots, g$, равно четырем приращениям высоты H' вдоль правого берега разреза Λ_s – от вещественной оси до конечной точки v_* . Индекс конечной точки разреза удобно выразить при помощи косы $\varkappa(i)$, действующей справа на множестве индексов $s = 0, 1, \dots, g+1$ перестановками. Например, $3 \cdot \varkappa(i) = 7$ для косы, изображенной на рис. 3. Окончательно

$$\gamma_s = 4(-1)^{g+s} h_{(s-k) \cdot \varkappa(i)}, \quad s = k, \dots, g.$$

Значение Π на цикле C_s , $s = 0, \dots, k-1$, равно двум приращениям высоты H' от точки v_* , лежащей на компоненте $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} \Lambda_j$ справа от Λ_s , до точки v_{**} , лежащей на компоненте слева. Выражая индексы точек v_* , v_{**} при помощи косы $\varkappa(i)$, получаем

$$\gamma_s = 2H'(v_{(g-s+1) \cdot \varkappa(i)}) - 2H'(v_{(g-s) \cdot \varkappa(i)}), \quad s = 0, \dots, k-1.$$

Высоты $H'(v_*)$ в последней формуле можно выразить через известные нам высоты h_s . Для индекса $j = g-k+1, \dots, g+1$ найдем наименьший индекс $m = m(j)$ в пределах $0, \dots, g-k$ такой, что $j \cdot \varkappa(i) < m \cdot \varkappa(i)$, например, для косы $\varkappa(i)$, изображенной на рис. 3, $m(7) = 2$. Если такого индекса m не существует, то $H'(v_{j \cdot \varkappa(i)}) = h_{j \cdot \varkappa(i)}$, в противном случае

$$\begin{aligned} H'(v_{j \cdot \varkappa(i)}) &= (H'(v_{j \cdot \varkappa(i)}) - H'(v_{m \cdot \varkappa(i)})) + (H'(v_{m \cdot \varkappa(i)}) - H'(v_{(m+1) \cdot \varkappa(i)})) \\ &\quad + \dots + (H'(v_{(g-k-1) \cdot \varkappa(i)}) - H'(v_{(g-k) \cdot \varkappa(i)})) + H'(v_{(g-k) \cdot \varkappa(i)}) \\ &= 2h_{(g-k) \cdot \varkappa(i)} - 2h_{(g-k-1) \cdot \varkappa(i)} \\ &\quad + 2h_{(g-k-2) \cdot \varkappa(i)} - \dots \pm 2h_{m \cdot \varkappa(i)} \mp h_{s \cdot \varkappa(i)}. \end{aligned}$$

Представление Бурау позволяет теперь записать результаты вычислений в компактной форме.

Только что использованный метод определения образа отображений периодов для пространств модулей с $k = 0$ дает несколько иной ответ. В пространстве \mathbb{R}^{g+1} с координатами $(h_0, \dots, h_g)^t$ определим открытый g -мерный полиэдр Δ_g^0 как

сечение внутренности симплекса $\{0 < h_0 < h_1 < \dots < h_g < \pi\}$ гиперплоскостью $\{h_g - h_{g-1} + \dots \pm h_1 \mp h_0 = \pi/2\}$.

ТЕОРЕМА 5. Множество $\Pi(\widetilde{\mathcal{H}}_g^0)$ есть образ объединения открытых полиэдров $\beta \cdot \Delta_g^0 \ni (h_0, h_1, \dots, h_g)^t$ по всевозможным косам β из $g + 1$ нитей при линейном отображении $\gamma_s := 4(-1)^{g+s} h_s$, $s = 0, 1, \dots, g$.

Теоремы 2, 5 дают исчерпывающий ответ на первый из вопросов, поставленных во введении. Развита здесь техника дает положительный ответ на второй вопрос, именно некоторые из слоев отображения периодов (прообразы точек из $(H_1^-(M_0, \mathbb{R}))^*$) инвариантны при нетривиальных скольжениях универсальной накрывающей. Действительно, пусть $h \in \varkappa(i) \cdot \Delta_g$ – точка, у которой координата h_s есть среднее арифметическое соседних координат h_{s-1}, h_{s+1} , $s \in \{1, 2, \dots, g - k - 1\}$. Таким свойством при $s = 1$ обладает, например, кривая M пространства \mathcal{H}_3^1 , граф которой приведен на рис. 12. Можно проверить, что в этом случае $\beta_s^{-1} \beta_{s+1} \beta_s \cdot h = h$. По-видимому, топология проекции слоя на пространство модулей \mathcal{H}_g^k может отличаться от топологии самого слоя.

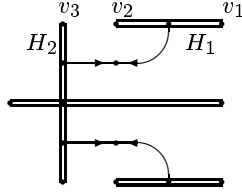


Рис. 12. Граф $\Gamma(M)$ кривой, дающей при $H_1 = H_2$ неподвижные точки действия кос в образе Π

§ 5. Классификация экстремальных многочленов

Другое применение развитой выше графической техники – это наглядное представление и классификация g -экстремальных многочленов с помощью графов сопоставленных им кривых. Традиция использования графов при описании многочленов и других алгебраических функций восходит к известной работе А. Гурвица 1891 года. Критические точки многочлена соединяют лучами “звезды” (деревя, только с висячими ребрами), прообраз которой оказывается деревом специального вида, называемым “кактусом” [12]. Приспособив “звезду” к нашему случаю, мы придем к графу ассоциированной кривой. На плоскости значений многочлена $P(x)$ проведем красным карандашом отрезок $[-1, 1]$ и каждое критическое значение $P(x)$ соединим с $[-1, 1]$ отрезком слоения конфокальных гипербол с фокусами ± 1 , который покрасим в черный цвет. Поднимем этот рисунок на плоскость аргумента x многочлена и последовательно сотрем все висячие черные ребра. Полученный граф и будет графом Γ , причем его красная часть будет “вертикальной”, а черная – “горизонтальной”. Графы, порождаемые многочленами, имеют (помимо (A_1) – (A_5)) дополнительное ограничение на высоты вертикальных ребер.

ТЕОРЕМА 6. Нагруженный граф $\{\Gamma\}$ порожден многочленом степени n , если и только если для всякой его вершины $V \in \Gamma^0 \cup \Gamma^+$ нечетного порядка $\text{ord}(V)$ (точки ветвления) найдется отвечающая ей вершина v границы $\mathbb{H} \setminus \Gamma$ с высотой $H(v) \in \pi\mathbb{Z}/n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если кривая M построена по многочлену степени n , то (см. [2]) выполнены уравнения Абеля (6) и

$$2\pi i\mathbb{Z}/n \ni \int_{\gamma}^v d\eta_M = 2iH(v),$$

здесь путь интегрирования минует граф $\Gamma(M)$ справа.

2) Обратно: рассмотрим специальный базис в решетке нечетных 1-циклов, построенный при доказательстве теоремы 2. Из формулы (10) видно, что если высоты $h_s \in \pi\mathbb{Z}/n$, то периоды $d\eta_M$ по нечетным циклам $2C_0, 2C_1, \dots, 2C_{k-1}; C_k, \dots, C_g$ лежат в $4\pi i\mathbb{Z}/n$. Следовательно [2], кривая M порождена многочленом степени n .

Если условие последней теоремы выполнено, то высота любой вершины границы разрезанной полуплоскости, соответствующей точке ветвления кривой, лежит в $\pi\mathbb{Z}/n$:

ЛЕММА 6. Пусть кривая M построена по многочлену степени n , а точке на ребре R графа $\Gamma(M)$ кривой отвечает пара точек v, v' на границе разрезанной вдоль графа полуплоскости. Тогда $H(v) - H(v') \in 2\pi\mathbb{Z}/n$, если $R \subset \Gamma_-(M)$; $H(v) + H(v') \in 2\pi\mathbb{Z}/n$, если $R \subset \Gamma_+(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R \subset \Gamma_-$. Проведем из v' в v не пересекающую граф дугу C . Дуга охватывает четное число точек ветвления кривой, а потому определяет элемент целочисленных гомологий на M . Спроектируем C на нечетные 1-циклы, тогда согласно уравнениям Абеля (6) получим

$$H(v) - H(v') = -i \int_C d\eta_M \in 2\pi\mathbb{Z}/n.$$

Если же $R \subset \Gamma_+$, то выберем соответствующую точке ветвления вершину v'' с высотой $H(v'') \in \pi\mathbb{Z}/n$. Проведем не пересекающие граф дуги C и C' — из v'' в v и из v'' в v' соответственно. Представим M как два листа $\mathbb{C} \setminus \Gamma_+$, склеенные крест накрест по разрезам. Пусть J — смена листов (гиперэллиптическая инволюция), тогда $C - JC'$ определяет целочисленный 1-цикл на M , поэтому

$$H(v) + H(v') - 2H(v'') = -i \int_{C-JC'} d\eta_M \in 2\pi\mathbb{Z}/n.$$

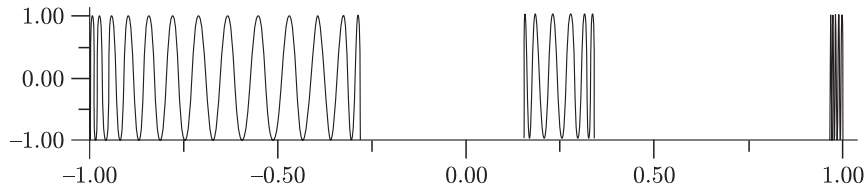


Рис. 13. Многочлен $P_{50}(x)$ с графом $\frac{27}{50}\pi$ $\frac{12}{50}\pi$ $\frac{11}{50}\pi$

Используемые как подстановки при решении задач о наименьшем уклонении g -экстремальные многочлены характерны тем, что их неисклЮчительные критические точки лежат на вещественной оси. Соответственно и классифицирующий граф $\{\Gamma\}$ нормированного многочлена в каком-то смысле должен быть сосредоточен на \mathbb{R} , скажем $\sum_{R \in \Gamma^0} H(R) \approx \pi$. Покажем, что характер колебаний многочлена на вещественной оси, т.е. его качественный график, определяется окрестностью графа Γ^0 . Пусть многочлену $P_n(x)$ с положительным старшим коэффициентом соответствует граф Γ на плоскости. В точке v на границе разрезанной вдоль графа верхней полуплоскости многочлен принимает значение (5)

$$P_n(v) = \cos ni(W(v) + iH(v)) = \cos nH(v) \operatorname{ch} nW(v) + i \sin nH(v) \operatorname{sh} nW(v), \quad (17)$$

не меняющееся при пересечении разрезов согласно лемме 6. Если $v \in \mathbb{R}$, то мнимая часть значения пропадает, так как $W(v) := 0$ на Γ_+^0 , $H(v) \in \pi\mathbb{Z}/n$ на Γ_-^0 и $H(v) \in \{0, \pi\}$ на $\mathbb{R} \setminus \Gamma^0$. Кратность значения (17) согласно той же формуле (5) равна

$$\operatorname{mult} P_n(v) = (1 + \operatorname{ord}(v)/2) \cdot \begin{cases} 1, & H(v) - iW(v) \notin \pi\mathbb{Z}/n, \\ 2, & H(v) - iW(v) \in \pi\mathbb{Z}/n. \end{cases}$$

В частности, на всяком ребре $(v^-, v^+) \subset \Gamma_+^0$ содержится

$$|[-nH(v^-)/\pi] + [nH(v^+)/\pi] + 1|$$

простых критических точек многочлена $P_n(x)$, значения в которых попеременно равны ± 1 . Итак, на вещественной оси мы определили все критические точки многочлена и соответствующие им критические значения с кратностями. Этого достаточно для построения качественного графика P_n . Экстремальные многочлены можно вычислять и на компьютере (см. рис. 13) в духе статей [3], [4].

Список литературы

1. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
2. *Богатырёв А. Б.* Эффективный подход к задачам о наименьшем уклонении // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 12. С. 21–40.
3. *Богатырёв А. Б.* Об эффективном вычислении многочленов Чебышёва для многих отрезков // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 11. С. 15–50.
4. *Богатырёв А. Б.* Представление пространств модулей кривых и вычисление экстремальных многочленов // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 4. С. 3–28.
5. *Содин М. Л., Юдицкий П. М.* Функции, наименее уклоняющиеся от нуля на замкнутых подмножествах действительной оси // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 2. С. 1–61.
6. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.
7. *Virtman J. S.* Braids, links, and mapping class groups. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1974.
8. *Васильев В. А.* Ветвящиеся интегралы. М.: МЦНМО, 2000.
9. *Чехов Л. О.* Матричные модели: геометрия пространств модулей и точные решения // ТМФ. 2001. Т. 127. № 2. С. 179–252.
10. *Мейман Н. Н.* К теории многочленов, наименее уклоняющихся от нуля // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130. № 2. С. 257–260.
11. *Strebel K.* Quadratic differentials. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
12. *Звонкин Д. А., Ландо С. К.* О кратностях отображения Ляшко–Лойенги на стратах дискриминанта // Функци. анализ и его прилож. 1999. Т. 33. № 3. С. 21–34.