

Матричные методы и технологии для задач со сверхбольшим числом неизвестных

Е. Е. Тыртышников

1. СТРУКТУРЫ И МЕТОДЫ ДЛЯ МАТРИЦ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА.

Матричные вычисления — ключевая часть многих приложений. Однако, несмотря на успехи в построении общих алгоритмов для классических задач, имеется много задач, которые не могут быть решены с помощью существующих алгоритмов из-за большого размера или неустойчивости (чаще всего требующей пересмотра самой постановки задачи). Можно утверждать, что трудная прикладная задача может быть решена только на основе выявления и использования структурных свойств, отличающих ее от задач общего вида.

При решении трехмерных задач в инженерной и научно-исследовательской практике необходимо уметь работать с огромными массивами числовых данных. Например, в задачах расчета летательных аппаратов областью определения неизвестной функции является поверхность летательного аппарата, в задачах дифракции это может быть поверхность рассеивателя (например, того же летательного аппарата) или антенны, в задачах электромагнитного каротажа это может быть область неоднородности (нефтяной пласт и т. п.) или ее граница.

Основным инструментом моделирования часто являются системы интегральных уравнений, заданные на поверхностях или в областях сложной формы. При этом значение неизвестной функции в любой точке зависит от значений во всех других точках - это означает, что после дискретизации все или почти все коэффициенты для всех пар узлов из области сложной формы отличны от нуля и должны участвовать в расчете. Если общее число узлов есть величина порядка 10^6 , то общее число ненулевых числовых коэффициентов будет порядка 10^{12} . Если для хранения одного числа используется 8 байт, то для всего массива коэффициентов потребуется более 7 терабайт. Это не так уж мало. Но более серьезной проблемой является то, что традиционные методы решения систем уравнений имеют время работы, пропорциональное кубу числа узлов. Поэтому если допустить, что для

10^3 узлов требуется время порядка 0.1 секунды, то для 10^6 потребуется уже около 1200 суток, то есть более 3 лет.

Для задач такого рода кажутся необходимыми высокопроизводительные компьютеры и кластерные системы. Но объем данных и сложность задач таковы, что даже при наличии мощных компьютеров нужны специальные математические методы, позволяющие получать сжатое представление огромного массива числовых данных с помощью относительно малого числа параметров и в удобной для обработки форме. Такого типа методы в математике относятся к *методам нелинейной аппроксимации*. Они активно применяются при обработке видеoinформации, распознавании речи, в факторном анализе в статистике (в анализе измерений в социологии, психологии и т.п.), в спектральном анализе в химии (в том числе в задачах ядерного магнитного резонанса) и т.д.

Схожие проблемы возникают и в тех случаях, когда связи носят локальный характер (например, при дискретизации дифференциальных уравнений). Важным этапом технологии приближенного решения задач такого рода является генерация расчетных сеток. "Большие" задачи обычно связаны с "большими" сетками. решения краевых задач. Класс используемых сеток зависит от целей расчетов. Сетки, минимизирующие число степеней свободы для задач с анизотропными особенностями, должны быть адаптивными анизотропными; для изотропных особенностей достаточно иметь иерархические локально сгущающиеся симплициальные разбиения; для сложных геометрий желательно иметь неструктурированные треугольные или тетраэдральные сетки; в некоторых случаях удобно использовать прямоугольные локально модифицированные сетки. Особые сложности вызывает использование трехмерных сеток.

Структура в данных связана с особым способом их представления с помощью относительно малого числа параметров. Последнее свойство означает в широком смысле *разреженность данных*. Важный пример разреженности данных дают так называемые *разреженные матрицы*, в которых ненулевых элементов относительно мало, а в качестве определяющих параметров можно взять позиции и значения ненулевых элементов. Иной характер имеет разреженность данных в плотных матрицах. Рассмотрим типичные примеры.

Дискретное преобразование Фурье. Матрица Фурье

$$F_n = \left[\exp \left(i \frac{2\pi}{n} kl \right) \right], \quad 0 \leq k, l \leq n - 1,$$

— плотная матрица, определяемая всего одним параметром n . Но она может быть умножена на вектор всего лишь за $O(n \log n)$ операций (вместо n^2 для матриц общего вида) — при помощи *быстрого преобразования Фурье* (БПФ). Для этого используются специальные разреженные факторизации матрицы F_n . Например, если $n = 2m$, то

$$F_n = P_n \begin{bmatrix} F_m & 0 \\ 0 & F_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & W_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & I_m \\ I_m & -I_m \end{bmatrix}, \quad W_m = \text{diag} \left\{ \exp \left(i \frac{\pi}{m} k \right) \right\},$$

матрица P_n осуществляет четно-нечетную перестановку:

$$\begin{aligned} [v_0, v_1, \dots, v_{m-1}, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{2m-1}] P_n = \\ [v_0, v_2, \dots, v_{2(m-1)}, v_1, v_3, \dots, v_{2m-1}]. \end{aligned}$$

Если $n = 2^L$, то аналогичным образом можно факторизовать матрицы $F_m, F_{m/2}, \dots, F_4$. В итоге мы получаем рекурсивный алгоритм, в котором $(1/2)n \log_2 n$ умножений и $(3/2)n \log_2 n$ сложений комплексных чисел. Идеи и алгоритмы типа БПФ появлялись еще в первой половине 20 века, но их бурное внедрение в практику вычислений началось с работы Кули и Тьюки 1965 года (см. [2]).

Теплицевы матрицы и их обобщения. Теплицева матрица

$$A = [a_{k-l}], \quad 0 \leq k, l \leq n-1.$$

полностью определяется своим первым столбцом и первой строкой. Если $a_k = a_l$ при $k = l \pmod{n}$, то A называется также *циркулянтной* матрицей. Теплицевы матрицы связаны с различными отделами классического анализа (ортогональные многочлены, ряды Фурье, проблема моментов и др.) и многими приложениями из статистики и вычислительной математики (например, интегральные уравнения с ядром типа свертки) (см. [2, 3, 15, 63]). Умножение теплицевой матрицы A на вектор выполняется за $O(n \log_2 n)$ операций в два приема:

- (1) A достраивается (как подматрица) до циркулянтной матрицы C порядка $N \geq n$;
- (2) C диагонализуется с помощью БПФ: $(1/n) F_N^* C F_N = \text{diag}(F_N c)$, где c — первый столбец матрицы C .

К матрицам *типа теплицевых* обычно относят $n \times n$ -матрицы вида

$$A = U_1 V_1 + \dots + U_r V_r, \quad (1)$$

где $r \ll n$ и все сомножителями U_k, V_k — теплицевы матрицы. Оказывается, для теплицевой матрицы обратная матрица имеет вид (1) с $r \leq 2$. Этот факт был открыт в работе [52] и впоследствии привел к важному понятию *теплицевых рангов*, или *рангов смещения* (Th. Kailath и др.; см. [15, 63]). В общем случае под (U, V) -рангом смещения для произвольной матрицы A понимается ранг $r(U, V)$ матрицы

$$\Delta(U, V)(A) = AU - VA, \quad (2)$$

где U, V — некоторые фиксированные матрицы. При специальном выборе U и V возникают интересные классы матриц A , для которых $\text{rank}(\Delta(U, V)(A)) \ll n$. Преобразования вида (2) удобны при построении “малопараметрических” обобщений различных матриц специального вида: ганкелевых, Коши, Вандермонда и др. При этом матрица A^{-1} имеет схожее “малопараметрическое” описание — в силу очевидного равенства

$$\text{rank}(\Delta(U, V)(A)) = \text{rank}(\Delta(V, U)(A^{-1})).$$

Общий характер преобразования (2) позволяет обнаружить полезные связи между формально разными классами матриц. Например, пусть $Z = [\delta_{i, j-1}]$ — матрица сдвига и $P = \text{diag}(p_1, \dots, p_n)$, $Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_n)$ — диагональные матрицы такие, что $p_i \neq q_i$. Тогда:

- $r(Z, Z)(A) = \text{rank}(\Delta(Z, Z)(A)) \leq 2$ для любой теплицевой матрицы A (в случае $r \ll n$ это обобщенные теплицевы матриц);
- $r(P, Z)(A) = \text{rank}(\Delta(P, Z)(A)) \leq 1$ для матрицы Вандермонда

$$A = [p_i^j], \quad 0 \leq i, j \leq n - 1$$

(в случае $r \ll n$ это обобщенные матрицы Вандермонда);

- $r(P, Q)(A) = \text{rank}(\Delta(P, Q)(A)) \leq 2$ для матрицы Коши

$$A = [1/(p_i - q_j)]$$

(в случае $r \ll n$ это обобщенные матрицы Коши).

В совершенно общем случае легко заметить, что

$$r(U, Q)(ABC) \leq r(U, V)(A) + r(V, Z)(B) + r(Z, Q)(C).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что обобщенную теплицеву матрицу B можно преобразовать в обобщенную матрицу Коши путем двустороннего умножения на матрицы Вандермонда A и C с увеличением обобщенного ранга максимум на 2 (поскольку $r(P, Q) \leq r(Z, Z) + 2$).

Для решения линейных систем со строго регулярной теплицевой матрицей коэффициентов и вычисления “малопараметрического” разложения соответствующей обратной матрицы известны алгоритмы:

- сложности $O(n^2)$ — *быстрые* (Левинсон, Шур и др.);
- сложности $O(n \log^2 n)$ — *супербыстрые* (Морф, Юн и др.).

До сих пор остается актуальным изучение быстрых и супербыстрых прямых методов для разных типов матриц с малым рангом смещения.

Матрицы с блоками малого ранга. Малоранговые матрицы

$$A = \sum_{k=1}^r u_k v_k^T, \quad r \ll n,$$

определяются элементами векторов u_k, v_k (так называемых *скелетонов*) и играют важнейшую роль при аппроксимации матриц и в матричных вычислениях (см. [1, 59]). При $r < n$ такие матрицы являются вырожденными и поэтому не могут использоваться непосредственно для аппроксимации обратимых матриц. Однако, они могут хорошо приближать достаточно большие области в обратимых матрицах, возникающих при рассмотрении нелокальных операторов (см. [43, 61, 64]). Часто такие области являются подматрицами (блоками), но это могут быть подмножества и более сложного вида. Например, в *семисепарабельной* матрице это верхний и нижний треугольники — оба вкладываются в некоторые (разные) матрицы малого ранга. В общем случае семисепарабельными оказываются матрицы, обратные к ленточным матрицам (см. [11]).

Матрицы малого тензорного ранга. Пусть $n = p^2$, U_k, V_k — матрицы порядка p , а матрица A имеет вид

$$A = \sum_{k=1}^r U_k \otimes V_k, \quad r \ll n.$$

Такая матрица определяется элементами кронекеровых сомножителей U_k, V_k ; их число равно $rp^2 = O(n)$ при ограниченном r . Матрицы, представленные суммой кронекеровых произведений с числом факторов больше двух, играют важную роль в многомерном анализе [53].

Несмотря на успехи в изучении вышеперечисленных классов матриц (в частности, алгоритмы быстрого умножения, прямые методы решения систем типа теплицевых с асимптотикой $O(n^2)$ и даже $O(n \log^2 n)$), имеется разрыв между нуждами приложений и нынешним состоянием дел в теории и алгоритмах. Наиболее трудные прикладные задачи - многомерные, они приводят к многоуровневым структурированным матрицам, а наши знания именно в этой части наименее развиты.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим обратимую дважды теплицеву матрицу порядка $n = p^2$:

$$A = [a_{k_1-l_1}], \quad 0 \leq k_1, l_1 \leq p-1, \quad a_{k_1-l_1} = [a_{k_1-l_1, k_2-l_2}], \quad 0 \leq k_2, l_2 \leq p-1,$$

и поставим вопрос: существует ли пригодная для вычислений специфика в A^{-1} ? Конечно, A можно рассматривать как блочно теплицеву матрицу с блоками $p \times p$, тогда обратная матрица описывается формулами Гохберга-Хайнига. Но число параметров в этом описании составляет $O(n^{3/2})$ - такой подход малоинтересен: он не выходит за рамки техники работы с одноуровневыми матрицами и игнорирует теплицеву структуру блоков, тогда как дважды теплицева матрица существенным образом двухуровневая. (Недавно в работе по авторегрессивным фильтрам по двум переменным J.S.Geronimo и H.J.Woerdeman рассматривали сходный вопрос и получили некоторое описание, но оно не привело к быстрым вычислительным процедурам.)

ПРИМЕР 2. Рассмотрим обратимую дважды трехдиагональную матрицу порядка $n = p^2$:

$$A = \begin{bmatrix} a_1^0 & a_1^1 & & & & \\ a_2^{-1} & a_2^0 & a_2^1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & a_{n-1}^{-1} & a_{n-1}^0 & a_{n-1}^1 & \\ & & & a_n^{-1} & a_n^0 & \end{bmatrix}, \quad a_i^j = \begin{bmatrix} a_{i,1}^{j,0} & a_{i,1}^{j,1} & & & \\ a_{i,2}^{j,-1} & a_{i,2}^{j,0} & a_{i,2}^{j,1} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{i,n-1}^{j,-1} & a_{i,n-1}^{j,0} & a_{i,n-1}^{j,1} \\ & & & a_{i,n}^{j,-1} & a_{i,n}^{j,0} \end{bmatrix},$$

и снова поставим вопрос о существовании пригодной для вычислений структуры в A^{-1} . Если A рассматривается как блочно-трехдиагональная матрица, то обратную дает блочное обобщение [11] известной формулы обращения трехдиагональных матриц

$$A^{-1} = L \circ E + U \circ E^T - \frac{1}{2} \text{diag}(L + U),$$

где \circ означает адамарово (поэлементное) произведение,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank } L = \text{rank } U = 1, \quad \text{diag}(L) = \text{diag}(U).$$

Прямое блочное обобщение вновь содержит $O(n^{3/2})$ параметров и поэтому неудовлетворительно. Блочный подход не выходит за рамки методов для одноуровневых матриц, а двухуровневый случай требует, очевидно, новых идей. Вопрос о том, каких именно, остается открытым.

Заметим также, что область применения прямых методов ограничена даже для большинства матриц специального вида, в том числе для дважды теплицевых. Более перспективно развитие итерационных методов, в особенности методов типа метода минимальных невязок (см. [65]; работа Г.И.Марчука и Ю.А.Кузнецова [8] — одна из самых ранних в данном направлении). Вычислительная работа в итерационном методе определяется двумя вещами: (а) сложностью одной итерации; (б) числом итераций. Первое определяется сложностью матрично-векторного умножения, второе — спектральными свойствами матрицы коэффициентов и согласованностью матрицы и правой части. Для рассмотренных выше матриц специального вида умножение на вектор осуществляется с помощью известных быстрых алгоритмов (часто связанных с БПФ). Поэтому основное внимание в исследованиях направляется на способы улучшения спектральных свойств с помощью *предобусловливания*. Многие работы, выполненные в ИВМ РАН, позволили сформировать очень эффективные методы предобусловливания для конкретных задач и общие инструменты теоретического анализа, связанные с такими понятиями как *равнораспределенность* и *спектральные кластеры* (см., прежде всего, [40]).

Современные вычислительные технологии решения матричных задач основаны на изучении матричных (обычно нелинейных) аппроксимаций. Построение предобусловливателей рассматривается как задача аппроксимации матриц с помощью тех или иных матриц специального вида. В случае больших плотных матриц аппроксимация исходной матрицы подходящей “малопараметрической” матрицей дает возможность снизить сложность матрично-векторного умножения.

2. СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ В ТЕОРИИ МАТРИЦ.

Малоранговые аппроксимации — это частный пример дискретных *се-*

парабельных аппроксимаций (аппроксимаций функции $a_{ij\dots k}$ путем разделения переменных i, j, \dots, k). Теория таких аппроксимаций в случае двух индексов обладает особой элегантностью и завершенностью (Шмидт, Алахвердиев, Мирский [51]). Она связана с *сингулярным разложением матрицы* [16, 51], которое в общем случае эффективно вычисляется по алгоритму Голуба-Кахана [59], а в малоранговом случае — по методу bidiagonalization Ланцоша (см. [26]). Оба подхода теряют эффективность, конечно, в практически важном случае очень больших матриц, когда сложность $O(n^3)$ и даже $O(n^2)$ нельзя считать приемлемой. Практически полезные алгоритмы для больших задач должны иметь сложность $O(n)$ или $O(n \log^\alpha n)$.

Таким образом, аппроксимации следует искать, используя лишь малую часть всех элементов аппроксимируемой матрицы. То, что это возможно в принципе, впервые доказано в [5, 27].

При построении аппроксимаций такого типа фундаментальную роль играет следующий принцип максимального объема.

Теорема. [25] Пусть M имеет порядок n и сингулярные числа $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$. Предположим, что $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$, где блок M_{11} невырожден, $r \times r$, и имеет максимальный объем (то есть модуль детерминанта) среди всех подматриц $r \times r$. Тогда

$$|\{M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}\}_{ij}| \leq (r + 1) \sigma_{r+1}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Можно заметить, что в обычном алгоритме LU -разложения выбор ведущего элемента ведет к увеличению объема базовой ведущей подматрицы. Если ранг матрицы равен r , то на r -м шаге получается аппроксимация ранга r — при этом достаточно вычислить только строки и столбцы, отвечающие базовой ведущей подматрице, и отказаться от вычисления всех элементов очередной активной подматрицы.

Область матрицы, занятая заданным числом строк и столбцов, имеет форму креста — поэтому соответствующие алгоритмы были названы алгоритмами *неполной крестовой аппроксимации* [45] (см. также [22]). Важно, что матрица задается виртуально — процедурой $\mathcal{M}(i, j)$, вычисляющей по требованию элементы в позиции (i, j) .

Алгоритм. [22] Для заданной функции $\mathcal{M}(i, j)$, $1 \leq i, j \leq n$, и заданной

точности ε найти вектор-столбцы $u_1, v_1, \dots, u_r, v_r$ размера n такие, что

$$\|M - \sum_{k=1}^r u_k v_k^T\|_F \leq \tilde{\varepsilon} \|M\|_F,$$

где

$$M = [m_{ij}], \quad m_{ij} = \mathcal{M}(i, j), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad \tilde{\varepsilon} \approx \varepsilon.$$

1. Положить $\delta = \varepsilon$, $k = 1$ and $\mathcal{I}[1 : n] = \mathcal{J}[1 : n] = [1, 2, \dots, n]$.

2. Вычислить $m_{ij} = \mathcal{M}(i, j)$ для

$$(i, j) \in \mathcal{P}_k = \{(\mathcal{I}(k), \mathcal{J}(k)), (\mathcal{I}(k+1), \mathcal{J}(k+1)), \dots, (\mathcal{I}(n), \mathcal{J}(n))\}$$

и положить

$$m'_{ij} = m_{ij} - \sum_{l=1}^{k-1} u_l(i) v_l(j).$$

3. Найти пару индексов (i'_k, j_k) такую, что

$$|m'_{i'_k j_k}| = \max_{(i,j) \in \mathcal{P}_k} |m'_{ij}|.$$

4. Вычислить $m_{i, j_k} = \mathcal{M}(i, j_k)$ для всех

$$i \in \mathcal{I}_k = \{\mathcal{I}(k), \mathcal{I}(k+1), \dots, \mathcal{I}(n)\}$$

и положить

$$m'_{i j_k} = m_{i, j_k} - \sum_{l=1}^{k-1} u_l(i) v_l(j_k).$$

5. Найти индекс i_k такой, что

$$d_k \equiv |m'_{i_k j_k}| = \max_{i \in \mathcal{I}_k} |m'_{i j_k}|.$$

(Теперь k -й ведущий элемент в M находится в позиции (i_k, j_k) .)

6. Остановиться, если d_k меньше машинной точности.

В противном случае вычислить

$$\tilde{\varepsilon} = d_k(n-k) / \left\| \sum_{l=1}^{k-1} u_l v_l^T \right\|_F$$

и, если $\tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon$, то положить $r = k - 1$ и остановиться.

7. Вычислить

$$\begin{aligned}
 m_{i_k j} &= \mathcal{M}(i_k, j) \text{ for } j = 1, \dots, n, \\
 \alpha &= m_{i_k j_k} / \sqrt{|m_{i_k j_k}|}, \quad \beta = \sqrt{|m_{i_k j_k}|}, \\
 u_k(i) &= m_{i j_k} / \alpha, \quad i = 1, \dots, n, \\
 v_k(j) &= m_{i_k j} / \beta, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

8. В системе \mathcal{I} переставить индексы в позициях k и l , где $\mathcal{I}(l) = i_k$.
В системе \mathcal{J} переставить индексы в позициях k и l , где $\mathcal{J}(l) = j_k$.
9. Если $k < n$, то положить $k \leftarrow k + 1$ и перейти к шагу 2.

Приведенный алгоритм, конечно, не может гарантировать получение правильной аппроксимации ранга r для произвольной матрицы (пусть и допускающей такую аппроксимацию). Но он прекрасно работает во многих практически важных случаях. Более того, при определенных предположениях относительно функции $\mathcal{M}(i, j)$ корректность данного алгоритма и его простых модификаций, ориентированных на дальнейшее увеличение объема выбираемой базовой подматрицы, можно доказать (см. [18, 45]).

3. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ И МНОГОУРОВНЕВЫЕ МАТРИЦЫ.

Пусть A — матрица размеров $n \times n$ и $\{A_k\}$ — конечная система ее блоков такая, что каждый элемент входит в один и только один блок. Будем называть такую систему блоков *мозаичным биением*. Если A_k имеет размеры $m_k \times n_k$ и ранг r_k , то при хранении только скелетонов сепарабельных разложений ранга r_k , получаем, что общее число параметров (память) для представления матрицы A имеет вид

$$\text{mem}(A) = \sum_k \min\{m_k n_k, (m_k + n_k)\}.$$

Величину

$$\text{mr}(A) = \text{mem}(A)/(2n)$$

назовем *мозаичным рангом* (системы блоков) матрицы A . С точки зрения экономии памяти и арифметической работы роль мозаичного ранга аналогична роли классического ранга матрицы: число операций для умножения матрицы A ранга r на вектор (и память для хранения скелетонов) имеет вид $r(m + n)$; то же самое сохраняется, если r — мозаичный ранг матрицы A .

Мозаичное биение строится с помощью *мозаичного дерева*, или *дерева кластеров*. Можно считать, что элемент a_{ij} в матрице характеризует "взаимодействие" элементов сетки (базисных функций, конечных элементов) с номерами i и j . Поставим в соответствие элементу i точку x_i в пространстве (например, геометрический центр носителя базисной функции). Под *кластером* понимается совокупность каких-то точек x_i . Кластер нулевого уровня (корень дерева) – это все множество точек. Далее, каждый кластер разбивается на непесекающиеся подкластеры в соответствии с тем или иным методом сепарации. После какого-то разрешенного числа сепараций появляется дерево кластеров. Любые две вершины дерева кластеров определяют блок в матрице. Любое мозаичное биение определяется некоторым набором пар вершин. Таким образом, построение мозаичного биения можно рассматривать как оптимизационную комбинаторную задачу на мозаичном дереве (цель — минимизация мозаичного ранга). Однако, на практике применяется простой эвристический прием: дерево просматривается начиная с корня, для каждой пары вершин l -ого уровня проверяется некоторый *признак*, делающий блок *кандидатом* на включение в список блоков, допускающих малоранговую аппроксимацию; блок-кандидат включается в систему блоков искомого мозаичного биения. Данный подход нацелен на получение малого ранга для как можно более крупных блоков.

ПРИМЕР. Рассмотрим интегральное уравнение с логарифмическим ядром

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \log|x-y|U(y)ds(y) = F(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Пусть $\partial\Omega$ – эллипс с полуосями $a = 1$ и $b = 0.5$. При использовании кусочно-постоянных базисных функций получаются матрицы с малым мозаичным ε -рангом ($\varepsilon = 10^{-4}$):

Порядок матрицы	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
Мозаичный ранг	63.46	71.48	78.44	86.84	93.80	100.76	106.50
Фактор сжатия	24.79%	13.96%	7.66%	4.24%	2.29%	1.23%	0.65%

Фактор сжатия — это отношение памяти для хранения скелетонов к полной памяти. При увеличении порядка в 2 раза фактор сжатия уменьшается примерно вдвое.

Для получения строгих утверждений об аппроксимациях малого мозаичного ранга рассматриваются последовательности матриц A_n и B_n поряд-

ка n для некоторой возрастающей последовательности значений n и изучать общие предположения, при которых справедливы следующие оценки:

$$\text{mr}B_n = O(\log^p n \log^q \varepsilon^{-1}), \quad p, q \geq 0, \quad (3)$$

$$\|A_n - B_n\| \leq \varepsilon n^\sigma, \quad (4)$$

где σ зависит от вида матричной нормы в левой части неравенства. Последовательность матриц A_n может ассоциироваться с функцией $f(x, y)$ от точек в ν -мерном евклидовом пространстве и последовательностью сеток $x_i = x_i^{(n)}$, $y_i = y_i^{(n)}$ следующим образом:

$$a_{ij} = f(x_i, y_j), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

В более общем случае рассматривается последовательность функций $U_i(x) = U_i^{(n)}(x)$, $V_i = V_i^{(n)}(x)$ и при этом

$$a_{ij} = (U_i, V_j)_f, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (U, V)_f \equiv \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} U(x) f(x, y) V(y) dx dy, \quad (6)$$

Для построения аппроксимаций $B_n \approx A_n$ и получения оценок (3), (4) нужны определенные предположения относительно функции $f(x, y)$ и распределения точек x_i, y_i . Это предположения разных типов, связанные с двумя вполне независимыми этапами вывода оценок. На первом этапе изучаются специфические (мозаично-скелетонные) функции $g(x, y)$, аппроксимирующие исходную функцию $f(x, y)$ в равномерной метрике. На втором этапе матрицы малого мозаичного ранга B_n определяются как матрицы с элементами $g(x_i, y_j)$.

Первые быстрые алгоритмы приближенного матрично-векторного умножения получены в рамках *мультипольного метода* [60, 64, 58, 68] (см. также [61]). Эти алгоритмы строятся для конкретных функций $f(x, y)$ и в действительности дают особый *метод дискретизации* интегральных уравнений. В ИВМ РАН аналогичные задачи изучались как задачи аппроксимации матриц [5, 27, 43, 45, 25]. Оценки мозаичных рангов получены для широкого класса функций, включающего все практически интересные случаи. Это класс *асимптотически сепарабельных* функций.

Пусть $V(a, h)$ обозначает куб с центром в точке a и стороной $2h$, а $W(a, h)$ — его дополнение в “большом кубе” Π . Функция $f(x, y)$ называется *асимптотически сепарабельной*, если существуют $\rho > 1$, $0 < q < 1$ и $\alpha > 0$ такие, что для любого целого $m > 0$ существует целое $n > 0$ и сепарабельная функция $p_n(x, y)$ с n членами с разделенными переменными x

и y , обеспечивающая оценки

$$|f(x, y) - p_n(x, y)| \leq c_1 q^m, \quad n \leq c_2 m^\alpha \quad \forall x \in V(a, h), \quad y \in W(a, \rho h).$$

По существу, в этом определении существование n -членных сепарабельных аппроксимаций предполагается для всех точек x и y , принадлежащих “достаточно отдаленным” областям точек.

4. ДИСКРЕТНЫЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Использование вейвлет-преобразований вызвано следующими причинами. В матрицах, связанных с интегральными уравнениями или со свойством сдвиговой инвариантности, обычно нельзя пренебречь какой-либо существенной частью элементов, так как они примерно одинаковы по порядку величины. Тем не менее, разделенные разности элементов (рассматриваемых как значения функции на целочисленной сетке) могут отличаться по величине существенным образом. В таких случаях дискретное вейвлет-преобразование (DWT) дает способ разделения информации, содержащейся в “гладкой” матрице, на блоки элементов, соответствующих взвешенным средним и взвешенным разделенным разностям элементов исходной матрицы. Первые велики по сравнению со вторыми, что и позволяет получить разреженную аппроксимацию трансформированной матрицы путем отбрасывания малых элементов. Классические вейвлеты в своей основе связаны с равномерными сетками и преобразованием Фурье. Однако на практике часто требуются неравномерные сетки. В случае нерегулярных сеток построение функций и преобразований, имеющих аналогичные классическим вейвлетам свойства требует совершенно иного подхода.

Для заданной сетки x_i , $i = 1, \dots, n + k + 1$, на отрезке и подсетке \tilde{x}_i , $i = 1, \dots, N + k + 1$ с $N < n$, введем B -сплайны порядка k :

$$B_i(x) = [x_i; \dots; x_{i+k+1}](y - x)_+^k, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\tilde{B}_i(x) = [\tilde{x}_i; \dots; \tilde{x}_{i+k+1}](y - x)_+^k, \quad i = 1, \dots, N.$$

Квадратные скобки означают разделенные разности по переменному y , а $(z)_+ = z$ при $z \geq 0$ и 0 в противном случае.

Определим V и \tilde{V} как подпространства, натянутые соответственно на B_i , $i = 1, \dots, n$ и \tilde{B}_i , $i = 1, \dots, N$. Заметим, что V и \tilde{V} — пространства сплайн-функций на сетках x_i и \tilde{x}_i . Поскольку \tilde{x}_i — подсетка x_i , заключаем, что \tilde{V} — подпространство для V . Следовательно, $\tilde{B}_i = \sum_s r_{is} B_s$. Вейвлет-пространство W определяется как дополнение \tilde{V} в V . Рассмотрим любое

удобное пространство W с известным базисом $\tilde{\psi}_i = \sum_s \beta_{is} B_s$, $i = 1, \dots, n - N$, и “улучшим” его при помощи *лифтинговой схемы* (Sweldens):

$$\tilde{\psi}_i = \sum_s \beta_{is} B_s - \sum_{j=j_{min}}^{j=j_{max}} \alpha_{ij} \tilde{B}_j, \quad i = 1, \dots, n - N.$$

Чтобы определить неизвестные лифтинговые коэффициенты α_{ij} , потребуем, чтобы функции $\tilde{\psi}_i$ имели предписанное число (скажем, m) исчезающих моментов:

$$\int \tilde{\psi}_i x^p dx = 0, \quad p = 0, \dots, m.$$

(Чтобы уравнивать число неизвестных и число уравнений, положим $j_{max} = j_{min} + m$.) Требование m исчезающих моментов дает линейную систему для лифтинговых коэффициентов; эффективный метод явного решения этой системы (а значит, и построения нестандартных вейвлетов) получен недавно в работе [12] и успешно применен при численном решении интегральных уравнений в [13, 24].

5. ТЕНЗОРНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ПЛЮС ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Пусть A — двухуровневая матрица с размерами уровней n_1 и n_2 . Попробуем приблизить ее суммой кронекеровых произведений вида $A_r = \sum_{k=1}^r A_k^1 \otimes A_k^2$, где размеры A_k^1 и A_k^2 соответственно $n_1 \times n_1$ и $n_2 \times n_2$. Пусть $A = A_r$, и r — наименьшее возможное число кронекеровых произведений, сумма которых есть A . Тогда r называется тензорным рангом A . Наилучшие приближения, минимизирующие $\|A - A_r\|_F$, могут быть получены алгоритмом SVD, примененным к матрицам, полученных специальным “перемешиванием” элементов.

Логика подхода, предложенного в [22], очень проста. Для заданной линейной системы $Ax = b$ (имеется в виду, что задан b и процедура вычисления произвольного элемента A) и величины ε допустимой относительной погрешности (во фробениусовой норме) мы выполняем следующие шаги:

(A) Аппроксимировать A суммой кронекеровых произведений

$$A \approx B = \sum_{k=1}^r U_k \otimes V_k, \quad \|B - A\|_F \leq \varepsilon \|A\|_F,$$

где U_k и V_k соответственно $p \times p$ и $q \times q$, и $n = pq$ есть порядок матрицы A . Для простоты предполагаем ниже $p = q = n^{1/2}$.

(B) Применить дискретное вейвлет-преобразование (DWT) с предписанным числом исчезающих моментов m к каждому кронекерову фактору:

$$P_k = WU_kW^T, Q_k = WV_kW^T, 1 \leq k \leq r.$$

Здесь W — матрица DWT степени m . P_k и Q_k — псевдоразреженные матрицы. Выбирая подходящий порог $\tau = \tau(\varepsilon, P_k, Q_k)$ и зануляя все элементы P_k и Q_k , меньшие τ по модулю, сформировать окончательное приближение B матрицей

$$C = W^{-T} \otimes W^{-T} DW \otimes W \approx B, D = \sum_{k=1}^r P_k^\tau \otimes Q_k^\tau,$$

приближающей B с заданной погрешностью ε :

$$\|B - C\|_F \leq \varepsilon \leq \|B\|_F.$$

(C) Построить предобусловливатель M^{-1} для матрицы A . Мы сосредоточимся на следующих опциях:

- многоуровневые циркулянтные предобусловливатели с масштабированием.
- приближенные обратные, полученные модифицированными итерациями Ньютона.

(D) Применить GMRES или PCG для решения

$$CM^{-1}y = b$$

и определить $M^{-1}y$ как приближение к точному решению x .

Ожидается, что $r \ll n$. Таким образом, формат кронекеровых произведений требует хранения всего лишь $2rn \ll n^2$ чисел. Шаг (A) позволяет хранить приближение для A в оперативной памяти.

Чтобы дать представление об эффективности вычислительных технологий, реализующих рассмотренный выше круг идей, приведем численные результаты для матриц, возникающих при решении уравнения Прандтля

$$-\int_0^1 \int_0^1 \frac{U(x, y)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{3/2}} dx dy = F(x_0, y_0) \quad (= V_z(x_0, y_0, 0))$$

методом дискретных вихрей [13] в случае равномерных меток.

В таблице 1 отражено построение обратных матриц, в таблице 2 — время на работы нашего тензор-вейвлетовского метода решения соответствующих линейных алгебраических систем (чтобы оценивать погрешность наиболее консервативным образом, правая часть была выбрана равной сумме столбцов матрицы с номерами 1, 5, 10).

$n = p^2$	4096	16384	65536	262144
ε	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
тензорный ранг A	8	8	9	10
время на обращение	2.68 sec	15.39 sec	1.47 min	7.29 min
число итераций	7	8	9	10
тензорный ранг A^{-1}	14	15	15	15
невязка	$4 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$

ТАБЛИЦА 1. Приближенное обращение матриц.

n	16129	65025	261121	1046529
тензорный ранг A	11	12	12	13
погрешность тензорной аппроксимации	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}
время на матрично-векторное умножение	0.05 sec	0.28 sec	1.43 sec	7.6 sec
число итераций	17	21	22	22
построение предобусловливателя	1.8 sec	7.2 sec	29.1 sec	1.9 min
время на решение	2.3 sec	7.9 sec	41.6 sec	3.3 min
относительная погрешность	$3.1 \cdot 10^{-6}$	$5.8 \cdot 10^{-6}$	$1.93 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$

ТАБЛИЦА 2. Решение систем с использованием масштабированных блочно-циркулянтных предобусловливателей.

5. МНОГОМЕРНЫЕ МАССИВЫ И АППРОКСИМАЦИИ ТЕНЗОРОВ.

Матрицу можно рассматривать как способ задания числовой функции от дискретных переменных i, j или, в терминологии некоторых языков программирования, как двумерный массив. Данная точка зрения приводит к такому естественному обобщению как m -мерный массив (m -мерная матрица) с элементами $x_{i_1 \dots i_m}$ или функция от m индексов i_1, \dots, i_m .

Многие понятия и факты теории матриц в случае m -мерных массивов при $m \geq 3$ утрачиваются. Например, понятие тензорного ранга связывается, как и в случае матриц, с разделением переменных i_1, \dots, i_m , приводящим к m -линейному разложению

$$x_{i_1 \dots i_m} = \sum_{s=1}^r u_{i_1 s} \dots u_{i_m s}, \quad 1 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 1 \leq i_m \leq n_m.$$

Наименьшее число слагаемых r в разложениях такого вида называется *тензорным рангом* m -мерного массива $X = [x_{i_1 \dots i_m}]$. Однако, свойства

тензорных рангов трехмерных массивов и рангов матриц различаются коренным образом.

1. Тензорный ранг трехмерных массивов существенно *зависит от числового поля*, которому принадлежат элементы трилинейных разложений.

2. Для тензорного ранга не известны какие-либо конечные алгоритмы его вычисления — в отличие от ранга матрицы, который в точной арифметике легко находится с помощью конечного числа элементарных преобразований.

3. В общем случае при фиксированных размерах трехмерного массива до сих пор не получены точные значения максимального значения тензорного ранга. (Кое-что, правда, известно. В 1970-х годах Йозеф Крускал доказал, что тензорный ранг произвольного вещественного $2 \times 2 \times 2$ -массива не превышает 3.)

4. Любопытны “вероятностные” свойства тензорных рангов: среди всего множества вещественных $2 \times 2 \times 2$ -массивов имеется примерно 79% массивов тензорного ранга 2 и примерно 21% массивов тензорного ранга 3 (экспериментальные данные, полученные Крускалом). В случае двумерных массивов (матриц) все проще: почти любая матрица имеет максимально возможный ранг (равный минимальному из ее размеров).

5. В отличие от билинейных разложений для матриц, в трехмерном случае уже имеет место *существенная единственность* трилинейных разложений — при весьма слабых предположениях.

Аппроксимации тензоров в настоящее время являются одним из наиболее активно развиваемых направлений методов сжатия и структуризации данных. Сама задача естественным образом связана с приближенной одновременной диагонализацией семейства матриц с помощью умножения слева и справа на невырожденные матрицы, одинаковые для всех членов семейства.

В ИВМ РАН недавно получены оригинальные и очень эффективные методы приближенной одновременной диагонализации на основе метода Гаусса–Ньютона и методы редукции размера задач на основе разложения Таккера и многомерного обобщения метода неполной крестовой аппроксимации. Работа по развитию этих методов и их применению к решению задач со сверхбольшими объемами данных активно продолжается.

Список литературы

- [1] В. В. Воеводин, Об одном методе понижения порядка матриц при решении интегральных уравнений, *Численный анализ на ФОРТРАНе*, Московский государственный университет, 21–26, 1979.
- [2] В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, Вычисления с теплицевыми матрицами, *Вычислительные процессы и системы*, вып. 1, Наука, М., 1983, 124–266.
- [3] В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами, Наука, М., 1987.
- [4] С. А. Горейнов, Мозаично-скелетонные аппроксимации матриц, порожденных асимптотически гладкими и осцилляционными ядрами, *Матричные методы и вычисления*, ИВМ РАН, Москва, 1999, 42-76.
- [5] С. А. Горейнов, Н. Л. Замарашкин, Е. Е. Тыртышников, Псевдоскелетные аппроксимации матриц, *Доклады Российской Академии наук*, 343 (2): 151–152, 1995.
- [6] Н. Л. Замарашкин, И. В. Оселедец, Е. Е. Тыртышников, Аппроксимации теплицевых матриц суммами циркулянтов и матриц малого ранга, *ДАН России*, том 406, N 5, 602–603 (2006).
- [7] И. В. Ибрагимов, Новый подход к решению проблемы обобщенного сингулярного разложения, *Матричные методы и вычисления*, ИВМ РАН, Москва, 1999, 193-201.
- [8] Г. И. Марчук, Ю. А. Кузнецов, Итерационные методы и квадратичные функционалы, *Методы вычислительной математики*, Наука, Сибирское отделение, Новосибирск, 1975, 4–143.
- [9] М. С. Мартынов, Использование методов быстрого матричного умножения при решении интегральных уравнений теории потенциала, *Матричные методы и вычисления*, ИВМ РАН, Москва, 1999, 77–129.
- [10] И. К. Лифанов, Е. Е. Тыртышников, Теплицевы матрицы и сингулярные интегральные уравнения, В кн.: *Вычисл. процессы и системы*. Вып.7. М., Наука, 1990, 94–278.

- [11] Ю. М. Нечепуренко. *Быстрые численно устойчивые алгоритмы для широкого класса линейных дискретных преобразований*, Препринт N 92, ОВМ РАН, 1985.
- [12] И. В. Оселедец, Применение разделенных разностей и B -сплайнов для построения быстрых дискретных преобразований вейвлетовского типа на неравномерных сетках, *Матем. заметки*, том 77, выпуск 5, 2005.
- [13] И. В. Оселевец, Е. Е. Тыртышников, Приближенное обращение матриц при решении гиперсингулярного интегрального уравнения, *ЖВМ и МФ*, 45, No. 2, 315–326, 2005.
- [14] Д.В.Савостьянов, Е.Е.Тыртышников, Применение многоуровневых матриц специального вида для решения прямых и обратных задач электродинамики, *Вычисл. методы и программирование*, том 7, 1–16 (2006).
- [15] Е. Е. Тыртышников, *Теплицевы матрицы, некоторые их аналоги и приложения*, ОВМ РАН, 1989.
- [16] Е. Е. Тыртышников, *Краткий курс численного анализа*, ВИНТИ, 1994.
- [17] Е.Е.Тыртышников, Параллельные алгоритмы для обобщенно-теплицевых систем, *ЖВМ и МФ*, 36 (6), 5–19, 1996.
- [18] Е. Е. Тыртышников, Методы быстрого умножения и решение уравнений, *Матричные методы и вычисления*, ИВМ РАН, Москва, 1999, 4–41.
- [19] Е. Е. Тыртышников, Некоторые применения матричного признака равномерности, *Матем. сб.*, 192 (12), 2001, 145–156.
- [20] Е. Е. Тыртышников, Тензорные аппроксимации матриц, порожденных асимптотически гладкими функциями, *Матем. сб.*, 194 (6), 2003, 147–160.
- [21] В. Beckermann, S. A. Goreinov, Е. Е. Tyrtysnikov, Some remarks on the Elman estimate for GMRES, *SIMAX*, Vol. 27, Issue 3 (2006), 772–778.
- [22] J. M. Ford, Е. Е. Tyrtysnikov, Combining Kronecker product approximation with discrete wavelet transforms to solve dense, function-related systems, *SIAM J. Sci. Comp.*, Vol. 25, No. 3 (2003), 961-981.

- [23] J. M. Ford and E. E. Tyrtysnikov, Solving linear systems using wavelet compression combined with Kronecker product approximation, *Numerical Algorithms* 40 (2005), 125–135.
- [24] J. M. Ford, I. V. Oseledets, E. E. Tyrtysnikov, Matrix approximations and solvers using tensor products and non-standard wavelet transforms related to irregular grids, *Rus. J. Numer. Anal. and Math. Modelling*, Vol. 19, No. 2 (2004), 185-204.
- [25] S. A. Goreinov, E. E. Tyrtysnikov, The maximal-volume concept in approximation by low-rank matrices, *Contemporary Mathematics*, Vol. 208, 2001, 47-51.
- [26] S. A. Goreinov, E. E. Tyrtysnikov, A. Yu. Yeremin, Matrix-Free Iteration Solution Strategies for Large Dense Linear Systems, *Numer. Linear Algebra with Appl.* 4 (4), 273–294, 1997.
- [27] S. A. Goreinov, E. E. Tyrtysnikov, N. L. Zamarashkin. A Theory of Pseudo-Skeleton Approximations, *Linear Algebra Appl.* 261, 1–21, 1997.
- [28] W. Hackbusch, B.N. Khoromskij and E.E. Tyrtysnikov, Hierarchical Kronecker tensor-product approximations, *J. Numer. Math.* **13** (2005), 119–156.
- [29] S. V. Myagchilov and E. E. Tyrtysnikov, A fast matrix-vector multiplier in discrete vortex method, *Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling* 7 (4), 325–342, 1992.
- [30] Yu. M. Nechepurenko, E. E. Tyrtysnikov. Multi-dimensional discrete Fourier transform and its optimization, *SNAMM*, 5 (3), 1990, 241–250.
- [31] V. Olshevsky, I. Oseledets, E. Tyrtysnikov, Tensor properties of multi-level Toeplitz and related matrices, *Linear Algebra Appl.* 412 (2006), 1–21.
- [32] S. Rjasanow, M. Bebendorff, E. Tyrtysnikov, Approximation using diagonal-plus-skeleton matrices, *Mathematical Aspects of Boundary Element Methods*, Chapman&Hall/CRC, 1999, pp. 45–52.
- [33] S. Serra Capizzano, E. Tyrtysnikov, Any circulant-Like preconditioner for multilevel Toeplitz matrices is not superlinear, *SIAM J. Matrix Analysis and Appl.*, 21 (2):431–439 (1999).

- [34] S. Serra Capizzano, E. Tyrtyshnikov, How to prove that a preconditioner cannot be superlinear, *Math. Comp.*, Vol.72, No. 243 (2003) 1305-1316.
- [35] V. V. Strela, E. E. Tyrtyshnikov, Which circulant preconditioner is better? *Math. Comp.* 65 (213), 1996, 137–150.
- [36] E. E. Tyrtyshnikov, Cauchy-Toeplitz matrices and some applications, *Linear Algebra Appl.*, 149, 1991, 1–18.
- [37] E. E. Tyrtyshnikov, Optimal and superoptimal circulant preconditioners, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 13 (2), 1992, 459-473.
- [38] E. E. Tyrtyshnikov, A fast and parallel inertia finder for Toeplitz expanded matrices, *East-West J. Numer. Math.*, 4, 1995, 301–316.
- [39] E. E. Tyrtyshnikov, Circulant preconditioners with unbounded inverses, *Linear Algebra Appl.*, 216, 1995, 1–23.
- [40] E. E. Tyrtyshnikov, A unifying approach to some old and new theorems on distribution and clustering, *Linear Algebra Appl.*, 232, 1996, 1–43.
- [41] E. E. Tyrtyshnikov, *A Brief Introduction to Numerical Analysis*, Birkhauser, Boston, 1997.
- [42] E. E. Tyrtyshnikov, Mosaic ranks and skeletons, in *L. Vulkov et al. (eds.), Lecture Notes in Computer Science 1196: Numerical Analysis and Its Applications. Proceedings of WNAA-96*. Springer-Verlag, 1996, 505–516.
- [43] E. E. Tyrtyshnikov. Mosaic-skeleton approximations. *Calcolo*, 33(1-2): 47–57, 1996.
- [44] E. E. Tyrtyshnikov, Mosaic ranks for weakly semiseparable matrices, *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Vol 73, 2000, 36–41.
- [45] E. E. Tyrtyshnikov, Incomplete cross approximation in the mosaic-skeleton method, *Computing* 64, no. 4 (2000), 367–380.
- [46] E. Tyrtyshnikov, R. Chan, Spectral Equivalence and Proper Clusters for Boundary Element Method Matrices, *Int. J. Numer. Meth. Engnr.* 49 (2000), 1211–1224.
- [47] E. Tyrtyshnikov, Yu. Vassilevski, A Mosaic Preconditioner for a Dual Schur Complement, *Numerical Mathematics and Advanced Applications*,

Proceedings of ENUMATH 2001, Springer-Verlag Italia, Milano, (2003) 867-880.

- [48] E. E. Tyrtysnikov, N. L. Zamarashkin, A. Yu. Yeremin, Clusters, preconditioning, convergence, *Linear Algebra Appl.* 263: 25–48 (1997).
- [49] E. E. Tyrtysnikov, Kronecker-product approximations for some function-related matrices, *Linear Algebra Appl.*, 379 (2004), 423-437.
- [50] E. Tyrtysnikov, Piecewise separable matrices, *Calcolo* 42: 3/4 (2005), 243–248.
- [51] С. К. Годунов, *Современные аспекты линейной алгебры*, Научная книга, Новосибирск, 1997.
- [52] И. Гохберг, А. А. Семенцул, Об обращении конечных теплицевых матриц и их континуальных аналогов, *Матем. исследов.*, Кишинев, том 7, вып. 2 (24), 201–224, 1972.
- [53] G. Beylkin, M. M. Mohlenkamp, Numerical operator calculus in higher dimensions, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **99** (2002), 10246–10251.
- [54] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
- [55] A. Brandt, Multilevel computations of integral transforms and particle interactions with oscillatory kernels, *Computer Physics Communications* **65** (1991) 24–38.
- [56] R. H. Chan and M. Ng, Conjugate gradient method for Toeplitz systems, *SIAM Review*, 38, pp. 427-482 (1996).
- [57] V. Chugunov, D. Svyatski, E. Tyrtysnikov, Yu. Vassilevski, Parallel iterative multilevel solution of mixed finite element systems for scalar equations, *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, V.18, No.5 (2006), P.501-518.
- [58] R. Coifman, V. Rokhlin, S. Wandzura, The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription. *IEEE Antennas Propagat. Mag.* 35(3): 7–12, 1993.

- [59] G. H. Golub, Ch. F. Van Loan, *Matrix computations*, The John Hopkins University Press, Baltimore and London, 1989. (Русский перевод: Дж. Голуб, Ч. Ван Доун, *Матричные вычисления*, Мир, 1999.)
- [60] L. Greengard, V. Rokhlin, A fast algorithm for particle simulations. *J. Comput. Physics* 73: 325–348, 1987.
- [61] W. Hackbusch, Z. P. Nowak, On the fast matrix multiplication in the boundary elements method by panel clustering, *Numer. Math.* **54** (4) (1989) 463–491.
- [62] A. Harten, *Multiresolution representation and numerical algorithms: a brief review*, ICASE Report 94-59, October 1994.
- [63] G. Heinig and K. Rost, *ALgebraic methods for Toeplitz-like matrices and operators*, Berlin, Akademie-Verlag, 1984.
- [64] V. Rokhlin, Rapid solution of integral equations of classical potential theory, *J. Comput. Physics* 60: 187–207, 1985.
- [65] Y. Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, PWS Publishing Company, 1996.
- [66] G. Strang, Wavelets and dilation equations: a brief introduction, *SIAM Review* 31: 614–627, 1989.
- [67] G. Strang, Wavelet transforms versus Fourier transforms, *Bulletin or the Amer. Math. Soc.* 28 (2): 288–305, 1993.
- [68] X. Sun, N. P. Pitsianis, A matrix version of the fast multipole method, *SIAM Review*, Vol. 43, No. 2, 289–300, 2001.