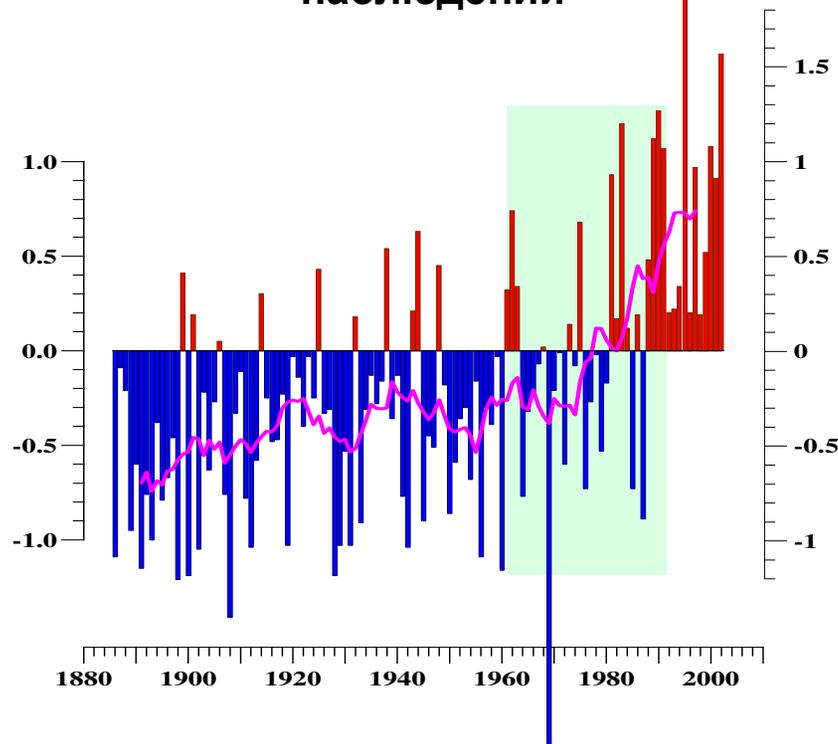


Применение методов статистической механики в задачах теории климата.

Изменения средней глобальной температуры воздуха за время инструментальных наблюдений



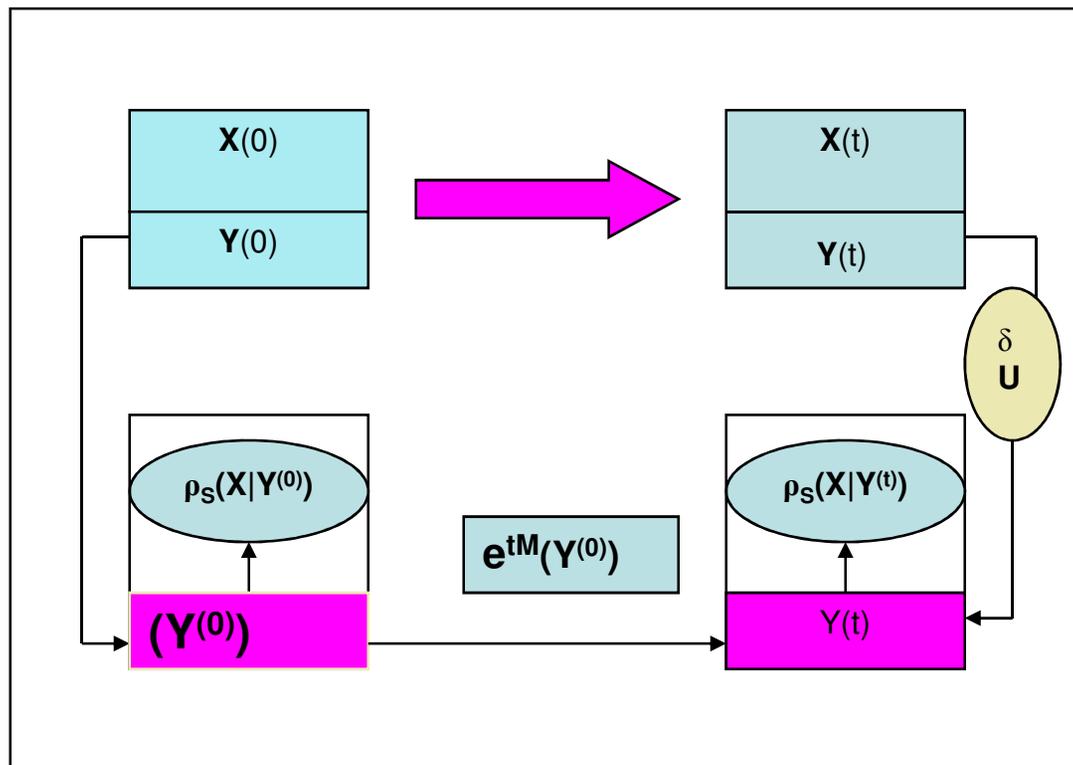
Цели работы:

- 1) построение стохастических дифференциальных уравнений теории климата методами неравновесной статистической механики;
- 2) применение теории для исследования вклада взаимодействия атмосферы и инерционных компонент ЗКС в долгопериодную изменчивость метеозлементов;
- 3) применение теории для описания характеристик изменчивости отдельных компонент земной климатической системы.

Анализ флуктуаций климата на основе обобщенных уравнений Ланжевена

Уравнения эволюции быстрой (X) («атмосфера») и медленной (Y) (океан, почва, криолитозона) подсистем :

$$\frac{dY_i^{(t)}}{dt} = U_i(\mathbf{X}^{(t)}, \mathbf{Y}^{(t)}) \quad \frac{dX_\alpha^{(t)}}{dt} = u_\alpha(\mathbf{X}^{(t)}, \mathbf{Y}^{(t)})$$



Сокращенное описание-осреднение по ансамблю движений быстрой подсистемы:

$$\langle F | \mathbf{Y} \rangle = \int_X F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rho_S(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) d\mathbf{X}$$

Уравнения Ланжевена:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \langle \mathbf{U}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) | \mathbf{Y}(t) \rangle + \delta \mathbf{U}(t)$$

Стохастическое возбуждение: «белый шум»

$$\langle \delta U_i(t) \delta U_j(t') \rangle = 2D_{ij} \delta(t-t')$$

Стандартная теория:

стохастическое уравнение Ланжевена для медленных переменных Y_i

$$\frac{dY_i(t)}{dt} = \langle U_i | \mathbf{Y}(t) \rangle + f_i(t) = -\Lambda_{ij} Y_j + f_i(t, Y(t))$$

Уравнение Фоккера – Планка для плотности вероятностей:

$$\frac{\partial \rho_Y}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial Y_i} (\langle U_i | \mathbf{Y} \rangle \rho_Y) + \frac{\partial}{\partial Y_i} D_{ij} \frac{\partial \rho_Y}{\partial Y_j}$$

Спектральная плотность – «красный шум», когда на входе «белый шум» - случайная сила $f(t)$:

$$S_{Y_i}(\omega) = \frac{S_{f_i}(0)}{\omega^2 + \lambda_i^2}$$

Главная проблема: быстрые «атмосферные» переменные.

Метод проектирующих операторов

Проектирующий оператор:

$$P(F) = \iint d\mathbf{Y} d\mathbf{X} F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \delta(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^{(0)}) \rho_S(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) = \langle F | \mathbf{Y}^{(0)} \rangle, \quad P^2 = P$$

Уравнение эволюции любой фазовой функции $F(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$:

$$F(\mathbf{X}^{(t)}, \mathbf{Y}^{(t)}) = e^{tM} F^{(0)}, \quad M = M_X + M_Y = u_{\alpha} \partial_{\alpha} + U_i \partial_i$$

Тождество Мори:

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} + \int_0^t d\tau e^{(t-\tau)(A+B)} B e^{\tau A}$$

Разбиение эволюции на адаптированную к медленным переменным часть, интеграл памяти и случайное возбуждение:

$$F^{(t)} = \langle F | \mathbf{Y}^{(t)} \rangle + \int_0^t d\tau e^{(t-\tau)M_{PM}} e^{\tau QM} \delta F^{(0)} + e^{tQM} \delta F^{(0)}$$

Метод эквивалентных стохастических систем.

Основные фрагменты теории:

Функции отклика:

$$\frac{d\langle\Delta X^{(\tau)}\rangle}{d\tau} = -B\langle\Delta X^{(\tau)}\rangle + A\Delta Y, \quad \langle\Delta X^{(0)}\rangle = 0$$

Собственная изменчивость быстрой подсистемы ЗКС: $\mathbf{X}_0(t)$:

$$\mathbf{S}\mathbf{X}_0(\omega)\delta(\omega-\omega_1) = \langle(d\mathbf{X}_0(\omega)) \cdot (d\mathbf{X}_0(\omega_1))^*\rangle.$$

Уравнение Ланжевена медленных переменных

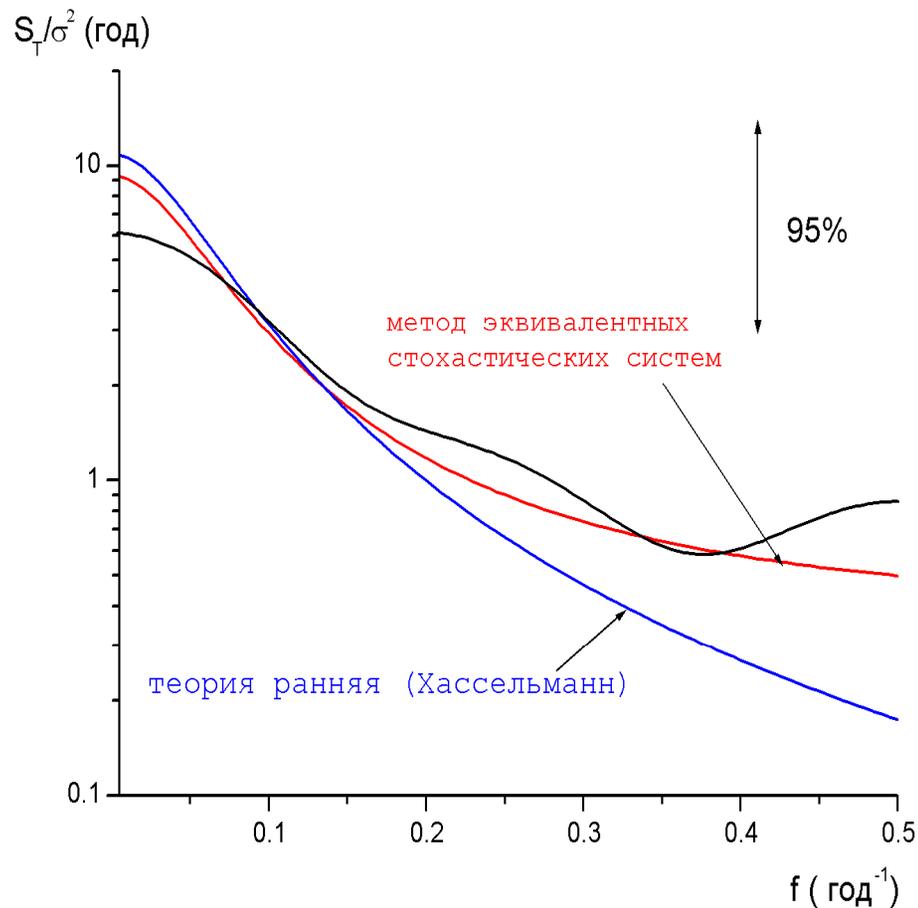
$$\frac{dY_i^{(t)}}{dt} = \langle U_i | \mathbf{Y}^{(t)} \rangle + \Gamma_{i\alpha} \delta X_{\alpha}^{(t)}$$

Эквивалентная стохастическая система:

$$i\omega d\mathbf{Y}^{(\omega)} = d\mathbf{U}^{(\omega)} = d\langle \mathbf{U} | \mathbf{Y} \rangle^{(\omega)} + d\delta\mathbf{U}^{(\omega)}$$

$$d\mathbf{X}^{(\omega)} = (i\omega + \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot d\mathbf{Y}^{(\omega)} + d\mathbf{X}_0^{(\omega)}$$

Пример: флуктуации среднеполушарной температуры приземного воздуха



Нормированный на дисперсию спектр межгодовых флуктуаций осредненной по северному полушарию температуры воздуха у поверхности. Непараметрическая оценка спектра по данным Университета Восточной Англии для периода инструментальных наблюдений (1856-2002 гг.) представлена черной линией.

Стохастические модели аномалий температуры поверхности океана и сопутствующих аномалий температуры воздуха.

Уравнение эволюции температуры верхнего однородного слоя:

$$C_w \frac{d\Delta T_w}{dt} = \Delta F_{aw}$$

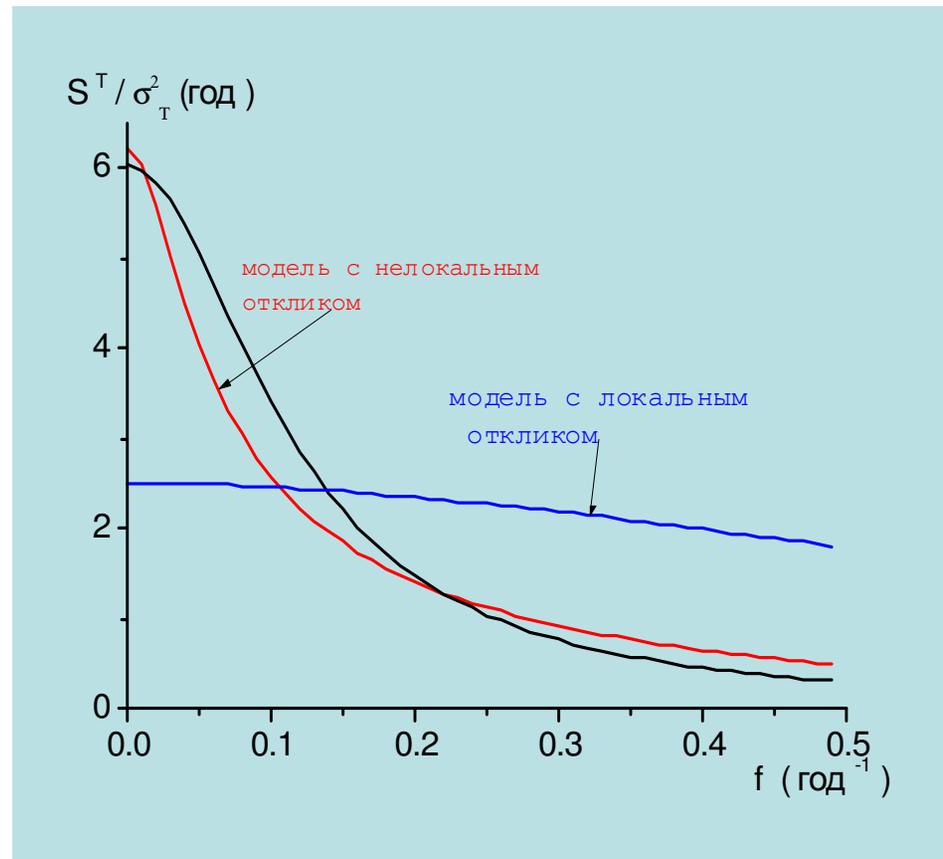
Теплообмен с учетом нелокальности

$$\Delta F_{aw}(\mathbf{r}, t) = \langle \Delta F_{aw} | \Delta T_w(\mathbf{r}', t) \rangle_{\mathbf{r}} + \Delta F'(\mathbf{r}, t)$$

Безразмерный критерий нелокальности

$$\Phi = r_k^2 2/\pi r_T^2$$

r_k - радиус корреляции
 r_T - термодинамический масштаб



Обобщенные спектры аномалий ТПО. Черная линия - обобщенный спектр межгодовых флуктуаций по данным судовых наблюдений на кораблях погоды (Привальский, 1985).

Эквивалентная стохастическая система для исследования предсказуемости температуры воздуха:

$$C_a \frac{d\Delta T_a}{dt} = -\lambda \frac{\Delta T_a}{R_a} - \lambda_{aw} (\Delta T_a - \Delta T_w) + F_a(t)$$

$$C_w \frac{d\Delta T_w}{dt} = \lambda_{aw} (\Delta T_a - \Delta T_w) + F_w(t)$$

$$\Pi = \frac{D_a}{D_a + D_w}$$

Аномалии температуры воздуха связаны с развитием начальной аномалии (предсказывается) и индуцированной шумами частью (растет):

$$\Delta T_a(t) = \delta T_a(t) + \Delta T'_a =$$

$$= \Delta T_a(0)A(t) + \Delta T_w(0)B(t) + \Delta T'_a$$

Интервал предсказуемости:

$$\langle \delta T_a^2(t_*) \rangle = \langle \Delta T'_a(t_*) \rangle$$

Таблица зависимости интервала предсказуемости температуры воздуха в эквивалентной стохастической модели от параметра $\Pi = D_a / (D_a + D_w)$

Π	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1
$t_*, \text{сут}$	550	370	150	13	5.3	4.0	3.7

Моделирование низкочастотных флуктуаций среднезональных температур.

Зональная стохастическая энергобалансовая модель:

$$C(\varphi) \frac{\partial T(\varphi, t)}{\partial t} = QS(\varphi, t)[1 - \alpha(\varphi, T, t)] - I^{\uparrow} - \text{div}(F_{\leftrightarrow}) + f(\varphi, t)$$

Поглощенная солнечная
радиация

Уходящая
тепловая

Горизонтальный
перенос тепла

Случайные
источники

Малые отклонения:

$$C(\varphi) \frac{\partial \Delta T(\varphi, t)}{\partial t} = -m(\varphi, t) \Delta T(\varphi, t) + \gamma \int_0^{\pi/2} \Delta T(\varphi', t) \cos(\varphi') d\varphi' + f(\varphi, t)$$

$$\langle f(\varphi, t) f(\varphi', t') \rangle = 2R_f(\varphi, \varphi') \delta(t - t'), \quad f = f_R + f_D$$

Стохастические полуэмпирические модели

=

полуэмпирические модели для средних

+

расчет интенсивности случайных источников тепла

Простая стохастическая модель флуктуаций меридионального переноса тепла: модель адвекции в случайном поле скоростей

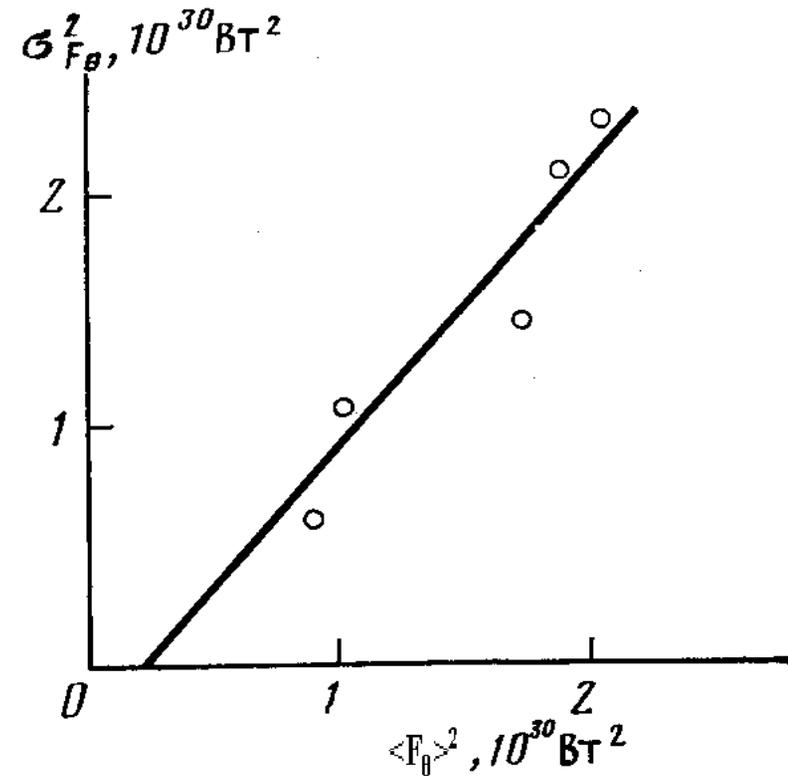
$$C_a \frac{\partial T_a}{\partial t} = -\mu_a T_a - u(t) C_a \frac{\partial T_a}{\partial x} + F_a \quad \langle u(t_1)u(t_2) \rangle = 2D_a \delta(t_2 - t_1)$$

Связь интенсивности источника флуктуаций со средним потоком и коэффициентом горизонтального теплообмена:

$$R_D(\varphi, \varphi) = \frac{\langle F_{\leftrightarrow} \rangle^2}{D_a} \frac{r_D}{\pi r_e \cos \varphi}$$

Следствие стохастической теории:

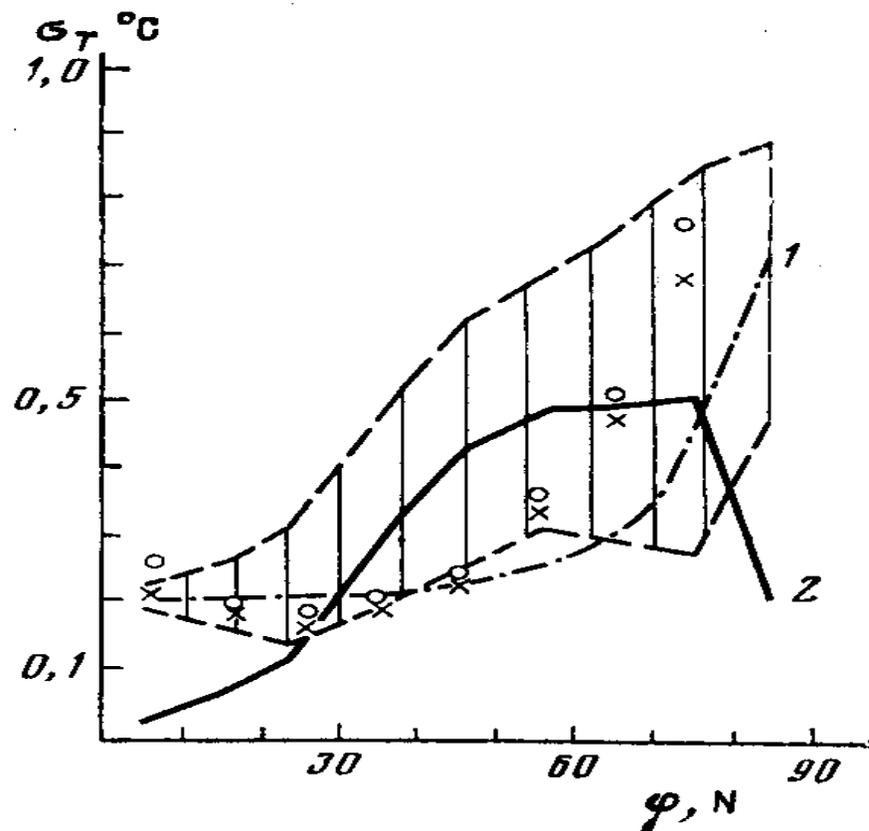
$$\sigma_{F\theta}^2 = A_F \langle F_{\theta}^2 \rangle$$



Проверка зависимости между дисперсией и средним горизонтальным потоком явного тепла по эмпирическим данным

Синоптические флуктуации радиационного баланса на верхней границе атмосферы взяты по обработке данных спутниковых наблюдений с учетом статистических эффектов зонального осреднения. Широтный ход стандартных отклонений температуры, ими вызванных – кривая 1 рисунка.

Синоптические флуктуации горизонтального переноса тепла взяты по стохастической модели и данным о средних потоках и среднем коэффициенте теплообмена. Широтный ход стандартных отклонений температуры, ими вызванных – кривая 2 рисунка.



Совместное действие различных источников синоптических флуктуаций при различных коэффициентах корреляции между ними. Диапазон оценок – заштрихованная область. Эмпирические оценки без исключения тренда – кружки, с исключенным трендом – крестики.

Стохастическое моделирование гидрологического режима суши

Уравнение влагозапаса почвы W:

$$\frac{dW}{dt} = - \boxed{\text{испарение (E=E}_0W / W_0)} + \boxed{\text{осадки (P)}} - \boxed{\text{сток (R) = H(W_f-W)H(P-E)}}$$

Стохастическое нелинейное уравнение флуктуаций влагозапаса:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\tau_E}(W-W_E) - R + \Delta F_W(t), \quad \tau_E = \frac{W_0}{E_0}, \quad W_E = W_0 \frac{\langle P \rangle}{E_0}$$

$$\langle \Delta F_W(t) \Delta F_W(t_1) \rangle = 2D_W \delta(t-t_1)$$

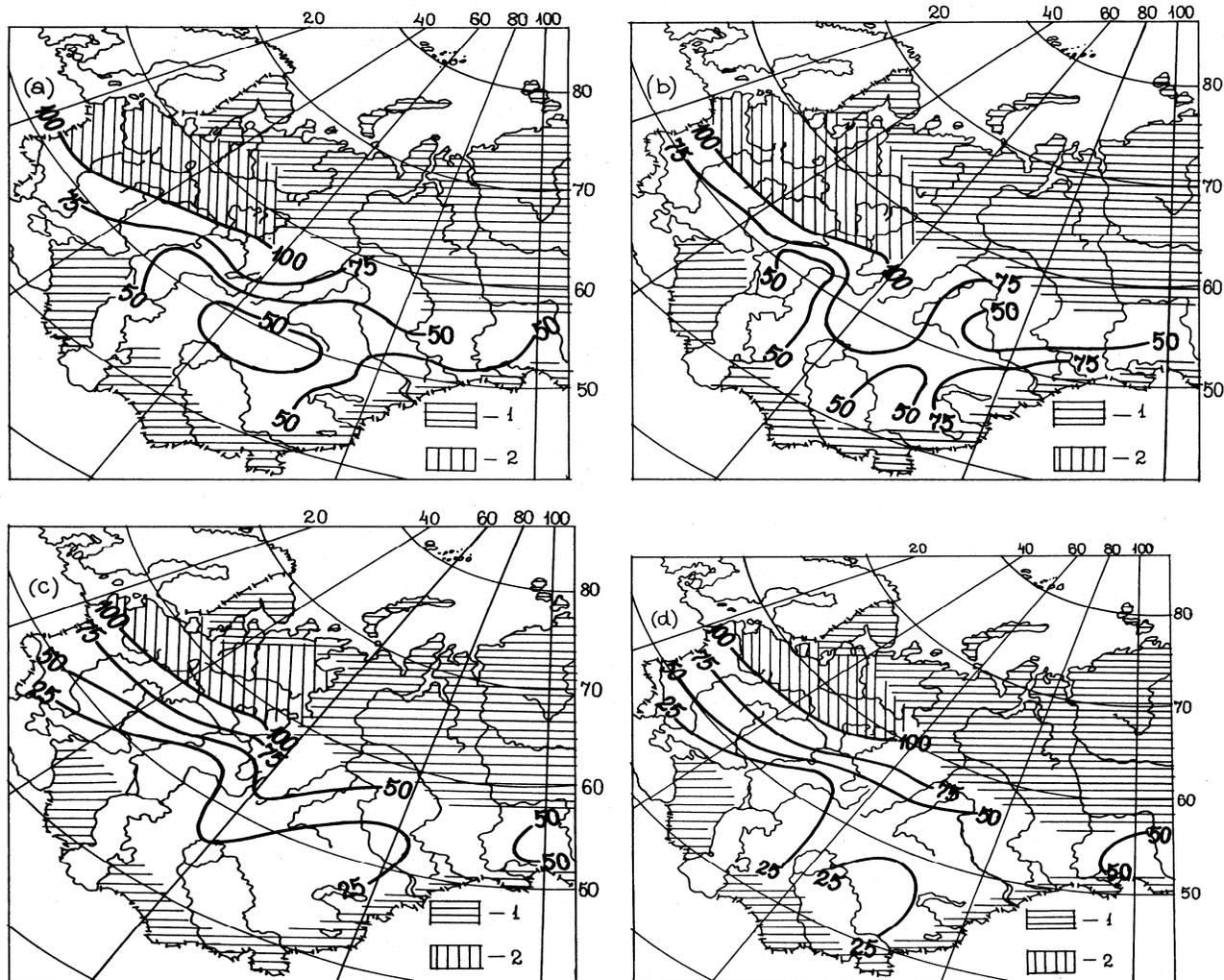
Режим недостаточного увлажнения

$$P < E_0: \quad \frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\tau_E}(W-W_E) + \Delta F_W$$

Режим избыточного увлажнения

$$P > E_0: \quad \frac{d\Delta W}{dt} = -1/\tau_W \Delta W + \Delta F_W(t)$$

$$\tau_W = ?$$

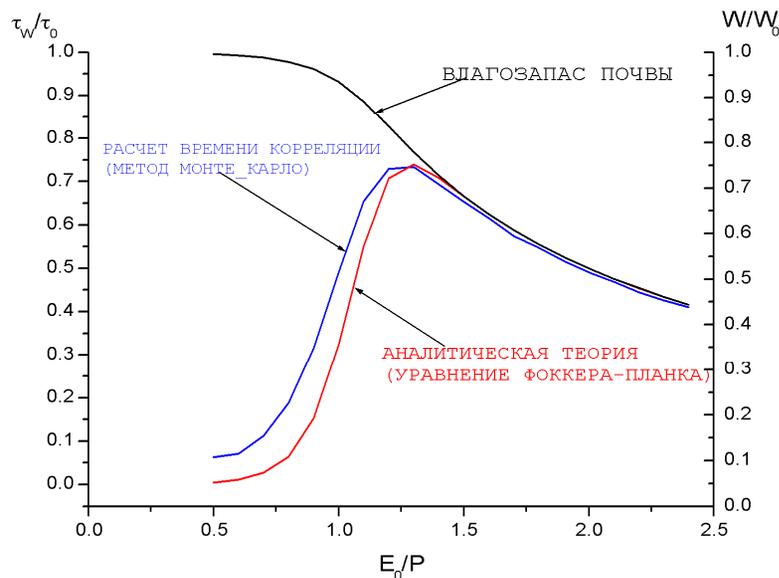


Карта распределения относительной влажности почвы для различных сезонов по Vinnikov&Ezerkerova (1991). 2-перенасыщенные почвы. а- зима, d-осень

Стохастическое моделирование характеристик изменчивости влагозапаса почвы.

Спектр флуктуаций влагозапаса почвы

$$S_W(\omega) = \frac{S_F(0)}{\omega^2 + \lambda_W^2} = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_W^2 \tau_W}{1 + (\omega \tau_W)^2}, \quad \sigma_W^2 = D_W \cdot \tau_W$$

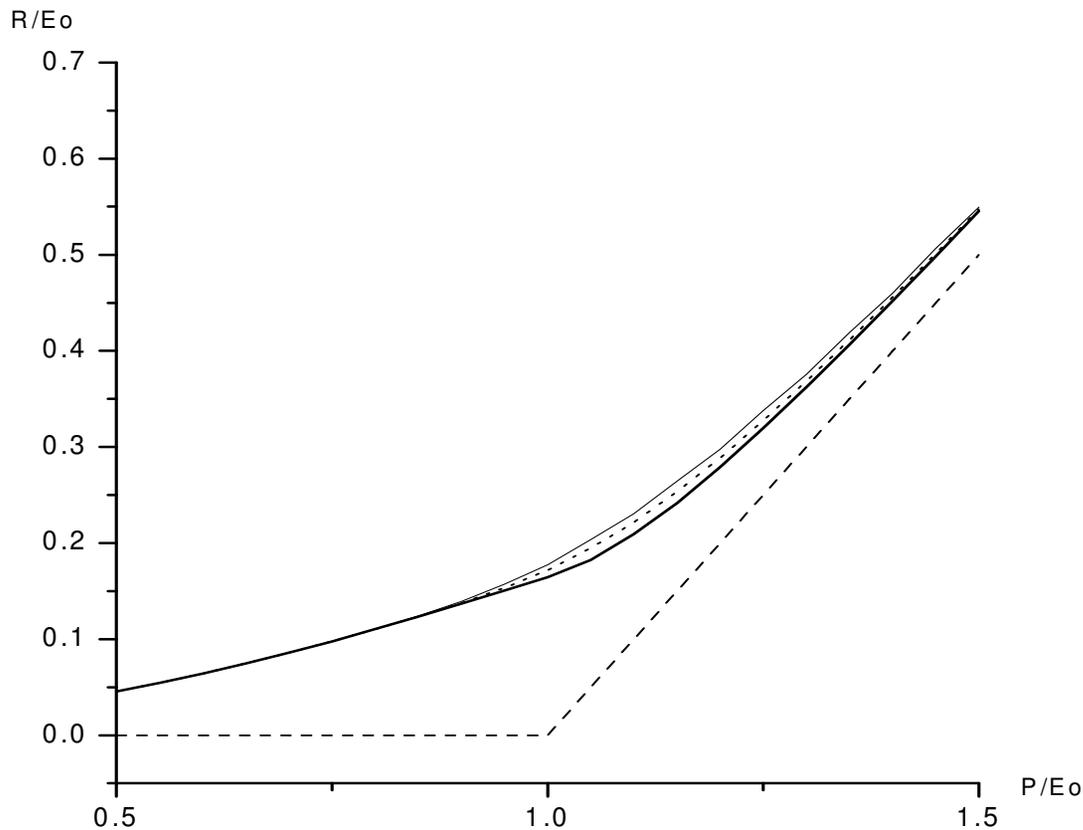


Критерий подобия:

$$\Pi_R = \left(\frac{\langle P \rangle}{E_0} - 1 \right) \left(\frac{W_0 E_0}{2D_W} \right)^{1/2}$$

**Зависимость времени корреляции
от потенциальной испаряемости.
Время корреляции нормировано на $W_0 / \langle P \rangle$**

Динамико-статистическая модель поверхностного стока.



**Формула стока для
«модели ведра»-
зависимость от
интенсивности
флуктуаций осадков**

$$\frac{\langle R \rangle}{E_0} = \left(\frac{D_W}{2E_0 W_0} \right)^{1/2} \frac{1}{F_R(\Pi_R)}$$

Зависимость стока от осадков. Сплошная жирная линия – параметризация М.И. Будыко, сплошная тонкая линия – аналитическая аппроксимация, пунктирная линия – результат численного моделирования. Для сравнения штриховой линией нанесена зависимость стока от осадков для детерминированной модели ведра.

Стохастическое моделирование долгопериодной изменчивости влажности атмосферы при её взаимодействии с почвой.

Постановка численных экспериментов на климатических моделях общей циркуляции

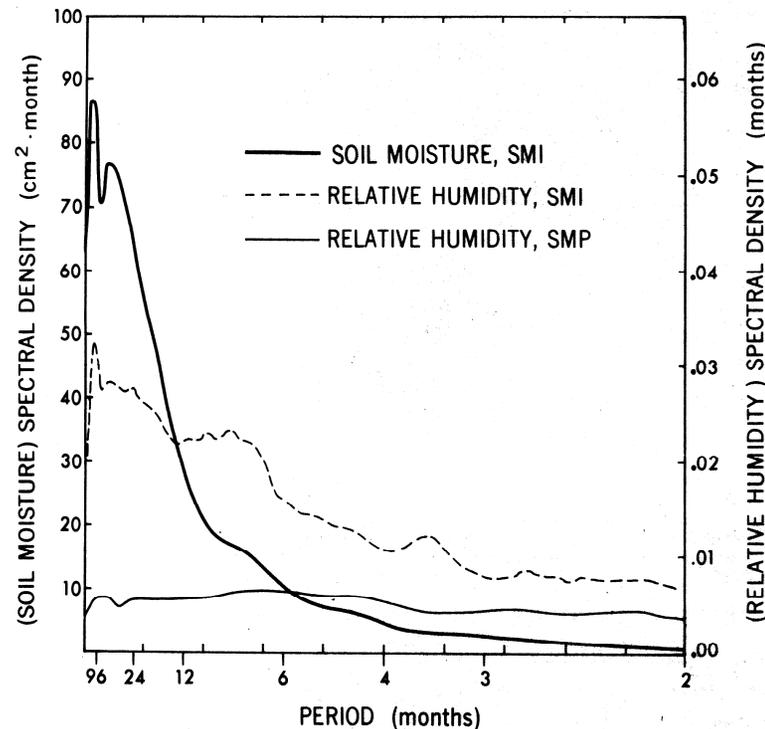


Схема экспериментов:

- 1) Интегрирование совместной модели с взаимодействующими влагой почвы и атмосферной циркуляцией-интерактивный эксперимент;
- 2) Интегрирование модели атмосферы –быстрой подсистемы при среднем влагозапасе почвы в каждой расчетной ячейке;
- 3) Сопоставление спектров.

Результаты экспериментов на модели Принстонского Университета.

Простая стохастическая система дифференциальных уравнений взаимодействия влаги в атмосфере и почве.

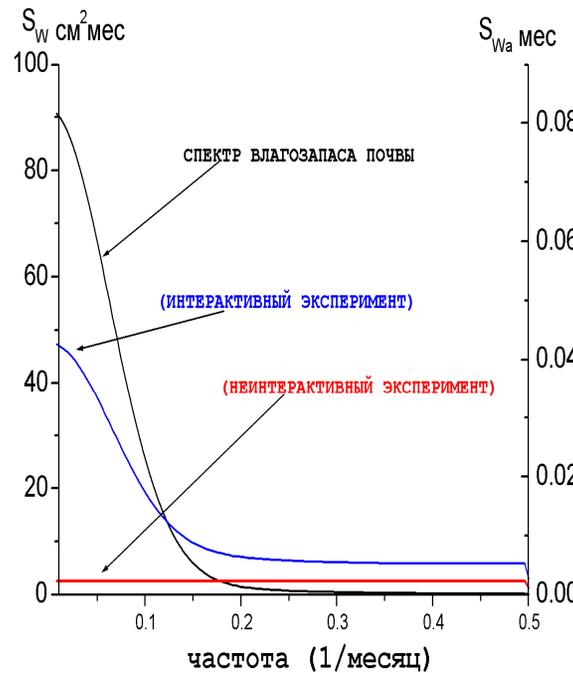
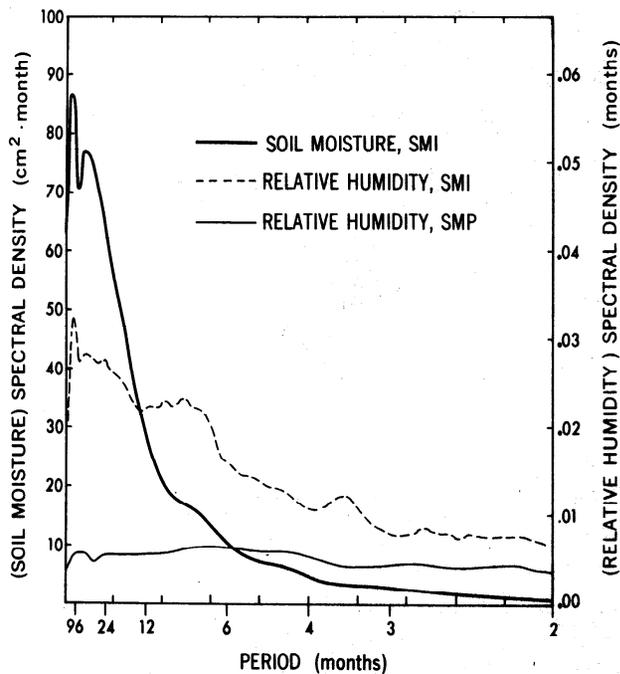
$$\frac{dW}{dt} = -E + P - R$$

$$\frac{dW_a}{dt} = E - P + D_h$$

$$D_h = -\lambda_D (W_a - W_f) + f(D)$$

Баланс влаги в почве

Баланс влаги в атмосфере



Сопоставление результатов расчета спектров влаги в атмосфере для интерактивного и неинтерактивного экспериментов в модели общей циркуляции (слева) и эквивалентной стохастической системе (справа)