

Численная модель процессов тепловлагообмена в системе «водоем-почва» и ее валидация

СТЕПАНЕНКО В.М.

Московский Государственный Университет

8 января 2004 г.

A one-dimensional model of shallow reservoir thermodynamics either describing physical processes in underlying soil layer is constructed. The model simulates seasonal dynamics of lake (including ice and snow layer formation) and year to year variability. A number of numerical experiments is performed; model and natural data are compared. It is shown, that the model performs satisfactory agreement of some parameters, modeled and observed, for lakes in Western Siberia and Yakutat.

1. Введение

В последние годы в некоторых моделях общей циркуляции атмосферы (ОЦА) не используется гидростатическое приближение (по крайней мере, на региональном уровне); одновременно сокращаются размеры ячеек разностных сеток этих моделей. Среди прочих новых проблем численного моделирования атмосферной циркуляции, возникших в связи с указанными тенденциями, важное место занимает повышение требований к детализации описания процессов взаимодействия атмосферы с различными типами подстилающей поверхности на суше. И здесь одним из ключевых вопросов, на наш взгляд, является описание взаимодействия атмосферы с сетью небольших гидрологических объектов, важнейшую часть которой составляют небольшие озера и болота. Особенно это важно для северных территорий Евразии (Западно-Сибирская низменность, Карелия, Финляндия) и Северной Америки (большая часть территории Канады), где данная сеть особенно густа, и ее необходимо учитывать при прогнозе региональных климатических изменений. Для адекватного моделирования данного взаимодействия необходимо, чтобы в климатической модели присутствовал блок термодинамики и переноса влаги в озерах и болотах.

До сих пор моделирование болот производилось под задачи, не имеющие прямого отношения к климатическому моделированию, или рассматривающие лишь частный процесс во взаимодействии болото- атмосфера. К первым, например, относятся работы по расчету водного режима болот при их осушении [1], гидравлике болот [2], ко вторым - появившиеся недавно работы [3],[4]. В то же время нам неизвестны труды по моделированию полной термогидродинамики болот в применении к задачам глобального изменения окружающей среды (климатическому моделированию). Моделирование динамики переноса тепла в озерах является, пожалуй, более развитой областью, чем моделирование болот. Однако и здесь нам неизвестны модели, приспособленные для применения в климатическом моделировании.

В данной работе описывается одномерная модель термогидродинамики озера. Эта модель изначально создавалась для ее использования в качестве блока в модели ОЦА,

однако может использоваться и независимо от модели атмосферы. Заметим, что данная модель предназначена, в первую очередь, для воспроизведения режима мелких озер, ибо для крупных озер (Каспийское море, Байкал, Великие Американские озера), по нашему мнению, целесообразнее использовать полные трехмерные модели.

2. Физическая постановка задачи и описание модели

Основной особенностью мелких водоемов (см., например, экспериментальные работы [5], [6]) является горизонтальная однородность в распределении термодинамических параметров. Это позволяет в первом приближении рассматривать только вертикальные переносы тепла и влаги в теле водоема. Из очевидных физических соображений следует, что одномерное приближение также должно быть применимо к нижележащему под водоемом грунту. Поэтому описываемая здесь модель представлена системами одномерных уравнений, различными для различных физических сред (снега, льда, воды, почвы).

2.1. Тепловлагодперенос в теле водоема.

В основе описания термики водоема в представляемой модели лежит одномерное уравнение теплопроводности. Если начало вертикальной координаты z совместить с уровнем свободной поверхности озера, то областью решения этого уравнения будет отрезок $[0, h]$, где h — глубина озера. Однако h — величина переменная, и чтобы не рассматривать задачу с движущейся границей, в модели в качестве вертикальной координаты принята переменная $\xi = \frac{z}{h}$. В переменных (ξ, t) уравнение теплопроводности принимает вид:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + c\rho \frac{dh}{dt} \frac{\xi}{h} \frac{\partial T}{\partial \xi} - c\rho \frac{1}{h} \frac{dh_0}{dt} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{1}{h} \frac{\partial S}{\partial \xi} + M. \quad (1)$$

Здесь c — теплоемкость воды, ρ — ее плотность, λ — коэффициент теплопроводности (в текущей версии — константа), T — температура, t — время, $\frac{dh_0}{dt}$ — скорость приращения слоя воды на верхней границе [м/с], с которой связано начало системы координат, S — поток солнечной радиации в толще водоема, M — слагаемое, учитывающее влияние вертикального плотностного перемешивания на температуру. На верхней границе («водоем-атмосфера») задается условие теплового баланса (см. ниже), на нижней («водоем-почва») — непрерывность температуры и теплового потока. Данное уравнение решается численно (см. ниже).

Проникновение солнечной радиации вглубь водоема задается экспоненциальной зависимостью:

$$S(\xi) = S(0) \exp(-\alpha_e h \xi),$$

α_e — коэффициент экстинкции.

Для определения h в модели используется уравнение водного баланса водоема:

$$\frac{dh}{dt} = r - E - R_s - R_b.$$

Здесь r — интенсивность осадков, E — интенсивность испарения, R_s — поверхностный сток, R_b — водообмен тела водоема с нижележащей почвой. Горизонтальный грунтовый сток в модели не рассматривается.

Для вычисления M в модели реализована параметризация вертикального плотностного перемешивания в водоеме. Она заключается в том, что через фиксированный интервал времени производится мгновенное перераспределение разностных ячеек модели по вертикали так, чтобы плотность воды монотонно возрастала с глубиной. При этом плотность в разностной ячейке определяется ее температурой по эмпирической формуле.

Если в процессе счета оказывается, что температура поверхности озера ниже 0° , то образуется первичный слой льда толщиной 1 см. В этом слое также решается уравнение (1), но при этом полагается, что суммарная солнечная радиация за вычетом отраженной полностью поглощается на поверхности льда и глубже не проникает (т.е. в уравнении (1) не учитывается четвертый член в правой части); а также не учитывается «конвективное» слагаемое M . На границе лед-вода задается температура фазового перехода 0° . Таяние льда на границе с атмосферой происходит при температуре фазового перехода и определяется тепловым балансом на этой границе. При этом считается, что стаявшая вода мгновенно добавляется к водному слою.

2.2. Тепловлагодперенос в слое снега.

В зимнее время на замерзший водоем может выпадать снег, образуя слой. В нашей модели в этом слое рассматриваются два основных параметра - температура и удельное содержание жидкой влаги. Их эволюция рассматривается в координатах (z, t) и описывается следующей системой:

$$\begin{aligned} c_{sn}\rho_{sn}\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\lambda_{sn}\frac{\partial T}{\partial z} + \rho_{sn}LF_{fr}, \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= -\frac{\partial \gamma}{\partial z} - F_{fr}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь L — удельная теплота плавления, F_{fr} — скорость замерзания, W — удельное содержание жидкой влаги, γ — инфильтрационный поток жидкой влаги в снежном покрове. Поток γ в разностном выражении выглядит так:

$$\gamma = h \left(\frac{W/\Delta z - W_{hc}}{\Pi - W_{hc}} \right),$$

где h — гидравлическая проводимость, м/с (в модели $h = 0.01$ м/с), Π — пористость снега, W_{hc} — константа, характеризующая водоудерживающую способность снега (в модели $W_{hc} = 0.04$), Δz — шаг сетки модели по вертикальной координате. Данная система заимствована из работы [7], и подпрограммы расчета всех слагаемых в системе, кроме диффузии тепла, взяты из модели этих авторов. Кроме процессов, описанных системой (2), в упомянутых подпрограммах учтен процесс гравитационного оседания (уплотнения) снежного покрова во времени. На нижней границе снежного покрова («снежный покров-лед») задается непрерывность температуры и потока тепла.

2.3. Тепловлагодперенос в слое почвы.

При описании процессов тепловлагодпереноса в почвенном слое под водоемом мы исходили из работы [8]. Авторы этой работы рассматривают четыре основных переменных в грунте: температуру, содержание жидкой, твердой и газообразной влаги. Однако под телом водоема грунт должен быть насыщен жидкой (при промерзании — твердой) влагой,

следовательно, содержанием водяного пара здесь можно пренебречь. Данное приближение справедливо с большой точностью, по крайней мере, до первого водоупорного горизонта. На этом основании в нашей модели в почвенном слое содержание водяного пара не рассматривается. Если, кроме того, пренебречь влажностью грунта за счет градиента температуры¹, то система из [8] принимает вид:

$$\begin{aligned}\rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_s \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho_s L F_{fr}, \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \lambda_w \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial z} - F_{fr}, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= F_{fr}.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь λ_w — коэффициент влажностеплопроводности. Как видно из этой системы, в почве рассматриваются процессы диффузии тепла и влаги, инфильтрация жидкой влаги, а также промерзание/таяние воды. Коэффициенты, определяющие интенсивность этих процессов, зависят от переменных состояния грунта — T , W , I . На границе с водоемом (верхняя граница) задается непрерывность температуры и теплового потока, а также поток жидкой влаги, определяемый степенью насыщенности водой верхних горизонтов почвы. На нижней границе (в текущей версии ее глубина — 100 м под дном водоема) потоки тепла и влаги равны нулю.

2.4. Тепловой баланс на границе «водоем - атмосфера».

Уравнение теплового баланса в модели служит для вычисления верхнего граничного условия для температуры. Оно имеет вид:

$$S(1 - \alpha) + E_a - E_s - H - LE = -\frac{\lambda}{h} \frac{\partial T}{\partial \xi}. \quad (4)$$

Здесь S — суммарная солнечная радиация, E_a — встречное длинноволновое излучение атмосферы, E_s — собственное излучение поверхности, H и LE — потоки явного и скрытого тепла, соответственно, направленные вверх, α — альбедо поверхности (воды, льда или снега). В переходные сезоны, когда осадки в твердом виде могут выпадать на незамерзший водоем, или случается дождь в период ледостава, в уравнение (4) добавляются слагаемые, учитывающие энергетический вклад этих процессов. Все участвующие в (4) потоки рассчитываются из данных стандартных наблюдений на метеорологических станциях.

Для расчета суммарной радиации используется формула Кондратьева [9]:

$$S = \frac{S^*}{1 + \varepsilon\tau / \sinh_0} (1 - c_{sh}n),$$

где ε — эмпирическая функция высоты солнца, τ — оптическая толщина атмосферы для интегрального потока, принимаемая равной 0.105, n — облачность в долях единицы, $c_{sh} = 0.5607$ — эмпирический коэффициент. Приход солнечной радиации определяется так:

$$S^* = S_0^* (\sin \varphi \cos \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \theta).$$

¹Это часто принимаемое допущение, основанное на малости коэффициента термовлажностеплопроводности

В формуле приняты обозначения: S_0^* — солнечная постоянная, φ — широта, δ — склонение солнца, θ — часовой угол.

Встречное излучение атмосферы принимается как функция температуры и влажности на высоте 2 м, а также облачности. Это зависимость выражается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} E_a &= \varepsilon_a \sigma T_2^4 (1 + c_{lg} c l d^2), \\ \varepsilon_a &= c_\varepsilon e_2^{1/7} \exp\left(\frac{350}{T_2}\right), \\ c_{lg} &= 0.22, \\ c_\varepsilon &= \begin{cases} 0.15, & T_2 < 273.15, \\ 0.14, & T_2 > 273.15 \end{cases} \end{aligned}$$

В этих выражениях T_2 — температура воздуха на уровне 2 м, e_2 — парциальное давление водяного пара на уровне 2 м, σ — постоянная Стефана–Больцмана. Собственное излучение поверхности задается известной формулой Стефана–Больцмана.

Для расчета потоков явного и скрытого тепла используется аэродинамический метод с коэффициентами, рассчитываемыми по теории подобия Мони́на–Обухова. Соответствующие формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} H &= -c_p \rho_a C_H |V_2| (\Theta_2 - \Theta_s), \\ LE &= -\rho_a L C_E |V_2| (q_2 - q_s), \end{aligned} \quad (5)$$

где c_p — теплоемкость воздуха при постоянном давлении, ρ_a — плотность воздуха, C_H C_E — коэффициенты обмена соответственно для температуры и влажности воздуха, Θ_2 и q_2 — потенциальная температура и удельная влажность на уровне 2 м, Θ_s и q_s — те же величины на поверхности земли, V_2 — скорость ветра на уровне 2 м. В уравнениях (5) коэффициенты обмена зависят от искомым потоков тепла весьма сложным образом (по теории подобия Мони́на–Обухова)[10], поэтому решать эти уравнения приходится итерационным методом.

3. Численная реализация модели

Для решения уравнений модели используется разностная схема расщепления по физическим процессам с неявным представлением диффузионных членов; члены, ответственные за другие процессы, выражаются явно. Для примера приведем аппроксимацию уравнения (1) для случая постоянства коэффициента теплопроводности с глубиной:

$$\begin{aligned} \rho \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{(h^j)^2} \frac{T_{i+1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i-1}^{j+1}}{\Delta \xi^2} + c\rho \frac{\Delta h}{\Delta t} \frac{\xi}{h^j} \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{2\Delta \xi} - \\ &- c\rho \frac{\Delta h_0}{\Delta t} \frac{1}{h^j} \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{2\Delta \xi} - \frac{1}{h} \frac{\partial S^j}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь использована традиционная индексация узлов разностной сетки.

Для вычисления температуры на границе с атмосферой решается уравнение теплового баланса 4). Уравнение теплового баланса в разностном виде имеет вид:

$$D^* + Q^*(1 - A) - \delta \sigma (T_s^{j+1})^4 - H(T_s^{j+1}, T_a^*) - LE(q_s^{j+1}(T_s^{j+1}), q_a^*) = -\lambda \frac{T_{s+1}^{j+1} - T_s^{j+1}}{h^j \Delta \xi} \quad (7)$$

Здесь обозначения традиционные; индекс s означает величину на поверхности, $(s + 1)$ — величину, относящуюся к первому узлу сетки под поверхностью, a — на уровне 2 м в атмосфере, звездочками * указаны величины, которые берутся из данных натуральных наблюдений, т.е. известны. Решение уравнения (7) T_s^{j+1} ищется приближенно в итерационном процессе. Этот итерационный процесс содержит три уровня итераций:

1. Итерации относительно $-\lambda \frac{T_{s+1}^{j+1} - T_s^{j+1}}{h^j \Delta \xi}$. Начальным приближением является $-\lambda \frac{T_{s+1}^j - T_s^j}{h^j \Delta \xi}$; при заданной правой части (7) из левой части находится T_s^{j+1} , затем из прогонкой рассчитывается новый профиль температуры, и по нему новое приближение $-\lambda \frac{T_{s+1}^{j+1} - T_s^{j+1}}{h^j \Delta \xi}$, далее процесс повторяется снова, и т.д. Назовем этот процесс внешним.
2. Итерации относительно T_s^{j+1} по уравнению (7) при заданном $-\lambda \frac{T_{s+1}^{j+1} - T_s^{j+1}}{h^j \Delta \xi}$. При этом для гарантии сходимости итерационного процесса в (7) используется приближение $\delta \sigma (T_s^{j+1})^4 \approx \delta \sigma (T_s^j)^4 + 4 \delta \sigma (T_s^j)^3 (T_s^{j+1} - T_s^j)$. Назовем этот процесс промежуточным.
3. Итерации для определения H , LE в (7) при заданном T_s^{j+1} по формулам аэродинамического метода с коэффициентами по теории подобия Мони́на–Обухова (5). Назовем этот процесс внутренним.

Для получения нового приближения по 1) необходимо осуществить полный итерационный процесс 2), и аналогично в отношении 2) и 3).

Промежуточные и внутренние итерации осуществляются согласно методу последовательных приближений [11]. Внешние итерации производятся чебышевским одношаговым циклическим методом [11]; соответствующие формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} (T_s^{j+1})_k &= (T_s^{j+1})_{k-1} + \alpha_k \left[(T_s^{j+1})_k^* - (T_s^{j+1})_{k-1} \right], \\ (T_{s+1}^{j+1})_k &= (T_{s+1}^{j+1})_{k-1} + \alpha_k \left[(T_{s+1}^{j+1})_k^* - (T_{s+1}^{j+1})_{k-1} \right], \\ k &= 1, N. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь α_k — коэффициенты метода, k — номер итерации, N — период циклического процесса; $(T_s^{j+1})_k^*$ есть решение уравнения теплового баланса:

$$\begin{aligned} D^* + Q^*(1 - A) - \delta \sigma ((T_s^{j+1})_k^*)^4 - H((T_s^{j+1})_k^*, T_a^*) - LE(q_{s,j+1}((T_s^{j+1})_k^*), q_a^*) = \\ -\lambda \frac{(T_{s+1}^{j+1})_{k-1} - (T_s^{j+1})_{k-1}}{h^j \Delta \xi}, \end{aligned}$$

а $(T_{s+1}^{j+1})_k^*$ находится последующей прогонкой из (6).

4. Численные эксперименты и валидация модели

С целью валидации модели проведены эксперименты с использованием рядов стандартных метеорологических измерений в Колпашево (Томская область, правобережье р. Обь) и Якутске [12],[13]. В последнем случае результаты моделирования сравнивались с данными натуральных наблюдений на оз. Сырдах (20 км к северу от Якутска, левобережье р. Лена).

4.1. Численные эксперименты с рядами метеорологических наблюдений в г. Колпашево.

В данных экспериментах моделировалось озеро глубиной 2 м. Ему можно сопоставить одно из многочисленных небольших озер, расположенных в Томской области. Данных наблюдений за режимом озер в данном регионе мы не имели, поэтому валидация модели произведена по параметру, измеряемому на метеорологической станции, — температуре поверхности снежного покрова. Сравнение результатов моделирования и данных наблюдений в Колпашево основывалось на предположении, что температура поверхности снега над замерзшим водоемом (рассчитываемая нашей моделью) близка к температуре поверхности снега на прилегающих к водоему территориях (измеряемой в Колпашево). Результаты этого сравнения приведены на рис. 1. Точность измерения температуры поверхности снега на ст. Колпашево составляет 0.5° . Как видно, кривые очень хорошо коррелируют. В то же время, имеет место систематическое занижение моделью среднемесячного значения рассматриваемого параметра (на $\approx 2^\circ$), что, по всей видимости, связано с несовершенством параметризации тепловых потоков на границе с атмосферой в модели. Этот результат, в определенном смысле, был ожидаем, ибо проблема параметризации тепловых потоков в условиях устойчивой стратификации (которая имеет место в зимних условиях, особенно в районах континентального климата), а именно, их занижение параметрическими представлениями, известна.

4.2. Численные эксперименты по моделированию оз. Сырдах.

Озеро Сырдах — сравнительно большое, находящееся в цепи таких же, по размерам и глубине, озер, соединяющихся только в периоды редких для этих территорий многоводий ручьями типа «травяных речек». Оно вытянуто в направлении с СЗ на ЮВ и занимает большую часть площади котловины. Размеры озера: в длину 2 км, в ширину до 1 км, площадь зеркала воды около 2 км^2 . Средняя глубина воды в озере 4.5, максимальная — до 12 м. Ледостав начинается в первой половине октября, сход ледяного покрова приходится на конец мая. Мощность мерзлых пород составляет 280–320 м. Под озером существует сквозной талик [5].

Моделирование водного и теплового режимов оз. Сырдах производилось за период 1970–1980 гг., за который были доступны данные метеорологических наблюдений в г. Якутск и данные натурных измерений на самом озере (1976–1977 гг.) [5]. Эволюция водного, ледяного и снежного покровов в данном озере по данным моделирования представлена на рис. 2. По результатам сравнения модельных и натурных данных [5],[14] можно сделать следующие выводы:

- максимальное промерзание модельного озера происходит в малоснежные зимы, и, наоборот, минимальное промерзание — в многоснежные сезоны. Это соответствует реально наблюдаемой закономерности;
- характерные глубины промерзания (толщина слоя льда) в модельном водоеме находятся в пределах 0.7–1.5 м, что совпадает с реальными значениями для озер Центральной Якутии;
- ледостав по результатам моделирования начинается в начале октября, а кончается в конце мая, что соответствует натурным данным;

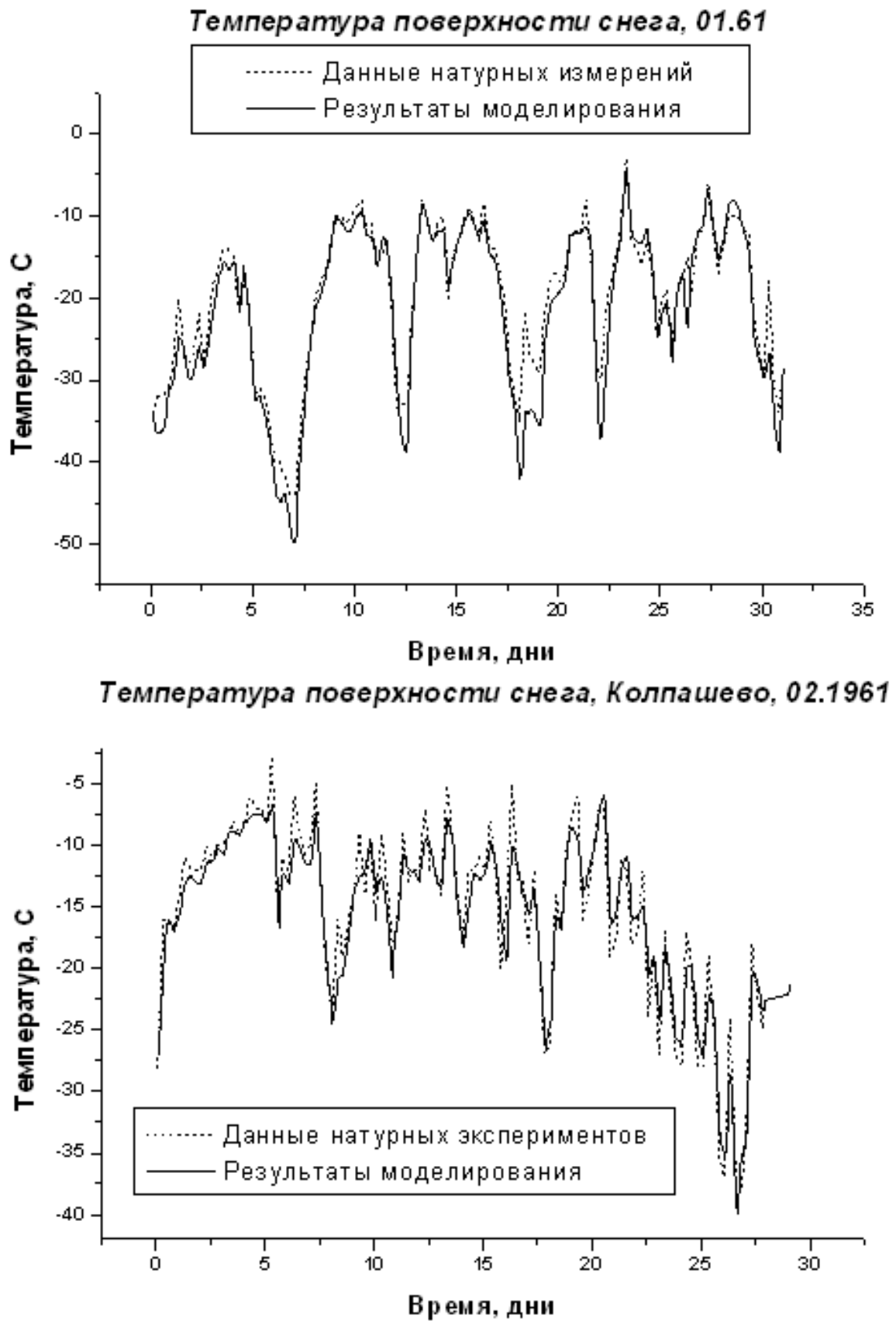


Рис. 1. Результаты сравнения температуры поверхности снега по модельным и натурным данным

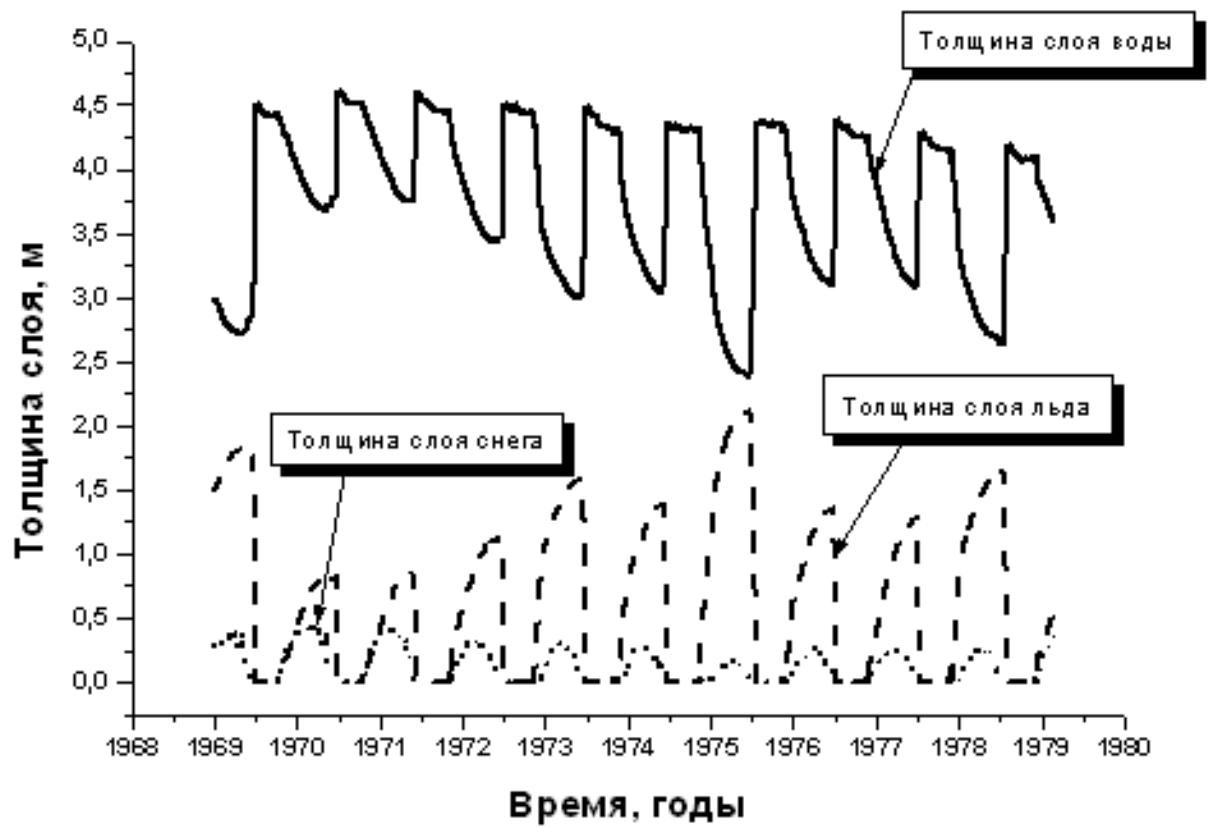


Рис. 2. Многолетний ход промерзания/таяния в оз. Сырдах по данным моделирования

- испарение с модельного озера за теплый период составляет в среднем 400 мм, что близко к наблюдаемым значениям (450 мм).

Другой интересный численный эксперимент заключался в моделировании талика и мерзлого грунта под озером. Результаты представлены в виде распределения термоизоплет (рис. 3). По результатам моделирования, талик устойчиво существует под озером в течение 20 лет (1965–1984 гг.). Его нижняя граница колеблется от 1.2 до 2.0 м под дном озера. В то же время наблюдается постепенный прогрев нижележащих слоев многолетней мерзлоты. В нашем распоряжении не было измерений динамики талика под водоемом, поэтому валидация модели по данному параметру планируется в будущем.

5. Заключение

В результате данной работы построена одномерная модель термогидродинамики мелкого водоема. В ней рассматриваются процессы диффузии тепла и влаги, перенос влаги под действием силы тяжести, ее фазовые переходы, процессы эволюции ледяного и снежного покрова, и тепловлагообмен с атмосферой. Таким образом, на наш взгляд, в модели учтены все основные процессы, формирующие коротко- (внутрисуточную) и долгопериодную (межгодовую) изменчивость состояния водоема. Результаты численных экспериментов с натурными данными для оз. Сырдах в Центральной Якутии показывают, что модель адекватно воспроизводит следующие параметры климатического режима озера: среднюю глубину зимнего промерзания, время начала и окончания ледостава, среднее испарение в теплый период. Кроме того, результаты моделирования указывают на наличие талика под данным озером, что также подтверждается данными наблюдений. Сравнение смоделированных и натуральных рядов температуры поверхности снежного покрова для г. Колпашево (Томская область) показывает их хорошее соответствие.

Описанная модель, будучи совмещенной с одномерной моделью почвы, может воспроизводить тепловлагоперенос и взаимодействие с атмосферой для болотных ландшафтов, ибо последние чаще всего представляют собой территорию с переувлажненным грунтом, покрытые сетью небольших водоемов.

Автор считает своим долгом поблагодарить чл.-корр. РАН Лыкосова В.Н., по инициативе которого проведено настоящее исследование, который прочел рукопись статьи и сделал важные замечания. Также автор выражает признательность проф. Н.Ф. Вельтишеву и проф. М.А. Петросянцу за полезные обсуждения на тему данной работы.

Работа выполнялась при финансовой поддержке грантов РФФИ 01-06-64150 и ИНТАС 01-2132.

Список литературы

- [1] Балясова Е.Л., Пакутин А.В. Расчет изменений максимального весеннего стока с болотных массивов под влиянием осушительных мелиораций. Тр. ГГИ, Вып. 333. Л.: Гидрометеиздат, 1988, 152 с.
- [2] Кашеваров А.А. Математическое моделирование взаимодействующих течений подземных и поверхностных вод на заболоченных территориях. Сб.: Большое Васюганское болото. Современное состояние и процессы развития. – Томск: Изд-во Института оптики атмосферы СО РАН, 2002, С. 83–87.

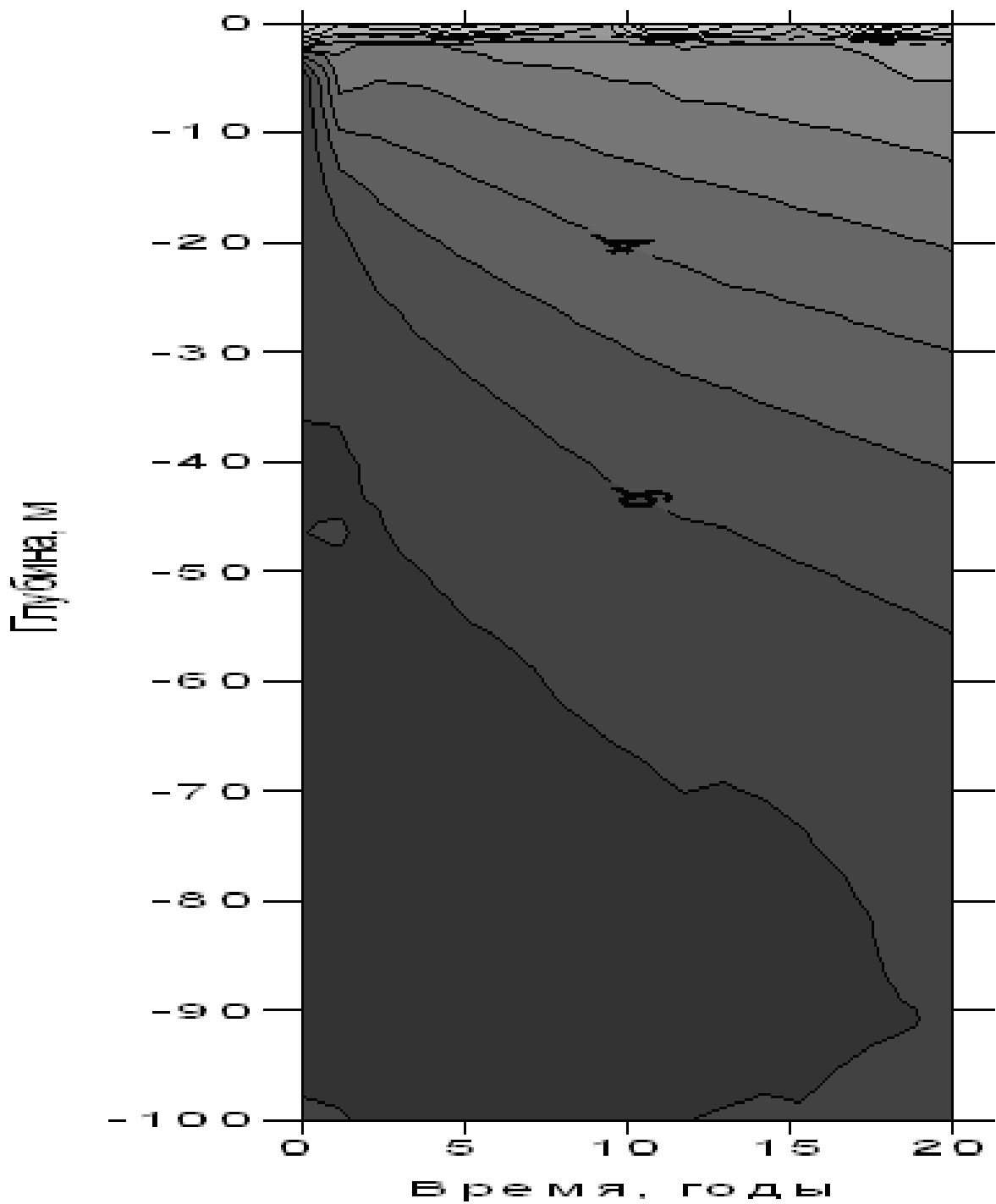


Рис. 3. Распределение термоизоплет в грунте под оз. Сырдах по данным моделирования

- [3] КРЫЛОВА А.И., КРУПЧАТНИКОВ В.Н. Глобальное моделирование потоков метана от болотных экосистем. Сб.: Большое Васюганское болото. Современное состояние и процессы развития. - Томск: Изд-во Института оптики атмосферы СО РАН, 2002, С. 98–103.
- [4] ПЕНЕНКО В.В., ЦВЕТОВА Е.А. Математическое моделирование Большого Васюганского болота как источника и рецептора возмущений в климатической системе. Сб.: Большое Васюганское болото. Современное состояние и процессы развития. - Томск: Изд-во Института оптики атмосферы СО РАН, 2002, С. 88–97.
- [5] ПАВЛОВ А.В., ТИШИН М.И. Тепловой баланс крупного озера и прилегающей территории в Центральной Якутии. В кн.: Строение и тепловой режим мерзлых пород; Новосибирск, «Наука», 1981.
- [6] MALM J., TERZHEVIK A., BENGTSSON L., BOYARINOV P., GLINSKY A., PALSHIN N., PETROV M. Temperature and salt content regimes in three shallow ice-covered lakes //Nordic Hydrology, 28, 1997, P. 99–128.
- [7] ВОЛОДИНА Е.Е., БЕНГТССОН Л., ЛЫКОСОВ В.Н. Параметризация процессов тепловлагопереноса в снежном покрове для моделирования сезонных вариаций гидрологического цикла суши. - Метеорология и гидрология, 2000, № 5, С. 5-14.
- [8] ВОЛОДИН Е.М., ЛЫКОСОВ В.Н. Параметризация процессов тепло-и влагообмена в системе растительность-почва для моделирования общей циркуляции атмосферы. 1. Описание и расчеты с использованием локальных данных наблюдений. — Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 1998, том 34, С. 453–465.
- [9] МАТВЕЕВ Л.Т. Физика атмосферы. С.-П.: Гидрометеиздат, 2000, 778 с.
- [10] МОНИН А.С., ОБУХОВ А.М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы// Тр. Геофиз. Ин-та АН СССР. - 1954. - №24(151). - С. 163–187.
- [11] ЛЕБЕДЕВ В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика.: Учебное пособие. - 4-е издание, перераб. и доп. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. - 296 с. - ISBN 5-9221-0092-0.
- [12] RAZUVAEV, V. N., E.G. APASOVA, AND R.A. MARTUGANOV. 1993. Daily Temperature and Precipitation Data for 223 USSR Stations. ORNL/CDIAC-56, NDP-040. Carbon Dioxide Information Analysis Center, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee.
- [13] VOSE, R.S., R.L. SCHMOYER, P.M. STEURER, T.C. PETERSON, R. HEIM, T.R. KARL, AND J.K. EISCHEID. 1992. The Global Historical Climatology Network: Long-term monthly temperature, precipitation, sea level pressure, and station pressure data. ORNL/CDIAC-53, NDP-041. Carbon Dioxide Information Analysis Center, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee.
- [14] PAVLOV A.V. Regularities in Thermal Regime of Lakes in Permafrost Areas// Russian Geocryological Research, V. 1, 1995.