Государственное образовательное учтеждение
высшего и профессионального образования России

Новосибирский государственный университет

На правах рукописи

УДК 519.63

Непомнящих Сергей Владимирович

Методы декомпозиции области и фиктивного пространства

01.01.07 – вычислительная математика

**Диссертация
на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук**

Новосибирск 2008

Содержание

Введение

Многие задачи естествознания и в частности математической физики приводят к краевым задачам эллиптического и параболического типа для дифференциальных уравнений в частных производных. Во многих случаях краевые задачи можно заменить на равносильные вариационные или проекционные задачи в соответствующих гильбертовых пространствах (пространствах Соболева [113]). Для приближенного решения краевых, вариационных или проекционных задач обычно используются разностные и вариационно-разностные методы, приводящие к системам линейных алгебраических (сеточных) уравнений. Современные задачи науки и техники, стремление создать детальную картину исследуемых явлений предъявляют все более высокие требования к точности их моделирования, следствием чего являются усложнение методов построения и повышения размера систем сеточных уравнений.

Для решения систем сеточных уравнений высокого порядка обычные прямые методы, типа метода Гаусса, неприменимы даже для самых мощных ЭВМ. С другой стороны, стремительный прогресс в области вычислительной техники, создание мощных многопроцессорных вычислительных комплексов вызывает необходимость в разработке новых параллельных вычислительных алгоритмов, которые могли бы быть эффективно реализованы на этих многопроцессорных комплексах. Для эффективного решения систем разностных и вариационно-разностных уравнений целесообразно строить итерационные процессы, учитывающие специфику дискретных задач и использующие на каждом своем шаге быстрые прямые алгоритмы для решения вспомогательных задач, либо оптимальные многоуровневые переобуславливающие операторы на иерархических сетках.

Изложенные обстоятельства позволяют сделать вывод об актуальности проблемы построения и исследования итерационных методов параллельного типа решения краевых задач и их дискретных аналогов.

Вопросы аппроксимации дифференциальных задач их дискретными аналогами в диссертации не обсуждаются.

Настоящая диссертация посвящена исследованию и разработке итерационных методов решения краевых задач для дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка в областях сложной геометрической формы и их вариационно-разностных аналогов. Краевая задача формулируется как задача представления линейного функционала в гильбертовом пространстве. Наиболее эффективные методы решения краевых задач в областях сложной геометрической формы, как правило, связаны с методами упрощения геометрии области. Для решения этой задачи строятся два класса итерационных процессов. В основе первого класса лежит идея метода альтернирования Шварца по подобластям [186] (методы декомпозиции области). Второй является аналогом метода фиктивных областей [109]. В диссертационной работе предложено развитие идей этих подходов: аддитивный метод Шварца [78] и метод фиктивного пространства [88, 166]. Литература, посвященная методам построения и решения систем сеточных уравнений, чрезвычайно обширна. Достаточно полное и подробное изложение полученных к настоящему времени результатов в этой области содержится в монографиях, учебных пособиях и обзорах С.К.Годунова и В.С.Рябенького [20], Е.Г.Дьяконова [26], В.Л.Ильина [27], А.Д.Ляшко и М.М.Карчевского [33], В.Г.Корнеева [39], Ю.А.Кузнецова [44], В.И.Лебедева [58], В.И.Лебедева и В.И.Агошкова [60], Г.И.Марчука [61], Г.И.Марчука и В.И.Лебедева [64], Г.И.Марчука и В.В.Шайдурова [65], С.Г.Михлина [82], Ж.-П.Обэна [92], Л.А.Оганесяна, В.Я.Ривкинда и Л.А.Руховца [93-94], Г.Н.Положего [98], В.С.Рябенького [103], А.А.Самарского [105], А.А.Самарского и Е.С.Николаева [107], А.А.Самарского, И.Е.Капорина, А.Б.Кучерова и Е.С.Николаева [106], Г.Стронга и Дж.Фикса [115], Ф.Сьярле [116], Р.П.Федоренко [120], В.Е.Шаманского [123] и многих других.

Остановимся более подробно на результатах, относящихся к теме диссертационной работы. Первую группу составляют методы, основанные на предварительной декомпозиции исходной области, на подобласти более простого вида. Эти методы не только позволяет упрощать исходную задачу, но и является методом распараллеливания задачи. Первым методом такого типа является классический метод альтернирования Шварца [186, 19], в котором исходная область разбивается на пересекающиеся подобласти. Слабая формулировка этого метода исследовалась С.Л.Соболевым [112]. Целесообразность применения метода альтернирования Шварца для разностного уравнения Лапласа исследовалась М.А.Алексидзе в [2], в которой подчеркивается эффективность этого метода в случае, когда количество узлов сеточной области превышает объём оперативной памяти ЭВМ. Метод альтернирования Шварца на разностном уровне рассматривался также в работах [164, 25]. С.Е. Романовой [101] исследуется метод альтернирования Шварца для решения первой краевой задачи для разностных уравнений Лапласа и Пуассона на многогранниках, стороны которых параллельны координатным осям и биссектрисам координатных углов. Помимо метода альтернирования Шварца к этой группе методов относится другой класс итерационных методов, который связан с декомпозицией области на непересекающиеся подобласти. К данному классу относятся методы интегрирования по подобластям со специальными условиями сопряжения на линиях касания подобластей [66, 34, 122, 69, 70, 110, 111, 59]. На основе операторов Пуанкаре-Стеклова [180, 114] методы декомпозиции (композиции) в составных областях были предложены в [60, 58]. Целесообразность применения такого подхода для решения задачи Дирихле для разностного аналога уравнения Лапласа в случае области, состоящей из двух прямоугольников, отмечалась ещё в [185]. Однако, лишь блочно-релаксационный метод в подпространстве, предложенный Ю.А.Кузнецовым [40] и развитый в [41-44], позволил решит смешанные краевые задачи для эллиптических уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами в областях, состоящих из прямоугольников, с точностью $\varepsilon > 0$ за $O(h^{-2}(\ln h^{-1} + \ln \varepsilon^{-1}))$ арифметических действий, где h – шаг сетки. Эффективность метода [40-44] основано на использовании алгоритма частичного решения алгебраических систем уравнений, возникающих в ходе реализации метода [40, 128, 48, 118, 28, 15, 49]. В работе Е.Г.Дьяконова [25] блочно-релаксационный метод в пространстве трактуется с позиций метода окаймления. Как показано в работах [76, 23] матрица системы уравнений, которая получается после решения задач внутри каждой подобласти, порождает нормировку следов сеточных функций на границах подобластей в пространстве Соболева $H^{1/2}$. Скорость сходимости соответствующих итерационных процессов не зависит от шага сетки. Следует особо подчеркнуть, что в данных работах либо рассматривается случай двух подобластей, либо с методологической точки зрения ему эквивалентный случай, когда разрезы, делящие область на подобласти, не пересекаются. Непосредственное перенесение этих методов либо вообще не осуществимо, либо приводит к тому, что скорость сходимости итерационного процесса становится зависящей от шага сетки (в случае непрерывного замыкания алгоритмов отсутствует экспоненциальная сходимость). Построение оптимального алгоритма с точки зрения скорости сходимости и арифметической сложности его применения для переобуславливающихся разрезов требует применения дополнительных идей. Для этого чрезвычайно продуктивным оказался, так называемый, аддитивный метод Шварца. Впервые оптимальный алгоритм для случая пересекающихся разрезов был предложен в [84], где использовался аддитивный метод Шварца в пространстве следов. Как метод, аддитивный метод Шварца был предложен в

[78]. Здесь формализм аддитивного метода Шварца рассматривался для случая разложения абстрактного гильбертова пространства в векторную сумму подпространств. В специальном случае для оператора Лапласа и областей, состоящих из прямоугольников или параллелепипедов, аддитивный метод Шварца рассматривался в [108]. В дальнейшем аддитивный метод Шварца использовался в [85, 161, 88, 87, 143, 90, 200, 195, 80, 144, 149, 129, 157] и многих других работах. Отметим, что в ряде случаев абстрактная формулировка аддитивного метода Шварца связана с разбиением области или множества, состоящего из объединения разрезов, на пересекающиеся подструктуры. Важное приложение аддитивного метода Шварца было предложено А.М.Мацокиным в [74], где исходное пространство сеточных функций раскладывалось в векторную сумму двух подпространств, где одно из подпространств соответствует сеточным функциям на макроэлементах, определенных на исходной триангуляции области, а второе подпространство соответствует сеточным функциям в вершинах, не входящих во множество опорных узлов макроэлементов. Позже эта идея использовалась J. Xu [196].

Вторая группа методов тесно связана с классическим методом фиктивных областей, предложенным в [18], позднее развитым и исследованным В.К.Саульевым [109],В.И.Лебедевым [57],В.Я.Ривкиндом [99], Л.А.Руховцом [102], В.Д.Копчёновым [37], А.Н.Коноваловым [36] и другими. Данный метод использует расширение оператора из исходной области до некоторой фиктивной области простой формы, например, до прямоугольника в двухмерном случае или параллелепипеда в трёхмерном. Коэффициенты расширенного оператора в фиктивной области зависят от некоторого малого параметра. Расширение оператора без малого параметра известно как матричный аналог метода фиктивных областей и позднее это направление развивалось как метод фиктивных компонент. Основа этого направления была предложена в [5, 73] и исследована в работах [6, 7, 29-32, 47, 49-51, 67-68, 70-71, 73, 81, 106, 117, 162]. К этой группе методов тесно примыкают алгоритмы, основанные на теории разностных потенциалов [8, 9, 55, 83, 103, 104] или использующие матрицы емкости [23, 137, 141, 178, 181-183, 193].

Скорость сходимости метода фиктивных компонент, построенного на основе расширения системы сеточных уравнений уравнениями с нулевыми коэффициентами и правой частью (симметричное расширение), существенным образом зависит от типа краевых условий. Случай естественных краевых условий был исследован Г.П. Астраханцевым в работе [5], где доказана независимость скорости сходимости метода от шага сетки. Случай главных краевых условий был исследован А.М. Мацокиным в [68], где исследована зависимость скорости сходимости метода от шага сетки. Детальный анализ спектра матрицы перехода (шага) метода фиктивных компонент привел к схеме построения несимметричного расширения системы вариационно-разностных уравнений [70], для которого скорость сходимости метода уже не зависит от параметра сеточной области и в случае главных краевых условий. Аналогичные результаты для систем разностных уравнений были получены И.Е. Капориным и Е.С. Николаевым в [29-32].

Дальнейшее развитие этой группы метод связано с методом фиктивного пространства, который был предложен автором в [88, 166]. Метод предлагает технологию построения переобуславливающих операторов в абстрактных гильбертовых пространствах. Основу метода фиктивного пространства составляет введение некоторого фиктивного гильбертова пространства (по аналогии с введением фиктивной области), норма в котором определяется легко обратимым оператором. Далее используется оператор сужения из введенного гильбертова пространства в исходное гильбертово пространство. Действие результирующего переобуславливающего оператора пространства на элементе из исходного гильбертова пространства состоит из трёх этапов. Сначала, с помощью оператора, сопряженного к оператору сужения, элемент исходного гильбертова пространства преобразуется в некоторый элемент фиктивного пространства, затем на этом элементе обращается легко обратимый оператор, действующий в фиктивном пространстве, и, наконец, с помощью оператора сужения полученный элемент преобразуется в элемент исходного гильбертова пространства. Применение метода фиктивного пространства для построения переобуславливающих операторов в конечно-элементных подпространствах пространств Соболева H^1 и $H^{1/2}$ на неструктурированных сетках позволяет определить оптимальные как по константам спектральной эквивалентности, так и по арифметической сложности реализации переобуславливающие операторы [88, 166, 80, 170]. В данном случае метод фиктивного пространства является эффективным для решения двух типов проблем: упрощения геометрии области и улучшения структуры сетки. В отличие от метода фиктивных компонент метод фиктивного пространства не требует точного решения задач в подобластях или организации двухступенчатого итерационного процесса, а достаточно использование переобуславливающего оператора для модельных задач в областях канонической формы с иерархическими сетками.

Следует также отметить ряд работ, посвящённых построению эффективных методов решения задач с сильно меняющимися коэффициентами, параболических задач, задач с вариационными неравенствами, а также построению многоуровневых (многосеточных) алгоритмов. [162, 35, 45, 52, 153, 127, 14, 195, 131, 53, 11, 132, 138, 179, 155, 140, 188, 154, 158, 145, 146, 133, 197, 184, 54, 13, 12, 160, 187, 147, 56, 159, 190-192].

Построение и исследование методов декомпозиции области и методов фиктивного пространства тесно связано с использованием теорем о следах функций из пространства Соболева [125, 10, 17] и их сеточных аналогов. Сеточные теоремы о следах сеточных функций на триангуляциях с хаотически расположенными узлами рассматривались [76, 142, 130, 86, 134]. Наиболее полное исследование пространства следов сеточных функций в пространстве Соболева было осуществлено автором в [88, 166], где рассматривался случай локально сгущающихся сеток, а также областей, диаметр которых характеризуется малым параметром. Построение эквивалентных нормировок в пространстве следов тесно связано с задачей о продолжении сеточных функций с сохранением нормы из подобласти в подобласть [7, 21, 22, 73, 194]. По-видимому, впервые определение легко обратимых норм в пространстве следов было осуществлено В.Б.Андреевым в [3] и далее конструктивное определение норм следов было дано в [4], где рассматривался случай прямоугольных сеток. Несколько более гибкая техника для определения легко обратимых норм, позволяющая рассматривать различные комбинации краевых условий, была предложена в [77]. Комбинация результатов из [77] и [88, 166] позволяет определять легко обратимые нормировки следов сеточных функций с хаотически расположенными узлами в области и различными краевыми условиями. Пространства Соболева с параметрами $H^1_{p,q}(\Omega)$ и соответствующая теорема о следах рассматривались М.С.Агроновичем и М.И.Вишиком [1]. Соответствующая норма в пространстве следов сеточных функций и теорема о следах рассматривались в [176]. Пространства Соболева $H^1(\Omega)$ в областях анизотропной формы (узкие области) рассматриваются автором в [90], где была определена норма в пространстве следов и доказана теорема о следах с константами, не зависящими от геометрии области. Сеточная норма в случае анизотропных областей и анизотропных сеток определена в [176, 157] и доказана соответствующая теорема о следах. Весовые пространства Соболева $H^1_\alpha(\Omega)$, в определении которых участвуют сингулярные весовые функции, характеризующиеся параметром α, изучались С.М.Никольским [91], где была определена норма в пространстве следов и доказана теорема о следах с константами, не зависящими от параметра α. При исследовании следов сеточных функций в весовых пространствах Соболева $H^1_\alpha(\Omega)$ важную роль играет корректное определение сеточных аналогов норм в пространстве $H^1_\alpha(\Omega)$ и пространстве следов $H^{1/2+\alpha}(\Gamma)$. Данные нормы и соответствующие теоремы о следах рассматривались в [168].

Изложим краткое содержание диссертационной работы.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы.

Первая глава диссертации посвящена сеточным аналогам теоремы о следах в пространствах Соболева, как для классических нормировок в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$, где Ω – заданная область и, соответственно, в пространстве следов $H^{1/2}(\Gamma)$, где Γ – граница области Ω [10, 17], так и в пространствах Соболева, когда соответствующие нормировки функций зависят от различных параметров (дополнительные весовые коэффициенты в определении норм, параметры, характеризующие геометрию области и сеточные аппроксимации этих областей, весовые сингулярные функции). Данные результаты имеют как самостоятельное значение (например, при исследовании устойчивости по условиям Дирихле), так и являются важным аппаратом при конструировании и исследовании методов декомпозиции области и метода фиктивного пространства.

В пункте 1.1 приводятся постановки эллиптических краевых задач, описывается их дискретизация и формулируется задача о построении переобуславливающих операторов для возникающих систем сеточных уравнений.

Пункт 1.2 посвящен сеточным теоремам о следах в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$. Рассматривается как случай полной нормы в пространстве $H^1(\Omega)$, так и случай полунормы. Диаметр области Ω может зависеть от малого параметра ε, а триангуляции Ω^h, аппроксимирующие область Ω, могут иметь точки сгущения. Доказывается сеточный аналог теоремы о следах с константами, не зависящими от параметра ε и триангуляций Ω^h.

В пункте 1.3 рассматриваются пространства Соболева $H^1_{p,q}(\Omega)$ с параметрами. Здесь параметр p является множителем при полунорме $|\bullet|^2_{H^1(\Omega)}$, а параметр q – множителем при норме $\|\bullet\|^2_{L_2(\Omega)}$. Такие пространства рассматривались М.С.Агроновичем и М.И.Вишиком [1] и возникают, например, при использовании неявных разностных схем для решения параболических краевых задач. Определяются сеточные нормы в возникающих пространствах следов и доказываются сеточные теоремы о следах с константами, которые не зависят как от параметров p и q, так и от триангуляции Ω^h области Ω.

Наиболее технически сложным в главе 1 является пункт 1.4, в котором рассматриваются нормировки с анизотропными коэффициентами в областях с анизотропной геометрией и с анизотропными триангуляциями. Так как простой заменой переменных случай анизотропных коэффициентов в нормах сводится к случаю изотропных норм, то достаточно рассмотреть случай областей с анизотропной геометрией и анизотропными сетками (при замене переменных меняется как геометрия, так и характеристики триангуляций). Данный пункт состоит из четырёх частей. В первой части пункта (подпункт 1.4.1) рассматривается случай функций во всём пространстве Соболева $H^1(\Omega)$, то есть без конечно-элементных аппроксимаций, в областях с анизотропной геометрией (узкие полосы). Вводится нормировка следов функций, характеризующих область, и доказывается теорема о следах с константами, которые не зависят от геометрии области. Во втором подпункте 1.4.2 рассматривается случай областей с изотропной геометрией, но анизотропной триангуляцией. Определяются сеточные нормы в пространствах следов конечно-элементных функций, и доказывается теорема о следах с оптимальными по порядку константами, то есть не зависящими от характеристик анизотропной сетки. В подпункте 1.4.3 доказывается аналогичная теорема для случая, когда диаметр области зависит от малого параметра ε. В этом случае константы в теореме о следах не зависят от этого параметра ε и анизотропии триангуляции (при соответствующем определении норм в пространствах следов конечно-элементных функций). Наконец, в последнем подпункте 1.4.4 полученные в 1.4.1-1.4.3 результаты объединяются, определяется соответствующая сеточная норма в пространстве следов и доказывается сеточная теорема о следах для случая анизотропных областей с анизотропной триангуляцией. Константы в сеточной теореме о следах не зависят ни от геометрии области, ни от триангуляций.

В последнем пункте 1.5 первой главы рассматриваются весовые пространства Соболева $H^1_\alpha(\Omega)$, в определении которых участвуют сингулярные весовые функции, характеризующиеся параметром α. Соответствующие нормы в пространстве следов были введены С.М.Никольским [91]. При исследовании следов сеточных функций в весовых пространствах $H^1_\alpha(\Omega)$, важную роль играют сеточные аналоги норм в пространствах $H^1_\alpha(\Omega)$ и пространствах следов $H^{1/2+\alpha}(\Gamma)$. Для введённых сеточных норм доказан сеточный аналог теоремы о следах в этих пространствах с константами, не зависящими от параметра α и от триангуляции Ω^h области Ω.

Во второй главе диссертации предлагаются и исследуются эффективные переобуславливающие операторы, которые основаны на методе декомпозиции. Методы декомпозиции рассматривается как применения аддитивного метода Шварца в гильбертовых пространствах со специальным выбором подпространств в этих пространствах. Выбор этих подпространств связан с декомпозицией исходной области на подобласти. Использование абстрактной формулировки аддитивного метода Шварца в произвольных гильбертовых пространствах позволяет предлагать широкий класс эффективных параллельных переобуславливающих операторов.

В первом пункте 2.1 второй главы в качестве введения в методы декомпозиции областей рассматривается простейший случай метода – так называемая, декомпозиция на полосы (без точек ветвления на объединении границ подобластей). Используя результаты главы 1, предлагаются оптимальные переобуславливающие операторы, как по скорости сходимости соответствующих итерационных процессов, так и по арифметической сложности реализации предложенных переобуславливающих операторов.

В пункте 2.2 приводится формулировка аддитивного метода Шварца в произвольных гильбертовых пространствах (предложенная совместно с А.М.Мацокиным), которая основана на декомпозиции этого пространства в векторную сумму подпространств. Далее формулируются и доказываются дополнительные утверждения, которые могут быть полезны для решения конкретных задач с использованием абстрактной схемы аддитивного метода Шварца. В частности, предлагается способ определения подпространств с использованием оператора продолжения из более “бедного” пространства в более “богатое” исходное гильбертово пространство. Использование предложенного формализма демонстрируется на простых примерах декомпозиции области на пересекающиеся подобласти.

Пункт 2.3 посвящен методу декомпозиции области на непересекающиеся подобласти. На основе аддитивного метода Шварца строится переобуславливающий оператор, являющийся суммой двух переобуславливателей, который соответствует разбиению (декомпозиции) исходного конечно-элементного пространства в векторную сумму двух подпространств. Первое подпространство соответствует функциям, обращающимся в ноль на границе подобластей и являющимся прямой суммой локальных подпространств, состоящих из функций, обращающихся в ноль вне подобласти. Первое слагаемое в переобуславливателе состоит из локальных переобуславливателей для внутренности подобластей. Построение локальных переобуславливателей рассматривается в третьей главе. Второе подпространство является образом оператора продолжения сеточных функций с границ подобластей в их внутренность. Второе слагаемое в переобуславливателе состоит из явного оператора продолжения сеточных функций с сохранением нормы и оператора, определяющего норму на объединении границ подобластей. Приводятся оценки эквивалентности предложенного переобуславливающего оператора и оператора исходной задачи в зависимости от свойств локальных переобуславливателей, нормы оператора продолжения сеточных функций с границ подобластей в их внутренность, а также от констант эквивалентности оператора, определяющего норму на объединении границ подобластей и нормы в пространстве $H^{1/2}$, которая порождается оператором исходной задачи.

В пункте 2.4 рассматривается построение явного оператора продолжения сеточных функций с границ области в её внутренность с сохранением нормы в классе конечно-элементных функций. В подпункте 2.4.1 предлагаются явные операторы продолжения интегрального типа, а в подпункте 2.4.2 явные операторы продолжения на иерархических сетках. В обоих случаях нормы предложенных операторов продолжения оцениваются константой, не зависящей от шага сетки, а арифметическая сложность реализации операторов продолжения пропорциональна числу степеней свободы области. Операторы продолжения интегрального типа могут применяться на произвольных неструктурированных сетка, однако их реализация логически сложнее, чем реализация на иерархических сетках.

Построению легко обратимого оператора, порождающего норму на объединении границ подобластей, которая эквивалентна норме в пространстве следов $H^{1/2}$ с константами, не зависящими от шага сетки, посвящен пункт 2.5. Данное построение основано на аддитивном методе Шварца. Для этого пространство сеточных функций на объединении границ подобластей (внутренних границах) разбивается на пересекающиеся подпространства, часть из которых соответствует окрестностям точек ветвления (точки, где пересекаются границы более двух подобластей), а остальные – криволинейным интервалам, соединяющим точки ветвления.

В пункте 2.6 рассматривается метод декомпозиции области на большое число непересекающихся подобластей. Предлагаемый переобуславливатель основан на аддитивном методе Шварца и имеет похожую структуру, что и переобуславливатель из пункта 2.3. Отличительной особенностью является введение дополнительного каркасного пространства на объединении границ подобластей. Константы спектральной эквивалентности предложенного переобуславливающего оператора и оператора исходной задачи не зависят ни от числа подобластей, ни от шага сетки, а арифметическая сложность реализации переобуславливателя пропорциональна числу степеней свободы исходной задачи.

Наконец, в пункте 2.7 второй главы рассматривается метод декомпозиции области на непересекающиеся подобласти для эллиптических краевых задач с разрывом коэффициентов на границах подобластей. Определяется специальная нормировка следов сеточных функций на границах подобластей в пространстве $H^{1/2}$, а также простой трехдиагональный переобуславливатель на границе подобласти (не оптимальный). Далее, используя вложенные Чебышевские итерации, определяется глобальный переобуславливающий оператор такой, что константы эквивалентности переобуславливателя и оператора исходной задачи не зависят от скачков коэффициентов, числа подобластей и шага сетки.

Третья глава диссертации посвящена методу фиктивного пространства [88, 166, 80]. Данный метод является развитием идеологии решения краевых задач, заложенной в методах фиктивных областей и фиктивных компонент. Основу метода фиктивного пространства составляет введение фиктивного более “богатого” гильбертова пространства, норма в котором определяется легко обратимым оператором, использование соответствующего оператора сужения из введённого гильбертово пространства в исходное. Используя этот метод, удаётся как “упростить” геометрию исходной области, так и “улучшить” структуру сетки.

В пункте 3.1 формулируется и доказывается лемма, которая является основой метода фиктивного пространства. Суть леммы заключается в следующем. Пусть даны два гильбертовых пространства: H_0 (исходное) и H (фиктивное или вспомогательное), в которых заданы операторы A и B соответственно. Пусть

$$R : H \to H_0$$

ограниченный оператор сужения и существует ограниченный оператор продолжения

$$T : H_0 \to H,$$

который является правым обратным к R. Тогда оператор $R\,B^{-1}R^*$ эквивалентен оператору A^{-1} с константами, зависящими от норм операторов R и T.

В пункте 3.2 рассматривается применение леммы о фиктивном пространстве для построения переобуславливающих операторов для модельных эллиптических задач в L - образных областях с краевыми условиями Дирихле и смешанными краевыми условиями.

Метод фиктивного пространства для построения переобуславливающего оператора для сеточных эллиптических краевых задач в кусочно-гладких областях рассматривается в пункте 3.3. Метод фиктивного пространства применяется следующим образом. Сначала упрощается геометрия исходной области, а затем улучшается структура сетки. Основные арифметические затраты при реализации переобуславливающего оператора заключается в использовании переобуславливающего оператора на равномерной сетке в прямоугольной области. Константы спектральной эквивалентности предложенного переобуславливающего оператора и сеточного эллиптического оператора со смешанными краевыми условиями не зависят от шага сетки.

В пункте 3.4 определяются переобуславливающие операторы на основе двух подходов: метода фиктивного пространства и многоуровневой декомпозиции на неструктурированных сетках. В отличие от пункта 3.3 последовательность применения метода фиктивного пространства меняется: на первом шаге улучшается структура сетки и осуществляется переход на фиктивную (вспомогательную) структурированную (подпункт 3.4.1), но ещё не иерархическую, сетку, на втором шаге улучшается геометрия, то есть область заключается в фиктивную область простого вида (квадрат), в которой используется естественная иерархия сеток и соответствующих подпространств для построения многоуровневых переобуславливателей [170, 172]. Константы спектральной эквивалентности предложенного переобуславливающего оператора и исходного оператора задачи не зависят от шага сетки, а арифметическая сложность реализации переобуславливателя пропорциональна числу степеней свободы исходной задачи.

В четвертой главе предлагается построение переобуславливающих операторов для двух классов задач с особенностями: эллиптических краевых задач с разрывными коэффициентами в малых подобластях (на основе специального метода декомпозиции) и для анизотропных эллиптических краевых задач (с использованием эквивалентных нормировок в соответствующем пространстве следов сеточных функций).

В пункте 4.1 рассматриваются эллиптические краевые задачи в случае, когда в подобластях, диаметр которых характеризуется параметрами H_i такими, что $0 < H_i \le 1$, а коэффициенты задачи в этих подобластях характеризуются параметрами ε_i такими, что $0 < \varepsilon_i \le 1$. В подпункте 4.1.2 предлагается построение переобуславливателя на основе декомпозиции области на непересекающиеся подобласти. Результаты, полученные в данном подпункте, имеют как самостоятельное значение, так и существенно используются в следующем подпункте. Наибольший интерес представляют результаты, полученные в подпункте 4.1.3, где переобуславливающий оператор строится на основе декомпозиции области на пересекающиеся подобласти. Примечательно, что для задачи с разрывными коэффициентами строится переобуславливающий оператор, использующий переобуславливающие операторы только для операторов Лапласа (например, из третьей главы) и не использует операторы продолжения сеточных функций. Константы спектральной эквивалентности предложенного переобуславливающего оператора и оператора исходной задачи не зависят от параметров H_i, ε_i и шага сетки, а арифметическая сложность реализации переобуславливателя пропорциональна числу степеней свободы исходной задачи.

Пункт 4.2 посвящён методу декомпозиции области для эллиптических краевых задач с анизотропными кусочно-постоянными коэффициентами.

Общая схема построения переобуславливателя основана на предлагаемом методе декомпозиции области для непересекающихся подобластей (пункт 2.3) и внутренних Чебышевских итераций (пункт 2.7). Принципиальным моментом в построении и исследовании переобуславливающего оператора является использование результатов, полученных в пункте 1.4. Константы спектральной эквивалентности предложенного переобуславливающего оператора и оператора исходной задачи не зависят от шага сетки h и коэффициентов p_1 и p_2 исходного анизотропного эллиптического оператора. Арифметическая сложность реализации переобуславливателя пропорциональна

$$\max\left\{1/h^2; (1/h)\max\left\{\sqrt{p_1(x)/p_2(x)}; \sqrt{p_2(x)/p_1(x)}\right\}\right\},$$

где $x \in \Omega$.

В заключении приведены основные результаты диссертационной работы.

Основные результаты диссертации докладывались на ряде российских и международных конференций, в том числе и в качестве пленарных и приглашенных докладов:

1. International Conference on Parallel Algorithms (Обервольфах, Германия, 1992).

2. 6-th International Conference on Domain Decomposition Methods (Комо, Италия, 1992).

3. 7-th International Conference on Domain Decomposition Methods (Пенсильвания, США, 1993).

4. International GAMM-Workshop on Multilevel Methods (Мейсдорф, Германия, 1994).

5. 8-th International Conference on Domain Decomposition Methods (Пекин, Китай, 1995).

6. International GAMM-Workshop on Multilevel Methods (Стробль, Австрия, 1996).

7. 9th International Conference on Domain Decomposition Methods (Улленсванг, Норвегия, 1996).

8. European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications (Париж, Франция, 1996).

9. Second European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications (Хайдельберг, Германия, 1997).

10. I-st Workshop on ``Large-Scale Scientific Computations'' (Варна, Болгария, 1997).

11. Domain Decomposition and Multifield Theories (Обервольфах, Германия, 1998).

12. 11-th International Conference on Domain Decomposition Methods (Лондон, Великобритания, 1998).

13. 3-rd European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications (Юваскюла, Финляндия, 1999).

14. Special Radon Semester 2005 on Computational Mechanics, (Линц, Австрия, 2005).

15. International Workshop on Direct and Inverse Field Computations in Mechanics (Линц, Австрия, 2005).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах, приведённых в Списке основных публикаций. Всего по теме диссертации автором опубликовано около 70 научных работ.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность своему учителю д.ф.-м.н. Александру Михайловичу Мацокину за постоянную научную поддержку при выполнении данной работы. Автор также признателен д.ф.-м.н. Юрию Алексеевичу Кузнецову за искреннее внимание и постоянное творческое взаимодействие, способствующие плодотворной работе над диссертацией.

1. Теорема о следах для сеточных функций

В начале настоящей главы приводятся постановки эллиптических краевых задач, описывается их дискретизация. Для возникающих систем сеточных уравнений формируется задача построения переобуславливающего оператора. Рассматриваются случаи симметричных и не симметричных положительно определенных форм, порождаемых соответствующими дифференциальными задачами. Основным результатом данной главы является сеточные аналоги теорем о следах в пространствах Соболева $H^1(\Omega)$. Данные теоремы в дальнейших главах используется для построения и исследования переобуславливающих операторов.

1.1. Переобуславливающие операторы для эллиптических краевых задач

Пусть Ω – область в R^n, $n = 2,3$ с кусочно-гладкой границей Γ класса C^2, которая удовлетворяет условию Липшица (см., например [124]). В случае $n = 3$ будем предполагать отсутствие конических точек на границе области Ω. В области Ω рассмотрим краевую задачу

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0(x) u = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma_0, \tag{1.1.1}$$

$$\frac{du}{dN} + \sigma(x) u = 0, \quad x \in \Gamma_1,$$

где $\dfrac{du}{dN} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n, x_i)$ – производная по конормали, n – вектор единичной внешней нормали к Γ, Γ_0 – объединение конечного числа криволинейных отрезков $(n = 2)$, $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1$, $\Gamma_0 = \overline{\Gamma}_0$, где $\overline{\Gamma}_0$ – замыкание множества Γ_0.

Обозначим через $H^1(\Omega)$ пространство Соболева со стандартной нормой

$$\| u \|^2_{H^1(\Omega)} = |u|^2_{H^1(\Omega)} + \| u \|^2_{L_2(\Omega)},$$

$$|u|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u(x)}{\partial x_i})^2 dx,$$

$$\| u \|^2_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega u^2(x)dx.$$

Через $H^1(\Omega, \Gamma_0)$ обозначим подпространство пространства Соболева $H^1(\Omega)$

$$H^1(\Omega, \Gamma_0) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \middle| \;\; v(x) = 0, \quad x \in \Gamma_0 \right\},$$

и введем билинейную форму $a(u, v)$ и линейный функционал $l(v)$

$$a(u, v) = \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0(x)\, u\, v)dx + \int_{\Gamma_1} \sigma(x)\, u\, v\, dx,$$

$$l(v) = \int_\Omega f(x)\, v\, dx.$$

Будем предполагать, что коэффициенты оператора и правая часть задачи (1.1.1) таковы, что билинейная форма $a(u, v)$ является симметричной, эллиптической и непрерывной на $H^1(\Omega, \Gamma_0) \times H^1(\Omega, \Gamma_0)$, т.е. выполняются соотношения

$$a(u,v)=a(v,u) \quad \forall u,v \in H^1(\Omega,\Gamma_0), \tag{1.1.2}$$

$$\alpha_0 \| v \|_{H^1(\Omega)} \le a(v,v) \le \alpha_1 \| v \|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega,\Gamma_0), \tag{1.1.3}$$

а линейный функционал $\ell(v)$ непрерывен на $H^1(\Omega,\Gamma_0)$:

$$| \ell(v) | \le \alpha \| v \|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega,\Gamma_0), \tag{1.1.4}$$

где α_0, α_1, α – положительные константы.

Обобщенное решение $u \in H^1(\Omega,\Gamma_0)$ задачи (1.1.1) определяется [92] как решение следующей проекционной задачи

$$u \in H^1(\Omega,\Gamma_0) : a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega,\Gamma_0). \tag{1.1.5}$$

Как известно [92], при сделанных предположениях (1.1.2)–(1.1.4) относительно билинейной формы $a(u,v)$ и линейного функционала $l(v)$ существует единственное решение задачи (1.1.5).

Зададимся положительным параметром h (всюду в дальнейшем предполагается, что h является достаточно малой величиной) и пусть $\Omega^h = \bigcup_{i=1}^{M} \tau_i$ – триангуляция области Ω [95] , т.е. Ω^h – объединение замкнутых симплексов τ_i, $i=1,2,...,M$.

Будем говорить, что триангуляция Ω^h является однородной, если существуют положительные константы l_1, l_2, s, не зависящие от h, такие, что

$$l_1 h \le r_i \le l_2 h, \quad r_i / \rho_i \le s, \quad i = 1,2,...,M, \tag{1.1.6}$$

где r_i и ρ_i – радиусы соответственно описанного и вписанного шаров в симплекс τ_i.

Итак, будем предполагать, что триангуляция Ω^h однородна и граница Γ^h триангуляции Ω^h аппроксимирует множество Γ с порядком $O(h^2)$.

Если $\Gamma_1 = \Gamma$, то будем предполагать [95], что $\Omega \subset \Omega^h$, если $\Gamma_0 = \Gamma$, то будем предполагать, что $\Omega^h \subset \Omega$. В случае, когда $\Gamma_0 \neq \varnothing$ и $\Gamma_1 \neq \varnothing$, сделаем предположения:

а) если $\Omega \subset R^2$, то в точках смены типа краевого условия помещены узлы триангуляции и $\Gamma_0 \subset \Omega^h$, $\Gamma_1 \subset \overline{(R^2 \setminus \Omega^h)}$;

б) если $\Omega \subset R^3$, то Ω^h – криволинейная триангуляция [38] такая, что $\Omega^h = \Omega$ и границы криволинейных симплексов точно аппроксимируют множества Γ_0 и соответственно Γ_1. При этом будем предполагать, что прямолинейные симплексы с теми же вершинами, удовлетворяют условию однородности триангуляции (1.1.6).

Части множества Γ^h, которые аппроксимируют множества Γ_0 и Γ_1, будем обозначать Γ_0^h и Γ_1^h соответственно.

Для триангуляций Ω^h со стандартными прямолинейными симплексами τ_i через $H(\Omega^h)$ обозначим пространство вещественных непрерывных функций, линейных на симплексах триангуляции. В случае криволинейных триангуляций относительно пространства $H(\Omega^h)$, будем предполагать, что существуют положительные константы c_1, c_2, не зависящие от h, такие, что

$$c_1\left\|u^h\right\|_{L_2(\Omega)} \le \left\|\bar{u}^h\right\|_{L_2(\bar{\Omega}^h)} \le c_2\left\|u^h\right\|_{L_2(\Omega)},$$
$$c_1\left|u^h\right|_{H^1(\Omega)} \le \left|\bar{u}^h\right|_{H^1(\bar{\Omega}^h)} \le c_2\left|u^h\right|_{H^1(\Omega)}$$

для любой функции $u^h \in H(\Omega^h)$. Здесь $\bar{\Omega}^h$ – триангуляция с прямолинейными симплексами с теми же вершинами, что и Ω^h, а $\bar{u}^h$ – стандартное кусочно-линейное восполнение на триангуляции $\bar{\Omega}^h$.

Через $H(\Omega^h,\Gamma_0^h)$ обозначим подпространство пространства $H(\Omega^h)$:

$$H(\Omega^h,\Gamma_0^h) = \left\{ v^h \in H(\Omega^h) \middle| \ v^h(x) = 0, \quad x \in \Gamma_0^h \right\}.$$

На полосу $\Omega \setminus \Omega^h$ продолжим эти функции нулем.

Приближенным решением задачи (1.1.5) будем называть решение следующей проекционной задачи:

$$u^h \in H(\Omega^h,\Gamma_0^h):\ a(u^h,v^h) = \ell(v^h) \quad \forall v^h \in H(\Omega^h,\Gamma_0^h). \qquad (1.1.7)$$

Вопросы аппроксимации задачи (1.1.5) задачей (1.1.7) достаточно полно изучены и изложены, например, в монографиях [95, 39, 116] и в данной работе не рассматриваются.

Теперь проекционные уравнения (1.1.7) запишем в матричном виде. Для этого каждой функции $u^h \in H(\Omega^h,\Gamma_0^h)$ будем стандартным образом [95] ставить в соответствие вещественный вектор-столбец $u \in R^N$, компоненты которого равны значениям функции u^h в соответствующих узлах триангуляции. Тогда задача (1.1.7) равносильна следующей системе сеточных уравнений

$$Au = f, \tag{1.1.8}$$

где

$$\begin{aligned}(Au, v) &= a(u^h, v^h) \quad \forall u^h, v^h \in H(\Omega^h, \Gamma_0^h),\\ (f, v) &= \ell(v^h) \qquad\quad \forall v^h \in H(\Omega^h, \Gamma_0^h).\end{aligned}$$

Здесь u^h, v^h – соответствующие восполнения векторов u, v, (f, v) – евклидово скалярное произведение в R^N.

В силу предположений (1.1.2), (1.1.3) относительно билинейной формы $a(u, v)$ матрица A системы уравнений (1.1.8) является положительно определенной и симметричной.

Основной целью диссертационной работы являются методы построения симметричного положительно определенного переобуславливающего оператора для задачи (1.1.8) такого, что следующие неравенства являются справедливыми:

$$c_3(Bu, u) \le (Au, u) \le c_4(Bu, u) \quad \forall u \in R^N,$$

положительные константы c_3, c_4 не зависят от «плохих» параметров таких, как h, скачков коэффициентов и некоторых других, вызывающих большую обусловленность матрицы A. При этом умножение B^{-1} на вектор должно быть легко реализовано. В этом случае решение системы уравнений (1.1.8) может быть эффективно реализовано при помощи итерационных процессов с использованием переобуславливающего оператора B. Скорость сходимости этих итерационных процессов зависит от отношения констант c_3 и c_4. Теория итерационных процессов с переобуславливающими операторами (неявные итерационные схемы) достаточно полно исследована и изложена, например, в монографиях [62, 107] , поэтому конкретные итерационные схемы решения задачи (1.1.8) в диссертации не рассматриваются.

Как правило, большинство эффективных переобуславливателей для итерационного решения краевых задач в областях сложной геометрической формы может быть построено, упрощая геометрию исходной области. В диссертации используются два подхода: разбиение области на подобласти и включение области сложной геометрии в область простого вида (например прямоугольник или параллелепипед). Следует отметить, что область применения симметричных линейных положительно определенных переобуславливающих операторов, порождающих эквивалентную легко обратимую нормировку в пространстве Соболева H^1, не исчерпывается только итерационным решением линейных симметричных краевых задач. Например, рассмотрим несимметричную краевую задачу вида:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x) u = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, \qquad x \in \Gamma_0,$$

$$\frac{du}{dN} + \sigma(x) u = 0, \qquad x \in \Gamma_1.$$

Данная задача порождает несимметричную матрицу A:

$$
\begin{aligned}
(Au,v) &= a(u^h,v^h) = \\
&= \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial u^h}{\partial x_j} \frac{\partial v^h}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u^h}{\partial x_i} v^h + \\
&\qquad + a_0(x) u^h v^h \Big) dx + \int\limits_{\Gamma_1} \sigma(x) u^h v^h dx \\
&\forall u^h, v^h \in H(\Omega^h, \Gamma_0^h).
\end{aligned}
$$

Будем предполагать, что вместо условий (1.1.2), (1.1.3) справедливы следующие соотношения:

$$\alpha_1 \left\| v^h \right\|^2_{H^1(\Omega)} \le a(v^h, v^h) \quad \forall v^h \in H(\Omega^h, \Gamma_0^h), \tag{1.1.9}$$

$$\left| a(u^h, v^h) \right| \le \alpha_2 \left\| u^h \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| v^h \right\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u^h, v^h \in H(\Omega^h, \Gamma_0^h). \tag{1.1.10}$$

И пусть определен симметричный оператор $B = B^*$:

$$\beta_1 \left\| v^h \right\|^2_{H^1(\Omega)} \le (Bv, v) \le \beta_2 \left\| v^h \right\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall v^h \in H(\Omega^h, \Gamma_0^h).$$

Используя известный метод симметризации (см., например, [62]) от задачи

$$Au=f$$

перейдем к следующей задаче:

$$A^* B^{-1} Au = A^* B^{-1} f.$$

Если для решения этой задачи использовать, например, итерационный процесс вида

$$u^0 \in R^n,$$

$$B(u^{k+1} - u^k) = -\tau_k (A^* B^{-1} A u^k - A^* B^{-1} f),$$

с соответствующим выбором параметров τ_k [62, 107], то его скорость сходимости будет зависеть от констант c_5, c_6 из неравенств

$$c_5(Bv,v) \le (A^*B^{-1}Av,Av) \le c_6(Bv,v) \quad \forall v \in R^N. \qquad (1.1.11)$$

Легко видеть, что

$$(A^*B^{-1}Av,v)^{1/2} = (B^{-1}Av,Av)^{1/2} = \sup_{w\ne 0}\frac{(Av,w)}{(Bw,w)^{1/2}} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{\beta_1}}\ \sup_{w\ne 0}\frac{(Au,w)}{\left\|w^h\right\|_{H^1(\Omega)}} \le \frac{\alpha_2}{\sqrt{\beta_1}}\ \sup_{w\ne 0}\frac{\left\|v^h\right\|_{H^1(\Omega)}\left\|w^h\right\|_{H^1(\Omega)}}{\left\|w^h\right\|_{H^1(\Omega)}} =$$

$$= \frac{\alpha_2}{\sqrt{\beta_1}}\left\|v^h\right\|_{H^1(\Omega)} \le \frac{\alpha_2}{\beta_1}(Bv,v)^{1/2}.$$

С другой стороны,

$$\sup_{w\ne 0}\frac{(Av,w)}{(Bw,w)^{1/2}} \ge \frac{1}{\sqrt{\beta_2}}\sup_{w\ne 0}\frac{(Av,w)}{\|w\|_{H^1(\Omega)}} \ge \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_2}}\sup_{w\ne 0}\frac{(Av,w)}{(Aw,w)^{1/2}} \ge$$

$$\ge \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_2}}\frac{(Av,v)}{(Av,v)^{1/2}} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_2}}(Av,v)^{1/2} \ge \frac{\alpha_1}{\sqrt{\beta_2}}\left\|v^h\right\|_{H^1(\Omega)} \ge$$

$$\ge \frac{\alpha_1}{\beta_2}(Bv,v)^{1/2}.$$

Таким образом, в (1.1.11) можно положить

$$c_5 = (\alpha_1/\beta_2)^2,\ c_6 = (\alpha_2/\beta_1)^2.$$

Возможен и другой подход [26, 107] при решении несимметричных задач на основе использования переобуславливающих операторов и априорной информации в виде (1.1.9), (1.1.10).

Кроме того, линейные симметричные переобуславливатели широко применяются при решении нелинейных и спектральных задач. Конкретные итерационные схемы так же хорошо изучены и описаны, например, в монографиях [93, 94, 26, 107].

1.2. Сеточные теоремы о следах в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$

Теоремы о следах функций из пространства Соболева [17] играют важную роль при исследовании краевых задач математической физики. Традиционно эти теоремы использовались для априорных оценок устойчивости по краевым условиям. Для случая сеточных функций, по-видимому, впервые конструктивное исследование этой задачи было осуществлено В.Б.Андреевым в [3, 4], где рассматривается случай прямоугольных сеток. Триангуляции с хаотически расположенными узлами рассматривались в [76, 142, 130, 134, 86]. Построение эквивалентных нормировок в пространстве следов тесно связано с задачей о продолжении сеточных функций из подобласти в подобласть с сохранением нормы [7, 21, 22, 194, 75]. Основным содержанием данного параграфа является доказательство сеточной теоремы о следах для сгущающихся сеток в случае, когда диаметр области может зависеть от малого параметра ε.

Соболевское пространство следов функций из $H^1(\Omega)$ на границе Γ области Ω обозначим через $H^{1/2}(\Gamma)$. В этом пространстве будем рассматривать следующую норму:

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} = |\varphi|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)},$$

$$|\varphi|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} = \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{(\varphi(x)-\varphi(y))^2}{|x-y|^n}\,dx\,dy,$$

$$\|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)} = \int_\Gamma \varphi^2(x)\,dx.$$

Имеет место следующая теорема о следах [17]:

Теорема 1.2.1. Пусть Ω – ограниченная область в R^n с липшицевой границей Γ. Тогда существует положительная константа c_1 такая, что

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

для любой $u \in H^1(\Omega)$, где $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ – след u на Γ. И наоборот, существует положительная константа c_2 такая, что для любой $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ существует $u \in H^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le c_2 \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Для функций из пространства Соболева $H^{1/2}(\Gamma)$ имеет место неравенство, которое является аналогом неравенства Пуанкаре [82, 85]:

Лемма 1.2.1. Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с липшицевой границей Γ. Тогда

$$\int_\Gamma \varphi^2(x)dx \le c(\Omega)\Big(\int_\Gamma\int_\Gamma \frac{(\varphi(x)-\varphi(y))^2}{|x-y|^n}\,dx\,dy + \big(\int_\Gamma \varphi(x)dx\big)^2\Big)$$

$$\forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma),$$

где

$$c(\Omega) = \max\left\{\frac{(\mathrm{diam}\Omega)^2}{2\mathrm{meas}\Gamma};\frac{1}{\mathrm{meas}\Gamma}\right\}.$$

Здесь $\mathrm{diam}\,\Omega$ – диаметр области Ω, а $\mathrm{meas}\,\Gamma$ – поверхностная мера Γ.

Следствием теоремы 1.2.1 и леммы 1.2.1 является следующая теорема о следах для случая полунорм [91, 85]:

Теорема 1.2.2. Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с липшицевой границей Γ. Тогда существует положительная константа c_3 такая, что

$$|\varphi|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le c_3 |u|_{H^1(\Omega)}$$

для любой $u \in H^1(\Omega)$, где $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ – след u на Γ.

И наоборот, существует положительная константа c_4 такая, что для любой $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ существует $u \in H^1(\Omega)$:

$$u(x) = \varphi(x) \quad x \in \Gamma,$$
$$|u|_{H^1(\Omega)} \le c_4 |\varphi|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

При построении и исследовании методов декомпозиции области, когда исходная область разбивается на большое число подобластей, важное значение имеет теорема о следах для областей с малым диаметром, который характеризуется параметром ε. В этом случае для описания пространства следов необходимо вводить некоторую весовую норму, зависящую от параметра ε.

И так, пусть Ω_ε – область в R^n с границей Γ_ε. Пусть ε – некоторый параметр такой, что $0 < \varepsilon \le 1$ и при замене переменных

$$x_i = \varepsilon \cdot \tau_i,\ i = 1,...,n \tag{1.2.1}$$

область Ω_ε преобразуется в ограниченную область Ω, которая удовлетворяет условию Липшица, и характеристики Ω не зависят от ε. Положим

$$\| \varphi \|^2_{H^{1/2,\varepsilon}(\Gamma_\varepsilon)} = \varepsilon \| \varphi \|^2_{L_2(\Gamma_\varepsilon)} + |\varphi|^2_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)}. \tag{1.2.2}$$

Имеет место следующие простые теоремы:

<u>**Теорема 1.2.2'.**</u> Пусть относительно Ω_ε справедливы сделанные выше предположения. Тогда существует положительная константа c_5, не зависящая от ε, такая, что

$$|\varphi|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} \le c_5 |u|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

для любой $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, где $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ – след u на Γ_ε. И наоборот, существует положительная константа c_6, не зависящая от ε, такая, что для любой $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ существует $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$:

$$u(x) = \varphi(x) \quad x \in \Gamma_\varepsilon,$$
$$|u|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le c_6 |\varphi|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)}.$$

<u>Доказательство.</u> Имеем

$$|\varphi|^2_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(\varphi(x)-\varphi(y))^2}{|x-y|^n} dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma} \frac{(\varphi(\varepsilon\cdot s)-\varphi(\varepsilon\cdot t))^2}{\varepsilon^n |s-t|^n} \varepsilon^{2(n-1)} ds\,dt = \varepsilon^{n-2} |\varphi|^2_{H^{1/2}(\Gamma)},$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial u}{\partial x_i})^2=\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial u}{\partial s_i}\frac{1}{\varepsilon})^2,$$

$$|u|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}=\int_{\Omega_\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial u}{\partial x_i})^2dx=\int_{\Omega}\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial u}{\partial x_i})^2\,\varepsilon^n ds=$$
$$=\varepsilon^{n-2}|u|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Теперь, используя теорему 1.2.2, получаем утверждение теоремы 1.2.2'.

<u>Теорема 1.2.1'.</u> Пусть относительно Ω_ε справедливы сделанные выше предположения. Тогда существует положительная константа c_7, не зависящая от ε, такая, что

$$\|\varphi\|_{H^{1/2,\varepsilon}(\Gamma_\varepsilon)}\le c_7\|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

для любой $u\in H^1(\Omega_\varepsilon)$, где $\varphi\in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ – след u на Γ_ε. И наоборот, существует положительная константа c_8, не зависящая от ε, такая, что для любой $\varphi\in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ существует $u\in H^1(\Omega_\varepsilon)$:

$$u(x)=\varphi(x)\quad x\in\Gamma_\varepsilon,$$
$$\|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\le c_8\|\varphi\|_{H^{1/2,\varepsilon}(\Gamma_\varepsilon)}.$$

<u>Доказательство.</u> Пусть $u\in H^1(\Omega_\varepsilon)$. Имеем

$$\varepsilon\int_{\Gamma_\varepsilon}\varphi^2(x)dx=\varepsilon\cdot\varepsilon^{n-1}\int_{\Gamma}\varphi^2(\varepsilon\cdot s)ds\le\varepsilon^n c_1^2\|u\|^2_{H^1(\Omega)},$$

$$\varepsilon^n\|u\|^2_{H^1(\Omega)}=\varepsilon^n\|u\|^2_{L_2(\Omega)}+\varepsilon^n|u|^2_{H^1(\Omega)}=$$
$$=\|u\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)}+\varepsilon^2|u|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\le\|u\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Первая часть утверждения теоремы 1.2.1' доказана.

Далее пусть $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ и пусть $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ ее продолжение с сохранением полунормы из утверждения теоремы 1.2.2’. Тогда, используя неравенство Фридрихса [113], имеем:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u^2(x)dx = \varepsilon^n \int_{\Omega} u^2(\varepsilon\cdot s)\,ds \le \varepsilon^n c_9(\|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)} + |u|^2_{H^1(\Omega)}),$$

$$\varepsilon^n(\|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)} + |u|^2_{H^1(\Omega)}) = \varepsilon\|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma_\varepsilon)} + \varepsilon^2|u|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Используя теорему 1.2.2’, получаем последнее утверждение теоремы 1.2.1’.

Замечание 1.2.1. При определении нормы $\|\varphi\|_{H^{1/2,\varepsilon}(\Gamma_\varepsilon)}$ в 1.2.2 можно вместо $\varepsilon\|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}$ использовать $\varepsilon\|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma'_\varepsilon)}$, где $\Gamma'_\varepsilon \subset \Gamma_\varepsilon$, $\operatorname{meas}\Gamma'_\varepsilon = O(\varepsilon)$, и где $O(\varepsilon)$ означает $c_1\varepsilon \le O(\varepsilon) \le c_2\varepsilon$ с константами c_1, c_2, не зависящими от ε. Тогда теорема 1.2.1’ так же имеет место с константами, не зависящими от ε.

В дальнейшем будет полезным следующее

Следствие. Пусть $\hat{H}^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ – подпространство пространства $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ такое, что

$$\int_{\Gamma'_\varepsilon} \varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall\varphi \in \hat{H}^{1/2}(\Gamma_\varepsilon),$$

где $\Gamma'_\varepsilon \subset \Gamma_\varepsilon$, $\operatorname{meas}\Gamma'_\varepsilon = O(\varepsilon)$. Тогда существуют положительные константы c_{10}, c_{11}, не зависящие от ε, такие, что

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma''_\varepsilon} \varphi^2(x)dx + |\varphi|^2_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} \le c_{10}\|u\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)},$$

где $\varphi \in \hat{H}^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ – след $u \in \hat{H}^1(\Omega_\varepsilon)$ на Γ''_ε. И, наоборот, для любой $\varphi \in \hat{H}^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ существует $u \in \hat{H}^1(\Omega_\varepsilon)$:

$$u(x) = \varphi(x) \quad x \in \Gamma_\varepsilon,$$
$$\| u \|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le c_{11}(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Gamma''_\varepsilon} \varphi^2(x)dx + |\varphi|^2_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)}).$$

Здесь $\Gamma''_\varepsilon \subset \Gamma_\varepsilon$, meas $\Gamma''_\varepsilon = O(\varepsilon)$.

Доказательство следствия следует из простых соотношений и теореме об эквивалентных нормировках в пространствах Соболева [113]:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \varphi^2(x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^{n-1}\int\limits_{\Gamma} \varphi^2(\varepsilon s)\,ds \le$$
$$\le c_{12}\varepsilon^{n-2}((\int\limits_{\Gamma'} \varphi(\varepsilon s)\,ds)^2 + |\varphi|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}) =$$
$$= c_{12}\varepsilon^{n-2}|\varphi|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} = c_{12}|\varphi|^2_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)}.$$

При доказательстве сеточного аналога теоремы 1.2.1’ принципиальным моментом является независимость констант не только от параметра ε, но и от триангуляции области.

Чтобы перейти к формулировке и доказательству сеточных теорем о следах введем обозначения и сделаем необходимые предположения.

Итак, пусть область Ω_ε при замене переменных (1.2.1) преобразуется в область Ω с кусочно-гладкой границей Γ класса C^2, которая удовлетворяет условию Липшица, а в случае $n = 3$ будем предполагать отсутствие конических точек на границе области Ω (т.е. предположения об области Ω более высокие, чем в теоремах 1.2.1', 1.2.2').

Пусть $\Omega_\varepsilon^h = \bigcup\limits_{i=1}^{M} \tau_i$ – триангуляция [116] области Ω_ε. Узлы триангуляции Ω_ε^h будем обозначать через z_i, $i = 1, 2, ..., N$. Обозначим через r_i радиус шара, описанного около симплекса τ_i, а через ρ_i радиус вписанного шара. Будем предполагать, что существует такая константа σ, не зависящая от триангуляции Ω_ε^h, что

$$r_i / \rho_i \le \sigma, \tag{1.2.3}$$

и r_i, $i = 1, 2, ..., M$, является достаточно малыми величинами, т.е. триангуляция Ω_ε^h регулярная [116].

Пусть $\Gamma_\varepsilon^h = \partial \Omega_\varepsilon^h$ – граница триангуляции Ω_ε^h. Будем также предполагать, что существует преобразование T узлов z_i триангуляции Ω_ε^h

$$Tz_i = \tilde{z}_i, \quad i = 1, 2, ..., N,$$

такое, что $\tilde{z}_i \in \bar{\Omega}_\varepsilon$, где $\bar{\Omega}_\varepsilon$ – замыкание области Ω_ε, и выполняются следующие условия:

а) каждому симплексу τ_i триангуляции Ω_ε^h с вершинами $z_{i_1}, ..., z_{i_{n+1}}$ соответствует симплекс $\hat{\tau}_i$ триангуляции $\hat{\Omega}_\varepsilon^h = \bigcup \hat{\tau}_i$ с вершинами $\tilde{z}_{i_1}, ..., \tilde{z}_{i_{n+1}}$, для которого выполняется условия (1.2.3);

б) если $z_i \in \Gamma_\varepsilon^h$, то $\tilde{z}_i \in \Gamma_\varepsilon$;

в) существуют положительные константы c_{13}, c_{14}, не зависящие от Ω_ε^h, такие, что

$$c_{13}\left|z_i - z_j\right| \le \left|\tilde{z}_i - \tilde{z}_j\right| \le c_{14}\left|z_i - z_j\right|$$

для любых $z_i, z_j \in \Omega_\varepsilon^h$.

__**Замечание 1.2.2.**__ Отметим, что выполнение условий а) - в) достаточно, чтобы Γ_ε^h аппроксимировала Γ_ε со вторым порядком.

Итак, пусть $H(\Omega_\varepsilon^h)$ – пространство вещественных непрерывных функций u^h, линейных на симплексах τ_i триангуляции Ω_ε^h, а $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon^h)$ – пространство следов функций из $H(\Omega_\varepsilon^h)$ на Γ_ε^h:

$$H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon^h) = \left\{\varphi^h \middle| \varphi^h = u^h\Big|_{\Gamma_\varepsilon^h},\ \ u^h \in H(\Omega_\varepsilon^h)\right\}.$$

Каждому узлу $z_i \in \Gamma_\varepsilon^h$ сопоставимо число $h_i = \left|z_i - z_i^{'}\right|$, где $z_i^{'} \in \Gamma_\varepsilon^h$ – некоторый соседний узел с z_i и положим

$$\left\|\varphi^h\right\|^2_{H_h^{1/2}(\Gamma_\varepsilon^h)} = \left|\varphi^h\right|^2_{H_h^{1/2}(\Gamma_\varepsilon^h)} + \left\|\varphi^h\right\|^2_{L_{2,h}(\Gamma_\varepsilon^h)}, \tag{1.2.4}$$

$$\left|\varphi^h\right|^2_{H_h^{1/2}(\Gamma_\varepsilon^h)} = \sum_{z_i, z_j \in \Gamma_\varepsilon^h, i \ne j} \frac{(\varphi^h(z_i) - \varphi^h(z_j))^2}{\left|z_i - z_j\right|^n} h_i^{n-1} h_j^{n-1},$$

$$\left\|\varphi^h\right\|^2_{L_{2,h}(\Gamma_\varepsilon^h)} = \varepsilon \sum_{z_i \in \Gamma_\varepsilon^h} (\varphi^h(z_i))^2\ h_i^{n-1}.$$

Данная нормировка (1.2.4) функций из $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon^h)$ очевидно является сеточным аналогом нормировки (1.2.2) в пространствах Соболева $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ и если $\Gamma_\varepsilon^h = \Gamma_\varepsilon$, то эти нормировки эквивалентны с константами, не зависящими от Ω_ε^h и ε.

Для этих нормировок имеет место сеточная теорема о следах.

<u>Теорема 1.2.3.</u> Пусть Ω_ε – область в R^n, Ω_ε^h – ее триангуляция, относительно которой справедливы сделанные выше предположения. Тогда существует положительная константа c_{15}, не зависящая от Ω_ε^h и ε, такая, что

$$\left\| \varphi^h \right\|_{H_h^{1/2}(\Gamma_\varepsilon^h)} \le c_{15} \left\| u^h \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^h)}$$

для любой $u^h \in H(\Omega_\varepsilon^h)$, где $\varphi^h \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon^h)$ – след u^h на Γ^h. И наоборот, существует положительная константа c_{16}, не зависящая от Ω_ε^h и ε, такая, что для любой $\varphi^h \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon^h)$ существует $u^h \in H(\Omega_\varepsilon^h)$:

$$\begin{gathered} u^h(x) = \varphi^h(x), \quad x \in \Gamma_\varepsilon^h, \\ \left\| u^h \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^h)} \le c_{16} \left\| \varphi^h \right\|_{H_h^{1/2}(\Gamma_\varepsilon^h)}. \end{gathered}$$

<u>Доказательство.</u> Для упрощения изложения детальное доказательство проведем для случая $n = 2$. Сначала введем вспомогательную криволинейную триангуляцию $\tilde{\Omega}_\varepsilon^h = \Omega_\varepsilon$ и соответствующие этой триангуляции восполнения сеточных функций $H(\Omega_\varepsilon)$.

Пусть $z_i \in \Omega_\varepsilon^h$ – узлы триангуляции Ω_ε^h, $\tilde{z}_i = Tz_i$, где T – введенное ранее преобразование узлов триангуляции. Если z_{i_1}, z_{i_2} – вершины треугольника триангуляции Ω^h, то соединим узлы $\tilde{z}_{i_1}$ и $\tilde{z}_{i_2}$ отрезком прямой в случае, когда хотя бы один из узлов $\tilde{z}_{i_1}$, $\tilde{z}_{i_2}$ лежит внутри Ω. В противном случае соединим $\tilde{z}_{i_1}$ и $\tilde{z}_{i_2}$ соответствующей частью Γ_ε. Полученную криволинейную триангуляцию обозначим через $\tilde{\Omega}_\varepsilon^h$. На триангуляции $\tilde{\Omega}_\varepsilon^h$ определим восполнение сеточных функций $H(\Omega_\varepsilon)$, например, при помощи отображения [38] криволинейных треугольников на прямолинейные с теми же вершинами, а на прямолинейных треугольниках будем использовать стандартное кусочно-линейное восполнение.

Через $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ обозначим пространство следов функций из $H(\tilde{\Omega}_\varepsilon^h)$ на Γ_ε:

$$H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon) = \left\{ \tilde{\varphi}^h \;\middle|\; \tilde{\varphi}^h = \tilde{u}^h |_{\Gamma_\varepsilon}, \;\; \tilde{u}^h \in H(\tilde{\Omega}_\varepsilon^h) \right\}.$$

Пространство $H(\tilde{\Omega}_\varepsilon^h)$ играет чисто вспомогательную роль и от него только требуется, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
&c_{17} \left\| \tilde{u}^h \right\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \le \left\| u^h \right\|_{L_\varepsilon(\Omega_\varepsilon^h)} \le c_{18} \left\| \tilde{u}^h \right\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}, \\
&c_{17} \left| \tilde{u}^h \right|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le \left| u^h \right|_{H^1(\Omega_\varepsilon^h)} \le c_{18} \left| \tilde{u}^h \right|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \\
&c_{17} \left\| \tilde{\varphi}^h \right\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)} \le \left\| \varphi^h \right\|_{L_{2,h}(\Gamma_\varepsilon^h)} \le c_{18} \left\| \tilde{\varphi}^h \right\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}, \\
&c_{17} \left| \tilde{\varphi}^h \right|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} \le \left| \varphi^h \right|_{H_h^{1/2}(\Gamma_\varepsilon^h)} \le c_{18} \left| \tilde{\varphi}^h \right|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)},
\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

где положительные константы c_{17} и c_{18} не зависят от Ω_ε^h и параметра ε. Здесь φ^h и $\tilde{\varphi}^h$ – следы функций u^h и $\tilde{u}^h$ на Γ_ε^h и Γ_ε соответственно, а функция $\tilde{u}^h$ в узлах $\tilde{z}_i$ триангуляции $\tilde{\Omega}_\varepsilon^h$ принимает те же значения, что и функция u^h в узлах z_i. Если использовать преобразование криволинейных треугольников из [38], то неравенства (1.2.5) имеют место. Таким образом, существование константы c_{15} немедленно следует из теоремы 1.2.1'.

Перейдем к доказательству существования константы c_{16}. При этом существенно будет использоваться методика, предложенная в [7], где при продолжении сеточных функций из подобласти в подобласть предполагалось использование продолжения в классе функций H^1, которое гарантируется теоремой о продолжении [17], а для определения сеточных функций использование операции осреднения по Стеклову. В данной работе в отличие от [7] применяется теорема о продолжении функций с границы во внутренность области, а осреднение используется только в узлах сетки, причем с переменным шагом, что вызвано возможным сгущением сетки.

Итак, пусть задана функция $\varphi^h \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon^h)$. По функции φ^h определим функцию $\tilde{\varphi}^h \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon^h)$, принимающую в узлах $\tilde{z}_i \in \Gamma_\varepsilon$ те же значения, что и φ^h в узлах $z_i \in \Gamma_\varepsilon^h$. На основании теоремы 1.2.1' существует функция $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ такая, что

$$u(x) = \tilde{\varphi}(x), \quad x \in \Gamma_\varepsilon,$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le c_{19} \|\tilde{\varphi}\|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)},$$

где c_{19} не зависит от ε. Теперь по функции u определим функцию $\tilde{u}^h \in H(\Omega_\varepsilon)$ следующим образом. Пусть $\tilde{z}_i$ – внутренний узел триангуляции $\tilde{\Omega}_\varepsilon^h$. Через K_i обозначим объединение треугольников триангуляции $\tilde{\Omega}_\varepsilon^h$, которые имеют $\tilde{z}_i$ своей вершиной. Обозначим через $B(\tilde{z}_i, r_i)$ – шар радиуса r_i с центром в точке $\tilde{z}_i$. Пусть r_i – максимальное число такое, что $B(\tilde{z}_i, r_i) \subset K_i$. Положим

$$\tilde{u}(\tilde{z}_i) = \frac{1}{\pi r_i^2} \int\limits_{B(\tilde{z}_i, r_i)} u(x)dx.$$

В силу (1.2.5) для доказательства существования константы c_{16} достаточно оценить $\left\|\tilde{u}^h\right\|_{H^1(\Omega)}$. В силу неравенства Фридрихса (см. доказательство теоремы 1.2.1') существует положительная константа c_{20}, не зависящая от Ω_ε^h и ε, такая, что

$$\left\|\tilde{u}^h\right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le c_{20}(\varepsilon\left\|\tilde{\varphi}^h\right\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)} + \left|\tilde{u}^h\right|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}),$$

и, следовательно, достаточно оценить только полунорму функции $\tilde{u}^h$. Обозначим через ℓ_i стороны треугольников триангуляции $\tilde{\Omega}_\varepsilon^h$, соединяющих вершины $\tilde{z}_{i_1}$, $\tilde{z}_{i_2}$. В силу (1.2.5) и известных свойств кусочно-линейных восполнений [95] существует положительная константа c_{21}, не зависящая от Ω_ε^h и ε, такая, что

$$\left|\tilde{u}^h\right|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le c_{21}\Big(\sum_{l_i \in \tilde{\Omega}_\varepsilon^h} (\tilde{u}^h(\tilde{z}_{i_2}) - \tilde{u}^h(\tilde{z}_{i_1}))^2\Big). \qquad (1.2.6)$$

Таким образом, для доказательства существования константы c_{16} достаточно оценить сумму, стоящую в правой части неравенства (1.2.6). Разобьем эту сумму на три части. Обозначим через M_1 подмножество ℓ_i, таких, что $\tilde{z}_{i_1}$ и $\tilde{z}_{i_2}$ лежат на Γ_ε, через M_2 подмножество ℓ_i, таких, что $\tilde{z}_{i_1}$ и $\tilde{z}_{i_2}$ не лежат на Γ_ε, и, наконец, через M_3 подмножество ℓ_i, таких, что либо $\tilde{z}_{i_1}$, либо $\tilde{z}_{i_2}$ лежит на Γ_ε. Из условий на Ω_ε^h следует, что

$$\sum_{\ell_i \in M_1} (\tilde{u}^h(\tilde{z}_{i_2}) - \tilde{u}^h(\tilde{z}_{i_1}))^2 = \sum_{\ell_i \in M_1} (\tilde{\varphi}^h(\tilde{z}_{i_2}) - \tilde{\varphi}^h(\tilde{z}_{i_1}))^2 \le$$
$$\le c_{22}\left\|\varphi^h\right\|^2_{H_h^{1/2}(\Gamma_\varepsilon^h)},$$

где положительная константа c_{22} не зависит от Ω_ε^h и ε. Теперь оценим

$$\sum_{\ell_i \in M_2} (\tilde{u}^h(\tilde{z}_{i_2}) - \tilde{u}^h(\tilde{z}_{i_1}))^2.$$

Для этого потребуется следующая лемма:

<u>**Лемма 1.2.1.**</u> Пусть $h_2 \ge h_1 > 0$. Тогда для любой функции $u \in H^1(B(0,h_2))$

$$\Big(\frac{1}{\pi h_2^2}\int_{B(0,h_2)} u(x)dx - \frac{1}{\pi h_1^2}\int_{B(0,h_1)} u(x)dx\Big)^2 \le \frac{h_2}{\pi h_1}\left|u\right|^2_{H^1(B(0,h_2))}.$$

<u>Доказательство.</u> Воспользуемся полярной системой координат (r,φ):

$$x=(x_1,x_2)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Тогда

$$(\frac{1}{\pi h_2^2}\int\limits_{B(0,h_2)} u(x)dx-\frac{1}{\pi h_1^2}\int\limits_{B(0,h_1)} u(x)dx)^2=$$

$$=(\frac{1}{\pi h_2^2}\int\limits_0^{h_2}\int\limits_0^{2\pi} u(r,\varphi)r\,d\varphi\,dr-\frac{1}{\pi h_1^2}\int\limits_0^{h_1}\int\limits_0^{2\pi} u(r,\varphi)r\,d\varphi\,dr)^2.$$

Положим $a=h_2/h_1\ge 1$ и во втором интеграле сделаем замену переменных $r'=ar$. В результате будем иметь

$$(\frac{1}{\pi h_2^2}\int\limits_0^{h_2}\int\limits_0^{2\pi} u(r,\varphi)r\,d\varphi\,dr-\frac{1}{\pi h_2^2}\int\limits_0^{h_2}\int\limits_0^{2\pi} u(\frac{1}{a}r,\varphi)r\,d\varphi\,dr)^2=$$

$$=(\frac{1}{\pi h_2^2}\int\limits_0^{h_2}\int\limits_0^{2\pi}(u(r,\varphi)-u(\frac{1}{a}r,\varphi))r\,d\varphi\,dr)^2=$$

$$=\frac{1}{\pi^2 h_2^4}(\int\limits_0^{h_2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\frac{1}{a}r}^{r}\frac{\partial u(t,\varphi)}{\partial t}\,dt\,r\,d\varphi\,dr)^2.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и проведя очевидные оценки, будем иметь

$$\frac{1}{\pi^2 h_2^4}(\int\limits_0^{h_2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\frac{1}{a}r}^{r} r^{1/2}\frac{\partial u(t,\varphi)}{\partial t}r^{1/2}\,dt\,r\,d\varphi\,dr)^2\le$$

$$\le\frac{1}{\pi h_2}(\int\limits_0^{h_2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\frac{1}{a}r}^{r}(\frac{\partial u(t,\varphi)}{\partial t})^2\,r\,dt\,d\varphi\,dr)^2\le$$

$$\leq \frac{a}{\pi h_2} \int\limits_0^{h_2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\frac{1}{a}r}^{r} (\frac{\partial u(t,\varphi)}{\partial t})^2 \ t \ dt \ d\varphi \ dr \leq$$

$$\leq \frac{a}{\pi h_2} \int\limits_0^{h_2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{h_2} (\frac{\partial u(t,\varphi)}{\partial t})^2 \ t \ dt \ d\varphi \ dr \leq$$

$$\leq \frac{a}{\pi h_2} \int\limits_0^{h_2} \int\limits_{B(0,h_2)} (\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x_2})^2 dx \ dr =$$

$$= \frac{h_2}{\pi h_1} | u |^2_{H^1(B(0,h_2))}.$$

Итак, пусть $\ell_i \in M_2$. Пусть $r < 0$ – максимальное число, такое, что $B(x, \sqrt{2} r_i) \subset K_{i_1} \bigcup K_{i_2}$ для любой точки $x \in \ell_i$. Тогда

$$(\tilde{u}^h(\tilde{z}_{i_2}) - \tilde{u}^h(\tilde{z}_{i_1}))^2 \leq$$

$$\leq 3((\tilde{u}^h(\tilde{z}_{i_2}) - \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{B(\tilde{z}_{i_2}, r)} u(x) dx)^2 +$$

$$+ (\frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{B(\tilde{z}_{i_1}, r)} u(x) dx - \tilde{u}^h(\tilde{z}_{i_1}))^2 +$$

$$+ (\frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{B(\tilde{z}_{i_2}, r)} u(x) dx - \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{B(\tilde{z}_{i_1}, r)} u(x) dx)^2).$$

Первые два слагаемых оценивают на основании леммы 1.2.1. Рассмотрим последнее слагаемое. Не ограничивая общности, можно считать, что узлы $\tilde{z}_{i_1}, \tilde{z}_{i_2}$ имеют следующие координаты:

$$\tilde{z}_{i_2} = (0,0), \ \tilde{z}_{i_2} = (h,0), \tag{1.2.7}$$

где h – длина ℓ_i.

Положим $y=(h,0)$. Тогда, используя неравенство Коши-Буняковского, получим

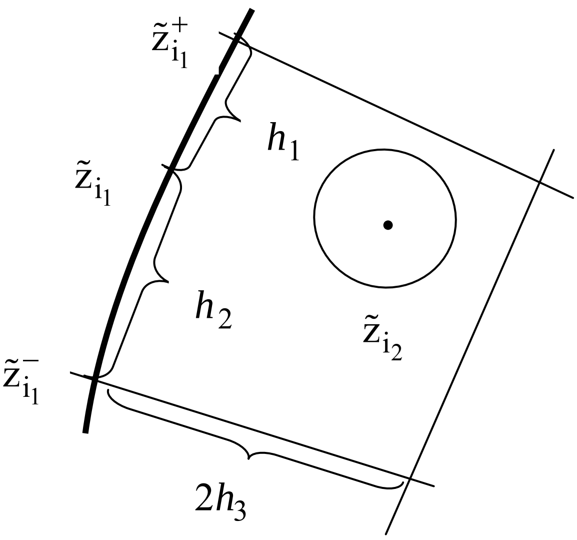
$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{\pi r^2}\Big(\int\limits_{B(\tilde z_{i_2},r)} u(x)dx - \int\limits_{B(\tilde z_{i_1},r)} u(x)dx\Big)\Big)^2 = \\
&= \frac{1}{\pi^2 r^4}\Big(\int\limits_{B(\tilde z_{i_1},r)} u(x+y)-u(x)dx\Big)^2 \le \\
&\le \Big(\frac{1}{\pi r^2}\Big(\int\limits_{B(\tilde z_{i_2},r)} u(x)dx - \int\limits_{B(\tilde z_{i_1},r)} u(x)dx\Big)\Big)^2 = \\
&= \frac{1}{\pi^2 r^4}\Big(\int\limits_{B(\tilde z_{i_1},r)} u(x+y)-u(x)dx\Big)^2 \le \\
&\le \frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{B(\tilde z_{i_1},r)} (u(x+y)-u(x))^2 dx \le \\
&\le \frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{-r}^{r}\int\limits_{-r}^{r} (u(s+h,t)-u(s,t))^2 ds\, dt = \\
&= \frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{-r}^{r}\int\limits_{-r}^{r} \Big(\int\limits_{s}^{s+h}\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}d\xi\Big)^2 ds\, dt \le \\
&\le \frac{h}{\pi r^2}\int\limits_{-r}^{r}\int\limits_{-r}^{r}\int\limits_{s}^{s+h} \Big(\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\Big)^2 d\xi\, ds\, dt \le \\
&\le \frac{h}{\pi r^2}\int\limits_{-r}^{r}\int\limits_{-r}^{r}\int\limits_{-r}^{r+h} \Big(\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\Big)^2 d\xi\, ds\, dt = \\
&= \frac{2h}{\pi r}\int\limits_{-r}^{r}\int\limits_{-r}^{r+h} \Big(\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\Big)^2 d\xi\, dt \le \frac{2h}{\pi r}|u|^2_{H^1(K_{i_1}\cup K_{i_2})}.
\end{aligned}
$$

Суммируя полученные оценки, имеем

$$
\sum_{l_i\in M_2} (\tilde u^h(z_{i_2}) - \tilde u^h(z_{i_1}))^2 \le c_{23}|u|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.
$$

Осталось рассмотреть случай, когда $\ell_i \in M_3$.

Пусть $\tilde{z}_{i_1} \in \Gamma$. Обозначим через $\tilde{z}_i^+ \in \Gamma$ и $\tilde{z}_i^- \in \Gamma$ соседние вершины триангуляции $\tilde{\Omega}^h$. Пусть эти вершины имеют следующие координаты в приграничной системе координат.



$$\tilde{z}_{i_1} = (0,0)$$
$$\tilde{z}_{i_1}^+ = (h_1,0)$$
$$\tilde{z}_{i_1}^- = (-h_2,0)$$
$$\tilde{z}_{i_2} = (0,h_3)$$

Пусть r – максимальное число, такое, что шар $B(\tilde{z}_{i_2}, r)$ содержится в полосе

$$S = \{(s,n) \mid -h_2 \le s \le h_1, 0 \le n \le 2h_3\}.$$

Имеем:

$$(\tilde{u}^h(\tilde{z}_{i_2}) - \tilde{u}^h(\tilde{z}_{i_1}))^2 \le$$
$$\le 2((\tilde{u}^h(\tilde{z}_{i_2}) - \frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{B(\tilde{z}_{i_2},r)} u(x)dx)^2 +$$
$$+ (\frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{B(\tilde{z}_{i_2},r)} u(x)dx - \tilde{u}^h(\tilde{z}_{i_1}))^2.$$

Второе слагаемое оценивается следующим образом:

$$\frac{1}{\pi^2 r^4}\Big(\int\limits_{B(\tilde z_{i_2},r)} (u(x)-\tilde u^h(\tilde z_{i_1}))dx\Big)^2 \le$$

$$\le \frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{B(\tilde z_{i_2},r)} (u(x)-\tilde u^h(\tilde z_{i_1}))^2 dx \le$$

$$\le \frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{-h_2}^{h_1}\int\limits_{0}^{2h_3} (u(s,t)-\tilde\varphi^h(0))^2 dtds \le$$

$$\le \frac{2}{\pi r^2}\Big(\int\limits_{-h_2}^{h_1}\int\limits_{0}^{2h_3} (u(s,t)-\tilde\varphi^h(0))^2 dtds +$$

$$+\int\limits_{-h_2}^{h_1}\int\limits_{0}^{2h_3} (\tilde\varphi^h(s)-\tilde\varphi^h(0))^2 dtds\Big) \le$$

$$\le \frac{2}{\pi r^2}\Big(\int\limits_{-h_2}^{h_1}\int\limits_{0}^{2h_3} \Big(\int\limits_0^t \frac{\partial u}{\partial \xi}(s,\xi)d\xi\Big)^2 dtds +$$

$$+2h_3\Big(\int\limits_0^{h_1} (\tilde\varphi^h(s)-\tilde\varphi^h(0))^2 ds +$$

$$+\int\limits_{-h_2}^{0} (\tilde\varphi^h(s)-\tilde\varphi^h(0))^2 ds\Big)\Big) \le$$

$$\le c\big(\|\nabla u\|^2_{L_2(S)} + (\tilde\varphi^h(z^+_{i_1})-\tilde\varphi^h(z_{i_1}))^2 +$$

$$+(\tilde\varphi^h(z_{i_1})-\tilde\varphi^h(z^-_{i_1}))^2\big).$$

Используя свойства функции $\tilde\varphi^h$, легко показать, что

$$\int\limits_0^{h_1} (\tilde\varphi^h(s)-\tilde\varphi^h(0))^2 ds \le$$

$$\le c\int\limits_0^{h_1} \Big(\frac{\tilde\varphi^h(z^+_{i_1})-\tilde\varphi^h(z_{i_1})}{h_1}s\Big)^2 ds =$$

$$= c\frac{h_1}{3}(\tilde{\varphi}^h(z_{i_1}^+) - \tilde{\varphi}^h(z_{i_1}))^2.$$

Суммируя полученные оценки, имеем

$$\sum_{l_i \in M_3} (\tilde{u}^h(\tilde{z}_{i_2}) - \tilde{u}^h(\tilde{z}_{i_1}))^2 \le c_{24} |u|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)},$$

где константа c_{24} не зависит от триангуляции Ω_ε^h и параметра ε, что и завершает доказательство теоремы 1.2.3 в двумерном случае. Доказательство трехмерного случая совершенно аналогично и использует следующую лемму.

<u>**Лемма 1.2.2.**</u> Пусть $h_2 \ge h_1 > 0$. Тогда для любой функции $u \in H^1(B(0,h_2))$

$$(\frac{1}{\frac{4}{3}\pi h_2^3}\int\limits_{B(0,h_2)} u(x)\,dx - \frac{1}{\frac{4}{3}\pi h_1^3}\int\limits_{B(0,h_1)} u(x)\,dx)^2 \le$$

$$\le \frac{h_2}{\frac{4}{3}\pi h_1^2} |\, u \,|^2_{H^1(B(0,h_2))}.$$

<u>Доказательство.</u> Воспользуемся сферической системой координат (r,φ,θ):

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (r\sin\theta\ \cos\varphi,\ r\sin\theta\ \sin\varphi,\ r\cos\theta),$$

имеем

$$(\frac{1}{\frac{4}{3}\pi h_2^3}\int\limits_{B(0,h_2)} u(x)\,dx - \frac{1}{\frac{4}{3}\pi h_1^3}\int\limits_{B(0,h_1)} u(x)\,dx)^2 =$$

$$= (\frac{1}{\frac{4}{3}\pi h_2^3}\int\limits_0^{h_2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} u(r,\varphi,\theta)\ r^2 \sin\theta\ d\theta\ d\varphi\ dr -$$

$$-\frac{1}{\frac{4}{3}\pi h_1^3}\int_0^{h_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(r,\varphi,\theta)\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr)^2.$$

Положим $a = h_2 / h_1 \ge 1$. Сделаем замену переменных $r' = ar$ во втором интеграле. В результате будем иметь:

$$(\frac{1}{(4/3)\pi h_2^3}\int_0^{h_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(r,\varphi,\theta)\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr -$$

$$-\frac{1}{(4/3)\pi h_2^3}\int_0^{h_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(\frac{1}{a}r,\varphi,\theta)\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr)^2 =$$

$$=(\frac{1}{(4/3)\pi h_2^3})^2(\int_0^{h_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{(1/a)r}^{r} \frac{\partial u}{\partial t}(t,\varphi,\theta)\, r^2 \sin\theta\, dt\, d\theta\, d\varphi\, dr)^2.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, будем иметь:

$$(\frac{1}{(4/3)\pi h_2^3})^2(\int_0^{h_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{(1/a)r}^{r} r\sqrt{\sin\theta}\,\frac{\partial u}{\partial t}(t,\varphi,\theta)\, r\sqrt{\sin\theta}\, dt\, d\theta\, d\varphi\, dr)^2 \le$$

$$\le (\frac{1}{(4/3)\pi h_2^3})^2(\int_0^{h_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{(1/a)r}^{r} r^2 \sin\theta\, dt\, d\theta\, d\varphi\, dr)\cdot$$

$$(\frac{1}{(4/3)\pi h_2^3})^2(\int_0^{h_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{(1/a)r}^{r} (\frac{\partial u}{\partial t}(t,\varphi,\theta))^2 r^2 \sin\theta\, dt\, d\theta\, d\varphi\, dr) \le$$

$$\le \frac{a^2}{(4/3)\pi h_2^2}\int_0^{h_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{h_2} (\frac{\partial u}{\partial t}(t,\varphi,\theta))^2 t^2 \sin\theta\, dt\, d\theta\, d\varphi\, dr) \le$$

$$\le \frac{h_2}{(4/3)\pi h_1^2}|\, u\,|^2_{H^1(B(0,h_2))}.$$

Лемма 1.2.2 доказана.

В конце главы 1 приведем примеры конечно-элементных пространств, которые являются плотными в пространстве Соболева H^1, но сеточные теоремы о следах для этих пространств не имеют места (с константами, не зависящими от сетки).

Пример 1.2.1. В первом примере нарушается условия на триангуляцию (1.2.3). Пусть Ω – единичный квадрат на плоскости

$$\Omega = \left\{(x_1, x_2) \middle|\ 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\right\},$$

в котором введена равномерная прямоугольная сетка с шагом h_1 в направлении x_1 и с шагом h_2 в направлении x_2. Эту сетку триангулируем с помощью диагоналей прямоугольников. Пусть, например, $h_1 = h^2$, $h_2 = h$. Рассмотрим кусочно-линейную функцию $\varphi^h \in H^{1/2}(\Gamma^h)$, принимающую значение равное единице в узле A и значения равные нулю в других узлах (см. рисунок 1.2.1).

Через ABC обозначим треугольник триангуляции, примыкающей к узлу A. Пусть $u^h \in H(\Omega^h)$ произвольное продолжение функции φ^h внутрь квадрата Ω. Тогда легко видеть, что

$$\left\|\varphi^h\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = O(1),$$

$$\left\|u^h\right\|^2_{H^1(\Omega)} \geq \left\|u^h\right\|^2_{H^1(ABC)} \geq$$

$$\geq (1/2)(1/h_1^2)h_2 h_1 = (1/2)(h_2/h_1) = (1/2h).$$

Таким образом, сеточная теорема о следах не имеет места (с константой, не зависящей от h).

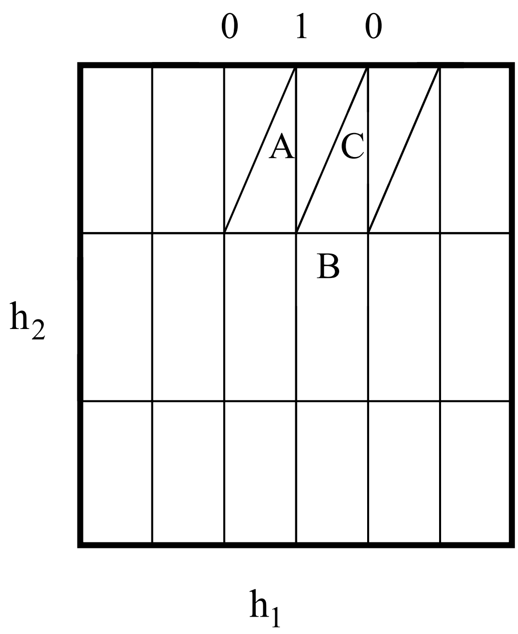


Рис. 1.2.1

Пример 1.2.2. Второй пример посвящен случаю, когда нарушается условие на преобразование T узлов триангуляции. В единичном квадрате Ω рассмотрим «деформированную» сетку Ω^h (см. рисунок 1.2.2.).

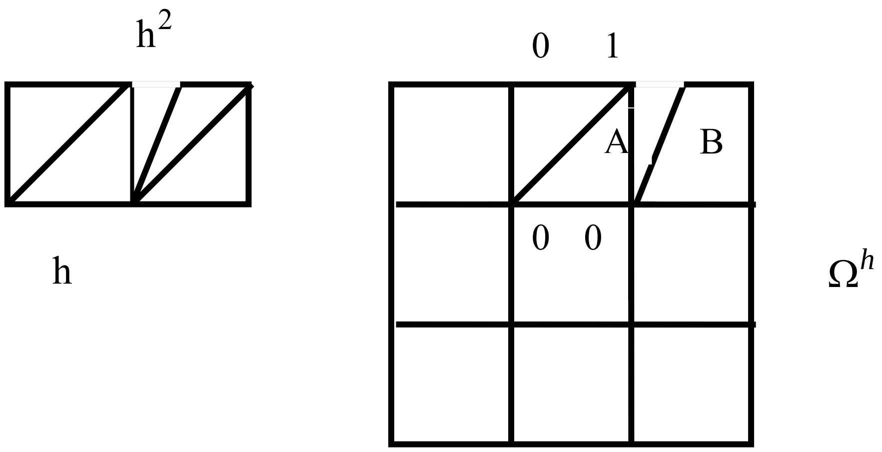


Рис. 1.2.2

Пусть расстояние между узлами A и B равно h^2. Рассмотрим кусочно-линейную функцию $u^h \in H(\Omega^h)$, которая принимает значение равное единице в узле A и равное нулю в остальных узлах. Пусть $\varphi^h \in H^{1/2}(\Gamma^h)$ – след u^h на Γ^h. Тогда легко видеть, что

$$\left\| u^h \right\|_{H^1(\Omega^h)} = O(1),$$

$$\left\| \varphi^h \right\|^2_{H_h^{1/2}(\Gamma^h)} \ge \frac{(\varphi^h(A) - \varphi^h(B))^2}{h^2} = 1/h^2.$$

Таким образом, сеточная теорема о следах не имеет места (с константой, не зависящей от h).

1.3. Конечно-элементные теоремы о следах для пространств Соболева $H^1_{p,q}$

В этом параграфе мы построим эквивалентные нормы в пространстве следов конечно элементных функций для решения методами декомпозиции области системы сеточных уравнений, аппроксимирующую краевую задачу:

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j}(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_j} + a_0(x) u = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Предположим, что Ω – ограниченная многоугольная область с границей Γ. Пусть Ω^h – однородная триангуляция, характеризуемая параметром h.

Введем нормы в пространствах Соболева с параметрами $H^1_{h,q}(\Omega)$:

$$\|u\|^2_{H^1_{p,q}(\Omega)} = p|u|^2_{H^1(\Omega)} + q\|u\|^2_{L_2(\Omega)},$$
$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} u^2(x)dx, \qquad (1.3.2)$$
$$|u|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} (|\mathrm{grad}\ u(x)|)^2 dx.$$

Здесь

$$p \equiv \mathrm{const} > 0,$$
$$q \equiv \mathrm{const} \geq 0.$$

Введем билинейную форму:

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} (\sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0(x)u\,v)dx.$$

Предположим, что коэффициенты в (1.3.1) такие, что $a(u,v)$ – симметричная коэрцитивная непрерывная форма в $H^1_{p,q}(\Omega)$, т.е.

$$a(u,v) = a(v,u) \quad \forall u,v \in H^1_{p,q}(\Omega),$$
$$\mu_0 \| u \|^2_{H^1_{p,q}(\Omega)} \leq a(u,u) \leq \mu_1 \| u \|^2_{H^1_{p,q}(\Omega)} \quad \forall u \in H^1_{p,q}(\Omega),$$

здесь μ_0, μ_1 – положительные константы, не зависящие от p и q.

Основная цель этого параграфа – изучение пространства следов конечно элементных функций на границах Ω, которое порождено в области Ω нормой $H^1_{p,q}(\Omega)$.

Пусть $p > 0,\ q \ge 0$. Введем следующую норму в пространстве Соболева $H^1_{p,q}(\Gamma)$:

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}_{p,q}(\Gamma)} = \begin{cases} p|\varphi|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + (pq)^{1/2}\|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)}, & \text{если } 0 < (p/q) \le 1, \\ p|\varphi|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + q\|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)}, & \text{если } p > q. \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1.3.1. Существуют положительные константы $c_1,\ c_2$, не зависящие от p, q, и такие, что

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}_{p,q}(\Gamma)} \le c_1 \|u\|_{H^1_{p,q}(\Omega)}$$

для любой функции $u \in H^1_{p,q}(\Omega)$, где $\varphi \in H^{1/2}_{p,q}(\Gamma)$ – след функции u на границе Γ.

И, наоборот, для любой функции $\varphi \in H^{1/2}_{p,q}(\Gamma)$ существует $u \in H^1_{p,q}(\Omega)$, такая, что

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma,$$
$$\|u\|_{H^1_{p,q}(\Omega)} \le c_2 \|\varphi\|_{H^{1/2}_{p,q}(\Gamma)}.$$

Доказательство. Действительно, в случае

$$0 < (p/q) \le 1$$

доказательство было рассмотрено в [1] . Используя теорему о следах для полунорм [166] для случая

$$p \ge q$$

теорема может быть легко доказана.

Обозначим через W подпространство линейных в треугольниках действительных непрерывных функций, а через V пространство следов функций из W на Γ. К сожалению, норма (1.3.3) не работает в случае конечных элементов (с константой c_2, не зависящей от h). Действительно, пусть Ω – единичный квадрат с равномерной сеткой. И пусть

$$(p/q) \le h^2, \quad \varphi^h(x) = 1, \quad x \in \Gamma.$$

Тогда для любой функции $u^h(x) \in W$ такой, что

$$u^h(x) = \varphi^h(x), \quad x \in \Gamma$$

мы имеем

$$\left\|u^h\right\|^2_{H^1_{p,q}(\Omega)} \ge (1/6)\,hq,$$
$$\left\|\varphi^h\right\|^2_{H^{1/2}_{p,q}(\Gamma)} = 4(p/q)^{1/2}.$$

Пусть

$$p > 0, \quad q \ge 0.$$

Определим следующую норму в пространстве конечных элементов V:

$$\left\|\varphi^h\right\|^2_{H^{1/2}_{p,q,h}(\Gamma)} = \begin{cases} hq\left\|\varphi^h\right\|^2_{L_2(\Gamma)}, & \text{если } \dfrac{p}{q} \le h^2, \\ p\left|\varphi^h\right|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + (pq)^{\frac{1}{2}}\left\|\varphi^h\right\|^2_{L_2(\Gamma)}, & \text{если } h^2 < \dfrac{p}{q} \le 1, \\ p\left|\varphi^h\right|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + q\left\|\varphi^h\right\|^2_{L_2(\Gamma)}, & \text{если } p \ge q. \end{cases}$$

Имеет место следующая теорема:

<u>Теорема 1.3.2.</u> Существуют положительные константы c_1, c_2, не зависящие от p, q, h, и такие, что

$$\left\|\varphi^h\right\|_{H^{1/2}_{p,q,h}(\Gamma)} \le c_1 \left\|u^h\right\|_{H^1_{p,q}(\Omega)}$$

для любой функции $u^h \in W$, где $\varphi^h \in V$ – след u^h на границе Γ. И, наоборот, для любой функции $\varphi^h \in V$ существует $u^h \in W$ такая, что

$$\begin{gathered} u^h(x) = \varphi^h(x), \quad x \in \Gamma, \\ \left\|u^h\right\|_{H^1_{p,q}(\Omega)} \le c_2 \left\|\varphi^h\right\|_{H^{1/2}_{p,q,h}(\Gamma)}. \end{gathered}$$

<u>Доказательство</u>. В случае

$$h^2 \le (p/q)$$

доказательство основывается на технологии, описанной в пункте 1.2. Для случая

$$(p/q) \le h^2$$

мы используем тривиальное продолжение φ^h нулем на внутренних узлах сетки.

1.4. Анизотропные области с анизотропными сетками

В данном пункте определяются нормы сеточных функций в случае областей с анизотропной геометрией и анизотропными сетками. Данное построение осуществляется в несколько этапов.

1.4.1. Теорема о следах для тонких областей

Пусть Ω – прямоугольная область: $\Omega = (0,H)\times(0,L)$ с границей Γ. Предположим, что эта область узкая, то есть $H << L$. Определим $[x]$ как наибольшее целое число, которое меньше или равно x. Обозначим $k = [L/H]$ и $\tilde{H} = L/k$. Пусть

$$\sigma_0 = \tau_0 = (0,H)\times\{0\},$$
$$\sigma_{k+1} = \tau_{k+1} = (0,H)\times\{L\},$$

а для $i = 1,...,k$

$$\sigma_i = \{0\}\times((i-1)\tilde{H}, i\tilde{H}),$$
$$\tau_i = \{L\}\times((i-1)\tilde{H}, i\tilde{H}).$$

Пусть для каждого $i = 0,...,k$ ℓ_i и r_i – объединения открытых подмножеств на Γ таких, что

$$\overline{\ell}_i = \overline{\sigma}_i \cup \overline{\sigma}_{i+1},$$
$$\overline{r}_i = \overline{\tau}_i \cup \overline{\tau}_{i+1}.$$

<u>**Определение 1.4.1.**</u> Пусть A и B – произвольные подмножества на Γ. Для любой $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ определим

$$I_{A,B}(\varphi) = \int_A\int_B \frac{(\varphi(x)-\varphi(y))^2}{|x-y|^2}dxdy.$$

<u>**Определение 1.4.2.**</u> Для любой $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ определим

$$\|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)} = \sum_{i=0}^{k}(\|\varphi\|^2_{L_2(\ell_i)} + \|\varphi\|^2_{L_2(r_i)}),$$

$$|\varphi|^2_{\overset{\vee}{H}{}^{1/2}(\Gamma)} = \sum_{i=0}^{k}(I_{\ell_i,\ell_i}(\varphi) + I_{r_i,r_i}(\varphi) + I_{\ell_i,r_i}(\varphi)),$$

$$\|\varphi\|^2_{\overset{\vee}{H}{}^{1/2}(\Gamma)} = H\|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)} + |\varphi|^2_{\overset{\vee}{H}{}^{1/2}(\Gamma)}.$$

Для исследования норм следов в случае анизотропных областей нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты.

<u>Теорема 1.4.1.</u> Существуют константы c_1 и c_2, не зависящие от H, такие, что для любых $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию $u(x) = \varphi(x)$ на Γ, имеет место

$$\|\varphi\|^2_{\overset{\vee}{H}{}^{1/2}(\Gamma)} \le c_1 \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

для всех $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, и существует такая $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая условию $u(x) = \varphi(x)$ на Γ, что имеет место

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \le c_2 \|\varphi\|^2_{\overset{\vee}{H}{}^{1/2}(\Gamma)}.$$

<u>Доказательство:</u> Пусть

$$\tilde{\Omega}_i = (0, H) \times ((i-1)\tilde{H}, i\tilde{H}), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

и $\Omega_0 = \tilde{\Omega}_1$, $\Omega_k = \tilde{\Omega}_k$, а Ω_i – пересекающиеся подобласти из Ω такие, что

$$\overline{\Omega}_i = \overline{\tilde{\Omega}}_i \cup \overline{\tilde{\Omega}}_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Для любой заданной $u \in H^1(\Omega)$ мы имеем

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \ge \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k}\|u\|^2_{H^1(\Omega_i)}.$$

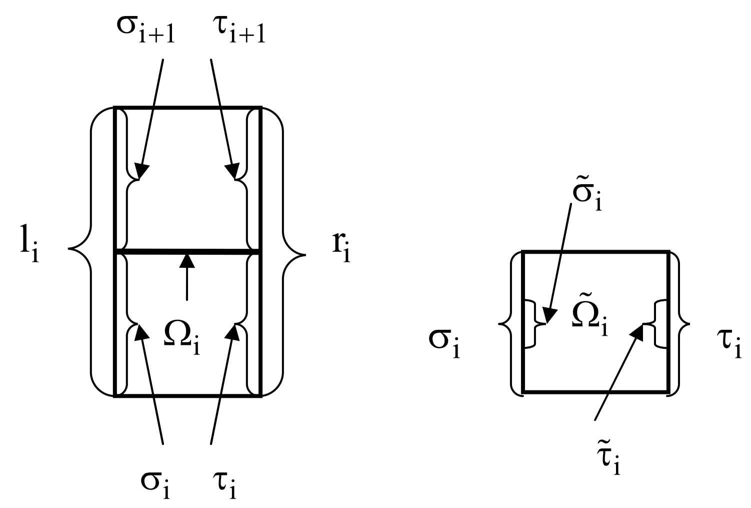


Рис. 1.4.1

По теореме 1.2.1' имеем

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega_i)} \geq c(H\|\varphi\|^2_{L_2(\partial\Omega_i)} + I_{\partial\Omega_i,\partial\Omega_i}(\varphi)).$$

Следовательно

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega_i)} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k}\|u\|^2_{H^1(\Omega_i)} \geq$$

$$\geq c\sum_{i=0}^{k}(H\|\varphi\|^2_{L_2(\partial\Omega_i)} + I_{\partial\Omega_i,\partial\Omega_i}(\varphi)) \geq$$

$$\geq c_1\|\varphi\|^2_{\overset{\vee}{H}{}^{1/2}(\Gamma)}.$$

Первая часть доказана.

Для $i = 0,1,...,k+1$ пусть $\tilde\sigma_i$ – открытый интервал, содержащийся в σ_i соответственно, такой, что длина $\tilde\sigma_i$ имеет порядок H и расстояния до конечных точек σ_i также порядка H. Подобно определяются $\tilde\tau_i$ (см. рисунок 1.4.1). Например, зададим

$$\tilde{\sigma}_0 = \tilde{\tau}_0 = ((1/3)H,(2/3)H)\times\{0\},$$
$$\tilde{\sigma}_{k+1} = \tilde{\tau}_{k+1} = ((1/3)H,(2/3)H)\times\{L\},$$

$$\tilde{\sigma}_i = \{0\}\times((i-(2/3))\tilde{H},(i-(1/3))\tilde{H}),$$
$$\tilde{\tau}_i = \{H\}\times((i-(2/3))\tilde{H},(i-(1/3))\tilde{H}) \quad \forall i = 1,...,k.$$

Пусть $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, определим кусочно-линейную функцию $\varphi^H \in H^{1/2}(\Gamma)$, которая имеет постоянное значение на $\tilde{\sigma}_i$ и $\tilde{\tau}_i$, $i = 0,1,...,k+1$

$$\varphi^H\Big|_{\tilde{\sigma}_i} = \alpha_i = \frac{3}{\tilde{H}}\int\limits_{\tilde{\sigma}_i}\varphi(s)ds,$$
$$\varphi^H\Big|_{\tilde{\tau}_i} = \beta_i = \frac{3}{\tilde{H}}\int\limits_{\tilde{\tau}_i}\varphi(s)ds.$$

Между $\tilde{\sigma}_i$ и $\tilde{\sigma}_{i+1}$ ($\tilde{\tau}_i$ и $\tilde{\tau}_{i+1}$) продолжим функцию φ^H, как линейную. Для определения функции φ^H на $\partial\tilde{\Omega}_i$ зададим линейное продолжение между точками $(0,i\tilde{H})$ и $(H,i\tilde{H})$. Так образом определяется функция φ^H на $\partial\tilde{\Omega}_i$, $i = 1,...,k$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{k}(H\left\|\varphi^H\right\|^2_{L_2(\partial\tilde{\Omega}_i)} + I_{\partial\tilde{\Omega}_i,\partial\tilde{\Omega}_i}(\varphi^H)) \le c\left\|\varphi^H\right\|^2_{\overset{\vee}{H}{}^{1/2}(\Gamma)}. \qquad (1.4.1)$$

Мы можем кусочно-линейно продолжить φ^H до u^H на каждом $\tilde{\Omega}_i$, $i = 1,...,k$ так, что

$$u^H(x) = \varphi^H(x), \quad x \in \partial\tilde{\Omega}_i$$

и

$$\left\|u^H\right\|^2_{H^1(\tilde{\Omega}_i)} \le c(H\left\|\varphi^H\right\|^2_{L_2(\partial\tilde{\Omega}_i)} + I_{\partial\tilde{\Omega}_i,\partial\tilde{\Omega}_i}(\varphi^H)).$$

Суммируя это, получаем

$$\left\| u^H \right\|^2_{H^1(\tilde{\Omega}_i)} \le c \left\| \varphi^H \right\|^2_{\overset{\vee}{H}^{1/2}(\Gamma)}.$$

Пусть $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi^H(x)$. Тогда для $i = 0,1,\ldots,k-1$

$$\int_{\tilde{\sigma}_i} \psi(s)\,ds = \int_{\tilde{\tau}_i} \psi(s)\,ds = 0.$$

Используя следствие из теоремы 1.2.1’, мы можем представить функцию $\psi(x)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\psi(x) = \psi_0 + \sum_{i=1}^{k} \psi_{i,\ell}(x) + \psi_{i,r}(x) + \psi_k,\\
&\psi_0(x) = 0, \quad x \notin \ell_0 \cup r_0,\\
&\psi_{i,\ell}(x) = 0, \quad x \notin \ell_i,\\
&\psi_{i,r}(x) = 0, \quad x \notin r_i,\\
&\psi_k(x) = 0, \quad x \notin \ell_k \cup r_k,\\
&\qquad\qquad i = 1,2,\ldots,k,
\end{aligned}$$

и следующая оценка имеет место

$$\begin{aligned}
&\left\| \psi_0 \right\|^2_{\overset{\vee}{H}^{1/2}(\Gamma)} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\left\| \psi_{i,\ell} \right\|^2_{\overset{\vee}{H}^{1/2}(\Gamma)} + \left\| \psi_{i,r} \right\|^2_{\overset{\vee}{H}^{1/2}(\Gamma)} \right) + \left\| \psi_k \right\|^2_{\overset{\vee}{H}^{1/2}(\Gamma)} \le \\
&\le c \left\| \psi \right\|^2_{\overset{\vee}{H}^{1/2}(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

По теореме 1.2.1’ мы можем продолжить функции $\psi_{i,l}$, $\psi_{i,r}$ внутри Ω, то есть существуют $u_{i,\ell}$, $u_{i,r} \in H^1(\Omega)$ такие, что

$$\begin{aligned}
&u_{i,\ell}(x) = \psi_{i,\ell}(x), \quad x \in \Gamma,\\
&u_{i,\ell}(x) = 0, \qquad\quad x \notin \Omega_i,
\end{aligned}$$

и

$$\left\| u_{i,\ell} \right\|^2_{H^1(\Omega_i)} \le C \left\| \psi_{i,\ell} \right\|^2_{\overset{\vee}{H}^{1/2}(\Gamma)} .$$

Аналогично, имеем и для $u_{i,r}$

$$u_{i,r}(x) = \psi_{i,\ell}(x), \quad x \in \Gamma,$$
$$u_{i,r}(x) = 0, \qquad x \notin \Omega_i,$$

а так же для ψ_0 и ψ_k.

Положим

$$u = u^H + u_0 + \sum_{i=1}^{k-1} (u_{i,\ell} + u_{i,r}) + u_k$$

и, суммируя полученные оценки, мы можем доказать вторую часть теоремы.

Используя подобную технологию, мы получим следующую теорему:

Теорема 1.4.2. Существуют константы c_1 и c_2, не зависящие от H, такие, что для всех $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ имеет место

$$c_1(S\varphi, \varphi) \le |\varphi|^2_{\overset{\vee}{H}^{1/2}(\Gamma)} \le c_2(S\varphi, \varphi),$$

где

$$(S\varphi, \varphi) = \inf_{u \in H^1(\Omega), u|_\Gamma = \varphi} |u|^2_{H^1(\Omega)}.$$

1.4.2. Теорема о следах для анизотропной сетки в случае изотропных областей

Предположим, что Ω – прямоугольник. Пусть $\Gamma = \partial\Omega$. И пусть I_1, I_2, I_3, I_4 – нижняя, правая, верхняя и левая стороны Γ соответственно. В данном пункте рассматривается изотропный прямоугольник Ω, то есть меры сторон $I_1, \ldots, I_4$ имеют тот же порядок. Пусть Ω^h – триангуляция Ω с шагами сетки h_1 и h_2 по осям x и y соответственно. В этом пункте некоторые константы c_1 и c_2, не зависящие от h_1 и h_2. Пусть $H^{1,h}(\Omega)$ – пространство конечных элементов, состоящее из непрерывных кусочно-линейных функций на Ω^h и $H^{1/2,h}(\Gamma)$ – пространство следов из $H^{1,h}$. Для любого подмножества T из Γ определим

$$H_T^{1,h}(\Gamma) = \left\{ u \in H^{1,h} \mid u = 0 \text{ на } T \right\},$$
$$H_T^{1/2,h}(\Gamma) = \left\{ \varphi \in H^{1/2,h} \mid \varphi = 0 \text{ на } T \right\}.$$

Пусть n и m – номера узлов в направлении x и y соответственно. В этом подразделе мы обозначим через A некоторую матрицу, соответствующую конечно элементной аппроксимации оператора Лапласа с различными граничными условиями. Определим норму и полунорму следа.

Определение 1.4.3. Для каждой $\varphi \in H^{1/2,h}(\Gamma)$ определим

$$|\varphi|^2_{H^{1,h}(\Gamma)} = h_1(|\varphi|^2_{H^1(I_2)} + |\varphi|^2_{H^1(I_4)}) + h_2(|\varphi|^2_{H^1(I_1)} + |\varphi|^2_{H^1(I_3)}),$$
$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2,h}(\Gamma)} = \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + |\varphi|^2_{H^{1,h}(\Gamma)},$$

$$|\varphi|^2_{H^{1/2,h}(\Gamma)} = |\varphi|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + |\varphi|^2_{H^{1,h}(\Gamma)}.$$

Замечание 1.4.1. Заметим, что $\|\varphi\|_{H^{1/2,h}(\Gamma)}$ и стандартная норма $\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ не эквивалентны с константами, не зависящими от h_1 и h_2.

Определение 1.4.4. Определим S через

$$(S\varphi,\varphi) = \inf_{u\in H^{1,h},\, u|_\Gamma=\varphi} \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Лемма 1.4.1. Если $\varphi = 0$ на $I_2 \cup I_3 \cup I_4$, то существуют константы c_1 и c_2 такие, что

$$c_1(S\varphi,\varphi) \le \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + h_2|\varphi|^2_{H^1(I_1)} \le c_2(S\varphi,\varphi).$$

Доказательство. Пусть $T = I_2 \cup I_3 \cup I_4$. Для любой $u \in H^{1,h}_T$

$$|u|^2_{H^1(\Omega)} = (Au,u).$$

Пусть $\sigma = (h_2/h_1)^2$ и

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & . & . & . & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$A = \sigma^{-1/2}\begin{bmatrix} \sigma A_0 + 2I & -I & & & \\ -I & \sigma A_0 + 2I & -I & & \\ & . & . & . & \\ & & -I & \sigma A_0 + 2I & -I \\ & & & -I & (1/2)\sigma A_0 + 2I \end{bmatrix}.$$

Матрица A также может быть представлена как

$$Au = \sigma^{-1/2}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

где u_2 – вектор, соответствующий узлам на I_1. Тогда $S = \sigma^{-1/2}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$.

Для диагонализации A_0 рассмотрим разложение

$$A_0 = Q\Lambda Q^T,$$

где Q состоит из собственных векторов A_0, Λ – диагональная матрица, состоящая из собственных значений A_0 и $QQ^T = I$. Используя это, мы получим

$$(A_{11})^{-1} = \begin{bmatrix} Q & & & \\ & Q & & \\ & & \ldots & \\ & & & Q \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} \sigma\Lambda + 2I & -I & & \\ -I & \sigma\Lambda + 2I & -I & \\ . & . & . & \\ & & -I & \sigma\Lambda + 2I \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} Q^T & & & \\ & Q^T & & \\ & & \ldots & \\ & & & Q^T \end{bmatrix}$$

и

$$A_{21}(A_{11})^{-1}A_{12} = [0\ \ 0\ \ldots\ -Q] =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma\Lambda + 2I & -I & & \\ -I & \sigma\Lambda + 2I & -I & \\ . & . & . & \\ & & -I & \sigma\Lambda + 2I \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ -Q^T \end{bmatrix} = Q\ B_{22}Q^T,$$

где

$$B=\begin{bmatrix} \sigma\Lambda+2I & -I & & \\ -I & \sigma\Lambda+2I & -I & \\ . & . & . & \\ & & -I & \sigma\Lambda+2I \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

Теперь вычислим элементы матрицы B_{22}.

Пусть $e_i=\left[0\ \dots\ 1\ \dots\ 0\right]^T$, где 1 стоит на i – той позиции. Рассмотрим следующее матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} \sigma\Lambda+2I & -I & & \\ -I & \sigma\Lambda+2I & -I & \\ . & . & . & \\ & & -I & \sigma\Lambda+2I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \dots \\ x_m^{(i)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ e_i \end{bmatrix}.$$

Тогда n – й вектор решения матричного уравнения является i – м столбцом матрицы B_{22}, то есть

$$B_{22}=\left[x_n^{(1)}\ \ x_n^{(2)}\ \ \dots\ \ x_n^{(n)}\right].$$

Обозначим вектор $x_k^{(i)}$ как

$$x_k^{(i)}=\begin{bmatrix} x_k^{(i)}(1) \\ x_k^{(i)}(2) \\ \dots \\ x_k^{(i)}(n) \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим j – ю компоненту. Тогда мы получим следующее матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} \sigma\lambda_j+2 & -1 & & \\ -1 & \sigma\lambda_j+2 & -1 & \\ . & . & . & \\ & -1 & \sigma\lambda_j+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(i)}(j) \\ x_2^{(i)}(j) \\ \ldots \\ x_n^{(i)}(j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \delta_{ij} \end{bmatrix}.$$

Для обсуждения некоторых деталей рассмотрим векторное уравнение для фиксированного i, то есть

$$\begin{array}{lllllll} (\sigma\Lambda+2I)x_1^{(i)} & -x_2^{(i)} & & & & & =0 \\ -x_1^{(i)} & (\sigma\Lambda+2I)x_2^{(i)} & -x_3^{(i)} & & & & =0 \\ & & . \quad . \quad . & & & & \ldots\ . \\ & & & -x_{n-2}^{(i)} & (\sigma\Lambda+2I)x_{n-1}^{(i)} & -x_n^{(i)} & =0 \\ & & & & -x_{n-1}^{(i)} & (\sigma\Lambda+2I)x_n^{(i)} & =e_i \end{array}$$

Первый блок соответствует

$$\begin{array}{ll} (\sigma\lambda_1+2)x_1^{(i)}(1) & -x_2^{(i)}(1)=0 \\ (\sigma\lambda_2+2)x_1^{(i)}(2) & -x_2^{(i)}(2)=0 \\ . \quad . \quad . & \ldots \\ (\sigma\lambda_n+2)x_1^{(i)}(n) & -x_2^{(i)}(n)=0 \end{array}.$$

Объединим j – е строки. Если $i=j$, имеем

$$x_n^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ x_n^{(i)}(i) \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Комбинируя векторы $x_n^{(i)}$, мы получаем следующий вид матрицы B_{22}:

$$B_{22}=\begin{bmatrix} x_n^{(1)}(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_n^{(2)}(2) & \dots & 0 \\ & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & x_n^{(n)}(n) \end{bmatrix}.$$

Чтобы определить $x_n^{(i)}(i)$, мы должны решить следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} \sigma\lambda_i+2 & -1 & & \\ -1 & \sigma\lambda_i+2 & -1 & \\ . & . & . & \\ & -1 & \sigma\lambda_i+2 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(i)}(i) \\ x_2^{(i)}(i) \\ \dots \\ x_n^{(i)}(i) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Обозначим $\alpha_i=(1/2)\,\lambda_i+1$. Используя метод исключения Гаусса, мы получаем треугольную систему

$$\begin{bmatrix} d_1 & -d_0 & & 0 \\ & d_2 & -d_1 & \\ & . & . & . \\ & & & -d_{n-3} \\ 0 & & & d_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(i)}(i) \\ x_2^{(i)}(i) \\ \dots \\ x_m^{(i)}(i) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ d_{m-1} \end{bmatrix},$$

где $d_0=1$, $d_1=2\alpha_i$ и $d_{j+1}=2\alpha_i d_j-d_{j-1}$ для $j=1,2,\dots,m-1$. Пусть $U_j(x)$– полином Чебышева n–й степени второго типа такой, что

$$U_j(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}((x+\sqrt{x^2-1})^{j+1}-(x+\sqrt{x^2-1})^{-(j+1)}).$$

Тогда $d_j=U_j(\alpha_i)$ и

$$x_n^{(i)}(i)=d_{m-1}/d_m=U_{m-1}(\alpha_i)/U_m(\alpha_i).$$

Следовательно,

$$\sigma^{1/2}\lambda_i(S) = \alpha_i - d_{m-1}/d_m =$$
$$= \alpha_i - U_{m-1}(\alpha_i)/U_m(\alpha_i) =$$
$$= \alpha_i - \frac{(\alpha_i + \sqrt{\alpha_i^2 - 1})^m - (\alpha_i + \sqrt{\alpha_i^2 - 1})^{-m}}{(\alpha_i + \sqrt{\alpha_i^2 - 1})^{m+1} - (\alpha_i + \sqrt{\alpha_i^2 - 1})^{-m-1}} =$$
$$= \sqrt{\alpha_i^2 - 1}\ \ \frac{(\alpha_i + \sqrt{\alpha_i^2 - 1})^{m+1} - (\alpha_i + \sqrt{\alpha_i^2 - 1})^{-m-1}}{(\alpha_i + \sqrt{\alpha_i^2 - 1})^{m+1} - (\alpha_i + \sqrt{\alpha_i^2 - 1})^{-m-1}} =$$
$$= \sqrt{\alpha_i^2 - 1}\ \ f(x),$$

где $f(x) = \dfrac{x + 1/x}{x - 1/x}$, $x = (\alpha_i + \sqrt{\alpha_i^2 - 1})^{m+1}$.

Легко увидеть, что

$$1 \le \frac{(\alpha_i + \sqrt{\alpha_i{}^2 - 1})^{m+1} + (\alpha_i + \sqrt{{}^2\alpha_i - 1})^{-m-1}}{(\alpha_i + \sqrt{\alpha_i{}^2 - 1})^{m+1} - (\alpha_i + \sqrt{\alpha_i{}^2 - 1})^{-m-1}} \le c_2.$$

Так как

$$(1/2)(\sqrt{\sigma\lambda_i} + (1/2)\sigma\lambda_i) \le \sqrt{\sigma\lambda_i + (1/4)\sigma^2\lambda_i{}^2} \le \sqrt{\sigma\lambda_i} + (1/2)\sigma\lambda_i$$

мы имеем

$$c_1(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\sigma}\lambda) \le \mu(\Sigma) \le c_2(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\sigma}\lambda).$$

Поскольку это имеет место для любых собственных значений A_0, мы получаем

$$c_1((A_0^{1/2} + (h_2/h_1)A_0)\varphi, \varphi) \le (S\varphi, \varphi) \le$$
$$\le c_2((A_0^{1/2} + (h_2/h_1)A_0)\varphi, \varphi) \quad \forall \varphi \in R^{n_i - 2}.$$

Так как

$$(h_1 I\varphi,\varphi) \approx \|\varphi\|^2_{L_2(I_1)} = \|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)}$$

и

$$((1/h_1)A_0\varphi,\varphi) \approx |\varphi|^2_{H^1(I_1)} = |\varphi|^2_{H^1(\Gamma)},$$

то, используя интерполяцию, мы получаем

$$(A_0^{1/2}\varphi,\varphi) \approx |\varphi|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Заметим, что $|\varphi|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \approx \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}$ если $\varphi = 0$ на T. Следовательно

$$c_1(\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + h_2|\varphi|^2_{H^1(I_1)}) \le (\Sigma\varphi,\varphi) \le$$
$$\le c_2(\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + h_2|\varphi|^2_{H^1(I_1)}).$$

Заметим, что для любой $w \in H_T^{1,h}$, $\|w\|_{H^1(\Omega)} \approx |w|_{H^1(\Omega)}$. Следовательно мы имеем следующую оценку

$$c_1(S\varphi,\varphi) \le \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + h_2|\varphi|^2_{H^1(I_1)}) \le c_2(S\varphi,\varphi).$$

<u>Лемма 1.4.2.</u> Пусть u – дискретная гармоническая функция, удовлетворяющая граничным условиям:

$$\begin{aligned} &\partial u/\partial n = 0 && \text{на } I_2 \cup I_4, \\ &u = 0 && \text{на } I_3, \\ &u = \varphi && \text{на } I_1. \end{aligned}$$

Тогда

$$c_1(S\varphi,\varphi) \le \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + h_2|\varphi|^2_{H^1(I_1)}) \le c_2(S\varphi,\varphi).$$

Доказательство. Пусть $\sigma = (h_2 / h_1)^2$ и

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & . & . & . & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ & . & . & . & & \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$A = \sigma^{-1/2} \begin{bmatrix} \sigma A_0 + 2J & -J & & & \\ -J & \sigma A_0 + 2J & -J & & \\ & . & . & . & \\ & & -J & \sigma A_0 + 2J & -J \\ & & & -J & (1/2)\sigma A_0 + 2J \end{bmatrix}.$$

Для оценки дополнения Шура матрицы A зададим матрицу B, которая эквивалента A:

$$B = \sigma^{-1/2} \begin{bmatrix} \sigma A_0 + 2I & -I & & & \\ -I & \sigma A_0 + 2I & -I & & \\ & . & . & . & \\ & & -I & \sigma A_0 + 2I & -I \\ & & & -I & (1/2)\sigma A_0 + 2I \end{bmatrix}.$$

Доказательство эквивалентности матриц A и B простое и поэтому опускается. Заметим, что если A и B эквивалентны, то соответствующие дополнения Шура этих матриц тоже эквивалентные. Остаток доказательства аналогичен доказательству леммы 1.4.1, за исключением того, что A_0 – только положительно полуопределенная матрица, то есть имеет собственное значение равное 0. Если λ – ненулевое собственное число A_0 и ξ – соответствующий собственный вектор, то, используя подобную технологию, имеем

$$(\Sigma_B\xi,\xi) \approx (A_0 + (h_2/h_1)\xi,\xi) \approx |\xi|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + h_2|\xi|^2_{H^1(I_1)}. \qquad (1.4.2)$$

Пусть $\lambda = 0$. Очевидно, что соответствующий собственный вектор ξ – просто вектор-константа. Если мы обозначим через $\mu(\Sigma_B)$ собственное число, соответствующее ξ, то легко получить, что $\mu(\Sigma_B) = h_1/(h_2+1) \approx h_1$, и так

$$(\Sigma_B\xi,\xi) \approx (h_1 I\,\xi,\xi) \approx \|\xi\|^2_{L_2(\Gamma)}. \qquad (1.4.3)$$

Комбинируя (1.4.2) и (1.4.3), имеем

$$c_1(S\varphi,\varphi) \le \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + h_2|\varphi|^2_{H^1(I_1)} \le c_2(S\varphi,\varphi).$$

<u>**Теорема 1.4.3.**</u> Существуют константы c_1 и c_2, не зависящие от h_1 и h_2, такие, что

$$c_1(S\varphi,\varphi) \le \|\varphi\|^2_{H^{1/2,h}(\Gamma)} \le c_2(S\varphi,\varphi) \quad \forall\varphi \in H^{1/2,h}(\Gamma).$$

<u>Доказательство.</u> Пусть $\varphi_i = \varphi\big|_{I_i}$ для $i = 1,2,3,4$. Пусть u_1, u_2 – дискретные гармонические функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned}
&\partial u_1/\partial n = \partial u_2/\partial n = 0 && \text{на} \quad I_2 \bigcup I_4,\\
&u_1 = 0 && \text{на} \quad I_3,\\
&u_1 = \varphi_1 && \text{на} \quad I_1,\\
&u_2 = 0 && \text{на} \quad I_1,\\
&u_2 = \varphi_3 && \text{на} \quad I_3.
\end{aligned}$$

По лемме 1.4.2 имеем

$$\|u_1\|^2_{H^1(\Omega)} \approx \|\varphi_1\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + h_2|\varphi|^2_{H^1(I_1)},$$

$$\|u_2\|^2_{H^1(\Omega} \approx \|\varphi_3\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + h_2|\varphi|^2_{H^1(I_3)}.$$

Для $j = 2,4$ пусть $\psi_j = \varphi_j - u_1\Big|_{I_j} - u_2\Big|_{I_j}$. Пусть u_3 – дискретная гармоническая функция, удовлетворяющая следующим условиям: $u_3 = \psi_2$ на I_2 и равна 0 на всех остальных сторонах, и u_4 – дискретная гармоническая функция, удовлетворяющая следующим условиям: $u_4 = \psi_4$ на I_4 и равна 0 на всех остальных сторонах. Тогда по лемме 1.4.1

$$\begin{aligned}
\| u_3\|^2_{H^1(\Omega)} &\approx \| \psi_2\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + h_1|\psi_2|^2_{H^1(I_2)} \le \\
&\le c(\| \varphi_2\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \| u_1|_{I_2}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \| u_2|_{I_2}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}) + \\
&\quad + c(h_1|\varphi_2|^2_{H^1(I_2)} + h_1\big| u_1|_{I_2}\big|^2_{H^1(I_2)} + h_1\big| u_2|_{I_2}\big|^2_{H^1(I_2)}).
\end{aligned}$$

По лемме 1.4.2 u_i для $i = 1,2$ удовлетворяет

$$\Big\| u_i|_{I_j}\Big\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \le c\| u_i\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad j = 2,4.$$

И легко показать, что

$$h_1 \left| u_i |_{I_j} \right|^2_{H^1(I_j)} \le c \| u_i \|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Следовательно, по лемме 1.4.2

$$\| u_3 \|^2_{H^1(\Omega)} \le c(\| \varphi_2 \|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \| \varphi_1 \|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \| \varphi_3 \|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}) +$$
$$+ c(h_1 | \varphi_2 |^2_{H^1(I_2)} + h_2 | \varphi_1 |^2_{H^1(I_1)} + h_2 | \varphi_3 |^2_{H^1(I_3)}).$$

Подобная оценка имеет место и для u_4. Теперь пусть $u = \sum_{i=1}^{4} u_i$, тогда

$u \big|_\Gamma = \varphi$. Ясно, что

$$\| u \|^2_{H^1(\Omega)} \le \sum_{i=1}^{4} \| u_i \|^2_{H^1(\Omega)} \le C \| \varphi \|^2_{H^{1/2,h}(\Gamma)}.$$

Теперь рассмотрим обратное неравенство. Пусть u – произвольная функция в $H^h(\Omega)$, удовлетворяющая условию: $u \big|_\Gamma = \varphi$. По теореме о следах

$$\| \varphi \|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le C \| u \|_{H^1(\Omega)}.$$

Пусть z_i, $i = 0,1,...,m$ – узлы на I_2. Тогда

$$h_1 |\varphi|^2_{H^1(I_2)} \le C \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h_1}{h_2} (\varphi(z_{i+1}) - \varphi(z_i))^2 =$$
$$= C \sum_{i-0}^{m-1} h_1 h_2 \left(\frac{u(z_{i+1}) - u(z_i)}{h_2}\right)^2 = C \| u \|_{H^1(\Omega)}.$$

Подобные неравенства имеют место для I_1, I_3 и I_4. Из выше приведенных неравенств вытекает

$$\|\varphi\|_{H^{1/2,h}(\Gamma)} \le C \inf_{w \in H^h(\Omega), w|_\Gamma = \varphi} \|w\|_{H^1(\Omega)}.$$

Теорема доказана.

<u>Определение 1.4.5.</u> Определим $\tilde{S}$ как

$$(\tilde{S}\varphi, \varphi) \le \inf_{u \in H^1(\Omega), u|_\Gamma = \varphi} |u|^2_{H^1(\Omega)}.$$

<u>Теорема 1.4.4.</u> Существуют константы c_1 и c_2, не зависящие от h_1 и h_2, такие, что

$$c_1(\tilde{S}\varphi, \varphi) \le |\varphi|^2_{H^{1/2,h}(\Gamma)} \le c_2(\tilde{S}\varphi, \varphi).$$

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим второе неравенство. Пусть u – такая, что $u|_\Gamma = \varphi$. Разложим $u = u_0 + u_1$, где u_0 – постоянная функция, а u_1 удовлетворяет следующему условию

$$\int_\Omega u_1 \, d\Omega = 0.$$

Пусть $\varphi_0 = u_0|_\Gamma$ и $\varphi_1 = u_1|_\Gamma$. Тогда $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ и

$$\begin{aligned} |u|^2_{H^1(\Omega)} &= |u_1|^2_{H^1(\Omega)} \ge c\|u_1\|^2_{H^1(\Omega)} \ge \\ &\ge c\|\varphi_1\|^2_{H^{1/2,h}(\Gamma)} \ge c|\varphi_1|^2_{H^{1/2,h}(\Gamma)} = c|\varphi|^2_{H^{1/2,h}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Беря инфинум, мы получаем второе неравенство. Теперь мы рассмотрим первое неравенство. Разложим $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, где φ_0 – постоянная функция, а φ_1 удовлетворяет следующему условию

$$\int_\Gamma \varphi_1 \, d\Gamma = 0.$$

Пусть u_0 – тривиальное продолжение константы φ_0. По теореме 1.4.3 мы можем определить u_1 так, что

$$(1/2)\| u_1\|^2_{H^1(\Omega)} \le (S\varphi_1, \varphi_1) \le c\| \varphi_1\|^2_{H^{1/2,h}(\Gamma)}. \qquad (1.4.4)$$

Пусть $u = u_0 + u_1$. Тогда используя определение $\tilde{S}$, (1.4.4) и неравенство Пуанкаре, имеем

$$\begin{aligned}(\tilde{S}\varphi, \varphi) &\le c_2 | u |^2_{H^1(\Omega)} = c_2 | u_1 |^2_{H^1(\Omega)} \le \\ &\le c_2 \| u_1\|^2_{H^1(\Omega)} \le c_2 \| \varphi_1\|^2_{H^{1/2,h}(\Gamma)} \le c_2 | \varphi_1 |^2_{H^{1/2,h}(\Gamma)} = \\ &= c_2 |\varphi|^2_{H^{1/2,h}(\Gamma)}.\end{aligned}$$

Первое неравенство доказано.

1.4.3. Теорема о следах для областей с малым диаметром в конечно-элементном случае

Мы рассмотрим теорему о следах для малых областей в случае конечных элементов на анизотропных сетках. Пусть $0 < \varepsilon < 1$ – независимое вещественное число. Заменяя переменные $x = \varepsilon s$, $y = \varepsilon t$, мы можем преобразовать Ω, Ω_h, Γ, I_i в $\Omega_\varepsilon, \Omega_{h(\varepsilon)}$, Γ_ε, $I_{i,\varepsilon}$ для $1 \le i \le 4$ соответственно. Обозначим через $H^{1,h(\varepsilon)}$ пространство конечно-элементных функций на $\Omega_{h(\varepsilon)}$, а через $H^{1/2,h(\varepsilon)}$ пространство конечно-элементных функций на $\Gamma_{h(\varepsilon)}$. Для $u \in H^{1,h}$ и $\varphi \in H^{1/2,h}$ пусть $u_\varepsilon(x, y) = u(s, t)$ и $\varphi_\varepsilon(x, y) = \varphi(s, t)$.

Определение 1.4.6. Для каждой $\varphi_\varepsilon \in H^{1/2,h(\varepsilon)}$ определим

$$
\begin{aligned}
|\varphi_\varepsilon|^2_{H^{1,h(\varepsilon)}(\Gamma_\varepsilon)} &= \varepsilon h_1(|\varphi_\varepsilon|^2_{H^1(I_{2,\varepsilon})} + |\varphi_\varepsilon|^2_{H^1(I_{4,\varepsilon})}) + \\
&+ \varepsilon h_2(|\varphi_\varepsilon|^2_{H^1(I_{1,\varepsilon})} + |\varphi_\varepsilon|^2_{H^1(I_{3,\varepsilon})}), \\
|\varphi_\varepsilon|^2_{H^{1/2,h(\varepsilon)}(\Gamma_\varepsilon)} &= |\varphi_\varepsilon|^2_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} + |\varphi_\varepsilon|^2_{H^{1,h(\varepsilon)}(\Gamma_\varepsilon)}, \\
\|\varphi_\varepsilon\|^2_{H^{1/2,h(\varepsilon)}(\Gamma_\varepsilon)} &= \varepsilon\|\varphi_\varepsilon\|^2_{L_2(\Gamma_\varepsilon)} + |\varphi_\varepsilon|^2_{H^{1/2,h(\varepsilon)}(\Gamma_\varepsilon)}.
\end{aligned}
$$

Из определения сразу же вытекает следующая лемма:

Лемма 1.4.3. Для любой $\varphi_\varepsilon \in H^{1/2,h}$ справедливо

$$|\varphi_\varepsilon|^2_{H^{1/2,h(\varepsilon)}(\Gamma_\varepsilon)} = |\varphi|^2_{H^{1/2,h}(\Gamma)}.$$

Следующие две леммы прямо следуют из теорем 1.4.3 и 1.4.4, определения 1.4.6 и леммы 1.4.3.

Лемма 1.4.4. Для любых $u_\varepsilon \in H^{1,h(\varepsilon)}$ и $\varphi_\varepsilon \in H^{1/2,h(\varepsilon)}$ таких, что выполняется $u_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(x)$ на Γ_ε, имеет место

$$|\varphi_\varepsilon|^2_{H^{1/2,h(\varepsilon)}(\Gamma_\varepsilon)} \le c|u_\varepsilon|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \tag{1.4.5}$$

и для любой заданной $\varphi_\varepsilon \in H^{1/2,h(\varepsilon)}$ существует $u_\varepsilon \in H^{1,h(\varepsilon)}$ такая, что выполняется $u_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(x)$ на Γ_ε, имеет место

$$|u_\varepsilon|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le C|\varphi_\varepsilon|_{H^{1/2,h(\varepsilon)}(\Gamma_\varepsilon)}. \tag{1.4.6}$$

<u>Лемма 1.4.5.</u> Существуют константы c и C, не зависящие от ε, и такие, что для любых $u_\varepsilon \in H^{1,h(\varepsilon)}$ и $\varphi_\varepsilon \in H^{1/2,h(\varepsilon)}$ таких, что $u_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(x)$ на Γ_ε, верно

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{H^{1/2,h(\varepsilon)}(\Gamma_\varepsilon)} \le c\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)},$$

и для любой заданной $\varphi_\varepsilon \in H^{1/2,h(\varepsilon)}$ существует $u_\varepsilon \in H^{1,h(\varepsilon)}$ такая, что выполняется $u_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(x)$ на Γ_ε, имеет место

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le C\|\varphi_\varepsilon\|_{H^{1/2,h(\varepsilon)}(\Gamma_\varepsilon)}.$$

<u>Лемма 1.4.6.</u> Пусть I_h и J_h – равномерные триангуляции на $(0,1)$ и $(0,3)$ соответственно, с шагом сетки h. Для $i = 0,\dots,(3/h)$ положим $x_i = ih$. Пусть H_I и H_J – пространства непрерывных кусочно-линейных функций на I_h и J_h соответственно. Пусть $\varphi \in H_I$ – произвольная функция. Зададим $\psi(x) \in H_J$ в интервале $(0,3)$:

$$\psi(x_i) = \begin{cases} \varphi(x_i), & x_i \in (0,1] \\ (2-x_i)\varphi(2-x_i), & x_i \in (1,2] \\ 0, & x_i \in (2,3) \end{cases}.$$

Тогда существует константа c, не зависящая от φ и ψ, и такая, что

$$\|\psi\|^2_{H^{1/2}(0,3)} + h|\psi|^2_{H^1(0,3)} \le c(\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(0,1)} + h|\varphi|^2_{H^1(0,1)}).$$

Более того, если $\int_0^1 \varphi(x)\,dx = 0$, тогда существует константа C, не зависящая от φ и ψ, и такая, что

$$|\psi|_{H^{1/2}(0,3)} + h|\psi|^2_{H^1(0,3)} \le C(|\varphi|_{H^{1/2}(0,1)} + h|\varphi|^2_{H^1(0,1)}).$$

Доказательство. Ведем следующую дискретную норму:

$$\|\varphi\|^2_{\tilde{L}_2^h(I_h)} = h\sum_i \varphi^2(x_i),$$

$$\|\varphi\|^2_{\tilde{H}^{1/2,h}(I_h)} = h^2\sum_i\sum_j \frac{(\varphi(x_i)-\varphi(x_j))^2}{|x_i - x_j|^2},$$

$$\|\varphi\|^2_{\tilde{H}^{1,h}(I_h)} = \frac{1}{h}\sum_i (\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_i))^2.$$

Дискретные нормы эквивалентны соответствующим непрерывным нормам. Тогда следующие неравенства могут быть показаны непосредственными выкладками, из которых получается доказательство леммы.

$$\|\psi\|^2_{\tilde{L}_2^h(I_h)} \le c\|\varphi\|^2_{\tilde{L}_2^h(I_h)},$$

$$|\psi|^2_{\tilde{H}^{1/2,h}(J_h)} \le c(|\varphi|^2_{\tilde{H}^{1/2,h}(I_h)} + \|\varphi\|^2_{\tilde{L}_2^h(I_h)}),$$

$$h|\psi|^2_{\tilde{H}^{1,h}(J_h)} \le h|\varphi|^2_{\tilde{H}^{1,h}(I_h)}.$$

Из леммы 1.4.6 имеем следующее следствие.

Следствие 1.4.1. Обозначим через H_I^ε и H_J^ε масштабированные пространства конечных элементов, соответствующие H_I и H_J. Пусть $\tilde{x}_i = \varepsilon x_i$, для $i = 0,\dots,(3/h)$. Пусть $\varphi \in H_I^\varepsilon$ – произвольная функция. Зададим $\psi(x)$ в интервале $(0,3\varepsilon)$ так, что

$$\psi(\tilde{x}_i) = \begin{cases} \varphi(\tilde{x}_i), & \tilde{x}_i \in (0,1] \\ (2-\tilde{x}_i)\varphi(2-\tilde{x}_i), & \tilde{x}_i \in (1,2] \\ 0, & \tilde{x}_i \in (2,3) \end{cases}.$$

Тогда существует константа с, не зависящая от φ, ψ и ε, и такая, что

$$\begin{aligned}&\varepsilon\|\psi\|^2_{L_2(0,3\varepsilon)}+|\psi|^2_{H^{1/2}(0,3\varepsilon)}+\varepsilon h|\psi|^2_{H^1(0,3\varepsilon)}\le\\&\le c(\varepsilon\|\varphi\|^2_{L_2(0,3\varepsilon)}+|\varphi|^2_{H^{1/2}(0,\varepsilon)}+\varepsilon h|\varphi|^2_{H^1(0,\varepsilon)}).\end{aligned}\tag{1.4.7}$$

Более того, если $\int\limits_0^\varepsilon\varphi(x)dx=0$, тогда существует константа c, не зависящая от φ, ψ и ε, и такая, что

$$\begin{aligned}&(1/\varepsilon)\|\psi\|^2_{L_2(0,3\varepsilon)}+|\psi|^2_{H^{1/2}(0,3\varepsilon)}+\varepsilon h|\psi|^2_{H^1(0,3\varepsilon)}\le\\&\le C(|\varphi|^2_{H^{1/2}(0,\varepsilon)}+\varepsilon h|\varphi|^2_{H^1(0,\varepsilon)}).\end{aligned}$$

1.4.4. Теорема о следах для анизотропных сеток в узких областях в случае конечных элементов

Этот раздел имеет близкое отношение к разделу 1.4.1, но мы рассмотрим случай конечных элементов. Пусть $\Omega=(0,H)\times(0,L)$ и $\Gamma=\partial\Omega$. Предположим, что $H<<L$. Пусть $k=\left[L/H\right]$ и $\tilde{H}=L/k$. Пусть Ω^h – триангуляция на Ω с равномерной сеткой с шагами h_1 и h_2 по осям x и y соответственно. Пусть $n_1=H/h_1$ и $n_2=L/h_2$. Предположим, что h_2 достаточно мало так, что существует целое число $m\ge3$ такое, что $mh_2\le H<(m+1)h_2$. Мы можем выбрать такую последовательность целых чисел $\{s_i\}_{i=0}^k$, что $0=s_0<s_1<...<s_k=n_2$, $m_i=s_i-s_{i-1}\ge3$ – порядка m и $m_1=m_k=m$. Разобьем интервал $[0,L]=\bigcup\limits_{i=1}^k\bar{I}_i$, где $I_i=(s_{i-1}h_2,s_ih_2)$. Пусть

$\sigma_0 = \tau_0 = (0,H)\times\{0\}$, $\sigma_k = \tau_k = (0,H)\times\{L\}$ и $\sigma_i = \{0\}\times I_i$, $\tau_i = \{H\}\times I_i$.

Обозначим $\ell_i = \sigma_i \cup \sigma_{i+1}$ и $r_i = \tau_i \cup \tau_{i+1}$.

<u>Определение 1.4.7.</u> Для любой $\varphi \in H^{1/2,h}$

$$|\varphi|^2_{H^{1,h}(\Gamma)} = h_1(|\varphi_h|^2_{H^1(\Gamma_L)} + |\varphi_h|^2_{H^1(\Gamma_R)}) + \\ + h_2(|\varphi_h|^2_{H^1(\Gamma_B)} + |\varphi_h|^2_{H^1(\Gamma_T)}),$$

$$\|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)} = \sum_{i=0}^{k} H(\|\varphi\|^2_{L_2(\ell_i)} + \|\varphi\|^2_{L_2(r_i)}),$$

$$|\varphi|^2_{\overset{\vee}{H}{}^{1/2,h}(\Gamma)} = \sum_{i=0}^{k}(I_{\ell_i,\ell_i}(\varphi) + I_{r_i,r_i}(\varphi) + I_{\ell_i,r_i}(\varphi)) + \\ + |\varphi|^2_{H^{1,h}(\Gamma)},$$

$$\|\varphi\|^2_{\overset{\vee}{H}{}^{1/2,h}(\Gamma)} = \|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)} + |\varphi|^2_{\overset{\vee}{H}{}^{1/2,h}(\Gamma)}.$$

<u>Теорема 1.4.5.</u> Существуют константы c_1 и c_2, не зависящие от H, h_1 и h_2, и такие, что для всех $\varphi \in H^{1/2,h}(\Gamma)$ верно

$$c_1(S\varphi,\varphi) \le \|\varphi\|^2_{\overset{\vee}{H}{}^{1/2,h}(\Gamma)} \le c_2(S\varphi,\varphi),$$

где

$$(S\varphi,\varphi) = \inf_{u\in H^{1,h},\ u|_\Gamma=\varphi} \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

<u>Доказательство.</u> Зададим $\tilde{\sigma}_i$ и $\tilde{\tau}_i$ как в доказательстве теоремы 1.4.1. Тогда мы можем определить α_i и β_i для построения φ^H, ψ_0, ψ_{k+1}, ψ_i для $i = 1,\ldots,k$ таким же образом, как в разделе 1.4.1. Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\sum_{i=1}^{k} \left| \varphi^{H} \right|^2_{H^{1,h}(\partial\tilde{\Omega}_i)} \le c \| \varphi \|^2_{\overset{\vee}{H}{}^{1/2,h}(\Gamma)} \tag{1.4.8}$$

и

$$\begin{aligned} &\left|\psi_0\right|^2_{H^{1,h}(\partial\Omega_0)} + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\left|\psi_{i,l}\right|^2_{H^{1,h}(\partial\Omega_i)} + \left|\psi_{i,r}\right|^2_{H^{1,h}(\partial\Omega_i)} \right) + \\ &+ \left|\psi_k\right|^2_{H^{1,h}(\partial\Omega_k)} \le c \| \varphi \|^2_{\overset{\vee}{H}{}^{1/2,h}(\Gamma)} . \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

С помощью прямых вычислений получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \left| \varphi^{H} \right|^2_{H^{1,h}(\partial\tilde{\Omega}_i)} &\le c \sum_{i=0}^{k} ((\alpha_{i+1} - \alpha_i)^2 + (\beta_{i+1} - \beta_i)^2) + \\ &+ c \sum_{i=0}^{k} ((\alpha_{i+1} - \beta_i)^2 + (\beta_{i+1} - \alpha_i)^2) + c \sum_{i=0}^{k+1} (\alpha_i - \beta_i)^2 \le \\ &\le c \| \varphi \|_{\overset{\vee}{H}{}^{1/2,h}(\Gamma)} , \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

где последнее неравенство получается как в доказательстве теоремы 1.4.1. Завершение (1.4.8) неравенства (1.4.9) следует из замечания 1.4.1.

Для полунорм мы имеем следующую теорему:

Теорема 1.4.6. Существуют константы c_1 и c_2, не зависящие от H, h_1 и h_2, и такие, что для всех $\varphi \in H^{1/2,h}(\Gamma)$ верно

$$c_1 (\tilde{S}\varphi, \varphi) \le \left| \varphi \right|^2_{\overset{\vee}{H}{}^{1/2,h}(\Gamma_h)} \le c_2 (\tilde{S}\varphi, \varphi) ,$$

где

$$(\tilde{S}\varphi, \varphi) = \inf_{u \in H^{1,h},\ u|_{\Gamma} = \varphi} \left| u \right|^2_{H^1(\Omega)} .$$

Полунорму $\left|\varphi\right|_{\overset{\vee}{H}^{1/2,h}(\Gamma)}$ сложно использовать, но мы можем заменить ее на эквивалентную полунорму $\left|\varphi\right|_{\tilde{H}^{1/2,h}(\Gamma)}$, которая проще в использовании.

Определение 1.4.8. Для всех $\varphi \in H^{1/2,h}(\Gamma)$

$$\begin{aligned}\left|\varphi\right|^2_{\tilde{H}^{1/2,h}(\Gamma)} &= \sum_{i=0}^{k}(I_{\ell_i,\ell_i}(\varphi) + I_{r_i,r_i}(\varphi)) + \\ &+ \sum_{i=1}^{k}(I_{\sigma_i,\tau_i}(\varphi)) + \left|\varphi\right|^2_{H^{1,h}(\Gamma)}.\end{aligned} \tag{1.4.11}$$

Теорема 1.4.7. Существуют константы c_1 и c_2, не зависящие от H, и такие, что для всех $\varphi \in H^{1/2,h}(\Gamma)$ верно

$$c_1(\tilde{S}\varphi,\varphi) \le \left|\varphi\right|^2_{\tilde{H}^{1/2,h}(\Gamma)} \le c_2(\tilde{S}\varphi,\varphi),$$
$$(\tilde{S}\varphi,\varphi) = \inf_{u\in H^{1,h},\ u|_{\Gamma}=\varphi} \left| u \right|^2_{H^1(\Omega)}.$$

1.5. Конечно-элементная теорема о следах для весовых пространств Соболева $H^1_\alpha(\Omega)$

Определим весовые пространства Соболева $H^1_\alpha(\Omega)$ с нормами [91]

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H^1_\alpha(\Omega)} &= \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \left|u\right|^2_{H^1_\alpha(\Omega)}, \\ \|u\|^2_{L_2(\Omega)} &= \int_\Omega u^2(x)\,dx, \\ \left|u\right|^2_{H^1_\alpha(\Omega)} &= \int_\Omega \left(\frac{\left|\nabla u(x)\right|}{(\rho(x))^{\alpha(x)}}\right)^2 dx.\end{aligned} \tag{1.5.1}$$

Здесь

$$\alpha(x) \equiv \alpha = \text{const}, \quad x \in \Omega$$

и $\rho(x)$ – расстояние между точкой $x \in \Omega$ и границей Γ. Предположим, что

$$|\alpha| < 1/2. \tag{1.5.2}$$

Предположим, что $a(u,v)$ – симметричная коэрцитивная и непрерывная норма в $H^1_\alpha(\Omega) \times H^1_\alpha(\Omega)$, то есть

$$a(u,v) = a(v,u),$$
$$\mu_0 \| u \|^2_{H^1_\alpha(\Omega)} \le a(u,u) \le \mu_1 \| u \|^2_{H^1_\alpha(\Omega)} \quad \forall u \in H^1_\alpha(\Omega).$$

Здесь μ_0, μ_1 – положительные константы, не зависящие от α.

Замечание 1.5.1. Если условие (1.5.2) верно, то норма (1.5.1) эквивалентна следующей норме [91]

$$\||u\||^2_{H^1_\alpha(\Omega)} = \int_\Omega \left(\frac{u(x)}{(\rho(x))^{\alpha(x)}}\right)^2 dx + |u|^2_{H^1_\alpha(\Omega)}. \tag{1.5.3}$$

Основанием для дальнейших построений является следующая теорема о следах для весовых пространств Соболева $H^1_\alpha(\Omega)$ [91].

Теорема 1.5.1. Пусть Ω – ограниченная область с кусочно-гладкой границей Γ класса C^2, удовлетворяющая условию Липшица, и α – константа такая, что $|\alpha| < 1/2$. Тогда существует положительная константа c_1, не зависящая от α, и такая, что

$$\| \varphi \|_{H^{1/2+\alpha}(\Gamma)} \le c_1 \| u \|_{H^1_\alpha(\Omega)}$$

для любых $u \in H^1_\alpha(\Omega)$, где $\varphi \in H^{1/2+\alpha}(\Gamma)$ – след u на границе Γ.

И наоборот, существует положительная константа c_2, не зависящая от α, и такая, что для любых $\varphi \in H^{1/2+\alpha}(\Gamma)$ существуют $u \in H^1_\alpha(\Omega)$ такие, что

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma,$$
$$\| u \|^2_{H^1_\alpha(\Omega)} \le c_2 \| \varphi \|^2_{H^{1/2+\alpha}(\Gamma)}.$$

Здесь $\| \varphi \|_{H^{1/2+\alpha}(\Gamma)}$ – норма в Соболевском пространстве $H^{1/2+\alpha}(\Gamma)$:

$$\| \varphi \|^2_{H^{1/2+\alpha}(\Gamma)} = \| \varphi \|^2_{L^2(\Gamma)} + |\varphi|^2_{H^{1/2+\alpha}(\Gamma)}, \tag{1.5.4}$$

$$\| \varphi \|^2_{L^2(\Gamma)} = \int_\Gamma \varphi^2(x)\,dx, \tag{1.5.5}$$

$$|\varphi|^2_{H^{1/2+\alpha}(\Gamma)} = \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{(\varphi(x)-\varphi(y))^2}{|x-y|^{2+2\alpha}}\,dx\,dy. \tag{1.5.6}$$

Чтобы определить сеточный аналог норм (1.5.1) и (1.5.4)-(1.5.6) разобьем треугольники T_j однородной триангуляции Ω^h на три группы. Обозначим через M_1 множество таких треугольников T_j, что T_j не имеют вершин на Γ, через M_2 множество таких треугольников T_j, что T_j имеют только одну вершину на Γ, и через M_3 множество таких треугольников T_j, что T_j имеют больше одной вершины на Γ. Положим

$$\left\| u^h \right\|^2_{H^1_{\alpha,h}(\Omega)} = \left\| u^h \right\|^2_{L_{2,h}(\Omega)} + \left| u^h \right|^2_{H^1_{\alpha,h}(\Omega)},$$

$$\left\| u^h \right\|^2_{L_{2,h}(\Omega)} = \sum_{z_j \in \Omega^h} (u^h(z_j))^2 h^2,$$

$$\left|u^h\right|^2_{H^1_{\alpha,h}(\Omega)} = \sum_{T_j\in M_1} \frac{(u_{j1}-u_{j2})^2+(u_{j2}-u_{j3})^2+(u_{j3}-u_{j1})^2}{(\rho(T_j,\Gamma))^{2\alpha}} +$$

$$+\sum_{T_j\in M_2} \frac{(u_{j1}-u_{j2})^2+(u_{j2}-u_{j3})^2+(u_{j3}-u_{j1})^2}{h^{2\alpha}} +$$

$$+\sum_{T_j\in M_3} \frac{(u_{j1}-u_{j2})^2+(u_{j2}-u_{j3})^2+(u_{j3}-u_{j1})^2}{(1-2\alpha)h^{2\alpha}} \qquad \forall u^h \in W.$$

Здесь z_i – вершины в Ω^h, u_{j1}, u_{j2}, u_{j3} – значения u^h на вершинах T_j и $\rho(T_j,\Gamma)$ – расстояние между T_j и Γ.

Используя естественный порядок узлов на Г, положим в соответствие каждому узлу $z_j \in \Gamma$ узел z_{j+1}, который является соседним к z_j и положим

$$\|\varphi\|^2_{H_h^{1/2+\alpha}(\Gamma)} = \|\varphi\|^2_{L_{2,h}(\Gamma)} + |\varphi|^2_{H_h^{1/2+\alpha}(\Gamma)},$$

$$\|\varphi\|^2_{L_{2,h}(\Gamma)} = \sum_{z_j\in\Gamma} (\varphi^h(z_j))^2\, h,$$

$$|\varphi|^2_{H_h^{1/2+\alpha}(\Gamma)} = \sum_{z_j\in\Gamma}\sum_{z_k\in\Gamma, j\neq k} \frac{(\varphi^h(z_j)-\varphi^h(z_k))^2}{\left|z_j-z_k\right|^{2+2\alpha}} h^2 +$$

$$+\sum_{z_j\in\Gamma^h} \frac{(\varphi^h(z_j)-\varphi^h(z_{j+1}))^2}{(1-2\alpha)h^{2\alpha}} \qquad \forall \varphi^h \in V.$$

Имеют место следующие леммы.

<u>**Лемма 1.5.1.**</u> Существуют положительные константы c_1 и c_2, не зависящие от α и h, и такие, что

$$c_1\left\|u^h\right\|_{H^1_\alpha(\Omega)} \le \left\|u^h\right\|_{H^1_{\alpha,h}(\Omega)} \le c_2\left\|u^h\right\|_{H^1_\alpha(\Omega)} \qquad \forall u^h \in W.$$

Лемма 1.5.2. Существуют положительные константы c_1 и c_2, не зависящие от α и h, и такие, что

$$c_1 \left\| \varphi^h \right\|_{H^{1/2+\alpha}(\Gamma)} \le \left\| \varphi^h \right\|_{H_h^{1/2+\alpha}(\Gamma)} \le c_2 \left\| \varphi^h \right\|_{H^{1/2+\alpha}(\Gamma)} \quad \forall \varphi^h \in V.$$

В заключение, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.5.2. Существует положительная константа c_1, не зависящая от α, и h, и такая, что

$$\left\| \varphi^h \right\|_{H_h^{1/2+\alpha}(\Gamma)} \le c_1 \left\| u^h \right\|_{H^1_{\alpha,h}(\Omega)} \quad \forall u^h \in W,$$

где $\varphi^h \in V$ – след u на границе Γ. И наоборот, существует положительная константа c_2, не зависящая от α и h, и такая, что для любой $\varphi^h \in V$ существует $u^h \in W$ такая, что

$$u^h(x) = \varphi^h(x), \quad x \in \Gamma,$$
$$\left\| u^h \right\|^2_{H^1_{\alpha,h}(\Omega)} \le c_2 \left\| \varphi^h \right\|^2_{H_h^{1/2+\alpha}(\Gamma)}.$$

Используя данную теорему 1.5.2, строятся переобуславливающие операторы для задач с сингулярными коэффициентами в [168].

2. Декомпозиция области – Аддитивный метод Шварца

Данная глава посвящена построению и исследованию методов декомпозиции области для построения эффективных переобуславливающих операторов в двумерных и трехмерных областях. Специальное исследование проводилось для случая, когда коэффициенты дифференциальных уравнений слабо изменяются внутри подобластей, но могут резко меняться при переходе из подобласти в подобласть. Рассматривается также случай, когда исходная область разбивается на большое (быть может зависящее от шага сетки) число подобластей. Основным аппаратом построения и исследования этих методов декомпозиции является аддитивный метод Шварца.

2.1. Метод декомпозиции области: случай полос

Начнём изложение методов декомпозиции области для простейшего случая и простейшего эллиптического оператора – оператора Лапласа. Данный пункт приводится для полноты изложения методов декомпозиции и мотивации развития аддитивного метода Шварца.

В этом пункте декомпозиция Ω на подобласти Ω_i не имеет точек ветвления на внутренних границах. Такой вид декомпозиции области на подобласти называется случаем полос, который характеризуется декомпозицией в виде

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\Omega}_i, \quad \gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \partial\Omega_i \setminus \Gamma = \bigcup_{i=1}^{n-1} \gamma_i, \quad \text{для} \quad \gamma_i \bigcap \gamma_j = \varnothing \quad \text{для} \quad i \neq j,$$

где γ_i – внутренние границы между подобластями. Рассмотрим метод Дирихле для уравнения Пуассона как модельную задачу:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, \qquad x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Тогда конечно-элементная дискретизация даёт следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$Au = f,$$

которая может быть переписана в блочном виде

$$\begin{pmatrix} A_0 & A_{01} & . & . & . & A_{0n} \\ A_{10} & A_1 & & & & \\ . & & . & 0 & & \\ . & & & . & & \\ . & & 0 & & . & \\ A_{n0} & & & & & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_o \\ u_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_o \\ f_1 \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Здесь вектор u_0 соответствует узлам сетки на γ, $u_1, \ . \ . \ . \ , u_n$ соответствуют внутренним узлам в подобластях $\Omega_1, \ . \ . \ . \ , \Omega_n$. Исключив вектор u_i из уравнения

$$A_{i0} + A_i u_i = f_i,$$

и, заменив

$$u_i = -A_i^{-1} A_{i0} u_0 + A_i^{-1} f_i$$

внутри первого (блока) уравнения, мы приходим к уравнению для дополнения Шура

$$S\varphi = \psi, \tag{2.1.1}$$

где

$$S = A_0 - \sum_{i=1}^{n} A_{0i} A_i^{-1} A_{i0},$$
$$\varphi = u_0,$$
$$\psi = f_0 - \sum_{i=1}^{n} A_{0i} A_i^{-1} f_i.$$

Уравнение для дополнения Шура (2.1.1) может быть решено, например, итерационным методом вида

$$\varphi^{k+1} = \varphi^k - \tau_k \Sigma^{-1} (S\varphi^k - \psi),$$

где Σ – подходящий переобуславливатель, удовлетворяющий неравенствам спектральной эквивалентности

$$c_1(\Sigma\varphi, \varphi) \le (S\varphi, \varphi) \le c_2(\Sigma\varphi, \varphi) \qquad (2.1.2)$$

для всех векторов φ, и τ_k – подходящим образом выбранные параметры итерационного процесса.

Теперь мы вектор u_0 представим в виде

$$u_0 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix},$$

где φ_i соответствуют γ_i. Тогда мы имеем

$$S = S_1 + \ldots + S_n,$$

где

$$\Omega_i \to S_i u_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{11}^{(i)} & S_{12}^{(i)} & 0 \\ 0 & S_{21}^{(i)} & S_{22}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы S_1, S_n состоят из одного блока.

Теперь мы найдем Σ_{i-1} и Σ_i такие, что

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{i-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_i \end{pmatrix} \approx S_i = \begin{pmatrix} S_{11}^{(i)} & S_{12}^{(i)} \\ S_{21}^{(i)} & S_{22}^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Для построения легко обратимых матриц Σ_ℓ $(\ell = i-1; i)$, удовлетворяющих этому условию, будем использовать результаты из главы 1.

Пусть a_ℓ, b_ℓ – конечные точки γ_ℓ. Обозначим

$$\|\varphi\|^2_{H_{00}^{1/2}(\gamma_\ell)} = \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\gamma_\ell)} + \int_{\gamma_\ell} \frac{\varphi^2(x)}{|x-a_\ell|}dx + \int_{\gamma_\ell} \frac{\varphi^2(x)}{|x-b_\ell|}dx. \qquad (2.1.3)$$

Тогда

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega_i)} \approx \|\varphi\|^2_{H_{00}^{1/2}(\gamma_{i-1})} + \|\varphi\|^2_{H_{00}^{1/2}(\gamma_i)}.$$

Аналогично (1.2.4) введем дискретный аналог нормы (2.1.3).

Для конечно-элементных функций φ^h положим

$$\left\|\varphi^h\right\|^2_{H_{00,h}^{1/2}(\gamma_\ell)} =$$

$$= \left\|\varphi^h\right\|^2_{H_h^{1/2}(\gamma_\ell)} + \sum_{z_i \in \gamma_\ell} \frac{(\varphi^h(z_i))^2}{|z_i - a_\ell|} h_i + \sum_{z_i \in \gamma_\ell} \frac{(\varphi^h(z_i))^2}{|z_i - b_\ell|} h_i,$$

где z_i, $i = 1, 2, ..., n_\ell - 1$ – внутренние сеточные узлы γ_ℓ. Рассмотрим единичный отрезок [0,1], на котором введем равномерную сетку с $(n_\ell - 1)$ внутренними узлами $\tilde{z}_i$, $i = 1, ..., n_\ell - 1$. На отрезке [0,1] по функции φ^h на γ_ℓ определим кусочно-линейную конечно-элементную функцию $\tilde{\varphi}^h$ такую, что

$$\tilde{\varphi}^h(\tilde{z}_i) = \varphi^h(z_i), \quad i = 1, ..., n_\ell - 1.$$

Тогда

$$\left\| \varphi^h \right\|_{H^{1/2}_{00,h}(\gamma_\ell)} \approx \left\| \tilde{\varphi}^h \right\|_{H^{1/2}_{00,h}(0,1)}.$$

Достраивая отрезок [0,1] до единичного квадрата, вводя равномерную квадратную сетку в этом квадрате с тем же шагом сетки, что и на отрезке [0,1] и используя ту же технику, что и в пункте (1.6.1) (для $\sigma = 1$), получаем

$$\left\| \varphi^h \right\|^2_{H^{1/2}_{00,h}(\gamma_\ell)} \approx \left\| \tilde{\varphi}^h \right\|^2_{H^{1/2}_{00,h}(0,1)} \approx (\Sigma_1 \overline{\varphi}, \overline{\varphi}),$$

где вектор

$$\begin{aligned} &\overline{\varphi} \in R^{n_\ell - 1}, \\ &\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_\ell - 1})^T, \\ &\varphi_i = \tilde{\varphi}^h(\tilde{z}_i), \quad i = 1, \ldots, n_{\ell - 1}, \end{aligned}$$

а матрица Σ_ℓ порядка $(n_\ell - 1)$

$$\Sigma_\ell = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & & & \\ & & & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}^{1/2} = Q_\ell \Lambda_\ell Q_\ell^T ,$$

где $Q_\ell = \left[q_1, \dots, q_{n_\ell - 1} \right]$ состоит из собственных векторов q_i с компонентами

$$q_i(j) = \sqrt{2/n_\ell} \sin(\frac{i\pi}{n_\ell} j)$$

и Λ – диагональная матрица, состоящая из собственных чисел λ_i

$$\lambda_i = 2 \sin(\pi i / 2n_\ell) .$$

Тогда

$$\Sigma_\ell^{-1} = Q_\ell \Lambda_\ell^{-1} Q_\ell^T$$

и с использованием быстрого дискретного преобразования Фурье умножение Σ_ℓ^{-1} на вектор может быть осуществлено за $O(n_\ell \log n_\ell)$ арифметических операций.

Рисунок 2.1.1. дает типичный пример подобласти Ω_i с внутренними границами γ_{i-1} и γ_i.

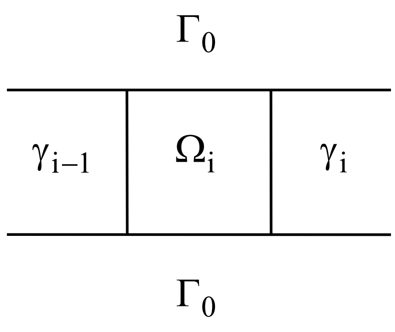


Рис. 2.1.1. Подобласть Ω_i с внутренними границами γ_{i-1} и γ_i

Соответствующее дополнение Шура эквивалентно следующей норме

$$\left(S_i \begin{pmatrix} \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \inf_{w^h \in H_h(\Omega_i), w^h|_{\gamma_{i-1}} = \varphi_{i-1},\, w^h|_{\gamma_i} = \varphi_i,\, w^h|_{\Gamma \cap \partial\Omega_i} = 0} \left| w^h \right|^2_{H^1(\Omega_i)} \approx$$

$$\approx \left\| \varphi^h_{i-1} \right\|^2_{H^{1/2}_{00}(\gamma_{i-1})} + \left\| \varphi^h_i \right\|^2_{H^{1/2}_{00}(\gamma_i)}$$

согласно предшествующему исследованию. Теперь мы имеем переобуславливатель для глобального дополнения Шура в виде блочной диагональной матрицы.

Для примера рассмотрим область с 4-мя подобластями $(\Omega_i,\ i = 1,2,3,4)$, чьи внутренние границы $(\gamma_i,\ i = 1,2,3)$ не соприкасаются друг с другом. Тогда мы имеем

$$S = \begin{bmatrix} S_1 + S_2^{(1,1)} & S_2^{(1,2)} & \\ S_2^{(2,1)} & S_2^{(2,2)} + S_3^{(1,1)} & S_3^{(1,2)} \\ & S_3^{(2,1)} & S_3^{(2,2)} + S_4 \end{bmatrix},$$

где блоки S_i – дополнения Шура, соответствующие подобластям Ω_i. Например,

$$S_2 = \begin{bmatrix} S_2^{(1,1)} & S_2^{(1,2)} \\ S_2^{(2,1)} & S_2^{(2,2)} \end{bmatrix}$$

и $S_2^{(i,j)}$ – матрицы, соответствующие Ω_2 и $\gamma_i,\ \gamma_j$. Здесь мы можем написать

$$S = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \tilde{S}_3 + \tilde{S}_4,$$

где $\tilde{S}_i$ – расширение S_i нулевыми элементами. Теперь в терминах спектральной эквивалентности имеем

$$S_1 \approx \Sigma_1, \quad S_2 \approx \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ & \Sigma_2 \end{bmatrix}, \quad S_3 \approx \begin{bmatrix} \Sigma_2 & \\ & \Sigma_3 \end{bmatrix}, \quad S_4 \approx \Sigma_3 .$$

Заметим, что $(\Sigma_i \phi_i, \phi_i) \approx \| \varphi \|^2_{H^{1/2}_{00}(\gamma_i)}$. Тогда мы имеем

$$S \approx \begin{bmatrix} \Sigma_1 & & \\ & \Sigma_2 & \\ & & \Sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Случай с точками ветвления более сложный. Давайте рассмотрим некоторую модельную краевую задачу в области Ω, которая состоит из четырех подобластей как показано на рисунке 2.1.2.

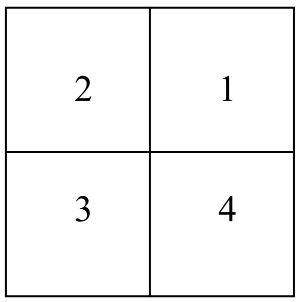


Рис. 2.1.2. Случай с точками ветвления

Построим переобуславливатель $\Sigma^{(i)}$ для $S^{(i)}$ в каждой подобласти. Тогда мы приходим к спектральной эквивалентности

$$S = S^{(1)} + S^{(2)} + S^{(3)} + S^{(4)} \approx \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)} + \Sigma^{(3)} + \Sigma^{(4)} = \Sigma .$$

Однако не очевидно как можно эффективно решить систему уравнений с матрицей Σ. Теоремы о следах не достаточно. Нам нужен, так называемый, аддитивный метод Шварца.

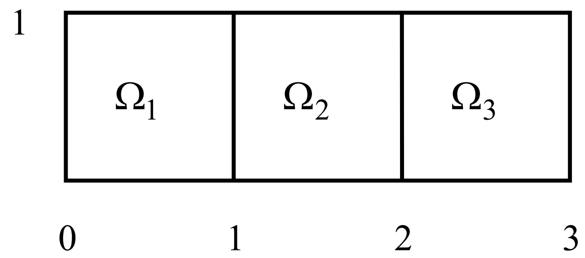
Приведем результаты простых численных экспериментов для случая полос. В качестве модельной задачи для проведения численных экспериментов рассматривалось дифференциальное уравнение

$$-\Delta u = -\partial^2 u / \partial x_1^2 - \partial^2 u / \partial x_2^2 = 0,$$

заданное в области Ω с границей Γ. Сначала в качестве Ω был взят прямоугольник

$$\Omega = \{ (x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 3,\ 0 < x_2 < 1 \},$$

состоящий из трех квадратов



$$\Omega = \{ (x_1, x_2) \mid i-1 < x_1 < i,\ 0 < x_2 < 1 \}, \quad i = 1,2,3.$$

Рис.2.1.3

В этой области рассматривается задача Дирихле

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

В области Ω строилась равномерная по обеим переменным сетка с шагом $h = 1/n$. Система уравнений с матрицей Шура S на разрезах

$$S\varphi = 0$$

решалась с помощью итерационного процесса

$$\varphi^{k+1} = \varphi^k - \tau_k \Sigma^{-1} \varphi^k,$$

где матрица Σ определяется следующим образом

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{DD} & 0 \\ 0 & \Sigma_{DD} \end{pmatrix},$$

а итерационный параметр τ_k выбирался по методу наискорейшего спуска.

Поскольку точное решение системы уравнений известно (нулевой вектор), то ошибка итерационного процесса $\psi^k = \varphi^k - \varphi = \varphi^k$ известна и в качестве условия остановки итерационного процесса можно использовать условие

$$\varepsilon_k = \frac{\left\|\psi^k\right\|_S}{\left\|\psi^0\right\|_S} \le \varepsilon,$$

где было выбрано $\varepsilon = 10^{-4}$. В таблице 2.1.1 для начального приближения

$$\varphi_0^h(1,ih) = \varphi_0^h(2,ih) = ih, \qquad i = 1,2,...,n/2,$$
$$\varphi_0^h(1,ih) = \varphi_0^h(2,ih) = (n-i)h, \quad i = n/2+1,...,n-1,$$

где φ_0^h – кусочно-линейное восполнение вектора φ^0 (на границе Γ области Ω функция φ_0^h обращается в 0), приведено число итераций k, полученных по методу наискорейшего спуска, относительная ошибка ε_k и величина $q_k = \sqrt[k]{\varepsilon_k}$, которая характеризует среднюю скорость сходимости за k итераций.

Таблица 2.1.1

n	8	16	32	64
k	5	5	4	4
ε_k	$0,3396.10^{-4}$	$0,2053.10^{-4}$	$0,7522.10^{-4}$	$0,9195.10^{-4}$
q_k	0,1277	0,1155	0,0931	0,0849

Для сравнения был проведен расчет для случая, когда в качестве матрицы Σ была выбрана единичная матрица

$$\Sigma = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Результаты этого эксперимента приведены в таблице 2.1.2.

Таблица 2.1.2

n	8	16	32
k	29	60	124
ε_k	$0,9977.10^{-4}$	$0,9684.10^{-4}$	$0,9835.10^{-4}$

2.2. Аддитивный метод Шварца в гильбертовом пространстве

В данном параграфе приводится абстрактная схема аддитивного метода Шварца, и приводятся некоторые вспомогательные конструкции.

Начнем с классического метода Шварца [186] и его проекционной формулировки. Рассмотрим простейший случай, когда область Ω является объединением двух пересекающихся областей

$$\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2,$$

а в области Ω рассматривается задача Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, \qquad x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Пусть выбрано начальное приближение u^0. Тогда последовательность приближений $\left\{ u^k \right\}$ определяется как решение следующих задач

$$\begin{aligned} u^{2k+1} &= u^{2k} + u_{2k+1}, \\ -\nabla u_{2k+1}(x) &= f(x), \quad x \in \Omega_1, \\ u_{2k+1}(x) &= 0, \qquad x \in \partial\Omega_1, \\ u^{2k+2} &= u^{2k+1} + u_{2k+2}, \\ -\nabla u_{2k+2}(x) &= f(x), \quad x \in \Omega_2, \\ u_{2k+2}(x) &= 0, \qquad x \in \partial\Omega_2. \end{aligned}$$

Слабая (проекционная) формулировка этого метода имеет вид:

$$\begin{aligned} u_{2k+1} \in H_0^1(\Omega_1): \quad & a(u^{2k} + u_{2k+1}, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_1), \\ & u^{2k+1} = u^{2k} + u_{2k+1}, \\ u_{2k+2} \in H_0^1(\Omega_2): \quad & a(u^{2k+1} + u_{2k+2}, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_2), \\ & u^{2k+2} = u^{2k+1} + u_{2k+2}, \end{aligned}$$

где

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla v)\, dv, \qquad \ell(v) = \int\limits_{\Omega} f\, v\, dv,$$

а функции из пространств Соболева $H_0^1(\Omega_i)$, $i = 1,2$ отождествляются с их продолжением нулем на Ω. Обозначим через

$$P_i : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega_i)$$

ортогональный проектор из $H_0^1(\Omega)$ на $H_0^1(\Omega_i)$ относительно скалярного произведения $a(u,v)$. Имеем

$$\begin{aligned} a(u_{2k+1},v) &= \ell(v) - a(u^{2k},v) = a(u,v) - a(u^{2k},v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega_1), \\ a(u_{2k+2},v) &= \ell(v) - a(u^{2k+1},v) = a(u,v) - a(u^{2k+1},v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_2), \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} u_{2k+1} &= P_1(u - u^{2k}), \\ u^{2k+1} &= u^{2k} + P_1(u - u^{2k}), \\ u_{2k+2} &= P_2(u - u^{2k+1}), \\ u^{2k+2} &= u^{2k+1} + P_1(u - u^{2k+1}). \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Обозначим ошибку метода Шварца через

$$\psi^k = u^k - u.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi^{2k+1} &= (I - P_1)\psi^{2k} \equiv Q_1\psi^{2k}, \\ \psi^{2k+2} &= (I - P_1)\psi^{2k+1} \equiv Q_1\psi^{2k+1}. \end{aligned}$$

Предположим, что существует положительная константа α такая, что

$$\alpha\, a(u,u) \le a((P_1 + P_2)u,u) \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \tag{2.2.2}$$

и рассмотрим скорость сходимости метода Шварца (его слабой формулировки) [78] .

Пусть $k \geq 1$, тогда

$$\begin{aligned}
\left\|\psi^{2k+1}\right\|^2 &= \left\|Q_1\psi^{2k}\right\|^2 = \left\|Q_1Q_2\psi^{2k}\right\|^2 = a(Q_1Q_2\psi^{2k}, Q_1Q_2\psi^{2k}) = \\
&= a(Q_2Q_1Q_1Q_2\psi^{2k}, \psi^{2k}) = a(Q_2Q_1Q_2\psi^{2k}, \psi^{2k}) = \\
&= a((I-(P_1+P_2)+P_1P_2+P_2P_1+P_2P_1P_2)\psi^{2k}, \psi^{2k}) = \\
&= a(\psi^{2k}, \psi^{2k}) - a((P_1+P_2)\psi^{2k}, \psi^{2k}) + a(P_1P_2\psi^{2k}, \psi^{2k}) + \\
&\quad + a(P_2P_1\psi^{2k}, \psi^{2k}) + a(P_2P_1P_2\psi^{2k}, \psi^{2k}) = \\
&= a(\psi^{2k}, \psi^{2k}) - a((P_1+P_2)\psi^{2k}, \psi^{2k}) \leq (1-\alpha)a(\psi^{2k}, \psi^{2k}),
\end{aligned}$$

т.е.

$$\left\|\psi^{2k+1}\right\| \leq \sqrt{(1-\alpha)}\left\|\psi^{2k}\right\|,$$
$$\left\|\psi^{2k+2}\right\| \leq \sqrt{(1-\alpha)}\left\|\psi^{2k+1}\right\|.$$

Таким образом, за один шаг метода Шварца имеем

$$\left\|\psi^{2k+2}\right\| \leq (1-\alpha)\left\|\psi^{2k}\right\|, \quad k = 1, 2, \ldots$$

С другой стороны, если имеет место оценка (2.2.2), тогда в силу того, что $P_i, \; i = 1,2$ – ортопроекторы, мы имеем оценки на оператор $P_1 + P_2$ снизу и сверху:

$$\alpha\, a(u,u) \leq a((P_1+P_2)u, u) \leq 2a(u,u) \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

и, следовательно, вместо итерационного процесса (2.2.1) можно рассмотреть итерационный процесс следующего вида:

$$u^{k+1} = u^k - \tau_k(P_1+P_2)(u^k - u) \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \tag{2.2.3}$$

где параметр τ^k выбирается, например, на основе метода наискорейшего спуска, Чебышевского набора параметров и т.д. [107]. Скорость сходимости соответствующих итерационных процессов зависит от константы $\alpha/2$.

В силу представления (2.2.1) такую проекционную форму метода Шварца называют мультипликативным методом Шварца, а метод вида (2.2.3) – аддитивным методом Шварца.

Нижеследующие результаты используются для построения и исследования скорости сходимости аддитивного метода Шварца.

<u>Теорема 2.1.1.</u> Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением (u,v), которое разложено в векторную сумму своих подпространств:

$$H = H_1 + H_2 + ... + H_m,$$

P_i – операторы ортогонального проектирования из H на H_i. Пусть α – положительная константа. Тогда следующие два условия равносильны:

а) $\alpha(u,u) \le (Pu,u)$ для любого $u \in H$. Здесь $P = P_1 + P_2 + ... + P_m$;

б) существует константа $\alpha > 0$ такая, что для любого элемента $u \in H$ существует декомпозиция $u = u_1 + u_2 + ... + u_m$, где $u_i \in H_i$, удовлетворяющая следующему неравенству:

$$\sum_{i=1}^{m}(u_i,u_i) \le (1/\alpha)(u,u).$$

<u>Доказательство.</u> Пусть имеет место условие а). Тогда оператор P является самосопряженным и имеет положительную нижнюю и ограниченную

верхнюю грани. Следовательно [100], оператор P осуществляет взаимно-однозначное отображение H на H и имеет обратный оператор, т.е. для любого $u \in H$ существует $v \in H$ такой, что

$$u = Pv = \sum_{i=1}^{m} P_i v.$$

Положим $u_i = P_i v, \quad i = 1, 2, ..., m$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m}(u_i, u_i) = \sum_{i=1}^{m}(P_i\, v, P_i\, v) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}(P_i\, v, v) = (\sum_{i=1}^{m} P_i\, v, v) = (u, v) =$$

$$= (u, P^{-1}u) \le \left\| P^{-1} \right\| (u, u) \le (1/\alpha)(u, u), \quad u_i \in H_i.$$

Пусть имеет место условие б). Тогда для любого $u \in H$ имеет

$$\| u \| = \sup_{v \ne 0} \frac{|(u, v)|}{\| v \|} = \sup_{v \ne 0} \frac{\left|(u, \sum_{i=1}^{m} v_i)\right|}{\| v \|} \le \sup_{v \ne 0} \frac{\sum_{i=1}^{m} |(u_i, v_i)|}{\| v \|} =$$

$$= \sup_{v \ne 0} \frac{\sum_{i=1}^{m} |(P_i u, v_i)|}{\| v \|} \le \sup_{v \ne 0} \frac{\sum_{i=1}^{m} \| P_i\, u \| \| v_i \|}{\| v \|}.$$

Выше мы воспользовались для функции v разложением $v = \sum_{i=1}^{m} v_i$, удовлетворяющим условию б).

Применяя неравенство Коши-Буняковского для сумм, получаем

$$\sup_{v\neq 0}\frac{\sum_{i=1}^{m}\|P_i u\|\|v\|}{\|v\|}\le \sup_{v\neq 0}\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\|P_i u\|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\|u_i\|^2}}{\|v\|}\le \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\|P_i u\|^2},$$

откуда

$$\alpha(u,u)\le \sum_{i=1}^{m}(P_i u, P_i u)=(Pu, v),$$

что и завершает доказательство теоремы 2.1.1.

Пусть Ω – объединение двух пересекающихся подобластей Ω_1 и Ω_2. Мы хотим показать, что для любого $u\in H_0^1(\Omega)$ существуют $u_i\in H_0^1(\Omega)$ такие, что $u_1+u_2=u$ и

$$\|u_1\|^2_{H^1(\Omega_1)}+\|u_2\|^2_{H^1(\Omega_2)}\le 1/\alpha\,\|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Пусть

$$u_1(x)=\begin{cases}u(x), & x\in\Omega_1\setminus\Omega_2,\\ \text{extension}, & x\in\Omega_1\bigcap\Omega_2.\end{cases}$$

Продолжение extension предполагает оценку $\|u_1\|^2_{H^1(\Omega_1)}\le C\,\|u\|_{H^1(\Omega)}$ для $u_1\in H_0^1(\Omega_1)$. Тогда, пусть $u_2=u-u_1$, где $u_2\in H_0^1(\Omega_2)$. Это дает оценку

$$\|u_2\|_{H^1(\Omega_2)}\le\|u\|_{H^1(\Omega)}+\|u_1\|_{H^1(\Omega_1)}\le(1+C)+\|u\|_{H^1(\Omega)},$$

где константа зависима от продолжения.

В общем, мы имеем $a(Pu,u) \le m \cdot a(u,u)$, где m – число подпространств. Так же если m большое, то требуется более точная оценка.

Справедлива следующая теорема (См., например, [179]).

Теорема 2.1.2. Следующие два утверждения эквивалентны:

а) $a(Pu,u) \le \beta \cdot a(u,u) \quad \forall u \in H$;

б) $a(u,u) \le \beta \inf\limits_{u_1+...+u_m=u,\ u_i \in H_1} \sum\limits_{i=1}^{m} a(u_i,u_i)$.

Доказательство. Пусть $u \in H$ и положим $u_i = P_i P^{-1} u$. Тогда мы имеем

$$u_1 + ... + u_m = P_i P^{-1} u + ... + P_m P^{-1} u = u.$$

Пусть $u = v_1 + ... + v_m$ – другие декомпозиции с $v_i \in H_i$ и $v_i = u_i + w_i$.

Очевидно, получается $\sum\limits_{i=1}^{m} w_i = 0$. Более того

$$\sum_{i=1}^{m} a(v_i,v_i) = \sum_{i=1}^{m} a(u_i,u_i) + 2a(u_i,w_i) + a(w_i,w_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a(u_i,u_i) + 2a(P_i P^{-1} u_i,w_i) + a(w_i,w_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a(u_i,u_i) + 2a(P^{-1} u_i, \sum_{i=1}^{m} w_i) + \sum_{i=1}^{m} a(w_i,w_i).$$

Следовательно

$$\inf_{v_1+...+v_m=u,\ v_i \in H_1} \sum_{i=1}^{m} a(v_i,v_i) = \sum_{i=1}^{m} a(u_i,u_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a(P_i P^{-1} u, P_i P^{-1} u) = \sum_{i=1}^{m} a(P^{-1} u, P_i P^{-1} u) =$$

$$= a(P^{-1}u, PP^{-1}u) = a(P^{-1}u, u).$$

Выбирая $u = P^{1/2}v$, мы можем доказать

$$a(Pu,u) \le \beta \cdot a(u,u) \quad \forall u \in H \;\Leftrightarrow\; a(u,u) \le \beta \cdot a(P^{-1}u,u) \quad \forall u \in H.$$

Теорема доказана.

Лемма 2.1.1. Пусть $a(u,v) = A(u,v)$. Более того, введем

$$A_i : H_i \to H_i, \quad (A_i u_i, v_i) = A(u_i, v_i) \quad \forall u_i, v_i \in H_i.$$

Наконец, пусть Q_i – ортогональный проектор относительно $(\cdot,\cdot)$, то есть

$$Q_i : H \to H_i \quad \text{в } (\cdot,\cdot).$$

Тогда мы имеем $P_i = A_i^{-1} Q_i A$.

Доказательство. Пусть $u \in H$ и положим $u_i = P_i u$, $w_i = A_i^{-1} Q_i u$. Это даёт $Aw_i = Q_i Au$. Для всех $v_i \in H_i$ мы можем заключить, что

$$a(w_i, v_i) = (Aw_i, v_i) = (A_i w_i, v_i) = (Q_i Au, v_i) = (Au, v_i) = a(u, v_i).$$

Следовательно, мы имеем $w_i = u_i$.

Заметим, что $a(u,v) = (u,v)_{H^1}$ и $(u,v) = (u,v)_{L_2}$ для нашей модельной задачи.

Суммируем ранее полученные результаты. Предыдущая лемма определяет отношение между проектором P_i, соответствующим заданной билинейной форме $(\cdot,\cdot)$, и L_2 – проектором Q_i. То есть, мы начали с

а) декомпозиции $H = H_1 + H_2 + ... + H_m$;

б) билинейной формы $a(u,v)=(Au,v)$;

с) энергетических проекторов $P_i : H \to H_i$.

Для $P=\sum_{i=1}^{m} P_i$ мы показали неравенства

$$\alpha\, a(u,u) \le a(Pu,u) \le \beta\; a(u,u) \quad \forall u \in H.$$

Тогда мы доказали, что

$$P_i = A_i^{-1} Q_i A,$$

где $Q_i : H \to H_i$ – проекторы в $(\cdot,\cdot)$. Теперь мы имеем

$$\alpha(Au,u) \le (A(\sum_{i=1}^{m} A_i^{-1} Q_i A)u,u) \le \beta(Au,u) \quad \forall u \in H$$

и это эквивалентно

$$\alpha(Au,u) \le (AB^{-1}A\,u,u) \le \beta(Au,u) \quad \forall u \in H,$$

где $B^{-1}=\sum_{i=1}^{m} Q_i A_i^{-1} Q_i$. Положим $Au = v$, легко доказать, что

$$\alpha(A^{-1}v,v) \le (B^{-1}v,v) \le \beta(A^{-1}v,v) \quad \forall v \in H$$

или

$$\alpha(Bv,v) \le (Av,v) \le \beta(Bv,v) \quad \forall v \in H.$$

Таким образом, мы сконструировали переобуславливатель B, эквивалентный A. Теперь мы можем использовать B как переобуславливатель в итерациях Ричардсона

$$u^{k+1} = u^k - \tau_k B^{-1}(Au^k - f)$$

или в методе сопряженных градиентов для решения нашей исходной задачи $Au = f$.

<u>Пример 2.1.1.</u> (Простой одномерный пример) Мы рассмотрим уравнение $-u'' = f$ в $\Omega = (0,1)$ с однородным граничным условием Дирихле $u(0) = u(1) = 0$. Тогда мы имеем $Au = f$ с

$$A = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & . & . & . & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Заметим, что A – матрица размером $(n-1)\times(n-1)$ и $H = R^{n-1}$. Как показано на рисунке 2.1.1, зададим $H = H_1 + H_2$, $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$ и

$$u = \left[v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \;\; v_4 \;\; v_5\right]^T,$$

где $H_1 = \left\{(v_1, v_2, v_3 0, 0)^T\right\}$ и $H_2 = \left\{(0, 0, v_3, v_4, v_5)^T\right\}$. Здесь вектора v_1, v_3 и v_5 соответствуют внутренним узлам внутри интервалов, в то время как значения v_2 и v_4 соответствуют узлам между интервалами. Мы можем взять $\beta = 2$, согласно свойствам ортопроекторов. Для $u \in H$ мы хотим найти некоторое значение α такое, что

$$\alpha \sum_{i=1}^{2} a(u_i, u_i) \le a(u, u), \quad u = u_1 + u_2,$$

где $u_i \in H_i$. Из рисунка 2.1.1 можно увидеть

$$(Au_1, u_1) \le c(Au, u),$$

где константа c не зависит от h. Пологая $u_2 = u - u_1$, мы имеем, что α не зависит от h. В этом случае мы имеем $Q_1 = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$.

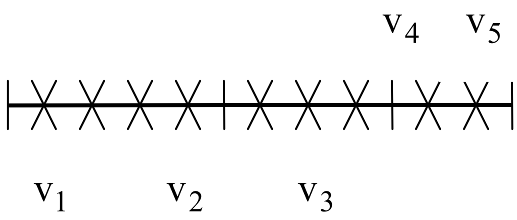


Рис. 2.1.1

Более того

$$Q_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ o \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$$

и

$$A_1 = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & . & . & . \\ & & -1 & 2 & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \Omega_1 \quad A_2 = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & \\ 0 & 2 & -1 & & \\ & . & . & . & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \Omega_2$$

Заметим, что A_1 имеет нулевые блоки, которые соответствуют v_4 и v_5, а A_2 имеет нулевые блоки, которые соответствуют v_1 и v_2. Теперь мы получаем переобуславливатель в форме

$$B^{-1} = Q_1A_1^{+}Q_1 + Q_2A_2^{+}Q_2 = A_1^{+} + A_2^{+},$$

где A_i^{+} – псевдообратная к A_i.

После этого простого одномерного примера мы вернемся к общей теории аддитивного метода Шварца.

__**Теорема 2.1.3.**__ Пусть $H = H_1 + H_2 + ... + H_m$ и $a(u,v) = (Au,v)$. Пусть $P_i : H \to H_i$ – ортогональный проектор относительно $a(\cdot,\cdot)$ и пусть A – симметричная и положительно-определенная. Более того, предположим, что выполнены следующие три условия:

а) $\alpha(a(u_1,u_1) + ... + a(u_m,u_m)) \le a(u,u)$ для $u_1 + ... + u_m = u$;

б) $a(u,u) \le \beta \inf\limits_{u_1+...+u_m=u} \sum\limits_{i=1}^{m} a(u_i,u_i)$;

в) есть локальный переобуславливатель $B_i : H \to H_i$, для которого $B_i = B_i^{*}$ и такой, что существуют положительные константы c_1 и c_2 такие, что

$$c_1(B_iu,u) \le (Au,u) \le c_2(B_iu,u) \quad \forall u \in H_i.$$

Тогда мы имеем

$$\alpha c_1(A^{-1}u,u) \le (B^{-1}u,u) \le \beta c_2(A^{-1}u,u) \quad \forall u \in H_i,$$

где $B^{-1} = B_1^{+} + B_2^{+} + ... + B_m^{+}$.

__Доказательство.__ Заметим, что $P_i = Q_iA_i^{-1}Q_iA$. Мы имеем представление псевдообратного оператора

$$(Q_iAQ_i)^{+} = Q_iA_i^{-1}Q_i,$$

так как $(Q_iAQ_i)Q_iA_i^{-1}Q_i = Q_iAQ_iA_i^{-1}Q_i = Q_i$. Из а) и б) мы имеем

$$\alpha(A^{-1}v,v) \le (((Q_1AQ_1)^+ + ... + (Q_mAQ_m)^+)v,v) \le \beta(A^{-1}v,v)$$

и из в)

$$c_1((Q_iAQ_i)^+u,u) \le (B_i^+u,u) \le c_2((Q_iAQ_i)^+u,u) \quad \forall u \in H_i.$$

Комбинируя два предыдущих неравенства, мы получаем результат теоремы.

Замечание 2.1.1. Согласно теореме 2.1.1 условие а) эквивалентно условию $\alpha a(u,u) \le a(Pu,u)$, где $P = P_1 + ... + P_m$ для всех u. Из теоремы 2.1.2 условие б) эквивалентно условию $a(Pu,u) \le \beta a(u,u)$ для всех u.

Замечание 2.1.1. Так как P_i, $i = 1,2,...,m$ – ортопроекторы, то $\beta \le m$.

В дальнейшем на основании теоремы 2.1.2 будем определять переобуславливающий оператор следующим образом. Исходное пространство сеточных функций разложим в векторную сумму подпространств, каждое из которых имеет определенную структуру, что позволит определить легкообратимые эквивалентные нормировки (т.е. операторы B_i) в этих подпространствах. Следующая простая теорема будет использоваться при построении операторов B_i, которые задают эквивалентные нормировки в подпространствах, а умножение B_i^+ на вектор может эффективно реализовано.

Теорема 2.1.3. Пусть R^m и R^n – евклидовы вещественные пространства, а Σ и S – симметричные положительно-определенные матрицы порядка m и n соответственно. Обозначим

$$(\varphi,\psi)_\Sigma = (\Sigma\varphi,\psi),$$
$$(u,v)_S = (Su,v)$$

скалярные произведения, порожденные этими матрицами в R^m и R^n, и пусть T – линейный оператор, действующий из R^m в R^n такой, что

$$\alpha(\varphi,\varphi)_\Sigma \le (T\varphi,T\varphi)_S \le \beta(\varphi,\varphi)_\Sigma$$

для любого $\varphi \in R^m$. Здесь α,β – положительные константы. Положим

$$C = T\,\Sigma^{-1}\,T^*,$$

где T^* – оператор, сопряженный к T относительно евклидовых скалярных произведений в R^m и R^n. Тогда

$$\alpha(C^+u,u) \le (u,u)_S \le \beta(C^+u,u)$$

для любого $u \in E$, $E = \operatorname{Im} T$ – образ оператора T, C^+ – псевдообратный для C.

<u>Доказательство.</u> В силу условий теоремы существует $(T^*T)^{-1}$ – обратный оператор для T^*T. Далее, непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$C^+ = T(T^*T)^{-1}\Sigma(T^*T)^{-1}T^*.$$

Пусть $u = T\varphi \in E$. Тогда

$$(u,u)_S = (T\varphi,T\varphi)_S.$$
$$(C^+u,u) = (C^+T\varphi,T\varphi) =$$
$$= (T(T^*T)^{-1}\Sigma(T^*T)^{-1}T^*T\varphi,T\varphi) = (\varphi,\varphi)_\Sigma,$$

теперь из условий теоремы немедленно следуют необходимые неравенства.

2.3. Декомпозиция области для непересекающихся подобластей

В области Ω, которая является объединением n непересекающихся подобластей

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\Omega}_i, \quad \Omega_i \bigcap \Omega_j \neq 0, \ \ i \neq j,$$

рассмотрим краевую эллиптическую симметричную задачу

$$-\sum_{i,j}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0(x) u = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega.$$

Здесь предполагается, что коэффициенты задачи меняются несущественно в области Ω.

Для простоты изложения, пусть Ω_i – многоугольники. Здесь и вплоть до пункта 2.6 будем считать, что число подобластей n конечно и не зависит от h.

Пусть триангуляция Ω^h является объединением однородных триангуляций Ω_i^h

$$\Omega^h = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i^h,$$

где Ω_i^h – триангуляции подобластей Ω_i, точно аппроксимирующие их границы. На практике область Ω разбивают на подобласти обычно так, чтобы Ω_i имели более простую структуру, а также учитывая особенность коэффициентов задачи (1.1.1).

Положим

$$S^h = \bigcup_{i=1}^{n} \partial\Omega_i^h, \quad \gamma^h = S^h \setminus \Gamma^h.$$

Пусть N – размерность пространства $H(\Omega^h, \Gamma^h)$,

$$N_i = \dim H(\Omega_i^h, \partial\Omega_i^h), \quad i = 1, 2, ..., n,$$
$$N_0 = N - N_1 - ... - N_n.$$

Пусть в пространстве $H(\Omega^h, \Gamma^h)$, введен обычный нодальный базис [95] и каждой функции $u^h \in H(\Omega^h, \Gamma^h)$, соответствует вектор

$$u = \begin{cases} u_0 \\ u_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{cases}$$

где компоненты вектора u_i равны значениям функции во внутренних узлах $z_\ell \in \Omega_i^h$, $i = 1, 2, ..., n$, а компоненты вектора u_0 равны значениям функции u^h в узлах $z_\ell \in \gamma^h$. Тогда матрица A из (1.1.8) имеет следующее блочное представление:

$$A = \begin{bmatrix} A_0\,A_{01} & . & . & . & . & A_{0n} \\ A_{10}\ A_1 & & & & & \\ . & . & & & & \\ . & & . & & & \\ . & & & . & & \\ . & & & & . & \\ A_{n0} & . & . & . & . & A_n \end{bmatrix},$$

где A_i – квадратные матрицы порядка N_i, $i = 0,1,...,n$.

Чтобы определить переобуславливающий оператор B, будем следовать общей схеме аддитивного метода Шварца, и разложим пространство $H(\Omega^h, \Gamma^h)$ в сумму подпространств

$$H(\Omega^h, \Gamma^h) = W_0 + W_1.$$

Чтобы сделать это, разделим вершины триангуляции Ω^h на две группы: на те, которые лежат внутри Ω_i^h и на те, которые лежат на границах подобластей Ω_i^h. Подпространство W_0 соответствует первой группе. Положим

$$W_0 = \left\{u^h \in H(\Omega^h, \Gamma^h) \,\middle|\, u^h(x) = 0, \quad x \in S^h\right\},$$

$$W_{0,i} = \left\{u^h \in W_0 \,\middle|\, u^h(x) = 0, \quad x \notin \Omega_i^h, \right\}, \ i = 1,2,...,n.$$

Очевидно, что W_0 является прямой суммой ортогональных подпространств $W_{0,i}$ относительно скалярного произведения в $H^1(\Omega)$:

$$W_0 = W_{0,1} \oplus ... \oplus W_{0,n}.$$

Пусть определены матрицы $B_{0,i}$ порядка N_i, $i=1,2,...,n$ такие, что

$$c_1\left\| u_i^h \right\|^2_{H^1(\Omega_i^h)} \le (B_{0,i}u_i, u_i) \le c_2\left\| u_i^h \right\|^2_{H^1(\Omega_i^h)}$$
$$\forall u_i^h \in H(\Omega_i^h, \partial\Omega_i^h).$$

В качестве $B_{0,i}$ может быть выбран сеточный аналог оператора Лапласа в $H(\Omega_i^h, \partial\Omega_i^h)$, а если этот оператор трудно обратим, то любой оператор спектрально ему эквивалентный. В любом случае будем предполагать, что операция умножения $B_{0,i}^{-1}$ на вектор может быть эффективно реализована. В главе 3 предлагаются эффективные операторы $B_{0,i}$ (оптимальные как по количеству арифметических действий, так и по константам c_1, c_2). Тогда в качестве переобуславливающего оператора для пространства W_0 определим оператор

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & B_{0,1} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & B_{0,n} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что для псевдообратного к B_0 оператора имеет место представление

$$B_0^+ = \begin{bmatrix} 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & B_{0,1}^{-1} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & B_{0,n}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, реализация умножения B_0^+ на вектор равносильна параллельной (независимой) реализации умножения $B_{o,i}^{-1}$, $i = 1, 2, ..., n$ на вектор.

Теперь определим подпространство W_1 и соответствующий переобуславливающий оператор для этого подпространства. В пространстве следов $H(\gamma^h)$ функций из $H(\Omega^h, \Gamma^h)$ на γ^h введем следующую норму

$$\left\| \varphi^h \right\|^2_{H_{00}^{1/2}(\gamma^h)} = \sum_{i=1}^{n} \left\| \varphi^h \right\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega_i^h)}.$$

Здесь функцию $\varphi^h \in H^{1/2}(\gamma^h)$ мы отождествляем с её продолжением нулём на Γ^h. Пусть t – оператор продолжения сеточных функций с границ подобластей $\partial\Omega_i^h$ во внутренность Ω_i^h в классе конечно-элементных функций

$$t : H(\gamma^h) \to H(\Omega^h, \Gamma^h)$$

такой, что существует константа c:

$$\left\| t\varphi^h \right\|_{H^1(\Omega^h)} \le c \left\| \varphi^h \right\|_{H_{00}^{1/2}(\gamma^h)}, \tag{2.3.1}$$

то есть t – оператор продолжения граничных сеточных функций с сохранением нормы. Определим

$$W_1 = \left\{ u^h \in H(\Omega^h, \Gamma^h) \mid u^h = t\varphi^h \quad \forall \varphi^h \in H(\gamma^h) \right\},$$

то есть подпространство W_1 является образом оператора продолжения t. Пусть Σ – симметричная матрица порядка N_0, такая, что существуют положительные константы c_1, c_2:

$$c_1(\Sigma\overline{\varphi}, \overline{\varphi}) \le \left\| \varphi^h \right\|^2_{H_{00}^{1/2}(\gamma^h)} \le c_2(\Sigma\overline{\varphi}, \overline{\varphi}) \quad \forall \varphi^h \in H(\gamma^h). \qquad (2.3.2)$$

В следующих пунктах определяются операторы (матрицы) t, Σ такие, что константы c, c_1, c_2 не зависят от h.

Теперь определим переобуславливающий оператор

$$B^{-1} = B_0^{+} + t\Sigma^{-1}t^{*}. \qquad (2.3.3)$$

Согласно общей теории аддитивного метода Шварца (теоремы 2.1.1-2.1.3) оператор B спектрально эквивалентен оператору A

$$B \approx A$$

с константами, зависящими от c, c_1, c_2.

Преимущество переобуславливающего оператора в форме (2.3.3) с использованием явных операторов продолжения t является то обстоятельство, что вместо точного решения задач в подобластях можно использовать переобуславливающие операторы $B_{0,i}$.

Замечание: переобуславливающий оператор в форме (2.3.3) может быть построен для смешанных краевых условий, а так же для трехмерных краевых задач.

2.4. Явные операторы продолжения сеточных функций

Чтобы определить оператор продолжения t

$$t = H(\gamma^h) \to H(\Omega^h, \Gamma^h),$$

достаточно определить локальные операторы продолжения, то есть операторы продолжения сеточных функций с границы каждой подобласти Ω_i в её внутренность. В дальнейшем индекс i будем опускать.

Так же будем предполагать, что область Ω является односвязной. В противном случае достаточно определить операторы продолжения в окрестности каждой компоненты границы Γ области Ω.

Определение переобуславливателя (2.3.3) требует продолжение оператора t, который соответствует (2.3.1). Этот пункт посвящен построению оператора продолжения t. Простейшим выбором оператора продолжения, который соответствует (2.3.1), является гармоническое продолжение. Однако тогда задача для оператора Лапласа должно быть решена для каждого шага итерационного процесса. Это слишком дорого. Поэтому, мы должны найти другой способ.

2.4.1. Явные операторы продолжения интегрального типа

Пусть (s,n) – подходящая граничная система координат, где s обозначает тангенциальную, а n – нормальную координаты. Пусть φ – заданная функция, определённая на границе Γ области Ω. Для непрерывного случая мы можем определить функцию продолжения $u = t\varphi$

$$u(s,n) = \xi(n)\,\frac{1}{n}\int\limits_{s}^{s+n} \varphi(t)\,dt\,,$$

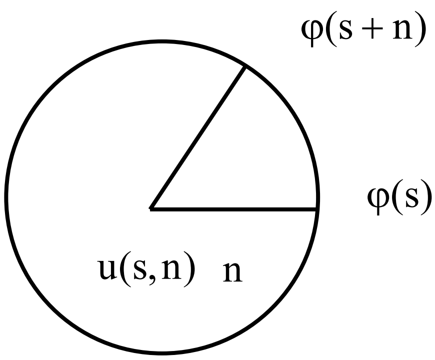


Рис.2.4.1

где $\xi(n) = 1 - n/D$, а D – толщина приграничной полосы. Пусть φ – конечно-элементная функция, которая задается нодальными значениями $\varphi(\ell)$, $\ell = 0,...,i+j$. В целом на Γ индекс ℓ меняется от 0 до $N-1$. Функция u задается значениями в нодальных точках $Z_{i,j}$, где первый индекс соответствует тангенциальной, а второй нормальной компоненте, то есть $Z_{i,0}$– узлы на границе. Кроме того, мы введем D_{ij} как ячейку вспомогательной сетки, которая топологически эквивалентна прямоугольной сетке. Тогда продолжение u может быть задано тремя следующими шагами:

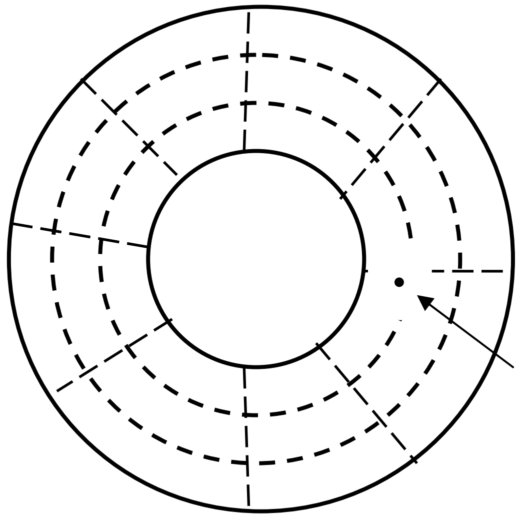


Рис.2.4.2

1. $V(Z_{i,j}) = \sum_{l=0}^{j} \varphi(i+l)$;

2. $U(Z_{i,j}) = \dfrac{1 - j/n}{j+1} V(Z_{i,j})$;

3. $u^h(z_\ell) = \begin{cases} U(Z_{i,j}), & z_\ell \in D_{ij}, \\ 0, & z_\ell \notin D_{ij}. \end{cases}$

В матрично-векторном обозначении мы имеем $u = t\varphi = P_3 P_2 P_1 \varphi$, где матрица P_3 задается

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 \\ & & I & & \end{bmatrix}.$$

Заметим, что нижняя единичная матрица соответствует D. Согласно второму шагу продолжения, матрица P_2 – диагональная матрица, то есть $P_2 = \operatorname{diag}\left\{ \ldots, \frac{1 - j/n}{j+1}, \ldots \right\}$. Тогда мы имеем

$$\left\| u^h \right\|_{H_h^1(\Omega^h)} \le c \left\| V \right\|_{H_h^1(D^h)}.$$

Матрица P_1 соответствует первому шагу и имеет вид

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}.$$

Единичный блок, соответствует $V(Z_{i,0}) = \phi(i),\ i = 0, \ldots, N-1$, тогда как значения на j-том слое в нормальном направлении задаются как

$P_1\phi = V(Z_{i,j+1}) = V(Z_{i,j}) + \phi(i+j+1), \quad 0 \le i \le N-1, \quad 0 \le j \le M$. Общая стоимость вычислений числа умножений для t равно $O(h^{-2})$.

2.4.2. Явные операторы продолжения на иерархических сетках

Пусть Ω – ограниченная многоугольная область и Γ – ее граница. Рассмотрим каркасную сетку на Ω:

$$\Omega_0^h = \bigcup_{i=1}^{M_0} \tau_i^{(0)}, \quad \operatorname{diam}(\tau_i^{(0)}) = O(\ell),$$

которая будет последовательно измельчена некоторое число раз, и получаем последовательность вложенных триангуляций

$$\Omega_0^h,\ \Omega_1^h,\ \ldots,\ \Omega_J^h$$

таких, что

$$\Omega_k^h = \bigcup_{i=1}^{M_k} \tau_i^{(k)}, \quad k = 0,1,\ldots,J,$$

где треугольники $\tau_i^{(k+1)}$ генерируются разбиением треугольников $\tau_i^{(k)}$ на четыре равных подтреугольников соединением средних точек на ребрах. Введем пространства W_k и V_k конечно-элементных функций. Пространства W_k состоят из вещественных функций, которые непрерывны на Ω и линейны на треугольниках из Ω_k^h. Пространства V_k – пространства следов на Γ функций из W_k:

$$V_k = \left\{ \varphi^h \,\middle|\, \varphi^h = u^h \Big|_{\Gamma}, \ \text{ где } \ u^h \in W_k \right\}.$$

Рассмотрим пространства W_k и V_k, как подпространства Соболевских пространств $H^1(\Omega)$ и $H^{1/2}(\Gamma)$ соответственно, с соответствующими нормами. Основная наша цель – построение некоторого сохраняющего норму явного оператора продолжения t из V_J в W_J:

$$t : V_J \to W_J.$$

Заметим, что многоуровневые (иерархические) явные операторы продолжения были предложены в [150]. Здесь многоуровневая декомпозиция на границе подобласти основана на результатах из [198]. Но этот метод асимптотически не оптимален. Оптимальный метод (относительно арифметической стоимости и норм операторов продолжения) для многоуровневых явных функций продолжения был предложен в [171] и [151]. В этом случае многоуровневая декомпозиция на границе подобласти основана на BPX-декомпозиции.

Обозначим через $\varphi_i^{(k)}$, $i = 1, 2, ..., N_k$ модальный базис (шапочки) V_k и через $\Phi_i^{(k)}$ одномерное подпространство, соответствующее базисной функции $\varphi_i^{(k)}$ с носителем $\sigma_i^{(k)}$.

Определим

$$Q_i^{(k)} : L_2(\Gamma) \to \Phi_i^{(k)},$$

здесь L_2 – проектор из $L_2(\Gamma)$ на $\Phi_i^{(k)}$:

$$Q_i^{(k)}\,\psi^h = d_i^{(k)}\,(\psi^h)\,\varphi_i^{(k)},$$

где

$$d_i^{(k)} = \frac{1}{(\varphi_i^{(k)},1)_{L_2(\Gamma)}}(\psi^h,\varphi_i^{(k)})_{L_2(\Gamma)}, \tag{2.4.1}$$

или другим возможным способом

$$d_i^{(k)} = \frac{1}{\operatorname{meas}(\sigma_i^{(k)})}(\psi^h,1)_{L_2(\sigma_i^{(k)})}. \tag{2.4.2}$$

Обозначим через

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N_k} Q_i^{(k)}, \quad k = 0,1,\ldots,J-1.$$

Для $k = J$ Q_k определяется как L_2 – ортопроектор из $L_2(\Omega)$ на V_J.

<u>**Лемма 2.4.1.**</u> Существуют положительные константы c_1, c_2, не зависящие от h, и такие, что для любой $\varphi^h \in V_J$

$$\begin{aligned} c_1\left\|\varphi^h\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} &\le \\ &\le \left\|Q_0\varphi^h\right\|^2_{L_2(\Gamma)} + \sum_{k=1}^{J} 2^k \left\|(Q_k - Q_{(k-1)})\varphi^h\right\|^2_{L_2(\Gamma)} \le \\ &\le c_2\left\|\varphi^h\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

<u>Доказательство:</u> Сформулированный результат является простым следствием хорошо известных свойств операторов Q_k и техники из [132, 139, 95, 179, 199]. Однако для полноты дадим доказательство.

Легко увидеть, что Q_k – линейный проектор на V_k и существует константа c_3, не зависящая от h, и такая, что

$$\| Q_k\varphi \|_{L_2(\sigma_i^{(k)})} \le c_3 \| \varphi \|_{L_2(\hat{\sigma}_i^{(k)})} \quad \forall\varphi \in L_2(\Gamma) \tag{2.4.3}$$

справедливо, где $\hat{\sigma}_i^{(k)}$ – объединение всех $\sigma_j^{(k)}$, которые имеют, по крайней мере, одну общую точку с $\sigma_i^{(k)}$.

А так же справедливо следующее аппроксимационное свойство Q_k:

$$\begin{aligned}
\| \varphi - Q_k\varphi \|^2_{L_2(\Gamma)} &\le \sum_{k=1}^{N_k} \| \varphi - Q_k\varphi \|^2_{L_2(\sigma_i^{(k)})} = \\
&= \sum_{k=1}^{N_k} \| \varphi - \kappa_i + \kappa_i - Q_k\varphi \|^2_{L_2(\sigma_i^{(k)})} = \\
&= \sum_{k=1}^{N_k} \| \varphi - \kappa_i + Q_k(\kappa_i - \varphi) \|^2_{L_2(\sigma_i^{(k)})} \le \\
&\le 2(1+(c_3)^2) \sum_{k=1}^{N_k} \| \varphi - \kappa_i \|^2_{L_2(\hat{\sigma}_i^{(k)})}.
\end{aligned}$$

Здесь κ_i – произвольная постоянная функция. Тогда оценка

$$\| \varphi - Q_k\varphi \|^2_{L_2(\Gamma)} \le c_4 2^{-k} | \varphi |_{H^1(\Gamma)} \quad \forall\varphi \in H^1(\Gamma)$$

верна с некоторой константой c_4, не зависящей от h. Согласно [179], существует также некоторая константа c_5, не зависящая от h, такая, что

$$c_5 \| \varphi^h \|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \le \inf_{\xi_k^h \in V_k,\ \sum\limits_{k=0}^{J} \xi_k^h = \varphi^h} \quad \sum_{k=0}^{J} 2^k \| \xi_k^h \|^2_{L_2(\Gamma)} \le$$

$$\le \left\| Q_0\varphi^h \right\|^2_{L_2(\Gamma)} + \sum_{k=1}^{J} 2^k \left\| (Q_k - Q_{k-1})\varphi^h \right\|^2_{L_2(\Gamma)} \le$$
$$\le \left\| Q_0\varphi^h \right\|^2_{L_2(\Gamma)} + 4\sum_{k=1}^{J} 2^k \left\| \varphi^h - Q_k\varphi^h \right\|^2_{L_2(\Gamma)}.$$

Оценим $\left\| \varphi^h - Q_k\varphi^h \right\|_{L_2(\Gamma)}$. Для любой функции $\forall\psi \in H^1(\Gamma)$ имеем

$$\left\| \varphi^h - Q_k\varphi^h \right\|_{L_2(\Gamma)} = \left\| \varphi^h - \psi + \psi - Q_k\psi + Q_k\psi - Q_k\varphi^h \right\|_{L_2(\Gamma)} \le$$
$$\le \left\| \varphi^h - \psi \right\|_{L_2(\Gamma)} + \left\| \psi - Q_k\psi \right\|_{L_2(\Gamma)} + \left\| Q_k(\psi - \varphi^h) \right\|_{L_2(\Gamma)} \le$$
$$\le (1 + c_3^{'}) \left\| \varphi^h - \psi \right\|_{L_2(\Gamma)} + c_4 2^{-k} \left| \psi \right|_{H^1(\Gamma)},$$

где константа $c_3^{'}$ возникает из (2.4.3) суммированием $\sigma_i^{(k)}$. Беря инфинимум

по всем $\psi \in H^1(\Gamma)$, мы получаем $K-$ функционал

$$\left\| \varphi^h - Q_k\varphi^h \right\|_{L_2(\Gamma)} \le$$
$$\le c_6 \inf_{\psi\in H^1(\Gamma)} \left\{ \left\| \varphi^h - \psi \right\| + 2^{-k} \left| \psi \right|_{H^1(\Gamma)} \right\} =$$
$$= c_6 K_1(2^{-k}, \varphi^h),$$

где константа c_6 не зависит от h. Используя эквивалентную норму [139, 179]

$$\left\| \varphi^h \right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \approx \left\| \varphi^h \right\|^2_{L_2(\Gamma)} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k K_1^2(2^{-k}, \varphi^h),$$

получаем утверждение леммы 2.1.1.

Обозначим через $x_i^{(k)}$, $i = 1,2,...,L_k$ узлы триангуляции Q_k^h (мы предполагаем, что узлы $x_i^{(k)}$ пронумерованы сначала на границе Γ, а затем внутри Ω) и определим оператор продолжения следующим способом. Для любой функции $\varphi^h \in V_J$ положим

$$\psi_0^h = Q_0 \varphi^h, \tag{2.4.4}$$

$$\psi_k^h = (Q_k - Q_{k-1}) \varphi^h, \quad k = 1, 2, ..., J. \tag{2.4.5}$$

Тогда

$$\varphi^h = \psi_0^h + \psi_1^h + ... + \psi_J^h.$$

Определим продолжение $u_k^h \in W_k$ функции ψ_k^h согласно [150, 171]:

$$u_0^h(x_i^{(0)}) = \begin{cases} \psi_0^h(x_i^{(0)}), & x_i^{(0)} \in \Gamma, \\ \overline{\psi}, & x_i^{(0)} \notin \Gamma, \end{cases} \tag{2.4.6}$$

$$u_i^h(x_i^{(k)}) = \begin{cases} \psi_k^h(x_i^{(k)}), & x_i^{(k)} \in \Gamma, \\ 0, & x_i^{(k)} \notin \Gamma. \end{cases} \tag{2.4.7}$$

Для $\overline{\psi}$ мы выберем либо среднее значение функции ψ_0^h на границе, либо как решение подходящего PDE на самой грубой сетке Ω_0^h с граничными условиями Дирихле ψ_0^h.

Теперь мы определим продолжение

$$t\varphi^h := u^h \equiv u_0^h + u_1^h + ... + u_J^h. \tag{2.4.8}$$

Полагая $t\varphi^h = v_J$, выше приведенное определение оператора t может быть переписано в рекурсивном виде

$$v_0 := u_0^h, \tag{2.4.9}$$

$$v_k := v_{k-1} + u_k^h, \quad k = 1,\ldots,J. \tag{2.4.10}$$

Заметим, что $v_k \in W_k$ – продолжение $Q_k \varphi^h$ для $k = 0,\ldots,J$.

<u>Замечание 2.4.1.</u> Мы можем использовать L_2 – ортопроектор из $L_2(\Omega)$ в V_k вместо Q_k для $k = 0,\ldots,J-1$. Но в этом случае затраты на декомпозицию (2.4.4), (2.4.5) велики (особенно для 3-х мерного случая).

<u>Лемма 2.4.2.</u> Существует положительная константа c_6, не зависящая от h, и такая, что

$$\left\| u_k^h \right\|_{H^1(\Omega)} \le c_6 2^k \left\| \psi_k^h \right\|_{L_2(\Gamma)}, \quad k = 0,1,\ldots,J.$$

<u>Доказательство.</u> Доказательство этой леммы очевидно и описано в [150].

<u>Теорема 2.4.1.</u> Существует положительная константа c_8, не зависящая от h, и такая, что

$$\left\| t\varphi^h \right\|_{H^1(\Omega)} \le c_8 \left\| \varphi^h \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall \varphi^h \in V_J.$$

Оператор t определен в (2.4.8).

<u>Доказательство.</u> Имеем (см. [179]):

$$\left\| t\varphi^h \right\|_{H^1(\Omega)}^2 = \left\| u^h \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \le$$
$$\le c_9 \inf_{w_k^h \in W_k,\ \sum_{k=0}^{J} w_k^h = u^k} \sum_{k=0}^{J} 4^k \left\| w_k^h \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \le c_9 \sum_{k=0}^{J} 4^k \left\| u_k^h \right\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Здесь c_9 не зависит от h, и u_k^h для $k = 0,\ldots,J$ определены в (2.4.6), (2.4.7).

Из лемм 2.4.1, 2.4.2 и из специальной структуры функции u_k^h следует, что

$$\sum_{k=0}^{J} 4^k \left\| u_k^h \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \le c_{10} \sum_{k=0}^{J} 2^k \left\| \psi_k^h \right\|_{L_2(\Gamma)}^2 \le c_{11} \left\| \varphi^h \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2$$

верно, где c_{10}, c_{11} не зависят от h. Заметим, что $c_8 = \sqrt{c_9 \cdot c_{11}}$.

Замечание 2.4.2. Построение оператора продолжения для 3-х мерного случая может быть выполнено подобным же образом. Теорема 2.4.1 в этом случае так же верна.

Если исходную область разбить на много подобластей в методах декомпозиции [87], то диаметр подобластей зависит от некоторого малого параметра ε, и нам нужен такой оператор продолжения, что бы константа c_7 из теоремы 2.4.1 не зависела от ε. Чтобы сделать это, предположим, что, сделав замену переменных

$$x = \varepsilon \cdot s, \quad s \in \Omega, \tag{2.4.11}$$

область Ω трансформируется в область Ω_ε с границей Γ_ε и такой, что свойства Ω_ε не зависят от ε.

Лемма 2.4.3. Существует положительная константа c_{12}, не зависящая от h и ε, и такая, что для любой $\varphi^h \in V_J$

$$\left\| \varphi_0^h \right\|_{H^{1/2,\varepsilon}(\Gamma)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left\| \varphi_1^h \right\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \left| \varphi_1^h \right|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \le c_{12} \left\| \varphi^h \right\|_{H^{1/2,\varepsilon}(\Gamma)}^2 . \tag{2.4.12}$$

Здесь

$$\varphi_0^h = Q_0 \varphi^h, \quad \varphi_1^h = \varphi^h - \varphi_0^h.$$

Верна следующая лемма.

<u>Лемма 2.4.4.</u> Существует положительная константа c_{13}, не зависящая от h и ε, и такая, что

$$\left\|\varphi_0^h\right\|^2_{H^{1/2,\varepsilon}(\Gamma)}+\frac{1}{\varepsilon}\Big(\left\|Q_0\varphi_1^h\right\|^2_{L_2(\Gamma)}+$$
$$+\sum_{k=1}^{J}2^k\left\|(Q_k-Q_{k-1})\varphi_1^h\right\|^2_{L_2(\Gamma)}\Big)\le c_{13}\left\|\varphi^h\right\|^2_{H^{1/2,\varepsilon}(\Gamma)}.$$

Здесь φ_0^h, φ_1^h из (2.4.12).

<u>Доказательство</u>. Используя (2.4.11) и лемму 2.4.1, имеем

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\|\varphi_1^h\right\|^2_{L_2(\Gamma)}+\left|\varphi_1^h\right|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\le\left\|\varphi_1^h\right\|^2_{L_2(\Gamma')}+\left|\varphi_1^h\right|^2_{H^{1/2}(\Gamma')}\le$$
$$\le\frac{1}{c_1}\Big(\left\|Q'_0\varphi_1^h\right\|^2_{L_2(\Gamma')}+\sum_{k=1}^{J}2^k\left\|(Q'_k-Q'_{k-1})\varphi_1^h\right\|^2_{L_2(\Gamma')}\Big)=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon c_1}\Big(\left\|Q_0\varphi_1^h\right\|^2_{L_2(\Gamma)}+\sum_{k=1}^{J}2^k\left\|(Q_k-Q_{k-1})\varphi_1^h\right\|^2_{L_2(\Gamma)}\Big).$$

Здесь Q'_k – проектор, соответствующий Q_k после замены переменных.

<u>Теорема 2.4.2.</u> Существует положительная константа c_{14}, не зависящая от h и ε, и такая, что

$$\left\|t\varphi^h\right\|_{H^1(\Omega)}\le c_{14}\left\|\varphi^h\right\|_{H^{1/2,\varepsilon}(\Gamma)}\quad\forall\varphi^h\in V_J.$$

Здесь оператор t задан в (2.4.8).

<u>Доказательство.</u> Для φ_0^h, φ_1^h из (2.4.12) имеем

$$\left\|Q_0\varphi^h\right\|^2_{H^{1/2,\varepsilon}(\Gamma)}+\sum_{k=1}^{J}2^k\left\|(Q_k-Q_{k-1})\varphi^h\right\|^2_{L_2(\Gamma)}\le$$

$$\le \left\| Q_0 \varphi^h \right\|^2_{H^{1/2,\varepsilon}(\Gamma)} + \sum_{k=1}^{J} 2^k \left\| (Q_k - Q_{k-1}) \varphi_1^h \right\|^2_{L_2(\Gamma)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{J} 2^k \left\| (Q_k - Q_{k-1}) \varphi_0^h \right\|^2_{L_2(\Gamma)}.$$

Для функции φ_0^h рассмотрим следующее разложение:

$$\varphi_0^h = \varphi_{0,0}^h + \varphi_{0,1}^h,$$

$$\varphi_{0,0}^h = \text{const} = \frac{1}{\text{meas}(\Gamma)} \int_\Gamma \varphi_0^h(x)\, dx,$$

$$\varphi_{0,1}^h = \varphi_0^h - \varphi_{0,0}^h.$$

Легко увидеть, что $(Q_k - Q_{k-1}) \varphi_{0,0}^h = 0$, $k = 1,2,...,J$.

Теперь мы можем использовать очевидный трюк из [150] с неравенством Пуанкаре в пространстве $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$:

$$\sum_{k=1}^{J} 2^k \left\| (Q_k - Q_{k-1}) \varphi_0^h \right\|^2_{L_2(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{J} 2^k \left\| (Q_k - Q_{k-1}) \varphi_{0,1}^h \right\|^2_{L_2(\Gamma)} =$$

$$= \varepsilon \sum_{k=1}^{J} 2^k \left\| (Q'_k - Q'_{k-1}) \varphi_{0,1}^h \right\|^2_{L_2(\Gamma_\varepsilon)} \le c_2 \varepsilon \left\| \varphi_{0,1}^h \right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} \le$$

$$\le c_{15} \varepsilon \left| \varphi_{0,1}^h \right|^2_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} = c_{15} \varepsilon \left| \varphi_{0,1}^h \right|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} = c_{15} \varepsilon \left| \varphi_0^h \right|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Здесь c_{15} из неравенства Пуанкаре. Легко увидеть, что существует положительная константа c_{16}, не зависящая от h и ε, и такая, что

$$\left\| u_0^h \right\|_{H^1(\Omega)} \le c_{18} \left\| \psi_0^h \right\|_{H^{1/2,\varepsilon}(\Gamma)},$$

где $\psi_0^h = \varphi_0^h = Q_0 \varphi^h$ и $u_0^h \in W_0$ из (2.4.6), (2.4.7). Остаток оценки для теоремы 2.4.1 и теоремы 2.4.2 является одинаковым.

Рассмотрим реализацию оператора продолжения.

Для простоты изложения рассмотрим следующую слабую постановку задачи.

Найдем $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \lambda(x)(\nabla u(x), \nabla v(x))dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \qquad (2.4.13)$$

Определим обычный конечно-элементный нодальный базис

$$\Phi = [\Phi_C, \Phi_I] = \left[\vartheta_1^J, ..., \vartheta_{N_C^{(J)}}^J, \vartheta_{N_C^{(J)}+1}^J, \dots, \vartheta_{N_C^{(J)}+N_I^{(J)}}^J \right], \qquad (2.4.14)$$

где, первые $N_C^{(J)} = N_J$ базисных функций на самом мелком уровне J соответствуют узлам на Γ, остаток базисных функции соответствуют внутренности. Соответствующие узлы будет обозначаться индексом "C" и "I". Аналогично, $N_C^{(k)}$ и $N_I^{(k)}$ соответствуют числу базисных функций на границе и внутри области на уровне k. Тогда конечно-элементная формулировка задачи равносильна следующей симметричной положительно-определенной системе уравнений на каждом уровне k

$$K_k \bar{u}_k := \begin{pmatrix} K_{C,k} & K_{CI,k} \\ K_{IC,k} & K_{I,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{C,k} \\ \bar{u}_{I,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}_{C,k} \\ \bar{f}_{I,k} \end{pmatrix} =: \bar{f}_k, \qquad (2.4.15)$$

где $K_{I,k}$ – симметричная положительно-определенная матрица.

Далее, матрицы $I_{C,k}$, $I_{I,k}$ обозначают соответствующие единичные матрицы уровня k и матрицы $P_{C,k}^{k+1}$, $P_{I,k}^{k+1}$, $P_{IC,k}^{k+1}$ представляют обычные конечно-элементные интерполяционные матрицы (рисунок 2.4.1) на соответствующих подмножествах узлов.

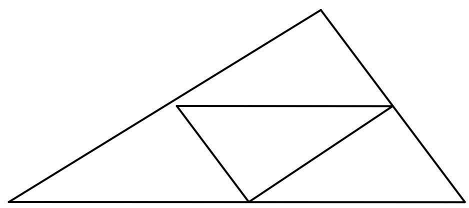


Рис. 2.4.1

Многоуровневое продолжение функции $\psi^h = \sum_{i=1}^{N_C^{(J)}} \psi_i \varphi_i^{(J)} \in V_J$, представляемой вектором $\overline{\psi} \in R^{N_C^{(J)}}$, соответствует функции $u^h = \sum_{i=1}^{N_C^{(J)}+N_I^{(J)}} u_i v_i^{(J)} \in W_J$, представляемой вектором $\overline{u} \in R^{N_I^{(J)}}$, состоит из 3 шагов:

1. Введем прямоугольную $N_C^{(k)} \times N_C^{(J)}$ проекционную матрицу Q_k и определим компоненты проекции $Q_k \psi^h$ в конечно-элементном нодальном базисе уровня k

$$\overline{\beta}_k := Q_k \overline{\psi}, \quad k = 0,\ldots,J. \tag{2.4.16}$$

2. Согласно (2.4.4), (2.4.5) разложим вектор $\overline{\beta}_k$ в коэффициентах многоуровневого нодального базиса $\psi^h = \sum_{k=0}^{J} \sum_{i=1}^{N_C^{(k)}} \alpha_i^{(k)} \varphi_i^{(k)}$ и определим

вектор $\overline{\alpha}_k$:

$$\overline{\alpha}_0 := \overline{\beta}_0, \tag{2.4.17}$$

$$\overline{\alpha}_k := (-P^{\,k}_{C,k-1}\, I_{C,k}) \begin{pmatrix} \overline{\beta}_{k-1} \\ \overline{\beta}_k \end{pmatrix}, \quad k = 1,\dots,J. \tag{2.4.18}$$

3. Коэффициенты $\overline{v}_k$ продолжения $v_k = \sum\limits_{i=1}^{N_C^{(k)}+N_I^{(k)}} v_i^{(k)} \vartheta_i^{(k)}$ определяются

$$\overline{v}_0 = \begin{pmatrix} \overline{v}_{C,0} \\ \overline{v}_{I,0} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} I_{C,0} \\ B_{IC,0} \end{pmatrix} \overline{\alpha}_0, \tag{2.4.19}$$

$$\overline{v}_k = \begin{pmatrix} \overline{v}_{C,k} \\ \overline{v}_{I,k} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} I_{C,k} & P^{\,k}_{C,k-1} & 0 \\ 0 & P^{\,k}_{IC,k-1} & P^{\,k}_{I,k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\alpha}_k \\ \overline{v}_{C,k-1} \\ \overline{v}_{I,k-1} \end{pmatrix}. \tag{2.4.20}$$

Обозначим через E матрицу, соответствующую оператору продолжения t (2.4.8), и присвоим $E\overline{\varphi} := \overline{v}_J$.

Матрица $B_{IC,0}$ может быть выбрана как $\frac{1}{N_C^{(0)}} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ . & & . \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{N_I^{(0)} \times N_C^{(0)}}$ продолжение среднего значения граничных данных во внутренность области. Другое приближение – дискретное гармоничное продолжение на грубой сетке, соответствующее оператору задачи, т.е.

$$B_{IC,0} = -K^{-1}_{I,0}\, K_{IC,0}.$$

2.5. Аддитивный метод Шварца на внутренних границах

Для использования переобуславливающего оператора в форме (2.3.3) необходимо на объединении внутренних границ подобластей Ω_i, то есть на γ, определить легко обратимую матрицу Σ, удовлетворяющую неравенствам (2.3.2). На частях γ, которые являются простыми кривыми, то есть без точек ветвления (точек, где соединяются несколько ветвей γ, см. рисунок 2.5.1), соответствующая нормировка может быть определена на основании результатов из главы 1.

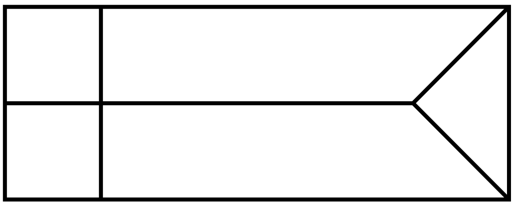


Рис. 2.5.1. Точки ветвления

Пусть z_0 – фиксированная точка ветвления и рассмотрим её окрестность. Пусть λ – объединение ветвей, выходящих из z_0. Пусть L_i, $i = 1,...,m$ – эти ветви и пусть $L_{m+1} = L_1$ по определению. След нормы на λ определяется как

$$\left\| \varphi^h \right\|^2_{H^{1/2}_{00}(\lambda)} = \sum_{i=1}^{m} \left\| \varphi^h \right\|^2_{H^{1/2}_{00}(L_i \cup L_{i+1})}.$$

Здесь мы предполагаем, что каждая ветвь L_i имеет то же самое количество вершин k: $k = O(1/h)$. Пусть $x_{i,j}$ – точка на ветви L_i, где индекс j

соответствует расстоянию от $z_0 = x_{i,0}$, $i = 1,2,...,m$. Рассмотрим декомпозицию пространства

$$H(\lambda^h) = H_0 + H_1 + ... + H_m,$$

где $H_i = \left\{\varphi^h \in H(\lambda^h) \,|\, \varphi^h(x) = 0,\ x \notin L_i\right\}$, $i = 1,2,...,m$ и $H_0 = \left\{\varphi^h \in H(\lambda^h) \,|\, \varphi^h(x_{1,j}) = ... = \varphi^h(x_{m,j}),\ j = 1,2,...,k\right\}$.

<u>Лемма 2.5.1.</u> Существует константа c, не зависящая от h, и такая, что для каждой $\varphi^h \in H(\lambda^h)$ существуют $\varphi_i^h \in H_i$ с $\sum_{i=0}^{m} \varphi_i^h = \varphi^h$, удовлетворяющие

$$\left\|\varphi_0^h\right\|^2_{H_{00}^{1/2}(\lambda)} + \left\|\varphi_1^h\right\|^2_{H_{00}^{1/2}(\lambda)} + ... + \left\|\varphi_m^h\right\|^2_{H_{00}^{1/2}(\lambda)} \le c\left\|\varphi^h\right\|^2_{H_{00}^{1/2}(\lambda)}.$$

<u>Доказательство.</u> Пусть $\varphi \in H(\lambda^h)$. Во-первых, положим $\varphi_0^h(x_{i,j}) = \varphi^h(x_{1,j})$ для $j = 1,...,k$ и $i = 1,...,m$, то есть мы переносим значения на первой ветви на остальные ветви. Согласно этому определению, мы имеем $\varphi_0^h \in H_0$. Пусть $\psi^h = \varphi^h|_{L_1}$. Тогда

$$\left\|\varphi_0^h\right\|^2_{H_{00}^{1/2}(\lambda)} = m\left\|\varphi^h\right\|^2_{H_{00}^{1/2}(L_1 \cup L_2)} \approx \left\|\psi^h\right\|^2_{\breve{H}^{1/2}(L_1)} \approx (\Sigma_{ND}\overline{\psi}, \overline{\psi}). \quad (2.5.1)$$

Здесь

$$\left\|\psi^h\right\|^2_{\breve{H}^{1/2}(L_1)} = \left\|\psi^h\right\|^2_{H^{1/2}(L_1)} + \int_{L_1} \frac{(\psi^h(x))^2}{|x-a|} dx,$$

где a – конечная точка ветви L_1. Чтобы определить матрицу Σ_{ND} введем матрицы порядка $k+1$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1/2 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим спектральное разложение матрицы A

$$A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda QD,$$

где матрица Q состоит из собственных векторов матрицы A, а Λ из собственных значений

$$Q = \left[q_0\ q_1\ ...\ q_k\right], \quad \Lambda = \mathrm{diag}\left\{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k\right\}.$$

Положим

$$\Sigma_{ND} = DQ\Lambda^{1/2}Q^T D.$$

Тогда

$$\Sigma_{ND}^{-1} = Q\Lambda^{1/2}Q^T.$$

Для умножения на матрицы Q, Q^T может быть использовано быстрое преобразование Фурье (FFT) с арифметической сложностью $O(k \log k)$. Для доказательства последней эквивалентности в (2.5.1) используется та же техника, что и в Главе 1.

Существует константа c_1, не зависящая от h, и такая, что

$$\left\| \phi_0^h \right\|^2_{H_{00}^{1/2}(\lambda)} \le c_1 \left\| \phi^h \right\|^2_{H_{00}^{1/2}(\lambda)}.$$

Пусть $\xi^h = \varphi^h - \varphi_0^h$. Далее, мы определим функции $\varphi_i^h \in H_i$, $i \ge 1$ через $\varphi_i^h(x_{i,j}) = \xi^h(x_{i,j})$. Тогда мы имеем

$$\left\| \xi^h \right\|^2_{H_{00}^{1/2}(\lambda)} \le c_2 \left\| \varphi^h \right\|^2_{H_{00}^{1/2}(\lambda)}.$$

Это предполагает оценки

$$\left\| \varphi_i^h \right\|^2_{H_{00}^{1/2}(\lambda)} \approx \left\| \varphi_i^h \right\|^2_{H_{00}^{1/2}(L_1)} \approx (\Sigma_{DD}\varphi_i, \varphi_i),$$

где

$$\Sigma_{DD,i}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1/2}.$$

Отсюда получаем

$$\left\| \varphi_i^h \right\|^2_{H_{00}^{1/2}(\lambda)} \le c_3 \left\| \xi^h \right\|^2_{H_{00}^{1/2}(\lambda)}.$$

Продолжая эти процессы, мы можем доказать лемму.

Пусть функции $\psi^h \in H(L_1^h)$ соответствует вектор с компонентами $\left[\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_k\right]^T = \left[\psi_0, \overline{\eta}^T\right]^T$, где $\overline{\eta} = \left[\psi_1, \ldots, \psi_k\right]^T$. Определим оператор продолжения t

$$t : H(L_1^h) \to H(\lambda^h)$$

такой, что $t\psi^h = \varphi_0^h$, где функции $\varphi_0^h \in H_0$ соответствует вектор с компонентами $[\psi_0 \underbrace{\eta^T \ldots \eta^T}_{m}]^T$. Тогда $H_0 = t\,H(L_1^h)$ и

$$\left\|\psi^h\right\|_{\breve{H}^{1/2}(L_1)} \le \left\|t\psi^h\right\|_{H_{00}^{1/2}(\lambda)} \le C\left\|\psi^h\right\|_{\breve{H}^{1/2}(L_1)}.$$

Теперь всё пространство $H(\gamma^h)$ разбивается на подпространства. Пусть

$$H(\gamma^h) = H_1^{(N)} + \ldots + H_{m_1}^{(N)} + H_{m_1+1}^{(0)} + \ldots + H_m^{(0)}.$$

Пространства $H_i^{(N)}$, $i = 1, \ldots, m_1$ – подпространства, соответствующие точкам ветвления

$$H_i^{(N)} = \left\{\varphi^h \in H(\gamma^h) \mid \varphi^h(x) = t_i\psi^h(x),\ x \in \lambda_i;\ \varphi^h(x) = 0,\ x \notin \lambda_i\right\}$$

и $H_i^{(0)}$, $i = m_1 + 1, \ldots, m$ – подпространства, соответствующие интервалам между точками ветвления, то есть

$$H_i^{(0)} = \left\{\varphi^h \in H(\gamma^h) \mid \varphi^h(x) = 0,\ x \notin \lambda_i\right\}.$$

Имеет место

<u>Теорема 2.5.1.</u> Существует константа c, не зависящая от h, и такая, что для любой $\varphi^h \in H(\gamma^h)$ существуют функции

$$\begin{aligned}
&\varphi_i^{(N)} \in H_i^{(N)}, \quad i = 1,\ldots,m_1,\\
&\varphi_i^{(0)} \in H_i^{(0)}, \quad i = m_1+1,\ldots,m
\end{aligned}$$

такие, что

$$\sum_{i=1}^{m_1} \varphi_i^{(N)} + \sum_{i=m_1+1}^{m} \varphi_i^{(0)} = \varphi^h ,$$

$$\sum_{i=1}^{m_1} \left\| \varphi_i^{(N)} \right\|^2_{H_{00}^{1/2}(\gamma)} + \sum_{i=m_1+1}^{m} \left\| \varphi_i^{(0)} \right\|^2_{H_{00}^{1/2}(\gamma)} \le c \left\| \varphi^h \right\|^2_{H_{00}^{1/2}(\gamma)} .$$

<u>Доказательство.</u> Доказательство теоремы 2.5.1 основано на использовании следующей леммы.

<u>Лемма 2.5.1.</u> Пусть $\varphi \in H^{1/2}(-1,0)$ и зададим продолжение функции φ на отрезок $[0,2]$ как

$$\varphi = \begin{cases} (1-x)\varphi(-x), & x \in [0,1],\\ 0, & x \in [1,2]. \end{cases}$$

Тогда существует константа C такая, что $\| \varphi \|_{H^{1/2}(-1,2)} \le C \| \varphi \|_{H^{1/2}(-1,0)}$.

<u>Доказательство.</u> Согласно условиям сшивки для функций из $H^{1/2}$ [124], имеем

$$\begin{aligned}
&\| \varphi \|^2_{H^{1/2}(-1,2)} \le \\
&\quad \le C_1(\| \varphi \|^2_{H^{1/2}(-1,0)} + \| \varphi \|^2_{H^{1/2}(0,1)} + \| \varphi \|^2_{H^{1/2}(1,2)} + I_1(\varphi) + I_2(\varphi)).
\end{aligned}$$

Заметим, что $\|\varphi\|_{H^{1/2}(1,2)} = 0$. Легко доказать

$$\|\varphi\|_{L^2(0,1)} \le \|\varphi\|_{L^2(-1,0)}.$$

Кроме этого, имеют место оценки

$$|\varphi|^2_{H^{1/2}(0,1)} = \int_0^1\int_0^1 \frac{|\varphi(-x)(1-x)-\varphi(-y)(1-y)|^2}{|x-y|^2}dx\,dy \le$$

$$\le 2\int_0^1\int_0^1 \frac{|\varphi(-x)(1-x)-\varphi(-x)(1-y)|^2}{|x-y|^2}dx\,dy +$$

$$+2\int_0^1\int_0^1 \frac{|\varphi(-x)-\varphi(-y)|^2\,|(1-y)|^2}{|x-y|^2}dx\,dy \le$$

$$\le 2(\int_0^1\int_0^1 \frac{|\varphi(-x)(x-y)|^2}{|x-y|^2}dx\,dy + \int_{-1}^0\int_{-1}^0 \frac{|\varphi(-x)-\varphi(y)|^2}{|x-y|^2}dx\,dy) =$$

$$=2(|\varphi|^2_{H^{1/2}(-1,0)} + \|\varphi\|^2_{L^2(-1,0)}).$$

С другой стороны, мы имеем неравенства

$$I_1(\varphi) = \int_0^1 \frac{(\varphi(-x)-\varphi(-x)(1-x))^2}{x}dx \le$$

$$\le \int_0^1 \varphi^2(-x)\frac{x^2}{x}dx \le \|\varphi\|^2_{L^2(-1,0)},$$

$$I_2(\varphi) = \int_0^1 \frac{(\varphi(-x)(1-x))^2}{1-x}dx \le \|\varphi\|^2_{L^2(-1,0)}.$$

Объединяя все неравенства, мы получаем доказательство леммы.

Пусть

$$B^{-1} = B^+_{N,1} + \ldots + B^+_{N,m_1} + B^+_{0,m_1+1} + \ldots + B^+_{0,m},$$

где

$$B_{N,i}^{+} = t_i \Sigma_{ND,i}^{-1} t_i^T, \quad i = 1,...,m_1$$

(здесь оператор продолжения t отождествляется с его матричным представлением) и $B_{0,i}^{+}$ имеет вид

$$B_{0,i}^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{DD,i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

тогда, согласно общей теории аддитивного метода Шварца, существуют константы c_1, c_2, не зависящие от h, и такие, что

$$c_1 \left\| \varphi^h \right\|_{H^{1/2}(\gamma)}^2 \le (B\overline{\varphi}, \overline{\varphi}) \le c_2 \left\| \varphi^h \right\|_{H^{1/2}(\gamma)}^2 \quad \forall \varphi^h \in H(\gamma^h).$$

2.6. Метод декомпозиции для случая большого числа подобластей

Чтобы использовать параллельные компьютеры со многими процессорами, требуется декомпозиция исходной области на много подобластей $(n \gg 1)$ малого размера.

Пусть Ω – область с диаметром $O(1)$ с границей Γ и положим

$$\Omega_\varepsilon = \{(x,y):\ x = \varepsilon s,\ y = \varepsilon t,\ (s,t) \in \Omega\}$$

с границей Γ_ε. Здесь $0 < \varepsilon \le 1$ обычно эквивалентен шагу H грубой сетки или среднему диаметру подобластей.

Лемма 2.6.1. Пусть $\varphi^{\varepsilon} \in H^{1/2}(0,3\varepsilon)$ – непрерывная и кусочно-линейная функция с $\varphi^{\varepsilon}(i\varepsilon) = \varphi_i$ и линейна на интервалах $\left[i\varepsilon,(i+1)\varepsilon\right]$, $i = 0,1,2$. Тогда

$$\left\| \varphi^{\varepsilon} \right\|^2_{H^{1/2}_{\varepsilon}(0,3\varepsilon)} \approx \sum_{i=0}^{3} \varepsilon^2 \varphi_i^2 + \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} (\varphi_i - \varphi_j)^2 .$$

Доказательство. Утверждение леммы следует немедленно из соотношений

$$\varepsilon \left\| \varphi^{\varepsilon} \right\|^2_{L_2(0,3\varepsilon)} \approx \sum_{i=0}^{3} \varepsilon^2 \varphi_i^2,$$

$$\left| \varphi^{\varepsilon} \right|^2_{H^{1/2}(0,3\varepsilon)} \approx \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} (\varphi_i - \varphi_j)^2 .$$

Чтобы построить асимптотически оптимальные декомпозиции в случае большого числа подобластей, мы должны рассмотреть, так называемое, каркасное подпространство наряду с локальными подпространствами. Чтобы сделать это, мы используем следующую лемму.

Лемма 2.6.2. Существует c, не зависящая от h и ε, и такая, что для всех $\varphi^h \in H_h(0,3\varepsilon)$ существуют $\varphi^{\varepsilon}, \varphi_1^h, \varphi_2^h$, удовлетворяющие

$$\begin{aligned} &\varphi^h = \varphi^{\varepsilon} + \varphi_1^h + \varphi_2^h, \\ &\varphi_1^h(x) = 0, \quad x \in (2\varepsilon, 3\varepsilon), \\ &\varphi_2^h(x) = 0, \quad x \in (0, \varepsilon), \end{aligned}$$

где φ^{ε} – кусочно-линейна и

$$\left\| \varphi^{\varepsilon} \right\|^2_{H^{1/2}(0,3\varepsilon)} + \left\| \varphi_1^h \right\|^2_{H^{1/2}(0,3\varepsilon)} + \left\| \varphi_2^h \right\|^2_{H^{1/2}(0,3\varepsilon)} \le c \left\| \varphi^h \right\|^2_{H^{1/2}(0,3\varepsilon)} .$$

<u>Доказательство.</u> Определим кусочно-линейную функцию φ^{ε} линейную на $\left[i\varepsilon,\ (i+1)\varepsilon\right]$ со значениями

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\varphi^h(x)\,dx,$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \frac{1}{\varepsilon}\int_{2\varepsilon}^{3\varepsilon}\varphi^h(x)\,dx.$$

Тогда мы приходим к следующим оценкам

$$(\varphi_i)^2 = \Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi^h(x)\,dx\Big)^2 \le \frac{1}{\varepsilon^2}\,\varepsilon\int_{x_i}^{x_{i+1}}(\varphi^h(x))^2\,dx,$$

$$\sum_{i=0}^{3}\varepsilon^2\varphi_i^2 \le \varepsilon\left\|\varphi^h\right\|^2_{L_2(0,3\varepsilon)},$$

$$(\varphi_i - \varphi_j)^2 = \Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi^h(x)\,dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\varphi^h(x)\,dx\Big)^2 =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\varphi^h(x)\,dy\,dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\varphi^h(x)\,dx\,dy\Big)^2 \le$$

$$\le \frac{4}{\varepsilon^2}\Big(\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{\varphi^h(x)-\varphi^h(y)}{|x-y|}\,dx\,dy\Big)^2 \le$$

$$\le 4\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{(\varphi^h(x)-\varphi^h(y))^2}{|x-y|^2}\,dx\,dy,$$

$$\psi^h = \varphi^h - \varphi^{\varepsilon},$$

$$\int_0^{\varepsilon}\psi^h(x)\,dx = \int_{2\varepsilon}^{3\varepsilon}\psi^h(x)\,dx = 0.$$

Лемма доказана.

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2.6.1. Пусть $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{\Omega}_i$, где Ω_i – многоугольники с $\operatorname{diam}\Omega_i = O(H)$, и пусть $\gamma = \bigcup_{i=1}^{m} \lambda_i$. Предположим, что эта декомпозиция такая, что λ_i либо окрестность точки ветвления, либо криволинейный интервал, и существует r порядка ε, такое, что для любой точки $p \in \gamma$ существует λ_i такое, что

$$B(p,r) \bigcap \lambda \subset \lambda_i .$$

Тогда существует $c \neq c(h,H)$ такая, что для всех $\varphi^h \in H(\gamma^h)$ существуют $\varphi^H, \varphi_1^h, \dots, \varphi_m^h$, удовлетворяющие

1) φ^H – кусочно-линейная на каркасной сетке $\bigcup_{i=1}^{n} \partial\Omega_i$ с точками ветвления x_j;

2) $\varphi_i^h(x) = 0$ если $x \notin \lambda_i, \quad i = 1,\dots,m$.

Тогда мы имеем

$$\left\| \varphi^H \right\|_{H^{1/2}(\gamma)} \le c \left\| \varphi^h \right\|_{H^{1/2}(\gamma)},$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left\| \varphi_i^h \right\|_{H^{1/2}(\gamma)}^2 \le c \left\| \varphi^h \right\|_{H^{1/2}(\gamma)}^2,$$

$$\Sigma^{-1} = \Sigma_H^+ + \Sigma_1^+ + \dots + \Sigma_m^+,$$

$$(\Sigma_i \varphi, \varphi) \approx \left\| \varphi^h \right\|_{H_{00}^{1/2}(\lambda_i)},$$

$$\Sigma_H^+ = t_{lin} \Sigma_x^{-1} t_{lin}^*,\ (\Sigma_x \varphi, \varphi) = \sum_k (H^2 \sum_{x_i \in \partial\Omega_k^h} \varphi^2(x_i) + \sum_{x_i \in \partial\Omega_k^h} \sum_{x_j \in \partial\Omega_k^h} (\varphi(x_i) - \varphi(x_j))^2),$$

$$(\Sigma\varphi,\varphi) \approx \left\| \varphi^h \right\|_{H^{1/2}(\gamma)}.$$

Здесь Σ_i определяются так же, как и в 2.5.

Доказательство. Доказательство этой теоремы следует из общей теории аддитивного метода Шварца и предыдущих результатов.

2.7. Декомпозиция области для эллиптических краевых задач с разрывными коэффициентами

В области Ω, которая является объединением n непересекающихся подобластей

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{\Omega}_i, \quad \Omega_i \cap \Omega_j \neq 0, \; i \neq j,$$

рассмотрим краевую эллиптическую симметричную задачу

$$-\sum_{i,j}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} = f(x), \quad x \in \Omega,$$
$$u(x) = 0, \qquad x \in \Gamma = \partial\Omega.$$

Обозначим через $a(u,v)$ соответствующую билинейную форму

$$a(u,v) = \int_{\Omega} (\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i}) dx$$

и будем предполагать, что

$$a(u,v) = a(v,u) \quad \forall\, u,v \in H_0^1(\Omega),$$
$$\alpha_0 a(v,v) \leq \int_{\Omega} p(x)(|\nabla v|)^2 dx \leq \alpha_1 a(v,v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

где

$$p(x) \equiv p_i = \text{const} > 0, \quad x \in \Omega_i.$$

Здесь предполагается, что коэффициенты задачи меняются не существенно в подобластях Ω_i. Относительно подобластей Ω_i, их триангуляций Ω_i^h, и конечно-элементных пространств выполняются те же предположения и используются те же обозначения, что и в пункте 2.3.

Следуя общей схеме аддитивного метода Шварца, разложим пространство $H(\Omega^h, \Gamma^h)$ в сумму подпространств

$$H(\Omega^h, \Gamma^h) = W_0 + W_1.$$

Чтобы сделать это, снова разделим вершины триангуляции Ω^h на две группы: на те, которые лежат внутри Ω_i^h и на те, которые лежат на границах подобластей Ω_i^h. Подпространство W_0 соответствует первой группе. Положим

$$W_0 = \left\{ u^h \in H(\Omega^h, \Gamma_0^h) \middle| \, u^h(x) = 0, \; x \in S^h \right\},$$
$$W_{0,i} = \left\{ u^h \in W_0 \middle| \, u^h(x) = 0, \; x \notin \Omega_i^h, \right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Очевидно, что W_0 является прямой суммой ортогональных подпространств $W_{0,i}$ относительно скалярного произведения в $H^1(\Omega)$:

$$W_0 = W_{0,1} \oplus \ldots \oplus W_{0,n}.$$

Пусть определены симметричные матрицы $B_{0,i}$ порядка N_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ такие, что

$$c_1 \left\| u_i^h \right\|^2_{H^1(\Omega_i^h)} \le (B_{0,i} u_i, u_i) \le c_2 \left\| u_i^h \right\|^2_{H^1(\Omega_i^h)}$$

$$\forall u_i^h \in H(\Omega_i^h, \partial\Omega_i^h).$$

Тогда в качестве переобуславливающего оператора для пространства W_0 определим оператор

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & p_1 B_{0,1} & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & & 0 \\ 0 & . & . & . & . & & p_n B_{0,n} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что для псевдообратного к B_0 оператора имеет место представление

$$B_0^+ = \begin{bmatrix} 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & (p_1 B_{0,1})^{-1} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & (p_n B_{0,n})^{-1} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, реализация умножения B_0^+ на вектор равносильна параллельной (независимой) реализации умножения $B_{o,i}^{-1}$, $i = 1, 2, ..., n$ на вектор.

Теперь определим подпространство W_1 и соответствующий переобуславливающий оператор для этого подпространства. В пространстве следов $H(\gamma^h)$ функций из $H(\Omega^h, \Gamma^h)$ на γ^h введем следующую норму

$$\left\| \varphi^h \right\|^2_{H_p^{1/2}(\gamma^h)} = \sum_{i=1}^{n} p_i \left\| \varphi^h \right\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega_i^h)} .$$

Здесь функцию $\varphi^h \in H^{1/2}(\gamma^h)$ мы отождествляем с её продолжением нулём на Γ^h. Пусть t – оператор продолжения сеточных функций с границ подобластей $\partial\Omega_i^h$ во внутренность Ω_i^h в классе конечно-элементных функций, который был определён в пункте 2.4

$$t : H(\gamma^h) \to H(\Omega^h, \Gamma^h).$$

Очевидно, что существует константа c, не зависящая от h и p, и такая, что

$$a(t\varphi^h, t\varphi^h) \le c \left\| \varphi^h \right\|_{H_p^{1/2}(\gamma^h)},$$

то есть t – оператор продолжения граничных сеточных функций с сохранением энергетической нормы. Определим

$$W_1 = \left\{ u^h \in H(\Omega^h, \Gamma^h) \,|\, u^h = t\varphi^h \quad \forall \varphi^h \in H(\gamma^h) \right\},$$

то есть подпространство W_1 является образом оператора продолжения t. Пусть Σ – симметричная матрица порядка N_0, такая, что существуют положительные константы c_3, c_4, не зависящие от h и p, и такие, что

$$c_3(\Sigma\overline{\varphi}, \overline{\varphi}) \le \left\| \varphi^h \right\|^2_{H_p^{1/2}(\gamma^h)} \le c_4(\Sigma\overline{\varphi}, \overline{\varphi}) \quad \forall \varphi^h \in H(\gamma^h).$$

Тогда определим переобуславливающий оператор

$$B^{-1} = B_0^{+} + t\Sigma^{-1}t^{*}.$$

Для эллиптических краевых задач с разрывными коэффициентами элементом построения переобуславливающего оператора является построение переобуславливающего оператора на внутренних границах.

Каждой функции $\varphi^h \in H(\gamma^h)$ будем сопоставлять функции φ_i^h, $i = 1,2,...,n$, значения которых равны значениям φ в узлах, лежащих на $\partial\Omega_i^h$. Пусть на $\partial\Omega_i^h \setminus \Gamma^h$ находится m_i узлов. Определим следующие матрицы порядка m_i

$$T_i = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & . & . & . & & & \\ & & . & . & . & & \\ & & & . & . & . & \\ & & & -1 & 2 & -1 & \\ -1 & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

для случая, если $\partial\Omega_i^h \bigcap \Gamma^h = \varnothing$ и

$$T_i = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & . & . & . & & & \\ & & . & . & . & & \\ & & & . & . & . & \\ & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

для случая $\partial\Omega_i^h \bigcap \Gamma^h \neq \varnothing$.

Положим

$$\Sigma_i = T_i^{1/2}, \quad i = 1,2,...,n.$$

Определим матрицы T и Σ порядка N_0

$$(T\overline{\varphi},\overline{\psi}) = p_1(T_1\overline{\varphi}_1,\overline{\psi}_1) + \ldots + p_n(T_n\overline{\varphi}_n,\overline{\psi}_n),$$
$$(\Sigma\overline{\varphi},\overline{\psi}) = p_1(\Sigma_1\overline{\varphi}_1,\overline{\psi}_1) + \ldots + p_n(\Sigma_n\overline{\varphi}_n,\overline{\psi}_n).$$

Используя явный вид собственных значений матриц T_i, легко видеть, что

$$\underline{c}(\Sigma\overline{\varphi},\overline{\varphi}) \le (T\overline{\varphi},\overline{\varphi}) \le \overline{c}(\Sigma\overline{\varphi},\overline{\varphi}) \quad \forall\overline{\varphi} \in R^{N_0},$$

где $\underline{c} = \pi \min\limits_{1\le i\le n}(1/m_i)$, $\overline{c} = 2$. Оператор Σ порождает эквивалентную нормировку в пространстве следов $H(\gamma^h)$. Однако явное обращение оператора Σ на векторе, то есть решение системы

$$\Sigma\varphi = \psi \tag{2.7.1}$$

является сложной задачей. Вместо того чтобы решать систему уравнений (2.7.1) точно, рассмотрим для её решения, например, с точностью $\varepsilon = 0{,}5$, итерационный процесс с Чебышевским набором итерационных параметров τ_k [26, 87]

$$\begin{aligned} &\varphi^0 = 0, \\ &\varphi^{k+1} - \varphi^k = -\tau_k T^{-1}(\Sigma\varphi^k - \psi). \end{aligned} \tag{2.7.2}$$

Положим

$$B_{1/2}^{-1} = (I - \prod_{j=0}^{n(\varepsilon)}(I - \tau_j T^{-2}\Sigma))\Sigma^{-1},$$

$$n(\varepsilon) \ge \frac{\ln(2/\varepsilon)}{\ln(1/q)}, \qquad q = \frac{\sqrt{\overline{c}} - \sqrt{\underline{c}}}{\sqrt{\overline{c}} + \sqrt{\underline{c}}}.$$

Тогда

$$\varphi^{n(\varepsilon)} = B_{1/2}^{-1}\,\psi,$$
$$1/2\,(B_{1/2}\,\varphi,\varphi) \le (\Sigma\varphi,\varphi) \le 3/2\,(B_{1/2}\,\varphi,\varphi) \quad \forall\varphi \in H(\lambda^h).$$

Положим

$$B_1^{+} = t\,B_{1/2}^{-1}\,t^{*},$$
$$B^{-1} = B_0^{+} + B_1^{+}.$$

Имеет место

<u>Теорема 2.7.1.</u> Существуют положительные константы c_5, c_6, не зависящие от h и p, такие, что

$$c_5(Bv,v) \le (Av,v) \le c_6(Bv,v) \quad \forall v \in W.$$

<u>Замечание.</u> Если для умножения на матрицу Σ в (2.7.2) использовать алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье, то умножение на $B_{1/2}^{-1}$ можно осуществить за $O(h^{-1.5}\ln h^{-1})$ арифметических действий, а умножение на B_1^{-1} за $O(h^{-2})$.

Представим несколько численных результатов, иллюстрирующих предложенный алгоритм декомпозиции области. Область Ω – единичный квадрат $(0,1)\times(0,1)$, разделенный на 4 квадрата, как на рисунке 2.7.1. Рассмотрим задачу

$$-\mathrm{div}(p(x)\,\nabla u(x)) = 0 \text{ в } \Omega$$

с граничными условиями Дирихле, где $p(x)$ – кусочно-постоянная функция, чье значение равно p_i в каждой подобласти Ω_i.

Зададим начальное приближение $u(x,y) = x(1-x)y(1-y)$. Обозначим через N число итераций метода сопряженных градиентов с переобуславливателем. В первом эксперименте мы зафиксируем $p(x)$, и будем менять h от $1/2^3$ до $1/2^8$. Таблицы 2.7.1 и 2.7.2 показывают, что число итераций N устойчиво относительно h. Далее для каждого $h = 1/2^3,...,1/2^8$ мы будем менять $p(x)$, $x \in \Omega_2 \bigcup \Omega_4$ от 1 до 10^5. Таблица 2.7.3 показывает, что число итераций N устойчиво относительно $p(x)$.

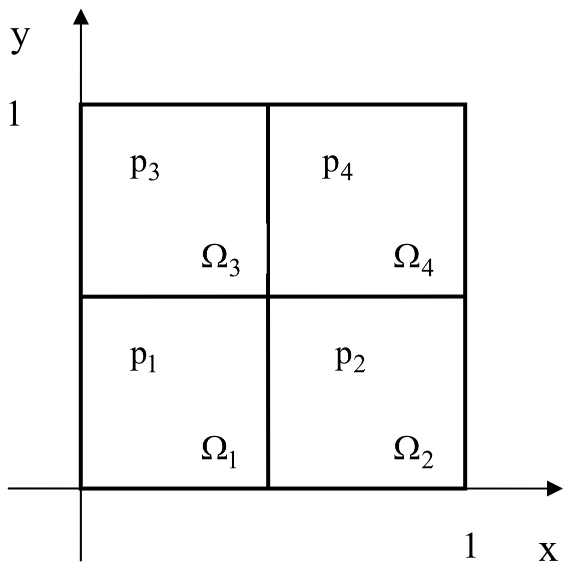


Рис. 2.7.1

Таблица 2.7.1

$p_1 = p_4 = 1,\ p_2 = 100,\ p_3 = 1000.$

1/h	N
2^3	5
2^4	6
2^5	7
2^6	7
2^7	9
2^8	8

Таблица 2.7.2

$p_1 = 1,\ p_2 = p_3 = p_4 = 1000.$

1/h	N
2^3	5
2^4	7
2^5	8
2^6	8
2^7	9
2^8	9

Таблица 2.7.3

$p_1 = p_4 = 1,\ p_2 = p_3 = p^*.$

$h \backslash p^*$	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5
$1/2^3$	4	5	5	5	5	5
$1/2^4$	5	6	6	6	7	7
$1/2^5$	6	7	7	8	8	9
$1/2^6$	5	6	7	8	8	9
$1/2^7$	7	7	8	9	10	10
$1/2^8$	6	7	8	9	9	10

3. Метод фиктивного пространства

Наиболее эффективные обуславливающие операторы для решения краевых задач в областях со сложной геометрией удается построить, как правило, на основании «упрощения» геометрии исходной области. Один из методов «упрощения» геометрии основан на включении области в область канонического вида, например, прямоугольник в двумерном и параллелепипед в трехмерном случае, и в соответствующем доопределении уравнений (метод фиктивных областей и его матричные аналоги). В данной главе предлагается и исследуется метод фиктивного пространства [89, 166, 80]. Основу данного подхода составляет введение фиктивного гильбертова пространства, норма в котором определяется легко обратимым оператором, использование соответствующего оператора сужения из введенного гильбертова пространства в исходное гильбертово пространство. Используя этот метод, удалось как «упростить» геометрию исходной области, так и «улучшить» структуру сетки.

3.1. Лемма о фиктивном пространстве

В данном параграфе формулируется и доказывается лемма, которая является основой метода фиктивного пространства.

Лемма 3.1.1. Пусть H_0, H – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(u_0, v_0)_{H_0}$, $(u, v)_H$ соответственно, A, B –

самосопряженные положительно определенные непрерывные операторы в пространствах H_0, H:

$$\begin{aligned} &A : H_0 \to H_0, \\ &B : H \to H. \end{aligned}$$

Пусть R – линейный оператор такой, что

$$\begin{aligned} &R : H \to H_0, \\ &(ARv, Rv)_{H_0} \le c_R (Bv, v)_H \end{aligned}$$

для любого элемента $v \in H$. И пусть существует оператор T такой, что

$$\begin{aligned} &T : H_0 \to H, \\ &RTu_0 = u_0, \\ &c_T (BTu_0, Tu_0)_H \le (Au_0, u_0)_{H_0} \end{aligned}$$

для любого элемента $u_0 \in H_0$. Здесь c_R, c_T – положительные константы. Тогда

$$c_T (A^{-1}u_0, u_0)_{H_0} \le (RB^{-1}R^* u_0, u_0)_{H_0} \le c_R (A^{-1}u_0, u_0)_{H_0}$$

для любого элемента $u_0 \in H_0$. Здесь R^* – оператор, сопряженный к R относительно скалярных произведений $(u_0, v_0)_{H_0}$, $(u, v)_H$:

$$\begin{aligned} &R^* : H \to H_0, \\ &(R^* u_0, v)_H = (u_0, Rv)_{H_0}. \end{aligned}$$

<u>Доказательство</u>. Имеем

$$(R B^{-1} R^{*} u_0, u_0)_{H_0}^{1/2} = (B^{-1} R^{*} u_0, R^{*} u_0)_{H}^{1/2} =$$

$$= \sup_{v \in H, v \neq 0} \frac{(R^{*} u_0, v)_H}{(B v, v)_H^{1/2}} \geq \sup_{v_0 \in H_0, v_0 \neq 0} \frac{(R^{*} u_0, T v_0)_H}{(B T v_0, T v_0)_H^{1/2}} \geq$$

$$\geq c_T^{1/2} \sup_{v_0 \in H_0, v_0 \neq 0} \frac{(R^{*} u_0, T v_0)_H}{(A v_0, v_0)_{H_0}^{1/2}} = c_T^{1/2} \sup_{v_0 \in H_0, v_0 \neq 0} \frac{(u_0, v_0)_{H_0}}{(A v_0, v_0)_{H_0}^{1/2}} =$$

$$= c_T^{1/2} (A^{-1} u_0, u_0)_{H_0}^{1/2}.$$

С другой стороны,

$$(R B^{-1} R^{*} u_0, u_0)_{H_0}^{1/2} = \sup_{v \in H, v \neq 0} \frac{(u_0, R v)_{H_0}}{(B v, v)_H^{1/2}} =$$

$$= \sup_{v \in H, v \neq 0} \frac{(A^{-1/2} u_0, A^{1/2} R v)_{H_0}}{(B v, v)_H^{1/2}} \leq$$

$$\leq (A^{-1} u_0, u_0)^{1/2} \sup_{v \in H, v \neq 0} \frac{(A R v, R v)_{H_0}^{1/2}}{(B v, v)_H^{1/2}} \leq$$

$$\leq c_R^{1/2} (A^{-1} u_0, u_0)_{H_0}^{1/2}.$$

Тем самым лемма 3.1.1 доказана.

3.2. Метод фиктивного пространства для модельных задач

В данном параграфе демонстрируется применение леммы 3.1.1 для построения переобуславливающих операторов в случае модельных задач, определенных в L-образной области. В данном случае целью является упрощение геометрии области (метод фиктивных областей).

Итак, пусть Ω – L-образная область, полученная из квадрата с длиной стороны 2, из которого удалена правая верхняя четверть (рисунок 3.2.1).

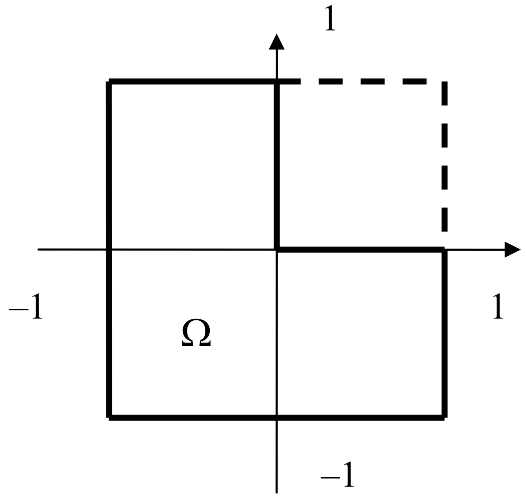


Рис. 3.2.1

В области Ω введем квадратную сетку Ω^h с шагом $h = 1/n$, которую триангулируем с помощью диагоналей ячеек сетки, $H(\Omega^h, \Gamma)$ – пространство кусочно-линейных восполнений, обращающихся в ноль на Γ. Тогда матрица A определяется следующим образом:

$$(Au, v) = \int\limits_{\Omega} (\nabla u^h, \nabla v^h) dx \quad \forall\, u^h, v^h \in H(\Omega^h, \Gamma^h), \tag{3.2.1}$$

где u^h, v^h – кусочно-линейные восполнения векторов u, v.

Область Ω дополним до квадрата Π (фиктивная область)

$$\Pi = \left\{ (x_1, x_2) \middle| -1 < x_i < 1, \quad i = 1,2 \right\}.$$

Пусть Π^h – квадратная сетка с тем же шагом h, которая триангулирована с помощью диагоналей ячеек сетки, $H(\Pi^h, \partial\Pi)$ – пространство кусочно-линейных восполнений, обращающихся в ноль на границе квадрата Π (фиктивное пространство). Матрицу B определим следующим образом:

$$(B\bar{u},\bar{v}) = \int_{\Pi} (\nabla u^h, \nabla v^h)\, dx \quad \forall u^h, v^h \in H(\Pi^h, \partial\Pi). \tag{3.2.2}$$

В данном случае роль пространства H_0 из леммы 3.2.1 играет пространство $H(\Omega^h, \Gamma)$, а пространства H из леммы 3.2.1 пространство $H(\Pi^h, \partial\Pi)$. Согласно этой лемме, сейчас необходимо определить ограниченный оператор

$$R : H(\Pi^h, \partial\Pi) \to H(\Omega^h, \Gamma) \tag{3.2.3}$$

и доказать существование ограниченного оператора

$$T : H(\Omega^h, \Gamma) \to H(\Pi^h, \partial\Pi). \tag{3.2.4}$$

Будем определять оператор R в следующем виде:

$$R = I_{\Omega} - t \cdot I_{\Pi \backslash \Omega}.$$

Здесь $I_{\Omega}, I_{\Pi\backslash\Omega}$ – операторы сужения функций на области Ω и $\Pi \backslash \Omega$ соответственно, а оператор

$$t : H(\Pi^h \backslash \Omega^h) \to H(\Omega^h)$$

является оператором продолжения сеточных функций из $\Pi^h \backslash \Omega^h$ в Ω^h. В данном случае этот оператор t может быть определен следующим образом: пусть задана функция $u^h \in H(\Pi^h \backslash \Omega^h)$. Положим

$$(tu^h)(x_1, -x_2) = u^h(x_1, x_2),$$
$$(tu^h)(-x_1, x_2) = u^h(x_1, x_2),$$
$$(tu^h)(-x_1, -x_2) = u^h(x_1, x_2),$$

где точка $(x_1, x_2) \in \Pi \setminus \Omega$. Оператор t, по существу, является оператором отражения. Легко видеть, что в этом случае $c_R = 6$, где c_R – константа из условия леммы 3.1.1.

Оператор T в нашем случае определяется естественным образом: продолжение функции нулем.

Пусть задана функция $u^h \in H(\Omega^h, \Gamma)$. Тогда

$$(T u^h)(x) = \begin{cases} u^h(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \Pi \setminus \Omega. \end{cases}$$

Очевидно, что $c_T = 1$ и все условия леммы 3.1.1 выполнены. Таким образом

$$(A^{-1}u, u) \le (RB^{-1}R^* u, u) \le 6(A^{-1}u, u) \quad \forall u.$$

Здесь R^* – матрица, транспонированная к R, и для реализации умножения R и R^* на вектор достаточно затратить число арифметических операций порядка числа узлов сеточной области, а для обращения B на векторе, т.е. для решения сеточного уравнения Пуассона в прямоугольнике, могут быть использованы, например, эффективные прямые методы [61, 107].

В качестве следующего примера применения леммы 3.1.1 рассмотрим уравнение Пуассона в L-образной области со смешанным краевым условием.

Пусть на отрезке AB границы области Ω задано условие Неймана (рисунок 3.2.2).

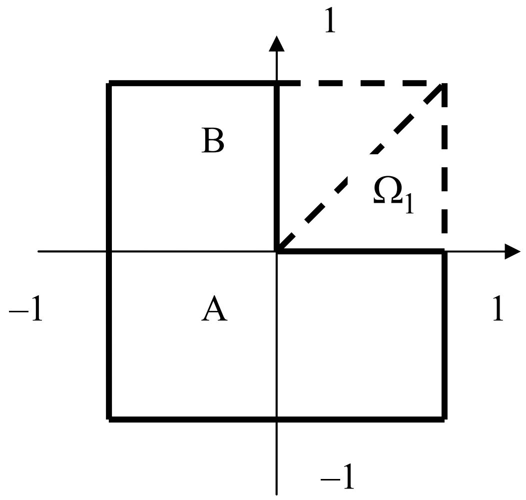


Рис. 3.2.2

$$
\begin{aligned}
&-\Delta u = f(x), && x \in \Omega, \\
&\partial u(x)/\partial n = 0, && x \in AB, \\
&u(x) = 0, && x \in \Gamma \setminus AB \equiv \Gamma_1.
\end{aligned}
$$

В области Ω и квадрата Π будем использовать те же самые триангуляции. Пространство $H(\Pi^h, \partial\Pi)$ то же, что и в предыдущем случае, а пространство $H(\Omega^h, \Gamma_1)$ состоит из кусочно-линейных восполнений, обращающихся в ноль в узлах, лежащих на Γ_1.

Матрицы A и B определяются согласно (3.2.1) и (3.2.2) соответственно. Нашей задачей является определение оператора R из (3.2.3) и доказательство существования оператора T из (3.2.4), которые удовлетворяют условию леммы 3.1.1 с константами c_R и c_T, не зависящими от h.

Будем определять оператор R в следующем виде:

$$R = I_\Omega - t \cdot t_N \cdot I_{\Omega_1},$$

где операторы I_{Ω} и t те же, что и в предыдущем случае, Ω_1 – треугольник в $\Pi \setminus \Omega$, который не примыкает к отрезку AB (см. рисунок 3.2.2), а оператор t_N – оператор продолжения функции из Ω_1 в $\Pi \setminus \Omega$, который можно определить, например, следующим образом. Пусть задана функция $u^h \in H(\Omega_1^h)$. Положим

$$(t_N u^h)(x_1, x_2) = \begin{cases} u^h(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega_1, \\ u^h(x_2, x_1), & (x_1, x_2) \notin \Pi \setminus (\Omega \bigcup \Omega_1), \end{cases}$$

т.е. t_N – оператор отражения относительно диагонали квадрата Π. Очевидно, что существует константа c_R, не зависящая от h.

Осталось доказать существование оператора T. Пусть задана функция $u^h \in H(\Omega^h, \Gamma_1)$. Продолжим эту функцию нулем на Ω_1. По теореме о продолжении сеточных функций из подобласти в подобласть [7, 72] существует продолжение этой функции с сохранением нормы из $\bar{\Omega} \bigcup \bar{\Omega}_1$ в Π, т.е. существует положительная константа c_T, не зависящая от h. Очевидно, что соотношение

$$R\,T u^h = u^h \quad \forall u^h \in H(\Omega^h)$$

выполняется и, следовательно, оператор

$$R\,B^{-1} R^*$$

спектрально эквивалентен оператору A^{-1}. Число арифметических операций для реализации умножения R и R^* на вектор снова порядка числа узлов сеточной области.

3.3. Метод фиктивного пространства для кусочно-гладких областей

Основной задачей данного параграфа является построение переобуславливающего оператора для эллиптических краевых задач в двумерных областях с кусочно-гладкой границей. Для построения переобуславливающих операторов предлагается следующая методика. Сначала упрощается геометрия области, а затем улучшается структура сетки (используя лемму о фиктивном пространстве). Основные арифметические затраты при реализации переобуславливающего оператора заключаются в обращении пятиточечной аппроксимации оператора Лапласа в прямоугольнике, либо любого оператора, который ему спектрально эквивалентен. Например, могут быть использованы операторы, построенные на основе многосеточной техники [46], затраты на реализацию которых оптимальны по порядку.

Итак, пусть Ω – область на плоскости и Ω^h – ее триангуляция, которые удовлетворяют требованиям, сделанным в параграфе 1.1. Сначала рассмотрим случай, когда $\Gamma_0 = \partial\Omega = \Gamma$, $\Gamma_1 = \varnothing$, т.е. случай задачи Дирихле.

Пусть область Ω является к-связной и S_t, $t = 1,2,...,k$ к-связные компоненты Γ. В окрестности Γ определим приграничную систему координат [79]. Рассмотрим компоненту S_t. Пусть S_t задана параметрически

$$S_t = \begin{pmatrix} g_1(s) \\ g_2(s) \end{pmatrix}, \quad s \in (0, \ell_t),$$

где ℓ_t длина S_t. Пусть

$$N(s) = \begin{pmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \end{pmatrix}$$

вектор внутренней псевдонормали, направление которого в угловых точках совпадает с биссектрисой угла, а вдоль гладкой части меняется, например, линейно.

В силу предположений относительно Ω существует $\delta_t > 0$ такое, что соотношения

$$\begin{aligned} x_1(s,n) &= g_1(s) + n \cdot n_1(s), \\ x_2(s,n) &= g_2(s) + n \cdot n_2(s) \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

определяют приграничную систему координат для $n \in (0, \delta_t)$. Положим

$$\begin{aligned} \Omega_t = \left\{ (x_1(s,n),\ x_2(s,n) \,\middle|\, 0 \le s \le \ell_t,\ 0 < n < \delta_t \right\}, \\ t = 1,2,\dots,k. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Для упрощения дальнейшего изложения будем считать, что

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing, \quad i \ne j.$$

Пусть область Ω заключена в объемлющий квадрат Π так, что расстояние от Γ до $\partial\Pi$ не зависит от h. Пусть триангуляция Ω^h дополнена до триангуляции Π^h так, что Π удовлетворяет условию однородности триангуляции (1.1.6).

Пусть A – оператор, определенный в пространстве $H(\Omega^h, \Gamma^h)$ согласно (1.1.8), а оператор B_Π в пространстве $H(\Pi^h, \partial\Pi)$ определяется следующим образом:

$$(B_\Pi u, v) = \int_\Pi (\nabla u^h, \nabla v^h) dx \quad \forall u^h, v^h \in H(\Pi^h, \partial\Pi). \qquad (3.3.3)$$

Согласно лемме 3.1.1 необходимо определить ограниченный оператор

$$R_\Pi : H(\Pi^h, \partial\Pi) \to H(\Omega^h, \Gamma^h)$$

и доказать существование ограниченного оператора

$$T_\Pi : H(\Omega^h, \Gamma^h) \to H(\Pi^h, \partial\Pi).$$

Оператор T_Π в случае задачи Дирихле определяется как продолжение функции нулем. Пусть задана функция $u^h \in H(\Omega^h, \Gamma^h)$. Тогда

$$(T_\Pi u^h)(x) = \begin{cases} u^h(x), & x \in \Omega^h, \\ 0, & x \in \Pi \setminus \Omega^h. \end{cases}$$

Оператор R_Π будем определять в следующем виде

$$R = I_{\Omega^h} - t \cdot I_{\Gamma^h}.$$

Здесь I_{Ω^h}, I_{Γ^h} – операторы сужения функций (следа) на Ω^h и Γ^h соответственно, а оператор

$$t : H(\Gamma^h) \to H(\Omega^h)$$

является оператором продолжения сеточных функций с Γ^h во внутренность Ω^h.

Согласно теореме 1.2.3 такой ограниченный оператор существует. Однако оператор R_Π используется в переобуславливающем операторе, поэтому необходимо иметь явное представление оператора t. Построение этого оператора и составляет основную трудность.

Чтобы построить оператор t в подобластях Ω_t из (3.3.2) с помощью приграничной системы координат (3.3.1), определим специальную вспомогательную сетку следующим образом. Пусть $(s_i, 0)$, $i = 0,1,...,N_t - 1$ координаты узлов $z_i \in \Gamma^h$, которые аппроксимируют компоненты S_t границы Γ. Положим $M_t = [\delta_t / h]$, где $[\cdot]$ – целая часть вещественного числа, $n_j = j \cdot \delta_t / M_t$, $j = 0,1,...,M_t$.

Теперь обозначим через Z_{ij} узлы, а через D_{ij} ячейки вспомогательной радиально-кольцевой сетки:

$$Z_{i,j} = \begin{pmatrix} x_1(s_i, n_j) \\ x_2(s_i, n_j) \end{pmatrix},$$

$$D_{i,j} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1(s, n) \\ x_2(s, n) \end{pmatrix} \Big| \ s_i \le s < s_{i+1}, \ n_j \le n < n_{j+1} \right\},$$

$$D^h = \bigcup_{i,j} D_{i,j},$$

$$j = 0,1,...,M_t - 1, \quad i = 0,1,...,N_t - 1.$$

Чтобы определить оператор продолжения t, сначала по заданной функции $\varphi^h \in H^{1/2}(\Gamma^h)$ определим сеточную функцию $U(Z_{i,j})$, заданную в узлах

$$Z_{i,j}, \quad i = 0,1,...,N_t - 1, \quad j = 0,1,...,M_t - 1.$$

Обозначим

$$\varphi_i = \varphi^h(z_i),$$
$$\varphi_{N_t+i} = \varphi_i, \quad i = 0,1,\dots,N_t-1,$$
$$\bar{M}_t = \left[M_t/2\right].$$

Положим

$$V(Z_{\ell,j}) = \sum_{i=1}^{j} \varphi_{\ell+i}, \tag{3.3.4}$$

$$U(Z_{\ell,j}) = \frac{(\ell - j/\bar{M})}{j+\ell} V(Z_{\ell,j}), \quad j = 0,1,\dots,\bar{M}, \tag{3.3.5}$$

$$U(Z_{\ell,j}) = 0, \quad j = \bar{M}+1,\dots,M, \quad \ell = 0,1,\dots,N_t-1.$$

Имеет место

<u>**Лемма 3.3.1.**</u> Существует положительная константа c_1, не зависящая от h, такая, что

$$\sum_{i=0}^{N_t-1} \sum_{j=0}^{M_t} U(Z_{i,j}) \cdot h^2 + \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=0}^{M_t} (U(Z_{i,j}) - U(Z_{i-1,j}))^2 +$$
$$+ \sum_{i=0}^{N_t-1} \sum_{j=0}^{M_t-1} (U(Z_{i,j+1}) - U(Z_{i,j}))^2 \le c_1 \left\| \varphi^h \right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma^h)}.$$

<u>Доказательство</u> леммы приведено в [86] и использует неравенство Харди [121].

Чтобы по функции $U(Z_{i,j})$ определить функцию $u^h \in H(\Omega^h)$ можно, например, использовать кусочно-постоянное интерполирование, для определения значений в узлах z_ℓ триангуляции Ω^h:

$$u^h(z_\ell)=\begin{cases}U(Z_{i,j}), & z_\ell \in D_{i,j},\\ 0, & z_\ell \in \Omega^h \setminus (\bigcup\limits_{t=1}^{k}\Omega_t).\end{cases} \quad (3.3.6)$$

В силу леммы 3.3.1 существует положительная константа c_2, не зависящая от h, такая, что

$$\left\|R_\Pi u^h\right\|_{H^1(\Omega^h)} \le c_2 \left\|u^h\right\|_{H^1(\Pi)} \quad \forall u^h \in H(\Pi^h,\partial\Pi),$$

т.е. условие леммы 3.1.1 выполнено и, следовательно,

$$c_3(A^{-1}u,u) \le (R_\Pi\, B_\Pi^{-1}\, R_\Pi^*\, u,u) \le c_4(A^{-1}u,u)$$

для любого вектора u. Здесь оператор B_Π из (3.3.2), A из (1.1.8), положительные константы c_3, c_4 не зависят от h.

Пусть M_v – матричное представление преобразования (3.3.4), M_u – матричное представление преобразования (3.3.5) и C – матричное представление преобразования (3.3.6). Тогда оператор продолжения t имеет следующее матричное представление

$$t = C\, M_u\, M_v\,.$$

Основной оператор реализации умножения операторов R_Π и R_Π^* на векторы является реализация умножения t и t^* на соответствующие векторы.

Рассмотрим более подробно эти реализации. Матрица M_u преобразования (3.3.5) является диагональной, а умножение M_u и M_u^* осуществляется за $O(h^{-2})$ действий. Матрица C преобразования (3.3.6) является прямоугольной матрицей, состоящей из нулей и единиц. В каждом ее столбце столько единиц, сколько узлов z_ℓ триангуляции Ω^h содержится в ячейке $D_{i,j}$. Очевидно, что реализация умножения на C и C^* осуществляется за $O(h^{-2})$ действий.

Наиболее интересной является реализация умножения на M_v и M_v^*. Укажем два эффективных метода реализации (3.3.4). Положим

$$V(Z_{i,0}) = \varphi_i, \quad i = 0,1,\ldots,N_t - 1.$$

Пусть уже вычислены значения функции V на кольце с номером j, т.е. $V(Z_{i,j})$, $i = 0,1,\ldots,N_t - 1$. Тогда на следующем кольце положим

$$\begin{aligned} &V(Z_{i,j+1}) = V(Z_{i,j}) + \varphi_{i+j+1}, \\ &i = 0,1,\ldots,N_t - 1, \\ &j = 0,1,\ldots,\bar{M} - 1. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Очевидно, что для реализации (3.3.7) достаточно выполнить $O(h^{-2})$ арифметических операций.

Вторая возможность реализации (3.3.4) может быть осуществлена следующим образом. Пусть определено значение $V(Z_{0,j})$ (например, непосредственно по формуле (3.3.4)). Тогда значение $V(Z_{i+1,j})$ по значению $V(Z_{i,j})$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} &V(Z_{i,j+1}) = V(Z_{i,j}) + \varphi_{i+j+1} - \varphi_i, \\ &i = 0,1,\ldots,N_t - 2, \quad j = 0,1,\ldots,\bar{M}. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Очевидно, что для реализации (3.3.8) снова достаточно выполнить $O(h^{-2})$ арифметических операций. Можно также использовать комбинацию (3.3.7) и (3.3.8).

Теперь перейдем к реализации умножения M_v^* на вектор. Пусть задана функция $V(Z_{i,j})$, $i = 0,1,...,N_t - 1$, $j = 0,1,...,\bar{M}$. Тогда легко видеть, что для вектора $\varphi = M_v^* V$ имеет место следующее представление:

$$\varphi_i = \sum_{j=0}^{\bar{M}} \sum_{\ell=i}^{i+j} V(Z_{\ell,j}). \tag{3.3.9}$$

Укажем два эффективных метода реализации преобразования (3.3.9). В первом случае сначала определяется вспомогательная функция $W_1(Z_{i,j})$, $i = 0,1,...,N_t - 1$, $j = 0,1,...,\bar{M}$, которая соответствует частичным суммам по радиусам. Положим

$$W_1(Z_{i,\bar{M}}) = V(Z_{i,\bar{M}}), \quad i = 0,1,...,N_t - 1.$$

Пусть уже вычислены значения функции W_1 на кольце с номером j. Тогда положим

$$W_1(Z_{i,j-1}) = W_1(Z_{i,j}) + V(Z_{i,j-1}),$$

$$i = 0,1,...,N_t - 1, \quad j = \bar{M}, \bar{M}-1,...,1, \tag{3.3.10}$$

$$\varphi_i = \sum_{j=0}^{\bar{M}} W_1(Z_{i+j,j}).$$

Очевидно, что для реализации (3.3.10) достаточно выполнить $O(h^{-2})$ арифметических операций.

В следующем способе реализации (3.3.9) используется вспомогательная функция $W_2(Z_{i,j}),\ i=0,1,...,N_t-1,\ j=0,1,...,\bar{M}$, которая соответствует частичным суммам по кольцам. Положим

$$W_2(Z_{0,j}) = \sum_{\ell=0}^{j} V(Z_{\ell,j}), \quad j=0,1,...,\bar{M}.$$

Тогда

$$W_2(Z_{i+1,j}) = W_2(Z_{i,j}) + V(Z_{i+j+1,j}) - V(Z_{i,j}),$$

$$i=0,1,...,N_t-2, \quad j=1,2,...,\bar{M}, \tag{3.3.11}$$

$$\varphi_i = \sum_{j=0}^{\bar{M}} W_2(Z_{i,j}).$$

Очевидно, что для реализации (3.3.11) снова достаточно $O(h^{-2})$ арифметических операций и снова для реализации (3.3.9) можно использовать комбинацию (3.3.10) и (3.3.11). Таким образом, при реализации оператора

$$R_\Pi B_\Pi^{-1} R_\Pi^*,$$

умножение операторов R_Π и R_Π^* на соответствующие вектора может быть реализовано за $O(h^{-2})$ арифметических операций, а оператор B_Π определен в (3.3.2).

В случае если триангуляция Ω^h, а, следовательно, и триангуляция Π^h, не имеет «хорошей» структуры, то явное обращение оператора B_Π может оказаться весьма трудоемкой задачей. Ниже, используя лемму 3.1.1, упрощается структура триангуляции Π^h и заменяется оператор B_Π.

В квадрате Π введем вспомогательную сетку Q^h. Пусть K_i – объединение треугольников в триангуляции Ω^h, которые имеют общую вершину z_i и пусть d_i – максимальный радиус круга, вписанного в K_i. В квадрате Π мы введем вспомогательную сетку Π^h с шагом $\overline{h}$ порядка h такую, что

$$\overline{h} < 1/\sqrt{2}\,\min_i d_i.$$

Узлы сетки Q^h будем обозначать через $P_{i,j} = (x_{1,i}, x_{2,j})$, $i, j = 0, 1, \ldots, M_0$, а ячейки сетки Q^h через $Q_{i,j}$:

$$Q_{i,j} = \left\{(x_1, x_2) \,\middle|\, x_{1,i} \le x_1 < x_{1,i+1},\quad x_{2,j} \le x_2 \le x_{2,j+1}\right\},$$
$$i, j = 0, 1, \ldots, M_0 - 1.$$

Сетку Q^h триангулируем с помощью диагоналей ячеек $Q_{i,j}$ и в пространстве $H(Q^h, \partial\Pi)$ определим оператор B_Q:

$$(B_Q u, v) = \int (\nabla u^h, \nabla v^h)\,dx \quad \forall u^h, v^h \in H(Q^h, \partial\Pi). \qquad (3.3.12)$$

B_Q – не что иное, как пятиточечная аппроксимация оператора Лапласа.

Согласно лемме 3.1.1 необходимо определить ограниченный оператор

$$R_Q : H(Q^h, \partial\Pi) \to H(\Pi^h, \partial\Pi) \tag{3.3.13}$$

и доказать существование ограниченного оператора

$$T_Q : H(\Pi^h, \partial\Pi) \to H(Q^h, \partial\Pi). \tag{3.3.14}$$

Оператор R_Q, который каждой функции $U(P_{i,j}) \in H(Q^h, \partial\Pi)$ ставит в соответствие функцию $u^h \in H(\Pi^h, \partial\Pi)$, определим следующим образом. Пусть z_ℓ – узел триангуляции Π^h и пусть $z_\ell \in Q_{i,j}$. Положим

$$u^h(z_\ell) = V(P_{i,j}).$$

Заметим, что в силу предположений относительно $\overline{h}$ может существовать только единственный узел z_ℓ триангуляции Π^h, принадлежащий ячейке $Q_{i,j}$. Оператор T_Q определяется следующим образом. Если ячейка $Q_{i,j}$ содержит некоторый узел z_ℓ триангуляции Π^h, то положим

$$V(P_{i,j}) = u^h(z_\ell).$$

В остальных узлах $P_{i,j}$ сетки Q^h функции $V(P_{i,j})$ можно определять достаточно производным образом. Например, следующим. Пусть узел $P_{i,j}$ принадлежит треугольнику τ_ℓ триангуляции Π^h с узлами $z_{\ell_1}, z_{\ell_2}, z_{\ell_3}$. Положим

$$V(P_{i,j}) = \frac{1}{3}(u^h(z_{\ell_1}) + u^h(z_{\ell_2}) + u^h(z_{\ell_3})).$$

Используя известные свойства кусочно-линейных восполнений [95] (неравенство 1.2.6 и обратное к нему), нетрудно показать, что определенные операторы R_Q и T_Q удовлетворяют условию леммы 3.1.1, а соответствующие константы не зависят от h. Положим

$$C^{-1} = R_\Pi R_Q B_Q^{-1} R_Q^* R_\Pi^*,$$

где B_Q из (3.3.12). Таким образом, справедлива следующая теорема:

<u>Теорема 3.3.1.</u> В случае задачи Дирихле существуют положительные константы c_6, c_7, не зависящие от h, такие, что

$$c_6(A^{-1}u,u) \le (C^{-1}u,u) \le c_7(A^{-1}u,u) \quad \forall u,$$

где A из (1.1.8).

<u>Замечание 3.3.1.</u> Оператор R_Q, по существу, является оператором кусочно-постоянного интерполирования, реализация которого была приведена при реализации оператора R_Π. Отметим, что оператор B_Q может быть заменен на любой оператор, эквивалентный ему по спектру, например, многосеточный [46].

Теперь рассмотрим случай смешанной краевой задачи, т.е. когда $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1$, . $\Gamma_1 \ne \varnothing$. В этом случае будем пользоваться той же идеологией, что и в случае модельной задачи из параграфа 3.2.

Для простоты изложения предположим, что область Ω – односвязная и Γ_1 является криволинейным интервалом. Случай многосвязной области Ω и несвязного множества Γ_1 рассматривается совершенно аналогично.

Итак, пусть триангуляция Ω^h дополнена до триангуляции Π^h. Согласно лемме 3.1.1 необходимо определить ограниченный оператор

$$R_{\Pi,\Gamma_0} : H(\Pi^h, \partial\Pi) \to H(\Omega^h, \Gamma_0^h)$$

и доказать существование ограниченного оператора

$$T_{\Pi,\Gamma_0} : H(\Omega^h, \Gamma_0^h) \to H(\Pi^h, \partial\Pi).$$

Чтобы определить оператор T_{Π,Γ_0}, проведем дополнительные построения. Согласно предположениям относительно триангуляции Ω^h в точках смены типа краевого условия помещены узлы триангуляции Ω^h. Разобьем множество $\Pi \setminus \Omega$ на две подобласти Ω_0 и Ω_1, которые прилегают к Γ_0 и Γ_1 соответственно (см. рисунок 3.3.1).

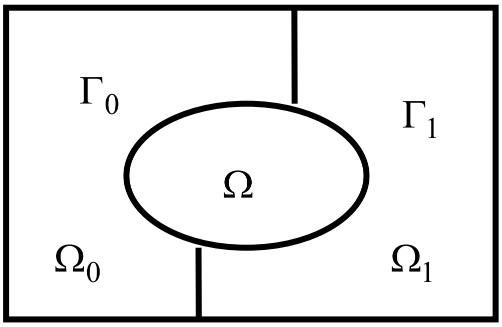


Рис. 3.3.1

Пусть Ω_0^h и Ω_1^h – часть триангуляции $\Pi^h \setminus \Omega^h$, которые соответствуют подобластям Ω_0 и Ω_1. Пусть задана функция $u^h \in H(\Omega^h, \Gamma_0^h)$. Определим функцию $T_{\Pi,\Gamma_0} u^h \in H(\Pi^h, \partial\Pi)$ следующим образом. Продолжим функцию

u^h нулем на триангуляции Ω_0^h. После этого, согласно теореме о продолжении сеточных функций из области в подобласть [7, 72] существует продолжение этой функции с сохранением нормы из $\Omega^h \bigcup \Omega_0^h$ в Π^h, т.е. существует положительная константа c_T из условия леммы 3.1.1, не зависящая от h.

Оператор R_{Π,Γ_0} будем определять в следующем виде

$$R_{\Pi,\Gamma_0} = I_{\Omega^h} - t \cdot t_N \cdot I_{\Gamma_0^h}.$$

Здесь операторы I_{Ω^h}, t, $I_{\Gamma_0^h}$ были определены выше, а оператор

$$t_N : H^{1/2}(\Gamma_0^h) \to H^{1/2}(\Gamma^h)$$

определяется следующим образом. Рассмотрим окрестность точки стыковки Γ_0 и Γ_1. Не теряя общности, можно считать, что эта точка имеет координаты $(0,0)$ в приграничной системе координат. Пусть $\delta > 0$ – параметр, не зависящий от h, такой, что

$$\left\{(s,0) \middle| \; 0 < s < \delta\right\} \subset \Gamma_1,$$
$$\left\{(-s,0) \middle| \; 0 < s < \delta\right\} \subset \Gamma_0.$$

Пусть задана функция $\varphi^h \in H^{1/2}(\Gamma_0^h)$ и пусть $z_i = (s_i, n_i)$ – узел триангуляции, принадлежащий Γ_1^h. Положим

$$(t_N \varphi^h)(s_i, n_i) = \begin{cases} (1 - s_i/\delta)\, \varphi^h(-\tilde{s}_i, \tilde{n}_i), & 0 \le s_i \le \delta, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $(-\tilde{s}_i, \tilde{n}_i)$ – координаты узла $\tilde{z}_i \in \Gamma_0^h$, который является ближайшим к точке с координатами $(-s_i, n_i)$. Если такой узел не единственный, то можно выбрать любой.

Аналогично определяется оператор t_N в окрестности других точек стыковки Γ_0 и Γ_1. Из нижеследующей леммы 3.3.2 следует, что норма оператора t_N ограничена константой, не зависящей от h. По существу, оператор t_N – оператор симметричного отражения с умножением на срезающую функцию.

Лемма 3.3.2. Пусть на отрезке [-1,1] равномерная сетка с шагом $h = 1/n$. Тогда для любой функции $\varphi^h \in H^{1/2}(0,1)$ имеет место оценка

$$\left\| \tilde{\varphi}^h \right\|^2_{H^{1/2}(-1,1)} \le (8 + 6/n) \left\| \varphi^h \right\|^2_{H^{1/2}(0,1)},$$

где

$$\tilde{\varphi}^h(ih) = \begin{cases} \varphi^h(ih), & i = 0,1,...,n, \\ \xi(-ih)\,\varphi^h(-ih), & i = 0,-1,...,-n. \end{cases}$$

Здесь $\xi(ih) = 1 - ih$ – функция срезки.

Доказательство. Очевидно, что

$$\left\| \tilde{\varphi}^h \right\|^2_{L_{2,h}(-1,1)} = \sum_{i=-n}^{n} (\tilde{\varphi}^h(ih))^2 h \le$$

$$\le 2\sum_{i=0}^{n} (\varphi^h(ih))^2 h = 2\left\| \varphi^h \right\|^2_{L_{2,h}(0,1)}.$$

Далее

$$\left|\tilde{\varphi}^h\right|^2_{H^{1/2}(-1,1)} = \sum_{i=-n}^{n}\sum_{\substack{j=-n\\ i\neq j}}^{n} \frac{(\tilde{\varphi}^h(ih)-\tilde{\varphi}^h(jh))^2}{|ih-jh|^2}h^2 \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{(\xi(ih)\varphi^h(ih)-\xi(jh)\varphi^h(jh))^2}{|ih-jh|^2}h^2 +$$

$$+2\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{(\xi(ih)\varphi^h(ih)-\varphi^h(jh))^2}{|ih+jh|^2}h^2 +$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{(\varphi^h(ih)-\varphi^h(jh))^2}{|ih-jh|^2}h^2 = I_1 + 2I_2 + \left|\varphi^h\right|^2_{H^{1/2}(0,1)}.$$

Оценим первое слагаемое I_1.

$$I_1 \le 2\Big(\sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{(\xi(ih)\varphi^h(ih)-\xi(ih)\varphi^h(jh))^2}{|ih-jh|^2}h^2 +$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{(\xi(ih)\varphi^h(jh)-\xi(jh)\varphi^h(jh))^2}{|ih-jh|^2}h^2\Big) \le$$

$$\le 2\Big(\sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{(\varphi^h(ih)-\varphi^h(jh))^2}{|ih-jh|^2}h^2 +$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{[\varphi^h(jh)]^2(\xi(ih)-\xi(jh))^2}{|ih-jh|^2}h^2\Big) =$$

$$= 2\left|\varphi^h\right|^2_{H^{1/2}(0,1)} + 2(n+1)h\left\|\varphi^h\right\|^2_{L_{2,h}(0,1)}.$$

Теперь оценим второе слагаемое

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le 2\Big(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{(\xi(ih)\varphi^h(ih)-\varphi^h(ih))^2}{|ih+jh|^2}h^2+\\
&+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{(\varphi^h(ih)-\varphi^h(jh))^2}{|ih+jh|^2}h^2\le\\
&\le 2\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{[\varphi^h(ih)]^2(1-\xi(ih))^2}{|ih+jh|^2}h^2+2\left|\varphi^h\right|^2_{H^{1/2}(0,1)}\le\\
&\le 2(n+1)h\left\|\varphi^h\right\|^2_{L_{2,h}(0,1)}+2\left|\varphi^h\right|^2_{H^{1/2}(0,1)}.
\end{aligned}
$$

Суммируя полученные оценки, получаем утверждение леммы.

В силу теоремы 1.2.3 норма оператора следа $I_{\Gamma_0^h}$ ограничена константой, не зависящей от h, и, следовательно, норма оператора R_{Π,Γ_0} также ограничена константой, не зависящей от h. Легко видеть, что

$$R_{\Pi,\Gamma_0}T_{\Pi,\Gamma_0}u^h=u^h,\quad \forall u^h\in H(\Omega^h,\Gamma_0^h)$$

и, следовательно, условие леммы 3.1.1 выполнено.

Для перехода на квадратную сетку в квадрате Π снова будет использовать операторы R_Q и T_Q из (3.3.13) и (3.3.14) соответственно. Положим

$$C_{\Gamma_0}^{-1}=R_{\Pi,\Gamma_0}\,R_Q\,B_Q^{-1}\,R_Q^*\,R_{\Pi,\Gamma_0}^*,$$

где B_Q из (3.3.12). Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3.2. Существуют положительные константы c_8, c_9, не зависящие от h, такие, что

$$c_8(A^{-1}u,u)\le(C_{\Gamma_0}^{-1}u,u)\le c_9(A^{-1}u,u)\quad \forall u,$$

где A из (1.1.8).

Замечание 3.3.2. Очевидно, что для реализации умножения операторов t_N и t_N^* на векторы требуется $O(h^{-1})$ арифметических операций. Таким образом, реализация умножения $R_{\Pi,\Gamma_0} R_Q$ и $R_Q^* R_{\Pi,\Gamma_0}^*$ на соответствующие вектора требует $O(h^{-2})$ арифметических операций.

Явные операторы продолжения сеточных функций с границы во внутренность области применяются не только в методе фиктивного пространства, но и, например, в методе декомпозиции области (глава 2), а также имеет самостоятельное значение при численном решении неоднородных задач Дирихле. При этом при определении эффективных операторов продолжения не всегда целесообразно использовать вспомогательную сетку, построенную с помощью приграничной системы координат. В ряде случаев можно эффективно использовать заданную структуру данных и реализовать идею построения оператора продолжения для этой структуры данных. Например, рассмотрим следующий модельный случай.

Пусть Ω – единичный квадрат

$$\Omega = \left\{(x,y) \middle| \; 0 < x < 1, \; 0 < y < 1\right\},$$

в котором введена равномерная триангуляция Ω^h с шагом $h = 1/n, \;\; n \in N$. Пусть на границе квадрата Γ задана сеточная функция $\varphi^h \in H^{1/2}(\Gamma^h)$.

Определим явный оператор продолжения

$$t : H^{1/2}(\Gamma^h) \to H(\Omega^h)$$

для этой модельной задачи в два этапа. Сначала продолжим значение функции φ^h с узлом с координатами $(x_i, 0)$, $i = 0,1,...,n$ во внутренность квадрата. Для этого определим вспомогательную функцию $\varphi_1(x_i)$, $i = 0,1,...,3n$:

$$\varphi_1^h(x_i) = \begin{cases} \varphi^h(1 - x_i, 0), & 0 \le i \le n, \\ \varphi^h(x_i - 1, 0), & n \le i \le 2n, \\ \varphi^h(3 - x_i, 0), & 2n \le i \le 3n, \end{cases}$$

а по функции $\varphi_1^h(x_i)$ определим функцию $u_1^h \in H(\Omega^h)$ по следующим формулам

$$v_1^h(x_\ell, y_j) = \sum_{i=-j}^{j} \varphi_1^h(1 + x_\ell + i\,h), \quad j = 0,1,...,n, \quad \ell = 0,1,...,n. \quad (3.3.15)$$

$$u_1^h(x_\ell, y_j) = \frac{(1 - j/n)}{2j + 1}\, v_1^h\,(x_\ell, y_j), \quad j = 0,1,...,n, \quad \ell = 0,1,...,n. \quad (3.3.16)$$

Очевидно, что формулы (3.3.15), (3.3.16) являются аналогами формул (3.3.4), (3.3.5) и, соответственно, существует константа c_{10}, не зависящая от h, такая, что

$$\left\| u_1^h \right\|_{H^1(\Omega^h)} \le c_{10} \left\| \varphi_1^h \right\|_{H^{1/2}(0,3)}.$$

Для оценки нормы функции φ_1^h через норму функции φ^h будем использовать условия сшивки функций из $H^{1/2}$ [124]. Дадим формулировку этого условия.

В пространстве R^m рассмотрим следующие области:

$$\begin{aligned}
g_1 &= \left\{ x = (x_1,...,x_m) \middle| \quad 0 < x_i < 1,\ i = 1,2,...,m \right\},\\
g_2 &= \left\{ x = (x_1,...,x_m) \middle| -1 < x_1 < 0,\ 0 < x_i < 1,\ i = 2,...,m \right\},\\
g_3 &= \left\{ x = (x_1,...,x_m) \middle| -1 < x_1 < 1,\ 0 < x_i < 1,\ i = 2,...,m \right\}.
\end{aligned}$$

Имеет место следующая лемма

<u>**Лемма 3.3.3.**</u> Существует положительные константы $\alpha_1,\ \alpha_2$, такие, что

$$\alpha_1 \| \varphi \|^2_{H^{1/2}(g_3)} \le \sum_{i=1}^{2} \| \varphi \|^2_{H^{1/2}(g_i)} +$$
$$+ \int_0^1 \frac{\int_0^1 \cdots \int_0^1 (\varphi(\xi_1, x_2, ..., x_m) - \varphi(-\xi_1, x_2, ..., x_m))^2 \, dx_3 ... dx_m}{\xi_1} d\xi_1 \le$$
$$\le \alpha_2 \| \varphi \|^2_{H^{1/2}(g_3)} \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(g_3).$$

Из леммы 3.3.3 немедленно следует существование константы c_{11}, не зависящей от h, такой, что

$$\left\| \varphi_1^h \right\|_{H^{1/2}(0,3)} \le c_{11} \left\| \varphi^h \right\|_{H^{1/2}(\Gamma^h)}.$$

Аналогично, по значениям функции φ^h в узлах с координатами $(x_i, 1),\ i = 0,1,...,n$, определим вспомогательную функцию

$\varphi_2^h(x_i),\ i = 0,1,...,3n$ и функцию $u_2^h \in H(\Omega^h)$. Используя функции u_1^h и u_2^h, определим функцию $\psi^h \in H^{1/2}(\Gamma)$:

$$\psi^h = \varphi^h - (u_1^h + u_2^h)\big|_\Gamma .$$

Заметим, что $\psi^h(x_i,0) = \psi^h(x_i,1) = 0,\ i = 0,1,...,n$. На втором этапе алгоритма строится продолжение функции ψ^h в узлах с координатами $(0,y_i),\ i = 0,1,...,n$. Определим вспомогательную функцию $\psi_1^h(y_i),\ i = 0,1,...,3n$:

$$\psi_1^h(y_i) = \begin{cases} -\psi^h(0,1-y_i), & 0 \le i \le n, \\ \ \ \psi^h(0,y_i - 1), & n \le i \le 2n, \\ -\psi^h(0,3-y_i), & 2n \le i \le 3n, \end{cases}$$

а по функции $\psi_1^h(y_i)$ определим функцию $u_3^h \in H(\Omega^h)$ по следующим формулам:

$$v_3^h(x_i, y_\ell) = \sum_{j=-i}^{i} \psi_1^h(1 + y_\ell + jh), \quad i = 0,1,...,n, \quad \ell = 0,1,...,n. \quad (3.3.17)$$

$$u_3^h(x_i, y_\ell) = \frac{(1 - i/n)}{(2i + \ell)}\, v_3^h(x_i, y_\ell), \quad i = 0,1,...,n, \quad \ell = 0,1,...,n. \quad (3.3.18)$$

Легко видеть, что из определения функции ψ_1^h мы имеем

$$u_3^h(x_i,0) = u_3^h(x_i,1) = 0, \quad i = 0,1,...,n.$$

Формулы (3.3.17), (3.3.18) также являются аналогом формул (3.3.4), (3.3.5) и, соответственно, существует константа, не зависящая от h, такая, что

$$\left\| u_3^h \right\|_{H^1(\Omega^h)} \le c_{12} \left\| \psi_1^h \right\|_{H^{1/2}(0,3)}.$$

Далее, из леммы 3.3.3 получаем оценки:

$$\left\| \psi_1^h \right\|_{H^{1/2}(0,3)} \le c_{13} \left\| \psi^h \right\|_{H^{1/2}(\Gamma^h)} \le c_{14} \left\| \varphi^h \right\|_{H^{1/2}(\Gamma^h)},$$

где константы c_{13}, c_{14} не зависят от h.

Аналогично, по значениям функции ψ^h в узлах с координатами $(1, y_i)$, $i = 0,1,...,n$, определим вспомогательную функцию $\psi_2^h(y_i)$, $i = 0,1,...,3n$ и функцию $u_4^h \in H(\Omega^h)$. Положим

$$u^h = \sum_{i=1}^{4} u_i^h.$$

Легко видеть, что

$$u^h \Big|_{\Gamma^h} = \varphi^h,$$
$$\left\| u^h \right\|_{H^1(\Omega^h)} \le c_{15} \left\| \varphi^h \right\|_{H^{1/2}(\Gamma^h)},$$

где константа c_{15} не зависит от h.

Замечание 3.3.3. Очевидно, что для построения оператора продолжения t реализация умножения на векторы операторов t и t^* может быть осуществлена за $O(h^{-2})$ арифметических операций.

3.4. Методы фиктивного пространства и многоуровневой декомпозиции

В данном пункте предлагается построение переобуславливающего оператора на основе метода фиктивного пространства и многоуровневой декомпозиции на неструктурированных сетках. В отличие от пункта 3.3 порядок применения метода фиктивного пространства меняется: на первом шаге улучшается структура сетки и осуществляется переход на фиктивную (вспомогательную) структурированную, но ещё не иерархическую сетку; на втором шаге улучшается геометрия – область заключается в фиктивную область простого вида (квадрат), в котором используется естественная иерархия сеток для построения многоуровневых переобуславливателей.

Итак, пусть в области Ω рассматривается задача (1.1.1), то есть

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+a_0(x)u=f(x), &\quad x\in\Omega,\\
u(x)=0, &\quad x\in\Gamma_0,\\
\frac{du}{dN}+\sigma(x)u=0, &\quad x\in\Gamma_1.
\end{aligned}
$$

Относительно области Ω, триангуляции Ω^h и её границы $\partial\Omega^h=\Gamma^h=\Gamma_0^h\bigcup\Gamma_1^h$ выполнены те же предположения, что и в пункте 1.1.

3.4.1. Переход на структурированную сетку

Чтобы использовать лемму 3.1.1, мы построим фиктивное (вспомогательное) пространство и соответствующие операторы. Чтобы сделать это, мы поместим область Ω в квадрат Π. Пусть K_i – объединение треугольников в триангуляции Ω^h, которые имеют общую вершину z_i и пусть d_i – максимальный радиус круга, вписанного в K_i. В квадрате Π мы введем вспомогательную сетку Π^h с шагом $\overline{h}$ порядка h такую, что

$$\overline{h} < 1/(2\sqrt{2}) \min_i d_i . \qquad (3.4.1)$$

Здесь дополнительный (по сравнению с предположением из пункта 3.3) множитель $1/2$ связан с рассмотрением смешанных краевых условий.

Пусть $\overline{h} = \ell \cdot 2^{-J}$, где ℓ – длина сторон Π и J – целое положительное число. Обозначим узлы сетки Π^h через Z_{ij}:

$$Z_{ij} = (x_i, y_j), \quad i, j = 0,1,...,L$$

и ячейки Π^h через D_{ij}:

$$D_{ij} = \left\{ (x,y) \middle| \ x_i \le x < x_{i+1}, \quad y_j \le y < y_{j+1} \right\},$$

$$\Pi^h = \bigcup_{i,j=0}^{L} D_{ij}.$$

Пусть Q^h – наименьшая фигура, состоящая из ячеек D_{ij} и включающая в себя Ω^h: $\Omega^h \subset Q^h$. Пусть S^h – множество граничных узлов в Q^h. Разделим множество S^h на два подмножества S_0^h и S_1^h таких, что если

$$\overline{D}_{ij} \bigcap \Gamma_0 \ne \varnothing$$

все узлы из $D_{ij} \bigcap S^h$ находятся в S_0^h

$$S_1^h = S^h \setminus S_0^h.$$

Используя диагонали ячеек, триангулируем Q^h и Π^h; далее обозначения Q^h и Π^h применяются также для этих триангуляций. Пусть $H(Q^h, S_0^h)$– пространство вещественных непрерывных функций, которые линейны на треугольниках из Q^h и зануляются в узлах S_0^h. Это то пространство, которое будет использовано как фиктивное в лемме 3.1.1.

Теперь определим оператор проектирования R

$$R : H(Q^h, S_0^h) \to H(\Omega^h, \Gamma_0^h),$$

оператор продолжения T

$$T : H(\Omega^h, \Gamma_0^h) \to H(Q^h, S_0^h)$$

и некоторый легко обратимый оператор в пространстве $H(\Omega^h, S_0^h)$.

Начнем с оператора R. Для заданной сеточной функция

$$U^h(Z_{ij}) \in H(Q^h, S_0^h)$$

определим функцию $u^h \in H(\Omega^h, S_0^h)$. Пусть z_ℓ – вершина в триангуляции Ω^h; предположим $z_\ell \in D_{ij}$. Положим

$$u^h(z_\ell) = (R\,U^h)(z_\ell) = U^h(Z_{ij}). \tag{3.4.2}$$

Функция u^h равна нулю в узлах $z_\ell \in \Gamma_0^h$.

Теперь определим оператор T. Для заданной функции $u^h \in H(\Omega^h, S_0^h)$ определим $U^h \in H(Q^h, S_0^h)$. Функция U^h равна нулю в узлах $Z_{ij} \in S_0^h$. На других узлах U^h зададим следующим образом. Если ячейка D_{ij} содержит заданную вершину z_ℓ триангуляции Ω^h, то положим

$$U^h(Z_{ij}) = (T u^h)(Z_{ij}) = u^h(z_\ell).$$

Для всех оставшихся узлов $Z_{ij} \in Q^h$ мы найдем ближайшую вершину z_ℓ триангуляции Ω^h (если есть несколько ближайших вершин, то мы можем выбрать любую из них) и положить

$$U^h(Z_{ij}) = (T u^h)(Z_{ij}) = u^h(z_\ell).$$

Наконец, в пространстве $H(Q^h, S_0^h)$ определим оператор A_Q:

$$(A_Q U, V) = \int\limits_{Q_h} ((\nabla U^h, \nabla V^h) + U^h \cdot V^h)\, dx\, dy \qquad \forall U^h, V^h \in H(Q^h, S_0^h), \tag{3.4.3}$$

где U^h и V^h – соответствующее продолжение векторов U и V.

Теорема 3.4.1. Существуют положительные константы $c_{3,} c_4$, не зависящие от h, такие, что

$$c_3(A^{-1}u, u) \le (RA_Q^{-1}R^* u, u) \le c_4(A^{-1}u, u) \quad \forall u \in R^N.$$

Здесь R и A_Q – операторы из (3.4.2) и (3.4.3) соответственно; R^* – транспонированный к R (ниже мы используем те же обозначения для оператора и его матричного представления).

Доказательство. Теорема легко следует из леммы 3.1.1, условия (3.4.1) и эквивалентности H^1-норм конечно-элементных функций в пространствах $H(\Omega^h,\Gamma_0^h)$ и $H(Q^h,S_0^h)$ а так же разностных аналогов этих норм [95].

Замечание 3.4.1. Реализация оператора R эквивалентна кусочно-постоянной интерполяции. Легко видеть, что число арифметических операций, требующихся для умножения R или R^* на вектор, пропорционально числу узлов сеточной области.

Таким образом, построение переобуславливающего оператора на неструктурированных триангуляциях сводится к построению переобуславливающего оператора для A_Q. Эта задача будет рассмотрена в пункте 3.4.2.

3.4.2. Многоуровневые переобуславливающие операторы

Чтобы определить переобуславливающий оператор для A_Q, мы снова используем лемму 3.1.1. Здесь $H(\Pi^h,\partial\Pi^h)$ – фиктивное пространство, которое состоит из кусочно-линейных непрерывных функций, обращающихся в 0 на границе $\partial\Pi$ квадрата Π. Эффективный переобуславливающий оператор в $H(\Pi^h,\partial\Pi^h)$ хорошо известен, в частности, мы можем использовать BPX-переобуславливатель [135]. Чтобы сделать это, мы используем следующее построение.

Разделим область $\Pi \setminus \bar{\Omega}$ на две непересекающихся подобласти таких, что

$$\begin{aligned} &\Pi \setminus \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 \bigcup \bar{\Omega}_1, \\ &\Omega_0 \bigcap \Omega_1 = 0, \\ &\partial\Omega_0 \bigcap \partial\Omega = \Gamma_0, \\ &\partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1. \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

$\bar{\Gamma}_1$ включает и конечные точки. Согласно (3.4.4), представим триангуляцию $\Pi^h \setminus Q^h$ как объединение двух непересекающихся частей

$$\Pi^h \setminus Q^h = \Omega_0^h \bigcup \Omega_1^h,$$

где Ω_0^h и Ω_1^h – сеточные аппроксимации областей Ω_0 и Ω_1 соответственно. Обозначим

$$\begin{aligned} &G = \Omega \bigcup \Gamma_1 \bigcup \Omega_1, \\ &G^h = Q^h \bigcup \Omega_1^h. \end{aligned}$$

$H(G^h, \partial G^h)$ – конечно-элементное пространство функций, обращающихся в 0 на ∂G^h.

Рассмотрим в Π^h последовательность сеток

$$\Pi_0^h, \Pi_1^h, ..., \Pi_J^h \equiv \Pi^h$$

с шагами

$$h_0 = \ell,\ h_1 = \ell \cdot 2^{-1},\ \dots\ ,\ h_J \equiv \bar{h} = \ell \cdot 2^{-J}.$$

Триангулируем эти сетки и рассмотрим соответствующие конечно-элементные пространства

$$W_0^h \subset W_1^h \subset \ldots \subset W_J^h \equiv H_h(\Pi^h).$$

Через $\{\Phi_i^{(\ell)}\}_{i=1}^{N_1}$ обозначим нодальный базис пространства W_ℓ^h, $\ell = 0,1,\ldots,J$.

Во-первых, давайте рассмотрим случай $\Gamma_1 = \Gamma$ и, соответственно, $S_1^h = S^h$.

Через $\tilde{\Phi}_i^{(\ell)}$ обозначим ограничение базисных функций $\Phi_i^{(\ell)}$ внутри Q^h. Для каждой функции $U^h \in H_h(Q^h)$ определим соответствующую функцию $\tilde{U}^h \in H_h(\Pi^h)$:

$$\begin{aligned} &U^h(Z_{i,j}), && Z_{i,j} \in Q^h, \\ \tilde{U}^h(Z_{i,j}) = &0, && Z_{i,j} \in \Pi^h \setminus Q^h. \end{aligned}$$

Определим

$$C_N^{-1} U^h = \sum_{\ell=0}^{J} \sum_{\operatorname{supp}\Phi_i^{(1)} \cap Q^h \neq 0} (\tilde{U}^h, \Phi_i^{(\ell)})_{L_2(\Pi)} \tilde{\Phi}_i^{(\ell)} \qquad \forall U^h \in H_h(Q^h).$$

<u>**Теорема 3.4.1.**</u> Существуют положительные константы c_5 и c_6, не зависящие от h, и такие, что для любого u

$$c_5(A^{-1}u,u) \le (R\,C_N^{-1}\,R^* u,u) \le c_6(A^{-1}u,u).$$

<u>Доказательство.</u> Обозначим

$$R_N : H_h(\Pi^h) \to H_h(Q^h)$$

оператор сужения на Q^h:

$$(R_N U^h)(Z_{i,j}) = U^h(Z_{i,j}) \quad \forall Z_{i,j} \in Q^h.$$

Если разделить узлы в Π^h на две группы: (1) – узлы в Q^h (включая S^h) и (2) – оставшиеся узлы, тогда мы получим следующее матричное представление для R_N:

$$R_N = (IO),$$

где I – единичная матрица, соответствующая узлам из группы (1) и O – нулевая матрица, соответствующая узлам из группы (2). Очевидно, что

$$\left\| R_N U^h \right\|_{H^1(Q^h)} \le \left\| U^h \right\|_{H^1(\Pi^h)} \quad \forall U^h \in H_h(\Pi^h). \tag{3.4.5}$$

По теореме о продолжении сеточных функций [72] существует оператор продолжения

$$T_N : H_h(Q^h) \to H_h(\Pi^h)$$

равномерно ограниченный по отношению к h.

Согласно лемме 3.1.1 и [135] существуют положительные константы c_5 и c_6, не зависящие от h, и такие, что

$$c_7(A_Q^{-1}U, U) \le (R_N C_\Pi^{-1} R_N^* U, U) \le c_8(A_Q^{-1}U, U) \quad \forall\, U,$$

где A_Q – оператор из 3.4.3 и C_Π^{-1} задается следующим образом

$$C_\Pi^{-1} U^h = \sum_{\ell=0}^{J} \sum_{i=1}^{N_i} (U^h, \Phi_i^{(\ell)})_{L_2(\Pi)} \Phi_i^{(\ell)} \quad \forall\, U^h \in H_h(\Pi^h).$$

Подставив в значение точной формы R_N, мы завершим доказательство теоремы 3.4.1.

Теперь рассмотрим случай задачи Дирихле, то есть, случай, когда $\Gamma_0 = \Gamma$ и, соответственно, $S_0^h = S^h$. Зададим переобуславливатель следующим образом:

$$C_D^{-1} U^h = \sum_{\ell=0}^{J} \sum_{\overset{\circ}{\operatorname{supp}} \Phi_i^{(1)} \subset Q^h} (U^h, \Phi_i^{(\ell)})_{L_2(Q^h)} \Phi_i^{(\ell)},$$

$$U^h \in H_h(Q^h).$$

<u>Теорема 3.4.2.</u> Существуют положительные константы c_9 и c_{10}, не зависящие от h, и такие, что для любого u

$$c_9(A^{-1}u, u) \le (RC_D^{-1}R^* u, u) \le c_{10}(A^{-1}u, u).$$

<u>Доказательство:</u> В этом случае эквивалентность операторов A_Q и C_D использует анализ новых методов [135, 179, 197, 132]. Однако доказательство носит достаточно громоздкий технический характер и, поэтому, опускается.

Теперь, исходя из леммы 3.1.1, мы получим утверждение теоремы 3.4.2.

В заключение, рассмотрим случай смешанных граничных условий, то есть, $\Gamma_0 \ne \varnothing$ и $\Gamma_1 \ne \varnothing$.

Обозначим

$$C_M^{-1} U^h = \sum_{\ell=0}^{J} \sum_{\substack{\overset{\circ}{\operatorname{supp}} \Phi_i^{(1)} \subset G^h, \\ \overset{\circ}{\operatorname{supp}} \Phi_i^{(1)} \cap Q^h \ne \varnothing}} (\tilde{U}^h, \Phi_i^{(\ell)})_{L_2(Q^h)} \tilde{\Phi}_i^{(\ell)} \quad \forall U^h \in H_h(Q^h).$$

<u>Теорема 3.4.3.</u> Существуют положительные константы c_{11} и c_{12}, не зависящие от h, и такие, что для любого u

$$c_{11}(A^{-1}u,u) \le (R\,C_M^{-1}\,R^*u,u) \le c_{12}(A^{-1}u,u).$$

<u>Доказательство:</u> Теорема доказывается, используя доказательство теоремы 3.4.2 и, затем, теоремы 3.4.1. В самом деле, для первого шага «продолжим» граничные условия Дирихле из S_0^h на границу триангуляции Π^h. Чтобы сделать это, мы рассмотрим пространство конечных элементов $H(G^h,\partial G^h)$ и зададим

$$C_G^{-1}\,U^h = \sum_{\ell=0}^{J} \sum_{\overset{\circ}{\mathrm{supp}}\,\Phi_i^{(1)} \subset G^h} (U^h, \Phi_i^{(\ell)})_{L_2(G^h)}\ \Phi_i^{(\ell)}$$

$$\forall U^h \in H(G^h,\partial G^h).$$

Теперь, согласно теореме 3.4.2, существуют положительные константы c_{13} и c_{14}, не зависящие от h, и такие, что

$$c_{13}\left\| U^h \right\|^2_{H^1(G^h)} \le (C_G\,U,U) \le c_{14}\left\| U^h \right\|^2_{H^1(G^h)} \quad \forall U^h \in H_h(G^h).$$

На втором этапе определим

$$R_{N,G}:\ H_h(G^h) \to H_h(Q^h)$$

как ограничение на Q^h из G^h:

$$(R_{N,G}\,U^h)(Z_{i,j}) = U^h(Z_{i,j}), \quad \forall Z_{i,j} \in Q^h.$$

Теперь, из леммы 3.1.1 получаем

$$c_{15}(A_Q^{-1}U,U) \le (R_{N,G}\,C_G^{-1}\,R_{N,G}^{*}\,U,U) \le c_{16}(A_Q^{-1}U,U) \qquad \forall U^h \in H(Q^h,\partial Q^h),$$

где c_{15}, c_{16} не зависят от h. Снова используя явную форму $R_{N,G}$, мы полностью доказываем теорему 3.4.3.

Приведем результаты численных экспериментов для задач на неструктурированных сетках с использованием многоуровневого переобуславливающего оператора. Рассмотрим задачу

$$-\mathrm{div}(p(x)\nabla u) + q(x)u = f \quad (x_1,x_2) \in \Omega = \{x_1^2 + x_2^2 < 1,\ \ x_1,x_2 > 0\},$$
$$u(x)\,|_{x\in\Gamma_0} = x_1^2 + x_2^2, \qquad \Gamma_0 = (0,\ 0 \le x_2 \le 1) \cup (0 \le x_1 \le 1,\ 0)$$
$$\frac{\partial u(x)}{\partial n}\,|_{x\in\partial\Omega\setminus\Gamma_0} = \frac{\partial(x_1^2 + x_2^2)}{\partial n}, \quad p(x) = \mathrm{const} = \tau > 0,\ \ q(x) = \mathrm{const} = 1.$$

Пример триангуляции области Ω приведен на рисунке 3.4.1.

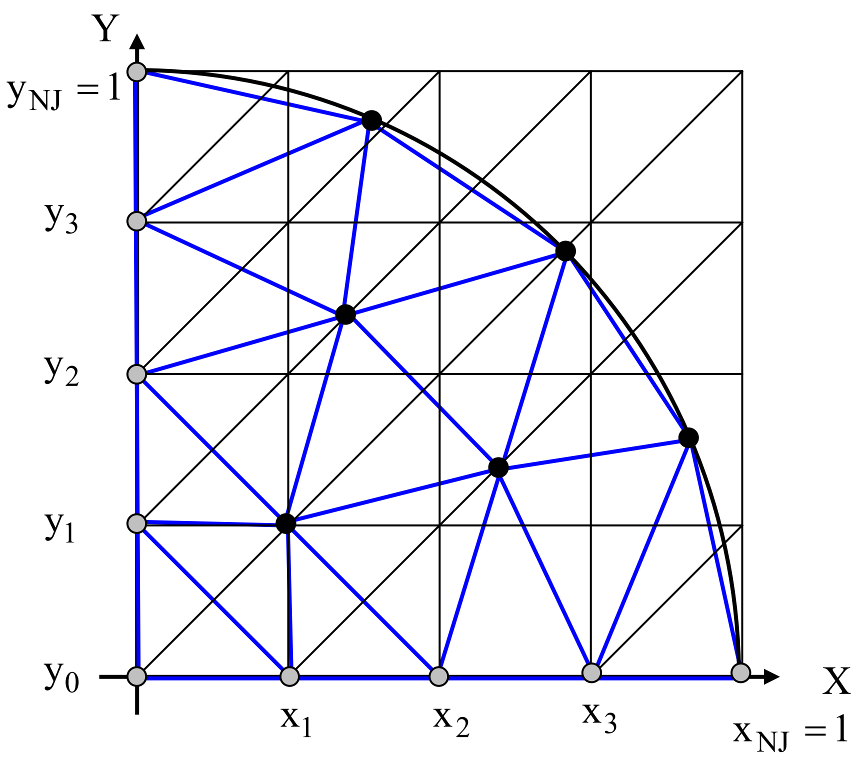


Рис. 3.4.1

В таблице 3.4.1 приведено число итераций для метода сопряженных градиентов.

$$\bar{u}^0 = 0 \text{ в } \Omega_h, \quad \bar{u}^0 = \bar{u} \text{ на } \partial\Omega_h, \quad \| \bar{u}^k - \bar{u} \|_{A_h} / \| \bar{u}^0 - \bar{u} \|_{A_h} \le \varepsilon$$

Таблица 3.4.1

τ	1		$\sqrt{h}$		h		$h\sqrt{h}$		h^2	
ε / N_J	10^{-3}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-6}
64	**10**	**19**	**11**	**21**	**11**	**21**	**10**	**21**	**7**	**13**
128	**10**	**20**	**11**	**21**	**12**	**24**	**10**	**19**	**6**	**13**
256	**11**	**21**	**12**	**22**	**12**	**23**	**10**	**21**	**6**	**14**
512	**10**	**21**	**11**	**22**	**13**	**26**	**10**	**22**	**6**	**14**
1024	**10**	**21**	**12**	**23**	**12**	**24**	**11**	**24**	**6**	**14**

4. Переобуславливающие операторы для задач с особенностями

В данной главе предлагается построение переобуславливающих операторов для двух классов задач с особенностями: эллиптических краевых задач с разрывными коэффициентами (на основе специального метода декомпозиции) и для анизотропных эллиптических краевых задач (с использованием эквивалентных нормировок в соответствующем пространстве следов сеточных функций).

4.1. Эллиптические краевые задачи с разрывными коэффициентами в малых подобластях

4.1.1. Постановка задачи

В этом разделе мы построим переобуславливающие операторы для систем сеточных уравнений, аппроксимирующие следующие краевые задачи

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0(x)u = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma. \end{cases} \qquad (4.1.1)$$

Предположим, что Ω – ограниченная и полигональная область, где Γ обозначает ее границу. Пусть Ω – объединение $(n+1)$ непересекающихся подобластей таких, что верно

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=0}^{n} \bar{\Omega}_i, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = 0, \quad i \neq j.$$

Здесь мы имеем полигональные подобласти Ω_i внутри Ω. Границы этих подобластей обозначим через Γ_i, $i = 1,...,n$. Область Ω_0 уже определена, как многосвязная $\Omega_0 = \Omega \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} \overline{\Omega}_i)$ и имеющая границу $\Gamma \cup (\bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i)$. Мы обозначим через $H_i = \mathrm{diam}(\Omega_i)$ диаметр i-й подобласти, $i = 1,...,n$. Предположим, что H_i могут быть малы так, что

$$0 < H_i \le 1.$$

Более того, для любых подобластей Ω_i, если существует подобласть Ω_j такая, что

$$\mathrm{dist}(\Omega_i, \Omega_j) \le \alpha_1 H_i,$$

тогда следующие условия

$$H_j = O(H_i), \quad \alpha_2 H_i \le \mathrm{dist}(\Omega_i, \Omega_j)$$

должны быть выполнены, где α_1 и α_2 – константы, не зависящие от H_i, $i = 1,...,n$. Это означает, что для любой подобласти Ω_i нет других подобластей, находящихся ближе, чем на расстоянии порядка $O(H_i)$.

Введём билинейную форму

$$a(u,v) = \int_{\Omega} (\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0(x) u v) dx$$

и линейный функционал

$$l(v) = \int_{\Omega} f(x) v dx.$$

Предположим, что коэффициенты в (4.1.1) такие, что $a(u,v)$ – симметричная билинейная форма в пространстве Соболева $H_0^1(\Omega)$. Пусть следующие неравенства

$$\alpha_3\, a(u,v) \le \int_\Omega \varepsilon(x)\left|\nabla(u)\right|^2 dx \le \alpha_4\, a(u,v) \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

верны с положительными константами α_3, α_4, которые не зависят от параметра ε такого, что

$$\varepsilon(x) = \mathrm{const} = \varepsilon_i \quad \forall x \in \Omega_i,$$

где

$$\varepsilon_0 = 1, \quad 0 < \varepsilon_i \le 1, \quad i = 1,...,n. \qquad (4.1.2)$$

Линейный функционал $l(v)$ непрерывен в $H_0^1(\Omega)$. Слабая формулировка проблемы (4.1.1) задана следующим образом. Найдем такое $u \in H_0^1(\Omega)$, что следующее условие верно для всех $v \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u,v) = \ell(v). \qquad (4.1.3)$$

Пусть $\Omega^h = \bigcup_{i=0}^{n} \Omega_i^h$ – однородная триангуляция области Ω, которая может быть характеризована параметром h.

Обозначим через $W \subset H_0^1(\Omega)$ пространство вещественных непрерывных функций линейных на треугольниках триангуляции Ω^h. Используя метод конечных элементов [116], вариационная формулировка (4.1.3) может быть преобразована в хорошо известную систему линейных алгебраических уравнений

$$Au = f. \tag{4.1.4}$$

Число обусловленности матрицы A зависит от параметров h, H_i и ε_i, и может быть большим. Наша цель – построение переобуславливателя B для проблемы (4.1.4) такое, что следующие неравенства верны для всех векторов $u \in R^N$

$$c_1(Bu,u) \le (Au,u) \le c_2(Bu,u). \tag{4.1.5}$$

Здесь символ N – размерность пространства W, и c_1, c_2 – положительные константы, не зависящие от параметров h, H_i и ε_i. Более того, умножение матрицы B^{-1} на вектор должно быть выполнено с небольшими арифметическими затратами. Переобуславливающий оператор B построен с использованием непересекающихся и пересекающихся (но без пересечения в коэффициентах) методов декомпозиции области. Здесь мы следуем [175]. Анализ этих методов аналогичен хорошо известному методу декомпозиции области Неймана-Дирихле. Однако предложенный метод не требует точного решения задач Дирихле в подобластях.

4.1.2. Декомпозиция области без пересечений

Построение переобуславливателя для системы (4.1.4) выполняется с помощью аддитивного метода Шварца. Для построения переобуславливающего оператора B мы используем представление пространства W в виде суммы

$$W = W_0 + W_1.$$

Разделим множество вершин триангуляция Ω^h на две группы: в первую объединим все вершины, которые лежат внутри Ω_i^h, $i = 1,...,n$, а во вторую вершины, лежащие в $\bar{\Omega}_0^h$. Подпространство W_0 соответствует первому множеству. Зададим следующие множества

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} \partial\Omega_i^h,$$

$$W_0 = \left\{ u^h \in W \middle| \; u^h(x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_0^h \right\},$$

$$W_{0,i} = \left\{ u^h \in W_0 \middle| \; u^h(x) = 0, \quad x \notin \Omega_0^h \right\}, \; i = 1,2,...,n.$$

Ясно, что W_0 представляет прямую сумму ортогональных подпространств $W_{0,i}$ относительно скалярного произведения в $H_0^1(\Omega)$

$$W_0 = W_{0,1} \oplus ... \oplus W_{0,n}.$$

Подпространство W_1 соответствует второй группе вершин в Ω^h и может быть определено следующим образом. Пусть множество V – пространство следов функций из W, заданных на S.

$$V = \left\{ \varphi^h \middle| \; \varphi^h(x) = u^h(x), \quad x \in S, \quad u^h \in W \right\}.$$

Для определения подпространства W_1 нам нужны операторы продолжения функций с сохранением нормы, заданных на S в Ω^h. Соответствующее построение основывается на лемме 1.2.3.

Для определения подпространства W_1 мы используем явный оператор продолжения

$$t^h : V \to W, \tag{4.1.6}$$

который был предложен для эллиптических задач второго порядка с гладкими коэффициентами в главе 2. Так, что для всех $\varphi^h \in V$ верно

$$\left\| u^h \right\|_{H^1(\Omega\backslash\Omega_0)} = \left\| t^h \varphi^h \right\|_{H^1(\Omega\backslash\Omega_0)} \le c_3 \left\| \varphi^h \right\|_{H^{1/2}(S)},$$

где соответствующая норма задана следующим образом

$$\| \varphi \|^2_{H^{1/2}(S)} = \sum_{i=1}^{n} \| \varphi \|^2_{H^{1/2}(\Gamma_i)}.$$

Теперь мы можем задать подпространство W_1 следующим образом

$$\begin{aligned} W_1 = \Big\{ u^h \Big| \; & u^h(x) = (t^h \varphi^h)(x), && x \in \Omega_i,\ i = 1,\dots,n, \\ & \varphi^h(x) = v^h(x), && x \in S, \\ & u^h(x) = v^h(x), && x \in \Omega_0^h,\ v^h \in W \Big\}. \end{aligned}$$

Очевидно, мы имеем

$$W = W_0 + W_1,$$

и эта декомпозиция пространства W устойчива в следующем смысле.

Лемма 4.1.1. Существует положительная константа c_4, не зависящая от параметров h, H, ε, и такая, что для любой функции $u^h \in W$ существуют функции $u_i^h \in W_i$, $i = 0,1$ такие, что верно

$$u_0^h + u_1^h = u^h,$$
$$a(u_0^h, u_0^h) + a(u_1^h, u_1^h) \le c_4 a(u^h, u^h).$$

Пусть C_i, $i = 0,1,...,n$ – переобуславливающий оператор в подпространстве конечных элементов $H_0^1(\Omega_i)$. Следовательно, мы имеем следующие неравенства для всех $u^h \in W \bigcap H_0^1(\Omega_i)$

$$c_5 \left\| u^h \right\|^2_{H^1(\Omega_i)} \le (C_i u, u) \le c_6 \left\| u^h \right\|^2_{H^1(\Omega_i)}, \tag{4.1.7}$$

где константы c_5, c_6 не зависят от h, H_i. Например, операторы C_i могут быть построены с использованием леммы о фиктивном пространстве. Продолжим операторы C_i нулем вне Ω_i и обозначим через C_i^+ псевдообратные операторы, соответствующие этим продолжениям, а через C_0 переобуславливатель в $W \bigcap H^1(\Omega_0)$, то есть

$$c_5 \left\| u^h \right\|^2_{H^1(\Omega_0)} \le (C_0 u, u) \le c_6 \left\| u^h \right\|^2_{H^1(\Omega_0)} \quad \forall u^h \in W \bigcap H^1(\Omega_0).$$

Зададим следующий оператор

$$B_{nov}^{-1} = t C_0^{-2} t^* + \frac{1}{\varepsilon_1} C_1^+ + ... + \frac{1}{\varepsilon_n} C_n^+.$$

Здесь оператор t^* – оператор, сопряженный к t. Имеет место следующая теорема.

<u>Теорема 4.1.1.</u> Существуют положительные константы c_7, c_8, не зависящие от параметров h, H_i, ε_i, и такие, что для всех функций $u \in R^N$ выполняются следующие неравенства

$$c_7(B_{nov}u,u) \le (Au,u) \le c_8(B_{nov}u,u).$$

4.1.3. Декомпозиция области с перекрытием.

Цель этого раздела – построение переобуславливающего оператора для задачи (4.1.4) без использования оператора продолжения t из (4.1.6).

Пусть C – переобуславливающий оператор в пространстве конечных элементов W такой, что для всех функций $u^h \in W$ мы имеем

$$c_1\left\|u^h\right\|^2_{H^1(\Omega)} \le (Cu,u) \le c_2\left\|u^h\right\|^2_{H^1(\Omega)}, \qquad (4.1.8)$$

где константы c_1, c_2 не зависят от h. Мы определим переобуславливатель B_{ov}^{-1} следующим образом

$$B_{ov}^{-1} = C^{-1} + \frac{1}{\varepsilon_1}C_1^+ + \ldots + \frac{1}{\varepsilon_n}C_n^+.$$

Здесь псевдообратные операторы C_i^+ соответствуют операторам из (4.1.7). Имеет место следующая теорема:

Теорема 4.1.2. Существуют положительные константы c_3, c_4, не зависящие от параметров h, H_i, ε_i, и такие, что для всех функций $u \in R^N$ выполняются неравенства

$$c_3(B_{ov}u,u) \le (Au,u) \le c_4(B_{ov}u,u).$$

Доказательство. В случае $\varepsilon_i = 1$, i=1,...,n из теоремы 4.2.1 следует, что существуют константы c_5, c_6, не зависящие от h и H_i, такие, что

$$c_5(C^{-1}u,u) \le t\,C_0^{-1}\,t^* + C_1^+ + \ldots + C_n^+ \le c_6(C^{-1}u,u)$$

для всех $u \in R^N$. Из 4.1.2 мы имеем

$$0 \le (C_i^+u,u) \le 1/\varepsilon_i \le (C_i^+u,u) \quad \forall u \in R^N.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}
(B_{nov}^{-1}u,u) &= t\,C_0^{-1}\,t^* + (1/\varepsilon_1)C_1^+ + \ldots + (1/\varepsilon_n)C_n^+ \le \\
&\le t\,C_0^{-1}\,t^* + C_1^+ + \ldots + C_n^+ + (1/\varepsilon_1)C_1^+ + \ldots + (1/\varepsilon_n)C_n^+ \le \\
&\le \max\{c_6, 1\}((C^{-1} + (1/\varepsilon_1)C_1^+ + \ldots + (1/\varepsilon_n)C_n^+)u,u) = \\
&= \max\{c_6, 1\}(B_{ov}^{-1}u,u) \le \\
&\le \max\{c_6, 1\}\,\max\{1/c_5, 1\}(t\,C_0^{-1}\,t^* + C_1^+ + \ldots + C_n^+ + \\
&\qquad + (1/\varepsilon_1)C_1^+ + \ldots + (1/\varepsilon_n)C_n^+)u,u) \le \\
&\le 2\max\{c_6, 1\}\,\max\{1/c_5, 1\}(B_{nov}^{-1}u,u).
\end{aligned}$$

Замечание. Теорема 4.1.2 может быть доказана напрямую без использования оператора продолжения t.

Подобная техника может быть использована для построения переобуславливающего оператора для анизотропных проблем.

Обозначим через $a_i(u,v)$ ограничение билинейной формы $a(u,v)$ на Ω_i

$$a_i(u,v) = \int\limits_{\Omega_i} (\sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0(x)u\,v)dx.$$

Предположим, что для любых $\Omega_{i,}$ $i = 1,...,n$ существуют некоторые декартовые системы координат (s_i, n_i) такие, что

$$\alpha_4 a_i\left(u,v\right) \le \int\limits_{\Omega_i} (\varepsilon_i(\frac{\partial u}{\partial s_i})^2 + (\frac{\partial u}{\partial n_i})^2)d\Omega \le \alpha_5 a_i(u,v)$$

$$\forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Здесь параметры ε_i удовлетворяют (4.1.2) и константы α_4, α_5 не зависят от ε_i и H_i. В подпространстве Ω_0 параметр $\varepsilon_0 = 1$.

Пусть C_i, $i = 1,...,n$ – анизотропные переобуславливающие операторы в подпространствах конечных элементов $H_0^1(\Omega_i)$:

$$c_7 a_i(u^h, u^h) \le (C_i u, u) \le c_8 a_i(u^h, u^h) \quad \forall u^h \in W \bigcap H_0^1(\Omega_i).$$

Пусть

$$B_{ani}^{-1} = C^{-1} + C_1^{+} + ... + C_n^{+},$$

где C^{-1} как в изотропном случае.

Имеет место следующая теорема:

<u>Теорема 4.1.3.</u> Существуют положительные константы c_9, c_{10} не зависящие от h, H_i, ε_i такие, что

$$c_9(B_{ani}u,u) \le (Au,u) \le c_{10}(B_{ani}u,u) \quad \forall u \in R^N.$$

Доказательство. Доказательство теоремы базируется на следующем очевидном неравенстве

$$0 \le \int_{\Omega_i} (\varepsilon_i (\frac{\partial u}{\partial s_i})^2 + (\frac{\partial u}{\partial n_i})^2)\, d\Omega \le \int_{\Omega_i} ((\frac{\partial u}{\partial s_i})^2 + (\frac{\partial u}{\partial n_i})^2)\, d\Omega.$$

Приведём некоторые численные эксперименты, иллюстрирующие эффективность метода декомпозиции пересекающихся областей, представленного выше. Для этих примеров мы рассмотрим единичный квадрат с квадратными подобластями Ω_i, $i = 1,...,9$ с диаметром H, где

$$H = 1/11. \tag{4.1.9}$$

Расстояние между соседними подобластями равно $2H$ (см. рисунок 4.1.1).

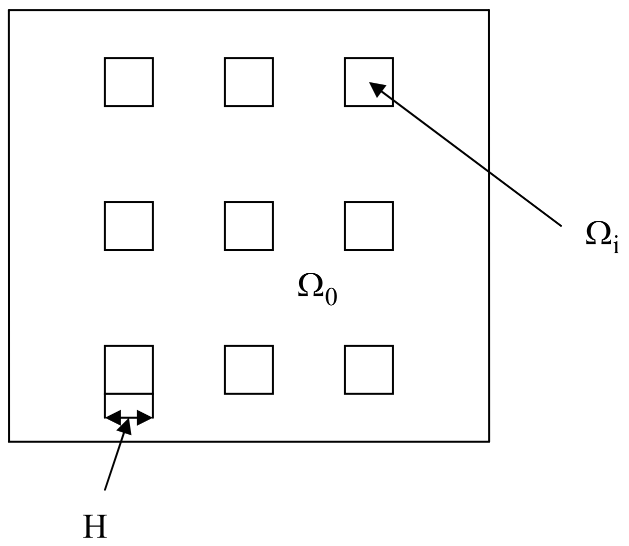


Рис. 4.1.1

Пусть Ω^h равномерная триангуляция с шагом сетки h. В области Ω мы рассмотрим следующую билинейную норму

$$a(u,v) = \int \varepsilon(x) \left| \nabla(u) \right|^2 dx,$$

где $\varepsilon(x)$ из (4.1.2) и $\varepsilon_i = \varepsilon,\ i = 1,...,9$. Матрица A из (4.1.4), а для построения оператора B_{ov}^{-1} используется явное обращение в Ω и подобластях $\Omega_1,...,\Omega_9$ оператора Лапласа. В таблице 4.1.1 представлены число обусловленности оператора $B_{ov}^{-1}A$ с соответствующим шагом сетки h и параметром ε

Таблица 4.1.1

ε	h			
	H/4	H/8	H/16	H/32
10^{-1}	2.5625	2.7335	2.8609	2.9548
10^{-3}	2.7313	2.9732	3.1598	3.3011
10^{-5}	2.7333	2.9761	3.1634	3.3054

4.2. Переобуславливающие операторы для анизотропных задач

Рассмотрим краевую задачу:

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} = f(x), \quad x \in \Omega, \\
&u(x) = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad x \in \Gamma = \partial\Omega.
\end{aligned}
\tag{4.2.1}
$$

Предположим что матрица $\left\{a_{i,j}(x)\right\}$ положительно определенная и область Ω – объединение непересекающихся подобластей, которые являются прямоугольниками:

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\Omega}_i, \quad \Omega_i \bigcap \Omega_j = \varnothing, \quad i \neq j.$$

Пусть

$$\gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \partial\Omega_i \setminus \Gamma.$$

Пусть $a(u,v)$ – билинейная форма краевой задачи (4.2.1). Предположим, что существуют константы α_0, α_1 и

$$P(x) = P^{(i)} = \begin{pmatrix} p_1^{(i)} & 0 \\ 0 & p_2^{(i)} \end{pmatrix}, \quad x \in \Omega_i$$

кусочно-постоянная матрица такая, что

$$\alpha_0\, a(v,v) \leq \int_{\Omega} (P(x)\nabla v \cdot \nabla v) d\Omega \leq \alpha_1\, a\left(v,v\right)$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Коэффициенты матрицы $P(x)$ могут быть анизотропны в каждой подобласти, то есть $p_1^{(i)} >> p_2^{(i)}$ или $p_1^{(i)} << p_2^{(i)}$.

Пусть $\Omega^h = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i^h$ – триангуляция Ω на квадратной сетке с шагом h и γ^h – триангуляция γ, порожденная Ω_h. Обозначим через $H(\Omega^h)$ пространство вещественных непрерывных функций линейных на каждом треугольнике триангуляции Ω^h и через W подпространство пространства $H(\Omega^h)$, удовлетворяющее однородному граничному условию Дирихле. Используя стандартный метод конечных элементов, мы получаем линейную алгебраическую систему

$$Au = f.$$

Главная задача этого параграфа – построение переобуславливателя такого, что

$$c_1(Bv, v) \leq (Av, v) \leq c_2(Bv, v) \quad \forall v \in R^N,$$

где N – размерность W. Обозначим

$$Au = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I \\ u_\gamma \end{bmatrix},$$

где u_I и u_Γ – вектора, соответствующие внутренним узлам каждой подобласти и узлам на γ^h соответственно.

Разобьем пространство W на два подпространства W_0, W_1 и построим переобуславливатель для каждого подпространства. Подпространства W_0 и W_1 задаются следующим образом. Пусть

$$W_0 = \left\{ u \in W \middle| \; u(x) = 0, \quad x \in \gamma^h \right\}.$$

Обозначим через V пространство следов W на γ^h. Пусть t – оператор продолжения из V в W. Фактически можно определить t как

$$t = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & A_{12} \\ & I \end{bmatrix}$$

и t отображает дискретную функцию, заданную на γ^h, в энергетическую гармоническую относительно скалярного произведения $a(\cdot,\cdot)$ функцию в Ω^h. Пусть t^* – сопряженное отображение к t. В матричной форме

$$t^* = \left[A_{21}\, A_{11}^{-1} \quad I \right].$$

Определим $W_1 = t \cdot V$ и

$$W_{0,i} = \left\{ u \in W_0 \middle| \; u(x) = 0, \quad x \notin \Omega_i^h \right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $B_{0,i} : W_{0,i} \to W_{0,i}$ такой, что существуют c_1 и c_2, удовлетворяющие

$$c_1(B_{0,i}v, v) \le \int\limits_{\Omega_i} P^i \,\nabla v \,\nabla v \, d\Omega \le c_2(B_{0,i}v, v) \qquad \forall v \in W_{0,i}.$$

Для любого линейного оператора T обозначим через T^+ псевдообратный оператор к T. Обозначим через $B_0 = B_{0,1} + B_{0,2} + \ldots + B_{0,n}$ и $B_0^+ = (B_{0,1})^+ + (B_{0,2})^+ + \ldots + (B_{0,n})^+$. Зафиксируем подобласть Ω_i. Для упрощения предположим, что $\Omega_i = (0, L_1) \times (0, L_2)$, где $L_1 = n_1 h$, $L_2 = n_2 h$ для некоторых положительных целых чисел n_1, n_2. Предположим, что $p_1^{(i)} >> p_2^{(i)}$. Пусть

$$\alpha^{(i)} = \sqrt{p_1^{(i)} / p_2^{(i)}}.$$

Предположим, что h – достаточно малое число такое, что существует целое $m \ge 3$ для которого верно

$$mh < L_2 / \alpha^{(i)} < (m+1)h.$$

После замены переменных

$$(s_1, s_2) = (x_1/\alpha^{(i)}, x_2)$$

Ω_i преобразуется в $\tilde{\Omega}_i = (0, L_1/\alpha^{(i)}) \times (0, L_2)$.

Пусть

$$H = L_1/\alpha^{(i)},\ L = L_2,\ \tilde{H} = L_2/\alpha^{(i)},$$
$$h_1 = h/\alpha^{(i)},\ h_2 = h.$$

Заметим, что $H << L$, $h_1 << h_2$. Каждое $\tilde{\Omega}_i$ может быть разбито точно также, как в разделе 1.4.4, и мы используем те же обозначения $m_i, \sigma_i, \tau_i, \ell_i, r_i$. По теореме 1.4.7 имеем, что для всех $\varphi \in H^{1/2,h}(\tilde{\Gamma}_i)$

$$(S_i\varphi, \varphi) \approx |\varphi|^2_{\tilde{H}^{1/2,h}(\tilde{\Gamma}_i)}.$$

Будем строить Σ_i, эквивалентные $|\cdot|^2_{\tilde{H}^{1/2,h}(\tilde{\Gamma}_i)}$. Для заданных $\varphi \in H^{1/2,h}(\tilde{\Gamma}_i)$, пусть φ_S – сужение φ на S, для любого подмножества S множества $\tilde{\Gamma}_i$. Будем обозначать через $\tilde{A}_{(q)}$ некоторую матрицу, соответствующую одномерному Лапласиану с граничными условиями Неймана, где порядок матрицы q равен числу точек сетки:

$$\tilde{A}_{(q)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & . & . & . & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Фактически, $(\tilde{A}_{(q)}\varphi,\varphi) = h\left|\varphi\right|^2_{H^1(I)}$, где φ – конечно-элементная функция на интервале I, чья дискретизация характеризуется q точками на равномерной сетке с шагом h. Тогда для $i = 1,\ldots,k-1$ (k из 1.4.1)

$$I_{\ell_i,\ell_i}(\varphi) \approx (\tilde{A}^{1/2}_{(m_i+m_{i+1}+1)}\varphi_{\ell_i},\varphi_{\ell_i}).$$

Пусть $\Sigma_{\ell_i} = \tilde{A}^{1/2}_{(m_i+m_{i+1}+1)}$ и $T_{\ell_i} = \tilde{A}_{(m_i+m_{i+1}+1)}$. Для $I_{\ell_0,\ell_0}(\varphi)$ ситуация существенно другая, так как ℓ_0 состоит из двух различных сеток с шагами h_1 и h_2 (тоже самое и для $I_{\ell_k,\ell_k}(\varphi), I_{r_0,r_0}(\varphi)$ и $I_{r_k,r_k}(\varphi)$). Пусть σ_{0,h_1} и σ_{1,h_2} – триангуляции σ_0 и σ_1 с шагом сеток h_1 и h_2 соответственно. Пусть $\ell_{0,h} = \sigma_{0,h_1} \bigcup \sigma_{1,h_2}$. Пусть $\{y_i\}_{i=0}^{m}$ и $\{y_i\}_{i=m}^{m+n_1}$ – множества точек сеток σ_1 и σ_0 соответственно. Мы добавим новые узлы сетки z_i и пронумеруем все узлы ℓ_0 следующим образом. Поскольку $h_2 >> h_1$, то существует положительное целое число p такое, что $ph_1 \le h_2 < (p+1)h_1$. Пусть

$$z_{ip+s} = \frac{[(p-s)y_i + sy_{i+1}]}{p}, \quad i = 0,\ldots,m-1,$$
$$s = 0,1,\ldots,p-1$$

и

$$z_{mp+i} = y_{m+i}, \quad i = 0,\ldots,n_1.$$

Пусть $\ell = m\cdot p + n_1$. Заметим, что $\{z_i\}_{i=0}^{1}$ – квази-равномерная сетка в ℓ_0 с шагом сетки порядка h_1. Пусть ℓ_{0,h_1} – триангуляция, порожденная $\{z_i\}_{i=0}^{1}$.

Тогда мы имеем два различных пространства конечных элементов в ℓ_0: $H^{1/2}_{\ell_{0,h}}$ и $H^{1/2}_{\ell_{0,h_1}}$, которые являются пространствами конечных элементов в $\ell_{0,h}$ и ℓ_{0,h_1} соответственно. Пусть J_{l_0} – естественное продолжение функции из $H^{1/2}_{\ell_{0,h}}$ до аналогичной функции из $H^{1/2}_{\ell_{0,h_1}}$. Фактически, $J_{\ell_0}\left[\varphi(x_i)\right]^T = \left[\varphi(z_j)\right]^T$. Для любой $\varphi \in H^{1/2}_{\ell_{0,h}}$ имеем

$$
\begin{aligned}
&(J^T_{\ell_0}\,\tilde{A}^{1/2}_{(\ell+1)}\,J_{\ell_0}\,\varphi,\varphi) = \\
&\quad = (\tilde{A}^{1/2}_{(\ell+1)}\,J_{\ell_0}\,\varphi, J_{\ell_0}\,\varphi) \approx \left|\varphi\right|^2_{H^{1/2}(\ell_0)} = I_{\ell_0,\ell_0}(\varphi).
\end{aligned}
$$

Пусть $\Sigma_{\ell_0} = J^T_{\ell_0}\,\tilde{A}^{1/2}_{(\ell+1)}\,J_{\ell_0}$ и $T_{\ell_0} = J^T_{\ell_0}\,\tilde{A}_{(\ell+1)}\,J_{\ell_0}$. Заметим, что T_{ℓ_0} – трёхдиагональная матрица. Фактически

$$
T_{\ell_0} = \begin{bmatrix}
1/p & -1/p & & & & & \\
-1/p & 2(1/p) & -1/p & & & & \\
 & . & . & . & & & \\
 & & -1/p & (1+1/p) & -1 & & \\
 & & & -1 & 2 & -1 & \\
 & & & & -1 & 2 & -1 \\
 & & & & . & . & . \\
 & & & & & -1 & 1
\end{bmatrix}.
$$

Подобным образом мы можем определить Σ_{r_0}, Σ_{ℓ_k}, Σ_{r_k}, T_{r_0}, T_{ℓ_k}, T_{r_k}. Теперь рассмотрим компоненту $I_{\sigma_i,\tau_i}(\varphi)$. Для $i = 1,\dots,k$ зададим $\left\{x_{\sigma_i,j}\right\}_{j=0}^{m_i}$ и $\left\{x_{\tau_i,j}\right\}_{j=0}^{m_i}$ – точки сеток в σ_i и τ_i соответственно.

Тогда

$$I_{\sigma_i,\tau_i}(\varphi)=\int\limits_{\sigma_i}\int\limits_{\tau_i}\frac{(\varphi(x)-\varphi(y))^2}{|x-y|^2}\,dx\,dy\approx$$
$$\approx(1/H^2)\int\limits_{\sigma_i}\int\limits_{\tau_i}(\varphi(x)-\varphi(y))^2\,dx\,dy\approx$$
$$\approx(1/(m_i+1)^2)\sum_{j,k}(\varphi(x_{\sigma_i,j})-\varphi(x_{\tau_i,k}))^2=$$
$$=(\Xi_{\sigma_i,\tau_i}\varphi,\varphi).$$

Где

$$\Xi_{\sigma_i,\tau_i}=\frac{1}{(m_i+1)^2}\begin{bmatrix} & & & -1 & \dots & -1\\ & (m_i+1)I & & \dots & \dots & \dots\\ & & & -1 & \dots & -1\\ -1 & \dots & -1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & & (m_i+1)I & \\ -1 & \dots & -1 & & & \end{bmatrix}.$$

Обозначим через φ_L сужение φ на Γ_i^L. Тогда

$$h_1|\varphi|^2_{H^1(\Gamma_i^L)}\approx(\Xi_L\varphi_L,\varphi_L),$$

где $\Xi_L=(h_1/h_2)\tilde{A}_{(n_2+1)}$. Матрицы Ξ_R,Ξ_B,Ξ_T задаются подобным же образом. Теперь зададим Σ_i:

$$(\Sigma_i\varphi,\psi)=\sum_{i=1}^{k-1}((\Sigma_{\ell_i}\varphi_{\ell_i},\psi_{\ell_i})+(\Sigma_{r_i}\varphi_{r_i},\psi_{r_i}))+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}(\Xi_{\sigma_i,\tau_i}\varphi_{\sigma_i\cup\tau_i},\psi_{\sigma_i\cup\tau_i})+(\Sigma_{\ell_0}\varphi_{\ell_0},\psi_{\ell_0})+(\Sigma_{r_0}\varphi_{r_0},\psi_{r_0})+$$
$$+(\Sigma_{\ell_k}\varphi_{\ell_k},\psi_{\ell_k})+(\Sigma_{r_k}\varphi_{r_k},\psi_{r_k})+(\Xi_L\varphi_L,\psi_L)+(\Xi_R\varphi_R,\psi_R)+$$
$$+(\Xi_B\varphi_B,\psi_B)+(\Xi_T\varphi_T,\psi_T).$$

И матрицу T_i:

$$
\begin{aligned}
(T_i\varphi,\psi) = &\sum_{i=1}^{k-1}((T_{\ell_1}\varphi_{\ell_1},\psi_{\ell_1}) + (T_{r_1}\varphi_{r_1},\psi_{r_1})) + \\
&+\sum_{i=1}^{k}(\Xi_{\sigma_i,\tau_i}\varphi_{\sigma_i\cup\tau_i},\psi_{\sigma_i\cup\tau_i}) + (T_{\ell_0}\varphi_{\ell_0},\psi_{\ell_0}) + (T_{r_0}\varphi_{r_0},\psi_{r_0}) + \\
&+(T_{\ell_k}\varphi_{\ell_k},\psi_{\ell_k}) + (T_{r_k}\varphi_{r_k},\psi_{r_k}) + (\Xi_L\varphi_L,\psi_L) + (\Xi_R\varphi_R,\psi_R) + \\
&+(\Xi_B\varphi_B,\psi_B) + (\Xi_T\varphi_T,\psi_T).
\end{aligned}
$$

Легко видеть, что

$$\underline{c}_i(T_i\varphi,\varphi) \le (\Sigma_i\varphi,\varphi) \le \overline{c}_i(T_i\varphi,\varphi), \tag{4.2.2}$$

где $\underline{c}_i = 1/2$, $\overline{c}_i = 1/\lambda_{\min}$, $\lambda_{\min} = \min\limits_j \lambda_j(\Sigma_{\ell_i})$, $\lambda_j(\Sigma_{\ell_i}) \ne 0$ – собственные числа Σ_{ℓ_i}. Обозначим через ψ_k сужение ψ на $\partial\tilde{\Omega}_k$ для всех $\psi \in V$. Зададим билинейные формы Σ и T:

$$
\begin{aligned}
(\Sigma\varphi,\psi) &= \sum_{k=1}^{n} p^{(k)}(\Sigma_k\varphi_k,\psi_k),\\
(T\varphi,\psi) &= \sum_{k=1}^{n} p^{(k)}(T_k\varphi_k,\psi_k),
\end{aligned}
$$

где $p^{(k)} = \min\left\{p_1^{(k)}, p_2^{(k)}\right\}$, $k = 1,2,...n$.

Из (1.7.2) мы можем видеть, что

$$\underline{c}(T\varphi,\varphi) \le (\Sigma\varphi,\varphi) \le \overline{c}(T\varphi,\varphi), \tag{4.2.3}$$

где $\underline{c} = 1/2$ и $\overline{c}$ – максимум из $\{\overline{c}_i\}_{i=1}^{n}$. Заметим, что каждая Σ_i – плотная матрица сложной структуры, следовательно, обращение Σ очень дорогая процедура. Обращение T может быть реализовано достаточно просто. Действительно, заметим, что Ξ_{σ_i,τ_i} имеет следующий вид:

$$\Xi_{\sigma_i,\tau_i} = \begin{bmatrix} K_i^{11} & K_i^{12} \\ K_i^{21} & K_i^{22} \end{bmatrix},$$

где K_i^{12} и K_i^{21} – матрицы 1-го порядка. Следовательно, мы разобьем T_j в сумму

$$T_j = \tilde{T}_j + \sum_{i=1}^{2k} K_i,$$

где $\tilde{T}_j$ – трёхдиагональные матрицы и K_i – матрицы, соответствующие матрицам K_i^{12} и K_i^{21} ранга 1. Следовательно, T может быть обращена, используя метод понижения ранга [96]. Стоимость обращения T имеет порядок $(1/h)\max_{i=1}^{n}\left\{\alpha^{(i)}\right\}$.

Теперь мы в состоянии решить следующую сложную систему:

$$\Sigma\varphi = \psi.$$

Так как Σ – плотная матрица, мы будем использовать, как переобуславливатель Чебышевский итерационный процесс:

$$\varphi^{0} = 0,$$
$$\varphi^{i+1} - \varphi^{i} = -t_i T^{-1}(\Sigma\varphi^{i} - \psi),$$

где t_i – множество параметров в Чебышевском итерационном процессе [107].

Положим

$$B_{1/2}^{-1} = (I - \prod_{i=0}^{n(\varepsilon)} (I - t_i T^{-1} \Sigma)) \Sigma^{-1},$$

где

$$n(\varepsilon) \le \frac{\ln(2/\alpha)}{\ln(1/q)}, \quad q = \frac{\sqrt{\underline{c}} - \sqrt{\overline{c}}}{\sqrt{\underline{c}} + \sqrt{\overline{c}}}.$$

Тогда $\varphi^{n(\varepsilon)} = B_{1/2}^{-1} \psi$ и, если мы возьмем $\varepsilon = 1/2$, то $n(\varepsilon) = O(h^{1/2})$ и

$$\frac{1}{2}(B_{1/2}\varphi, \varphi) \le (\Sigma\varphi, \varphi) \le \frac{3}{2}(B_{1/2}\varphi, \varphi) \quad \forall \varphi \in W_{1/2}.$$

Положим $B_1^{+} = t\, B_{1/2}^{-1}\, t^{*}$ и $B^{-1} = B_0^{+} + B_1^{+}$. Тогда верна следующая теорема:

Теорема 4.2.1. Существуют положительные константы c_1 и c_2, не зависящие от h и p, и такие, что

$$c_1(Bv, v) \le (Av, v) \le c_2(Bv, v) \quad \forall v \in W.$$

Заключение

Основные результаты диссертации опубликованы в работах, приведённых в Списке основных публикаций.

На защиту выносится совокупность следующих результатов:

1. Сеточные теоремы о следах конечно-элементных функций:

   а) Сеточные теоремы о следах в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$, включая случай сгущающихся сеток.

   б) Теорема о следах конечно-элементных функций для областей с малым диаметром.

   в) Терема о следах конечно-элементных функций в случае весового пространства Соболева $H^1_{p,q}(\Omega)$.

   г) Терема о следах конечно-элементных функций для анизотропных (узких) областей.

   д) Теорема о следах конечно-элементных функций в случае весового пространства Соболева $H^1_{\alpha}(\Omega)$.

2. Разработана теория Аддитивного метода Шварца в абстрактных гильбертовых пространствах (совместно с А.М. Мацокиным). На основе этого метода предложены и обоснованы:

   а) Новые формулировки методов декомпозиции области для непересекающихся подобластей.

   б) Метод явного продолжения сеточных функций на иерархических сетках с сохранением нормы с оптимальной арифметической сложностью.

в) Аддитивный метод Шварца на границах подобластей в пространстве Соболева $H^{1/2}$.

г) Метод декомпозиции области для случая большого числа подобластей.

д) Построены оптимальные переобуславливающие операторы для эллиптических задач с разрывными коэффициентами диффузии.

3. Разработана теория метода фиктивного пространства в абстрактных гильбертовых пространствах, который является обобщением известного метода фиктивных областей. На основе этого метода предложены и обоснованы:

а) Переобуславливающие операторы для эллиптических задач с кусочно-гладкими границами.

б) Используя комбинацию Аддитивного метода Шварца и метода фиктивного пространства, предложен оптимальный многоуровневый переобуславливатель для решения эллиптических задач на неструктурированных сетках.

4. Предложен новый оптимальный метод декомпозиции для решения эллиптических задач с разрывными коэффициентами без использования явных операторов продолжения сеточных функций и с использованием только переобуславливателей для оператора Лапласа.

5. На основе предложенного метода декомпозиции области и сеточных теоремах о следах предложены эффективные переобуславливающие операторы для анизотропных эллиптических задач.

Список литературы

1. Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. Успехи математических наук, XIX, 1964, 3 (117); 53-161.
2. Алексидзе М.А. О целесообразности применения альтернирующего метода Шварца на электронных цифровых машинах. Докл. АН СССР, 1958, Т.120, №2; 231-234.
3. Андреев В.Б. Устойчивость разностных схем для эллиптических уравнений по граничным условиям Дирихле. Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ., 1972, Т.12, № 3; 598-611.
4. Андреев В.Б. Эквивалентная нормировка сеточных функций из $W_2^{1/2}(\gamma)$. Исследования по теории разностных схем для эллиптических и параболических уравнений, Москва: МГУ, 1973; 6-39.
5. Астраханцев Г.П. Итерационные методы решения вариационно-разностных схем для двумерных эллиптических уравнений второго порядка. Дис. к. физ.-мат. наук: 01.01.07., Ленинград, 1972.
6. Астраханцев Г.П. О численном решении задачи Дирихле в произвольной области. Новосибирск, 1977; 63-72.
7. Астраханцев Г.П. Метод фиктивных областей для эллиптического уравнения второго порядка с естественными краевыми условиями. Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ., 1978 , Т.18, №1; 118-125.

8. Астраханцев Г.П. О численном решении задачи Дирихле с помощью разностного аналога потенциала двойного слоя. Москва, 1985; 18 с., (Препринт, ОВМ АН СССР; 102).

9. Астраханцев Г.П. О численном решении смешанных краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка в произвольной области. Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ., 1985, Т.25, №2; 200-209.

10. Бабич В.М., Слободецкий Л.Н. Об ограниченности интеграла Дирихле. Докл. АН СССР, 1956, 106; 604-606.

11. Бахвалов Н.С. Эффективный итерационный метод для решения уравнений Ламе для почти несжимаемой среды и уравнений Стокса. Докл. АН СССР, 1993, Т.44; 4-9.

12. Бахвалов Н.С. Эффективные методы решения жестких многомерных многопараметрических задач. Ж.. Выч. Мат. и Мат. Физ., 1999, Т.39, №12; 2019-2049.

13. Бахвалов Н.С. Богачев К.Ю., Метр Ж..А., Эффективный алгоритм решения жестких эллиптических задач с приближениями к методу фиктивных областей. Ж.. Выч. Мат. и Мат. Физ., 1999, Т.39, №6; 919-931.

14. Бахвалов Н.С., Князев А.В. Эффективный итерационный метод для решения уравнений Ламе для почти несжигаемой среды и уравнений Стокса. Докл. АН СССР, 1992, 44; 4-9.

15. Бахвалов Н.С., Орехов М.Ю. О быстрых способах решения уравнения Пуассона. Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ., 1982, Т.22, №6; 1386-1392.

16. Белинский П.П., Годунов С.К., Иванов Ю.Б., Яненко И.К. Применение одного класса квазиконформных отображений для построения разностных сеток в областях с криволинейными границами. Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ., 1975, Т.15, №6; 1499-1511.
17. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. Москва: Наука, 1975; 480с.
18. Вишик В.И., Люстерник Л.А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями. Успехи мат. наук, 1960, Т. XY, вып. 4(94); 29-95.
19. Годунов С.К. Уравнения матеметической физики. Москва: Наука, 1971; 416с.
20. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. Москва: Наука, 1977; 439с.
21. Дмитриенко М.Е. О вариационно-разностном методе решения третьей краевой задачи в трехмерной области с входящим углом. Вариационно-разностные методы в мат. физике, Новосибирск, 1978; 81-92.
22. Дмитриенко М.Е., Оганесян Л.А. Вариант метода Шварца для прилегающих сеточных областей. Вычисления с разреженными матрицами, Новосибирск, 1981; 36-44.
23. Дрыя М. Алгоритм с матрицей ёмкости для вариационно-разностной задачи Дирихле. Вариационно-разностные методы в мат. физике, Новосибирск, 1981; 63-73.

24. Дьяконов Е.Г. Разностные методы решения краевых задач. Москва: МГУ, 1971, Вып. 1.

25. Дьяконов Е.Г. О некоторых прямых и итерационных методах, основанных на окаймлении матрицы. В кн.: Численные методы в мат. физике, Новосибирск, 1979; 45-69.

26. Дьяконов Е.Г. Минимизация вычислительной работы. Москва: Наука, 1989; 272.

27. Ильин В.П. Разностные методы решения эллиптических уравнений. Новосибирск: НГУ, 1970; 264с.

28. Капорин И.Е. О задаче решения разностного уравнения Пуассона в неполно-разреженной постановке. В кн.: Разностные методы математической физике. Теория численных методов, Москва, 1981.

29. Капорин И.Е., Николаев Е.С. Метод фиктивных неизвестных для решения уравнений эллиптического типа в областях сложной формы. Докл. АН СССР, 1980, Т.251, №3; 544-548.

30. Капорин И.Е., Николаев Е.С. Метод фиктивных неизвестных для решения разностных эллиптического краевых задач в нерегулярных областях. Дифференц. Уравнения, 1980, Т.16, №7; 1211-1225.

31. Капорин И.Е., Николаев Е.С. Развитие метода фиктивных неизвестных – сопряженных направлений. Дифференц. Уравнения, 1981, Т.17, №7; 1270-1279.

32. Капорин И.Е., Николаев Е.С. Метод фиктивных неизвестных для симметричных положительно определённых систем. Численные методы линейной алгебры, Москва, 1982; 33-42.

33. Карчевский М.М., Ляшко А.Д. Разностные схемы для нелинейных задач математической физики. Казань: КГУ, 1976; 155с.

34. Кацнельсон В.Э., Меньшиков В.В. Об одном аналоге альтернирующего метода Шварца. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Харьков: ХГУ, 1973, Вып.17; 206-215.

35. Кобельков Г.М. О решении эллиптических уравнений с сильно меняющимися коэффициентами. Москва, 1987; 26с. (Препринт, ОВМ АН СССР, 145).

36. Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах фильтрации двухфазной несжигаемой жидкости с учётом капиллярных сил. Численные методы механики сплошной среды, 1972, Т.3, №5; 52-68.

37. Копчёнов В.Д. Приближенное решение задачи Дирихле методом фиктивных областей. Дифференц. Уравнения, 1968, Т.4, №1.

38. Корнеев В.Г. О построении вариационно-разностных схем высокого порядка точности. Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат. мех. астрон., 1970, № 4; 28-40.

39. Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. Ленинград: ЛГУ, 1977; 206с.

40. Кузнецов Ю.А. Блочно-релаксационные методы в подпространстве, их оптимизация и применение. В кн.: Вариационно-разностные методы в мат. физике, Новосибирск, 1978; 178-212.

41. Кузнецов Ю.А. Блочно-релаксационные методы в подпространстве для двумерных эллиптических уравнений. В кн.: Численные методы в мат. физике, Новосибирск, 1979; 20-44.

42. Кузнецов Ю.А. Блочно-релаксационный метод в подпространстве решения двумерных и трехмерных уравнений диффузии в многозонных областях. В кн.: Методы решения систем вариационно-разностных уравнений, Новосибирск, 1979; 24-59.

43. Кузнецов Ю.А. Блочно-релаксационный метод решения задачи Дирихле. В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительной математики, Новосибирск, 1980; 69-75.

44. Кузнецов Ю.А. Итерационные методы в подпространствах. Москва: ОВМ АН СССР, 1984; 133с.

45. Кузнецов Ю.А. Новые алгоритмы приближенной реализации неявных разностных схем. Москва, 1987. (Препринт, ОВМ АН СССР, 142). Sov. J. Numer. Anal. and Math. Modell., 1988, Vol.3, №2; 99-144.

46. Кузнецов Ю.А. Алгебраические многосеточные методы декомпозиции области. Москва, 1989; 41с. (Препринт, АН СССР, ОВМ, 232).

47. Кузнецов Ю.А., Мацокин А.М. Об оптимизации метода фиктивных компонент. Вычислительные методы линейной алгебры, Новосибирск, 1977; 79-86.

48. Кузнецов Ю.А., Мацокин А.М. О частичном решении систем линейных алгебраических уравнений. Вычислительные методы линейной алгебры, Новосибирск, 1978; 62-89.

49. Кузнецов Ю.А., Мацокин А.М., Шайдуров В.В. Быстрые итерационные методы решения систем сеточных уравнений. Актуальные проблемы вычислительной математики и мат. моделирования, Новосибирск: Наука, 1985; 207-228.

50. Кузнецов Ю.А., Финогенов С.А. Метод фиктивных компонент для решения трехмерных эллиптических уравнений. Архитектура ЭВМ и численные методы, Москва: ОВМ АН СССР, 1984; 73-94.

51. Кузнецов Ю.А., Финогенов С.А. Двухступенчатый метод фиктивных компонент для двух- и трехмерных задач электростатики. Численные методы и мат. моделирование, Москва: ОВМ АН СССР, 1987; 31-60.

52. Лаевский Ю.М. Методы разбиения области при решении двумерных параболических уравнений. Вариационно-разностные методы в задачах численного анализа, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1987; 112-128.

53. Лаевский Ю.М. Прямой метод декомпозиции области решения параболических уравнений. Новосибирск, 1992. (Препринт, ВЦ СО АН СССР, 946). On the domain decomposition method for parabolic problem. Bull. NCC, Numer. Anal., 1993, №1; 41-62.

54. Лаевский Ю.М., Мацокин А.М. Методы декомпозиции решения эллиптических и параболических краевых задач. Сиб. Ж. Выч. Мат., РАН, Сиб. отдел., Новосибирск, 1999, Т.2, №4; 361-372.

55. Лазаров Р.Д., Мокин Ю.И. О вычислении логарифмического потенциала. Докл. АН СССР, 1983, Т.272, №1; 27-30.

56. Лапин А.В., Декомпозиция области и параллельные решения задач со свободными границами. Тр. Матем. Центра им. Н.И. Лобачевского, Казань, 2001, Т.13; 90-126.

57. Лебедев В.И. Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. I. Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ., 1964, Т.4, №3; 449-465.

58. Лебедев В.И. Метод композиции. Москва: ОВМ АН СССР, 1986; 191с.

59. Лебедев В.И., Агошков В.И. Обобщенный алгоритм Шварца с переменными параметрами. Москва, 1981; 40с. (Препринт, ОВМ АН СССР, ВИНИТИ, 19).

60. Лебедев В.И., Агошков В.И. Операторы Пуанкоре-Стеклова и их приложения в анализе. Москва: ОВМ АН СССР, 1983; 184с.

61. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. Наука, Москва, 1977; 455 с.

62. Марчук Г.И., Кузнецов Ю.А. Итерационные методы и квадратичные функционалы. Новосибирск, 1972; 205.

63. Марчук Г.И., Кузнецов Ю.А. Некоторые вопросы итерационных методов. Вычислительные методы линейной алгебры, Новосибирск, 1972; 4-20.

64. Марчук Г.И., Лебедев В.И. Численные методы в теории переноса нейтронов. Москва: Атомиздат, 1971; 496с.

65. Марчук Г.И., Шайдурав В.В. Повышение точности решений разностных схем. Москва: Наука, 1979; 318с.

66. Матеева Э.И., Пальцев Б.В. О разделении области при решении краевых задач для уравнения Пуассона в областях сложной формы. Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ., 1973, Т.13, №6; 1441-1452.

67. Мацокин А.М. К развитию метода фиктивных компонент. Вычислительные методы линейной алгебры, Новосибирск, 1973; 48-56.

68. Мацокин А.М. О построении и методах решения систем вариационно-разностных уравнений. Дис. к.ф.-м.н.: 01.01.07, Новосибирск, 1975; 117с.

69. Мацокин А.М. Об одном методе решения систем сеточных уравнений. В кн.: Методы решения систем вариационно-разностных уравнений, Новосибирск, 1979; 136-138.

70. Мацокин А.М. Метод фиктивных компонент и модифицированный разностный аналог метода Шварца. Вычислительные методы линейной алгебры, Новосибирск, 1980; 66-77.

71. Мацокин А.М. Метод фиктивных компонент и альтернирования по подобластям. Вычислительные алгоритмы в задачах мат. физики, Новосибирск, 1985; 76-98.

72. Мацокин А.М. Продолжение сеточных функций с сохранением нормы. Вариационные методы в задачах численного анализа, Новосибирск, 1986; 111-132.

73. Мацокин А.М. Связь метода окаймления с методом фиктивных компонент и методом альтернирования по подпространствам. Дифференциальные уравнения с частными производными, Новосибирск: Наука, 1986; 138-142.

74. Мацокин А.М. Решение сеточных уравнений на нерегулярных сетках. Новосибирск, 1987. (Препринт, ВЦ СО АН СССР, 738).

75. Мацокин А.М. Методы фиктивных компонент и альтернирования по подпространствам. Дис. д.ф.-м.н., Новосибирск, 1988; 272с.

76. Мацокин А.М., Непомнящих С.В. О сходимости метода альтернирования Шварца по подобластям без налегания. Методы аппроксимации и интерполяции, Новосибирск, 1981; 85-97.

77. Мацокин А.М., Непомнящих С.В. Применение окаймления при решении систем сеточных уравнений. Вычислительные алгоритмы в задачах мат. физики, Новосибирск, 1983; 99-109.

78. Мацокин А.М., Непомнящих С.В. Метод альтернирования Шварца в подпространствах. Изв. Высш. Учебных заведений. Математика, 1985, Т.29, №10; 61-66.

79. Мацокин А.М., Непомнящих С.В. Нормы в пространстве следов сеточных функций. Новосибирск, 1987; 33с. (Препринт, ВЦ СО АН СССР, 737).

80. Мацокин А.М., Непомнящих С.В. Метод фиктивного пространства и операторы продолжения. Ж.. Выч. Мат. и Мат. Физ., 1993, Т.33, №1; 52-68.

81. Мацокин А.М., Скрипко И.Н. Метод фиктивных компонент и смешанные краевые условия. Вычислительные алгоритмы в задачах мат. физики, Новосибирск, 1983; 110-119.

82. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. Москва: Наука, 1970; 512с.

83. Мокин Ю.И. Численные методы для интегральных уравнений теории потенциала. Дифференц. уравнения, 1987, Т.23, №7; 1250-1262.

84. Непомнящих С.В. О применении метода окаймления к смешанной краевой задаче для эллиптических уравнений и о сеточных нормах в $W_2^{1/2}(S)$. Новосибирск, 1984; 24с. (Препринт, ВЦ СО АН СССР, № 106).

85. Непомнящих С.В. Метод альтернирования Шварца для вырожденной задачи Неймана. Вычислительные алгоритмы в задачах мат. физики, Новосибирск, 1985; 99-112.

86. Непомнящих С.В. Декомпозиция области и метод Шварца в подпространстве для приближенного решения эллиптических краевых задач. Дисс. к.ф.-м.н.: 01.01.07, Новосибирск, 1986; 162.

87. Непомнящих С.В. Метод разделения области для эллиптических задач с разрывными коэффициентами. Новосибирск, 1990; 20с. (Препринт, ВЦ СО АН СССР, №891).

88. Непомнящих С.В. Метод разложения на подпространства для решения эллиптических краевых задач в областях сложной формы. Численные методы и мат. моделирование, Новосибирск, 1990; 128-161.

89. Непомнящих С.В. Сеточные теоремы о следах, нормировка следов сеточных функций и их обращение. Новосибирск, 1991; 25с. (Препринт ВЦ СО АН СССР, 930).

90. Непомнящих С.В. Метод разбиения пространства для эллиптических проблем со скачками коэффициентов в узких полосах. Докл. РАН, Мат., 1992, Т.45, №2; 488-491.

91. Никольский С.М. Аппроксимация функций многих переменных и теоремы вложения. Москва: Наука, 1977.

92. Обен Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. Москва: Мир, 1977; 383с.

93. Оганесян Л.А., Ривкинд В.Я., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Часть I. Дифференц. уравнения и их применение, Вып.5, Вильнюс, 1973; 385с.

94. Оганесян Л.А., Ривкинд В.Я., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Часть II. Дифференц. уравнения и их применение, Вып.8, Вильнюс, 1974; 322с.

95. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Издат. Акад. Наук Арм. ССР, 1979; 335.

96. Ортега Д., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Москва: Мир, 1975.

97. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. Москва: Наука, 1969; 176с.

98. Положий Г.Н. Численное решение двумерных и трехмерных задач математической физики и функции дискретного аргумента. Киев: Киевский ун-т, 1962; 161с.

99. Ривкинд В.Я. Приближенный метод решения задачи Дирихле и об оценках сходимости решений разностных уравнений к решению эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. Вестник ЛГУ, Сер. Матем., 1964, 3.

100. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. Москва: Мир, 1979.

101. Романова С.Е. Приближенные методы решения разностных уравнений Лапласа и Пуассона на многоугольниках асимптотических за два сложения на точку: Дисс. к.ф.-м.н., Москва: МГУ, 1983; 166.

102. Руховец Л.А. Замечание к методу фиктивных областей. Дифференц. Уравнения, 1967, Т.3, №4.

103. Рябенький В.С. Метод разностных потенциалов для некоторых задач механики сплошных сред. Москва: Наука, 1987; 320с.

104. Рябенький В.С., Белянков А.Я. Разностные потенциалы и проекторы. Докл. АН СССР, 1980, Т.254, №5; 1080-1084.

105. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1977; 656с.

106. Самарский А.А., Капорин И.Е., Кучеров А.Б., Николаев Е.С. Некоторые современные методы решения сеточных уравнений. Изв. высш. учебных заведений, Математика, 1983, №7; 3-12.

107. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. Москва: Наука, 1978; 591с.

108. Сандер С.А. Модификация алгоритма Шварца для решения сеточных краевых задач в областях, составленных из прямоугольников и прямоугольных параллелепипедов. Новосибирск, 1981; 21с. (Препринт, ВЦ СО АН СССР, № 83).

109. Саульев В.К. О решении некоторых краевых задач на быстродействующих вычислительных машинах методом фиктивных областей. Сиб. Мат. Ж., 1963, Т.4, № 4; 1488-1504.

110. Смелов В.В. Обоснование итерационного процесса по подобластям для задач теории переноса в нечётном P_{2N+1} приближении. Новосибирск, 1980; 27с. (Препринт, ВЦ СО АН СССР, 71).

111. Смелов В.В., Журавлева Т.Б. Принцип итерирования по подобластям в задачах с эллиптическим уравнением. Москва, 1981; 11с. (Препринт, 14).

112. Соболев С.Л. Алгоритм Шварца в теории упругости. Докл. АН СССР, 1936, Т.4(XIII), №6; 235-238.

113. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград: ЛГУ, 1950.

114. Стеклов В.А. Общие методы решения основных задач математической физики. Харьков: Издание Харьк. мат. общества, 1901.

115. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. Москва: Мир, 1977; 349с.

116. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. Москва: Мир, 1980; 512с.

117. Труфанов О.Д. Методы фиктивных компонент и разбиения области для решения волнового уравнения Гельмгольца. Дис. к.ф.-м.н.: 01.01.07, Москва, 1987; 109с.

118. Тыртышников Е.Е. Об алгоритмах дискретного преобразования Фурье. В кн.: Численные методы алгебры, Москва, 1981; 10-26.

119. Федоренко Р.П. О скорости сходимости одного итерационного процесса. Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ., 1964, Т.4; 559-564.

120. Федоренко Р.П. Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений. Успехи мат. наук, 1973, Т.XXYIII, вып.2; 121-181.

121. Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. Москва: Иностр. лит., 1948.

122. Цвик Л.Б. Обобщение алгоритма Шварца на случай областей, сопряженных без налегания. Докл. АН СССР, 1975, Т.224, №2; 309–312.

123. Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Киев: Изд-во АН УССР, 1963, Ч.I; 196с.

124. Яковлев Г.Н. О следах на кусочно-гладких поверхностях функций из пространства W_p^1. Мат. Сборник , 1967, 74; 526-543.

125. Aronszajn N. Boundary values of functions with finite Dirichlet integral. Confer. partial diff. equat., Studies in eigenvalue problems, Univ. of Kansas, 1955.

126. Axelson O, Vassilevski P. Algebraic multilevel preconditioning methods. I. Numer. Math., 1989, 56; 157-177.

127. Bakhvalov N.S., Knyazev A.V., Kobel'kov G.M. Iterative methods for solving equations with highly varying coefficients. Fourth International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, SIAM, Philadelphia, PA,1991; 197-205.

128. Banegas A. Fast Poisson solvers for problems with scarcity. Math. Comput., 1978, Vol.32; 441-446.

129. Bank R.E., Jimack P.K., Nadeem S.A., Nepomnyaschikh S.V. A weakly overlapping domain decomposition preconditioner for the finite element

solution of elliptic partial differential equations. SIAM J. Sci. Comput., 23, 2001, N6; 1818-1842.

130. Bjorstad P.E., Widlund O.B. Iterative methods for the solution of elliptic problems on regions partitioned in to substructures. N.Y., 1984; 46p.
131. Bogachev K.Yu. Iterative methods of solving main boundary value problems for second-order quasilinear elliptic equations in complexly shaped domains. Rus. J. Numer. Analysis Math. Modell., 1992, Vol.7, №4; 281-298.
132. Bornemann F.A., Yserentant H. A basic norm equivalence for the theory of multilevel methods. Numer. Math., 1993, 64; 455-476.
133. Brambl J.H. Multigrid methods. Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. 294, Longman Scientific: New York, 1993.
134. Brambl J.H., Pasciak J.E. and Schatz A.H. The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring. I-IV, Math. Comput.; 1986, 47: 103-134; 1987, 49: 1-16; 1988, 51: 415-430; 1989, 53: 1-24.
135. Brambl J.H., Pasciak J.E. and Xu J. Parallel multilevel preconditioners. Math. Comp., 55, 1990; 1-22.
136. Brambl J.H., Zhang X. Uniform convergence of the multigrid V-cycle for an anisotropic problem. Mathematics of Computation, 2000, 70(234): 453-470.
137. Buzbee B.L., Dorr F.W., George J.A., Golub G.H. The direct solution of the discrete Poisson equation oh irregular regions. SIAM J. Numer. Anal. 1971, Vol.8, №4; 722-736.

138. Chan T., Mathew T. Domain decomposition algorithms. In A. Acta Numerical 1994, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994; 61-143.

139. Dahmen W., Kunoth A. Multilevel preconditioning. Numer. Math., 1992, 63; 315-344.

140. Deuflhard P. Cascadic conjugate gradient methods for elliptic partial equations I. algorithm and numerical results. In David F. Keyes and Jinchao Xu, editors, Seventh International Conference of Domain Decomposition Methods in Scientific and Engineering Computing, ASM, Providence, RI, 1995; 29-41.

141. Dryja M. A finite element – capacitance matrix method for the elliptic problem. SIAM J. Numer. Anal. 1983, Vol.20, № 4; 671-680.

142. Dryja M. A finite-element-capacitance method for elliptic problems on regions partitioned into substructures. Numer. Math., 1984, Vol.14; 153-168.

143. Dryja M., Widlund O.B. Towards a unified theory of domain decomposition algorithms for elliptic problems. In Tony F. Chan, Roland Glawinski, Jacques Periaux, and Olof B. Widlund, editors. Third Int. Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, Philadelphia, SIAM, 1990; 3-21.

144. Dryja M., Widlund O.B. Domain decomposition algorithms with small overlap. SIAM, J. Sci. Comput., 1994, 15(3); 604-620.

145. Dyadechko V.G., Finogenov S.A., Iliash Yu.I., Tkhir A.V., Vassilevski Yu.V. Efficient solving the Poisson equation: fictitious domains and separable

preconditioners on rectangular locally fitted meshes versus algebraic multigrid/fictitious space method on unstructured triangulations. Mathematical Institute A, Stuttgart Univ., Germany, 1996. (Technical Report, 96-23).

146. Dyadechko V.G., Iliash Yu.I., Vassilevski Yu.V. Structuring preconditioners for unstructured meshes. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modell., 1996, Vol. 11, №2; 139-154.
147. Gilyova L.V., Shaidurov V.V. A cascade algorithm for solving a discrete analogue of weak nonlinear elliptic equation. Rus. J. of Numer. Anal. and Math. Modell., 1999, Vol.4, №1; 59-69.
148. Globisch G., Nepomnyaschikh S.V. The hierarchical preconditioning having unstructured grids. Computing J., 61, 1998; 307-330.
149. Griebel M., Oswald P. On the abstract theory of additive and multiplicative Schwarz algorithms. Numer. Math., 1995, 70; 163-180.
150. Haase G., Langer U., Meyer A. and Nepomnyashchikh S.V. Hierarchical extension and local multigrid methods in domain decomposition preconditions. East-West J. Numer. Math., Vol.2, №3, 1994; 173-193.
151. Haase G., Nepomnyashchikh S.V. Explicit extension operators on hierarchical grids. East-West J. Numer. Math., 1997, Vol.5, N4; 231-348.
152. Jung M., Nepomnyaschikh S.V. Variable additive preconditioning procedures. Computing J., 62, 1999; 109-128.

153. Kobel'kov G.M. Efficient methods for solving elasticity theory equations. Soviet Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modell., 1991, 6; 361-375.

154. Kobel'kov G.M. On the solution the boundary value problem for the diffusion equation with highly varying coefficient. Rus. J. of Numer. Analysis and Math. Modell., 1996, 11; 487-495.

155. Kornhubert R. and Yserentant H. Multilevel methods for elliptic problems on domains not resolved by the coarse grid. Domain decomposition for PDEs, Keyes D.E. and Xu J. eds., Contemporary Mathematics, 180, 1994; 49-60.

156. Kuznetsov Y.A. Algebraic multigrid domain decomposition methods. Sov. J. of Numer. Analysis and Math. Modell., 1989, 4; 561-577.

157. Kwak D.Y., Nepomnyaschikh S.V., Pyo H.C. Domain decomposition for model heterogeneous anisotropic problems. Numer. Lin. Alg. Appl., 10, 2003; 129-157.

158. Laevsky Yu.M. On the domain decomposition method for grid parabolic problems. Rus. J. of Numer. Anal. and Math. Modell., 1998, Vol.13, №5, 389-403.

159. Laitinen E., Lapin A., Pieska J. Asynchronous domain decomposition methods for continuous casting problem. J. Comp. Appl. Math., 2003, 154; 393-413.

160. Lapin A. Iterative solution for two classes of mesh variational inequalities. ENUMATH-99 (Proceedings of 3-rd European Conf. on Numer. Math. and

Advanced Appl., Juvaskyla, Finland, 1999, ed. by P.Neittaanmaki, T.Tiihonen, P.Tarvainen), World scientific, Singapore, 2000; 617-625.

161. Lions P.L. On the Schwarz alternating method. I. First Int. Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, (R. Glavinski, G.H. Golub, G. Meurant and J. Periaux, eds.), SIAM, Philadelphia, 1988; 1-41.

162. Marchuk G.I., Kuznetsov Yu.A., Matsokin A.M. Fictitious domain and domain decomposition method. Sov. J. Numer. Anal. Math. Modell., 1986, Vol.1, №1; 3-35.

163. Matsokin A.M., Nepomnyashchikh S.V. The fictitious component method using extension operators. Siberian J. Comput. Math., 1, 1992, №1; 31-45.

164. Miller K. Numerical analogs to the Schwarz alternating procedure. Numer. Math. 1965, B.7; 91-103.

165. Nepomnyashchikh S.V. Method of splitting into subspaces for solving elliptic boundary value problems in complex-form domains. Sov. J. Numer. Anal. Math. Modell. 1991, Vol.6, №2; 151-168.

166. Nepomnyashchikh S.V. Mesh theorems on traces, normalization of function traces and their inversion. Sov. J. Numer. Anal. Math. Modell., 1991, Vol.6, №3; 223-242.

167. Nepomnyashchikh S.V. Decomposition and fictitious domain methods for elliptic boundary value problems. 5th Conference on Domain Decomposition

Methods for Partial Differential Equations, SIAM, Philadelphia, PA, 1992; 62-71.

168. Nepomnyaschikh S.V. Domain decomposition for elliptic problems with large condition numbers. Domain Decomposition for PDEs, D.E. Keyes and J. Xu, eds., Contemporary Mathematics, 180, 1994; 75-85

169. Nepomnyaschikh S.V. Domain decomposition and multilevel techniques for preconditioning operators. Technische Univ. Chemnitz-Zwickau, 1995. (Preprint SPC 95-30).

170. Nepomnyaschikh S.V. Fictitious space method on unstructured meshes. East-West J. Numer. Math., 1995, Vol.3, №1; 71-79.

171. Nepomnyaschikh S.V. Optimal multilevel extension operators. Technische Univ. Chemnitz-Zwickau, 1995. (Preprint SPC 95-3).

172. Nepomnyaschikh S.V. Preconditioning operators on unstructured grids. Seventh Copper Mountain Conference on Multigrid Methods, N.D. Melson et al., eds., N3339 in NASA Conference Publication, 1996; 607-621.

173. Nepomnyaschikh S.V. Domain decomposition and multilevel techniques for preconditioning operators. Domain Decomposition Methods for Sciences and Engineering, R. Glowinski et al., eds., John Wiley & Sons, Ltd, 1997; 193-203.

174. .Nepomnyaschikh S.V. Domain decomposition for isotropic and anisotropic elliptic problems. Technische Univ. Chemnitz-Zwickau, 1999. (Preprint SFB393/99-16).

175. Nepomnyaschikh S.V. Preconditioning operators for elliptic problems with bad parameters. Domain Decomposition Methods for Sciences and Engineering, C.-H. Lai et al., eds., Published by Domain Decomposition Press, Bergen, 1999; 81-87.

176. Nepomnyashchikh S.V. Finite element trace theorems for parameter dependent Sobolev space. Numerical Mathematics and Advances Applications, World Scientific: Singapore, 2000; 31-41.

177. Nepomnyashchikh S.V. Domain decomposition methods. Radon Series Comput. Appl. Math., 2007, 1; 89-159.

178. O'Leary D.P., Widlund O. Capacitance matrix method for the Helmholtz equation on general three dimensional regions. Math. Comput., 1979, Vol. 33; 849-879.

179. Oswald P. Multilevel finite element approximation: theory and applications. Teubner Skripten zur Numerik, B.G. Teubner, Stuttgart, 1994.

180. Poincare H. La methode de Neuman et le probleme de Dirichlet. Acta Math., 1896, t. 20.

181. Proskurowski W. Numerical solution of Helmholtz's equation by implicit capacitance matrix methods. ACM Trans. on Math. Software., 1979, Vol.5, №1; 36-49.

182. Proskurowski W., Widlund O. On the numerical solution of Helmholtz equation by the capacitance matrix methods. Math. Comput., 1976, Vol.30; 433-468.

183. Proskurowski W., Widlund O. A finite element – capacitance matrix method for the Neumann problem for Laplace's equation. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 1980, Vol.1; 410-425.

184. Quarteroni A., Valli A. Domain decomposition methods for partial differential equations. Oxford: Oxford Univ. Press, 1999.

185. Saltzer Ch. An abridged block method for the solution of the Dirichlet problem for the Laplace difference equation. J. Math. and Phys., 1953, Vol. 32, №1; 63-67.

186. Schwarz H.A. Uber einige Abbildungsaufgaben. Ges. Math. Abh., 1869, 11; 65-83.

187. Shaidurov V.V., Tobiska L. The convergence of the cascadic conjugate gradient method applied to elliptic problems in domains with re-entrant corners. Math. of Comput., 1999, Vol.69, №230; 501-520.

188. Smith B.F., Bjorstad P.E., Gropp W.D. Domain decomposition. Parallel multilevel methods for elliptic methods partial differential equations. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

189. Stevenson R. Robustness of multi-grid applied anisotropic equations on convex domains with re-entrant corners. Numer. Math., 1993, 68; 373-398.

190. Toselli A., Widlund O. Domain decomposition methods – algorithms and theory. Spring Series in Comput. Math. Heidelberg: Springer, 2004, Vol.34.

191. Vassilevski Yu. A hybrid domain decomposition method based on aggregation. Numer. Linear Algebra Appl., 2004, Vol. 11; 327-341.

192. Vassilevski Yu. A parallel CG solver based on domain decomposition and non-smooth aggregation. Conjugate gradient algorithms and finite element methods (Proceedings of Int. Conf. 50 years of CG), Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2004; 93-102.

193. Widlund O. Capacitance matrix method for Helmholtz's equation on general bounded regions. Lect. Notes Math., 1978, №631; 209-219.

194. Widlund O.B. An extension theorem for finite element space with there applications. N.Y., 1986; 13p. (Techn. Rep., Comput. Sci. Dep., N.Y. Univ., 233)

195. Xu J. Iterative methods by space decomposition and subspace correction. SIAM Review 34, 1992, 4; 581-613.

196. Xu J. The auxiliary space method and optimal multigrid preconditioning techniques for unstructured grids. Computing, 1996, 56; 215-235.

197. Xu J., Zou J. Some nonoverlapping domain decomposition methods. SIAM Review 1998, 40; 857-914.

198. Yserentant H. On the multi-level splitting of finite element space. Numer. Math., 1986, 49; 379-412.

199. Yserentant H. Two preconditioners based on the multi-level splitting of finite element space. Numer. Math., 1990, 58; 163-184.

200. Zhang X. Multilevel Schwarz methods. Numer. Math., 1992, 63(4); 521-539.

Список основных публикаций

В данном пункте приводится список публикаций автора, которые содержат основные результаты, изложенные в диссертации.

Центральные и рецензируемые издания

201. Мацокин А.М., Непомнящих С.В. Метод альтернирования Шварца в подпространствах. Изв. Высш. Учебных заведений. Математика, 1985, Т.29, №10; 61-66.

202. Мацокин А.М., Непомнящих С.В. Метод фиктивного пространства и операторы продолжения. Ж.. Выч. Мат. и Мат. Физ., 1993, Т.33, №1; 52-68.

203. Мацокин А.М., Непомнящих С.В., Ткачев Ю.А., Юнг М. Методы многоуровневого переобусавливания на локально модифицированных сетках. Сиб. журн. вычисл. матем., Новосибирск: СО РАН., 2006, Т. 9, № 4; 403-421.

204. Непомнящих С.В. Метод разбиения пространства для эллиптических проблем со скачками коэффициентов в узких полосах. Докл. РАН, Мат., 1992, Т.45, №2; 488-491.

205. Bank R.E., Jimack P.K., Nadeem S.A., Nepomnyaschikh S.V. A weakly overlapping domain decomposition preconditioner for the finite element solution of elliptic partial differential equations. SIAM J. Sci. Comput., 23, 2001, №6; 1818-1842.

206. Beuchler S., Nepomnyashchikh S.V. Overlapping Additive Schwarz preconditioners for isotropic elliptic problems with degenerate coefficients. J. Numer. Math., 2007, Vol.15, №4; 245-276.

207. Beuchler S., Nepomnyashchikh S.V. Overlapping Additive Schwarz Preconditioners for Elliptic Problems with Degenerate Locally Anisotropic Coefficients. SIAM J. on Numer. Anal., 2007, Vol.45, Is. 6; 2321-2344.

208. Globisch G., Nepomnyaschikh S.V. The hierarchical preconditioning having unstructured grids. Computing J., 1998, №61; 307-330.

209. Haase G., Langer U., Meyer A. and Nepomnyashchikh S.V. Hierarchical extension and local multigrid methods in domain decomposition preconditions. East-West J. Numer. Math., 1994, Vol.2, №3; 173-193.

210. Haase G., Nepomnyashchikh S.V. Explicit extension operators on hierarchical grids. East-West J. Numer. Math., 1997, Vol.5, №4; 231-348.

211. Jung M., Nepomnyaschikh S.V. Variable additive preconditioning procedures. Computing J., 1999, №62; 109-128.

212. Kwak D.Y., Nepomnyaschikh S.V., Pyo H.C. Domain decomposition for model heterogeneous anisotropic problems. Numer. Lin. Alg. Appl., 2003, №10; 129-157.

213. Matsokin A.M., Nepomnyashchikh S.V. Norms in the space of traces of mesh functions. Soviet J. Numer. Anal. and Math. Modell., 1988, Vol. 3, №3; 199-216.

214. Matsokin A.M., Nepomnyaschikh S.V. On the convergence of the non-overlapping Schwarz subdomain alternating method. Soviet J. Numer. Anal. and Math. Modell., 1989, Vol. 4, №6; 479-486.

215. Matsokin A.M., Nepomnyaschikh S.V. On using the bordering method for solving systems of mesh equations. Soviet J. Numer. Anal. and Math. Modell., 1989, Vol. 4, № 6; 487-492.

216. Nepomnyaschikh S.V. On the application of the bordering method to the mixed boundary value problem for elliptic equations and on mesh norms in $W_2^{1/2}(S)$. Soviet J. Numer. Anal. and Math. Modell., 1989, Vol. 4, №6; 493-506.

217. Nepomnyaschikh S.V. Schwarz alternating method for solving the singular Neumann problem. Soviet J. Numer. Anal. and Math. Modell., 1990, Vol. 5, №6; 69-78.

218. Nepomnyaschikh S.V. Method of splitting into subspaces for solving elliptic boundary-value problems in complex-form domains. Soviet J. Numer. Anal. and Math. Modell., 1991, Vol. 6, №2; 151-168.

219. Nepomnyaschikh S.V. Mesh theorems of traces, normalizations of function traces and their inversion. Soviet J. Numer. Anal. and Math. Modell., 1991, Vol. 6, №3; 223-242.

220. Nepomnyaschikh S.V. Fictitious space method on unstructured meshes. East-West J. Numer. Math., 1995, Vol.3, №1; 71-79.

221. Nepomnyaschikh, E.-J. Park. Preconditioning for Heterogeneous Problems. In Domain Decomposition Methods in Science and Engineering, Lecture Notes in Comput. Sci. and Engin. (LNCSE), Springer, 2004, Vol.40; 415-422.

222. Nepomnyashchikh S.V. Domain decomposition methods. Radon Series Comput. Appl. Math., 2007, 1; 89-159.

Другие научные издания

223. Мацокин А.М., Непомнящих С.В. О сходимости метода альтернирования Шварца по подобластям без налегания. Методы аппроксимации и интерполяции, Новосибирск, 1981; 85-97.

224. Мацокин А.М., Непомнящих С.В. Применение окаймления при решении систем сеточных уравнений. Вычислительные алгоритмы в задачах мат. физики, Новосибирск, 1983; 99-109.

225. Мацокин А.М., Непомнящих С.В. Нормы в пространстве следов сеточных функций. Новосибирск, 1987; 33с. (Препринт, ВЦ СО АН СССР, 737).

226. Непомнящих С.В. О применении метода окаймления к смешанной краевой задаче для эллиптических уравнений и о сеточных нормах в $W_2^{1/2}(S)$. Новосибирск, 1984; 24с. (Препринт, ВЦ СО АН СССР, 106).

227. Непомнящих С.В. Метод альтернирования Шварца для вырожденной задачи Неймана. Вычислительные алгоритмы в задачах мат. физики, Новосибирск, 1985; 99-112.

228. Непомнящих С.В. Метод разделения области для эллиптических задач с разрывными коэффициентами. Новосибирск, 1990; 20с. (Препринт, ВЦ СО АН СССР, 891).

229. Непомнящих С.В. Метод разложения на подпространства для решения эллиптических краевых задач в областях сложной формы. Численные методы и мат. моделирование, Новосибирск, 1990; 128-161.

230. Непомнящих С.В. Сеточные теоремы о следах, нормировка следов сеточных функций и их обращение. Новосибирск, 1991; 25с. (Препринт ВЦ СО АН СССР, 930).

231. Matsokin A.M., Nepomnyashchikh S.V. The fictitious component method using extension operators. Siberian J. Comput. Math., 1, 1992, N1; 31-45.

232. Nepomnyashchikh S.V. Domain decomposition method for elliptic problems with discontinuous coefficients. Domain Decomposition for PDEs, R. Glowinski et al., eds., SIAM Publ., 1990; 242-252.

233. Nepomnyashchikh S.V. Decomposition and fictitious domain methods for elliptic boundary value problems. Domain Decomposition for PDEs, R. Glowinski et al., eds., SIAM Publ., 1992; 62-71.

234. Nepomnyashchikh S.V. Domain decomposition method for the elliptic problem with jumps in the coefficients in thin strips. Siberian J. Comput. Math., 1992, Vol.1, №2; 23-34.

235. Nepomnyashchikh S.V. Domain decomposition methods for singular elliptic problems. Problems of Math. Physics, R. Jentsch at al., eds., Teubner Publ., 1994; 120-129.

236. Nepomnyaschikh S.V. Domain decomposition for elliptic problems with large condition numbers. Domain Decomposition for PDEs, D.E. Keyes and J. Xu, eds., Contemporary Math., 1994, Vol. 180; 75-85.

237. Nepomnyaschikh S.V. Domain decomposition and multilevel techniques for preconditioning operators. Technische Univ. Chemnitz-Zwickau, 1995. (Preprint, SPC 95-30).

238. Nepomnyaschikh S.V. Optimal multilevel extension operators. Technische Univ. Chemnitz-Zwickau, 1995. (Preprint, SPC 95-3).

239. Nepomnyaschikh S.V. Preconditioning operators on unstructured grids. Seventh Copper Mountain Conference on Multigrid Methods, N.D. Melson et al., eds., N3339 in NASA Conference Publication, 1996; 607-621.

240. Nepomnyaschikh S.V. Domain decomposition and multilevel techniques for preconditioning operators. Domain Decomposition Methods for Sciences and Engineering, R. Glowinski et al., eds., John Wiley & Sons, Ltd, 1997; 193-203.

241. Nepomnyaschikh S.V. Domain decomposition for isotropic and anisotropic elliptic problems. Technische Univ. Chemnitz-Zwickau, 1999. (Preprint, SFB393/99-16).

242. Nepomnyaschikh S.V. Preconditioning operators for elliptic problems with bad parameters. Domain Decomposition Methods for Sciences and Engineering, C.-H. Lai et al., eds., Published by Domain Decomposition Press, Bergen, 1999; 81-87.

243. Nepomnyashchikh S.V. Finite element trace theorems for parameter dependent Sobolev space. Numer. Math. and Adv. Appl., World Scientific: Singapore, 2000; 31-41.

244. Nepomnyaschikh S.V., Park E.-J., Cho S. Domain Decomposition Preconditioning for Elliptic Problems with Jumps in Coefficients, Linz, Austria, 2005; 29 p. (RICAM-Report, 2005-22).

245. Nepomnyaschikh S.V., Scherer K. Multilevel preconditioners for bilinear finite elements approximations of diffusion problems. Bonn: Uni Bonn, 2008; 9 p. (Preprint, SFB611/08-384).