

Использование тензорных представлений для численного решения стохастических дифференциальных уравнений

Сергей Долгов¹

¹Московский Физико-Технический Институт www.mipt.ru
Институт Вычислительной Математики РАН www.inm.ras.ru

14 апреля 2011

Стохастические дифференциальные уравнения

- Случайные процессы в модели,
- шумы при измерениях,
- специфические зависимости от параметров.

Стохастические дифференциальные уравнения

- Случайные процессы в модели,
 - шумы при измерениях,
 - специфические зависимости от параметров.
-
- Пример - стохастический коэффициент диффузии
 $a = a(x, \omega)$, $\omega \in \Omega$, (Ω, Σ, P) .

Стохастические дифференциальные уравнения

- Случайные процессы в модели,
- шумы при измерениях,
- специфические зависимости от параметров.

- Пример - стохастический коэффициент диффузии
 $a = a(x, \omega)$, $\omega \in \Omega$, (Ω, Σ, P) .
- Стохастическое уравнение:

$$-\nabla_x a(x, \omega) \nabla_x u(x, \omega) = f(x, \omega) \text{ in } D \times \Omega,$$
$$u|_{\partial D} = g.$$

Методы решения

- Задача - найти статистики ($\mathbb{E}u(x)$, $\mathbb{E}u^2(x)$, ...)

Методы решения

- Задача - найти статистики $(\mathbb{E}u(x), \mathbb{E}u^2(x), \dots)$
- Monte Carlo: N испытаний, точность $\mathbb{E}u$ порядка $\mathcal{O}(N^{-1/2})$.

Методы решения

- Задача - найти статистики $(\mathbb{E}u(x), \mathbb{E}u^2(x), \dots)$
- Monte Carlo: N испытаний, точность $\mathbb{E}u$ порядка $\mathcal{O}(N^{-1/2})$.
- Stochastic Galerkin, Collocation methods:
параметризация стохастических переменных, M
параметров \Rightarrow

Методы решения

- Задача - найти статистики $(\mathbb{E}u(x), \mathbb{E}u^2(x), \dots)$
- Monte Carlo: N испытаний, точность $\mathbb{E}u$ порядка $\mathcal{O}(N^{-1/2})$.
- Stochastic Galerkin, Collocation methods:
параметризация стохастических переменных, M
параметров \Rightarrow
- точность $\mathcal{O}(M^{-s})$, $s \geq 1$, $\mathcal{O}(\exp(-\alpha M))$.

KLТ для коэффициента

- Случайное поле коэффициента $a(x, \omega)$. Предположения:

KLТ для коэффициента

- Случайное поле коэффициента $a(x, \omega)$. Предположения:
- Положительность:

$$P \left\{ 0 < a_{min} \leq \inf_{x \in D} a(x, \omega) \wedge \sup_{x \in D} a(x, \omega) \leq a_{max} < \infty \right\} = 1,$$

- Известно, как вычислить матожидание

$$\mathbb{E}_a(x) = \int_{\Omega} a(x, \omega) dP(\omega)$$

и ковариацию

$$\mathbb{V}_a(x, x') = \int_{\Omega} (a(x, \omega) - \mathbb{E}_a(x))(a(x', \omega) - \mathbb{E}_a(x')) dP(\omega).$$

КЛТ для коэффициента

- Преобразование KL, KL-expansion - аналог ряда Фурье:

$$a(x, \omega) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m(x) Y_m(\omega).$$

КЛТ для коэффициента

- Преобразование KL, KL-expansion - аналог ряда Фурье:

$$a(x, \omega) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m(x) Y_m(\omega).$$

- Оператор ковариации:

$$(\mathbb{K}_a u)(x) = \int_D \mathbb{V}_a(x, x') u(x') dx'.$$

КЛТ для коэффициента

- Преобразование KL, KL-expansion - аналог ряда Фурье:

$$a(x, \omega) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m(x) Y_m(\omega).$$

- Оператор ковариации:

$$(\mathbb{K}_a u)(x) = \int_D \mathbb{V}_a(x, x') u(x') dx'.$$

- Симметричный, положительно определенный и компактный \Rightarrow

КЛТ для коэффициента

- \Rightarrow счетная последовательность (λ_m, φ_m) :

$$\mathbb{K}_a \varphi_m = \lambda_m \varphi_m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0.$$

- Рассмотрим

$$Y_m(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \int_D (a(x, \omega) - \mathbb{E}_a(x)) \varphi_m(x) dx : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathbb{E}[Y_m] = 0, \quad \mathbb{E}[Y_m Y_n] = \delta_{mn}.$$

KLT для коэффициента

- \Rightarrow счетная последовательность (λ_m, φ_m) :

$$\mathbb{K}_a \varphi_m = \lambda_m \varphi_m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0.$$

- Рассмотрим

$$Y_m(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \int_D (a(x, \omega) - \mathbb{E}_a(x)) \varphi_m(x) dx : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathbb{E}[Y_m] = 0, \quad \mathbb{E}[Y_m Y_n] = \delta_{mn}.$$

- Разложение коэффициента

$$a(x, \omega) = \mathbb{E}_a(x) + \sum_{m \geq 1} \sqrt{\lambda_m} \varphi_m(x) Y_m(\omega).$$

Убывание коэффициентов KL

- Если $\mathbb{V}_a \in C^s(D \times D)$ (быть может, кусочно), то [Schwab, Todor, 2006]

$$\lambda_m \leq c_1 m^{-ks}, \quad k = 1/d.$$

- Если \mathbb{V}_a кусочно-аналитична, то

$$\lambda_m \leq c_1 \exp(-c_2 m^k), \quad k = 1/d.$$

Убывание коэффициентов KL

- Если $\mathbb{V}_a \in C^s(D \times D)$ (быть может, кусочно), то [Schwab, Todor, 2006]

$$\lambda_m \leq c_1 m^{-ks}, \quad k = 1/d.$$

- Если \mathbb{V}_a кусочно-аналитична, то

$$\lambda_m \leq c_1 \exp(-c_2 m^k), \quad k = 1/d.$$

- Рассматриваем *обрезанный* ряд KL:

$$a(x, \omega) \approx \mathbb{E}_a(x) + \sum_{m=1}^M \sqrt{\lambda_m} \varphi_m(x) Y_m(\omega).$$

Убывание коэффициентов KL

- Если $\mathbb{V}_a \in C^s(D \times D)$ (быть может, кусочно), то [Schwab, Todor, 2006]

$$\lambda_m \leq c_1 m^{-ks}, \quad k = 1/d.$$

- Если \mathbb{V}_a кусочно-аналитична, то

$$\lambda_m \leq c_1 \exp(-c_2 m^k), \quad k = 1/d.$$

- Рассматриваем *обрезанный* ряд KL:

$$a(x, \omega) \approx \mathbb{E}_a(x) + \sum_{m=1}^M \sqrt{\lambda_m} \varphi_m(x) Y_m(\omega).$$

- $\sqrt{\lambda_m} \|\partial^\alpha \varphi_m\| = \mathcal{O}(m^{-ks}).$

Параметризация стохастических переменных

Дополнительные предположения:

- $\{Y_m\}$ независимы
- с каждым $Y_m(\omega)$ связано вероятностное пространство $(\Omega_m, \Sigma_m, P_m)$:
- $I_m = \text{Ran}(Y_m) \in \mathbb{R}$ компакт ($I_m = [-1, 1]$ с точностью до нормировки),
- $\exists \rho_m : I_m \rightarrow [0, \infty)$, и $dP_m(\omega) = \rho_m(y_m) dy_m$, $y_m \in I_m$,
- Σ_m - борелевские множества на I_m .

Параметризация стохастических переменных

Дополнительные предположения:

- $\{Y_m\}$ независимы
- с каждым $Y_m(\omega)$ связано вероятностное пространство $(\Omega_m, \Sigma_m, P_m)$:
- $I_m = \text{Ran}(Y_m) \in \mathbb{R}$ компакт ($I_m = [-1, 1]$ с точностью до нормировки),
- $\exists \rho_m : I_m \rightarrow [0, \infty)$, и $dP_m(\omega) = \rho_m(y_m) dy_m$, $y_m \in I_m$,
- Σ_m - борелевские множества на I_m .

- $\{y_m\}$ - набор новых стохастических параметров

Параметрические коэффициенты и уравнения

- Новая вероятностная мера:

$$dP(\omega) = \rho(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \prod_{m \geq 1} \rho_m(y_m)dy_m$$

Параметрические коэффициенты и уравнения

- Новая вероятностная мера:

$$dP(\omega) = \rho(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \prod_{m \geq 1} \rho_m(y_m)dy_m$$

- конечный набор **независимых** параметров:

$$\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_M\} \in I = I_1 \otimes \dots \otimes I_M \Rightarrow$$

- \Rightarrow коэффициент $a(x, \mathbf{y}) = a_0(x) + \sum_{m=1}^M \sqrt{\lambda_m} \varphi_m(x) y_m$

Параметрические коэффициенты и уравнения

- Новая вероятностная мера:

$$dP(\omega) = \rho(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \prod_{m \geq 1} \rho_m(y_m)dy_m$$

- конечный набор **независимых** параметров:

$$\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_M\} \in I = I_1 \otimes \dots \otimes I_M \Rightarrow$$

- \Rightarrow коэффициент $a(x, \mathbf{y}) = a_0(x) + \sum_{m=1}^M \sqrt{\lambda_m} \varphi_m(x) y_m$

- Параметрическое уравнение $-\nabla_x a(x, \mathbf{y}) \nabla_x u(x, \mathbf{y}) = f(x)$,
слабая постановка:

$$\int_{D \times I} a(x, \mathbf{y}) \nabla_x u(x, \mathbf{y}) \cdot \nabla_x v(x, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) dx d\mathbf{y} = \int_{D \times I} f(x) v(x, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) dx d\mathbf{y},$$

$$\forall v \in L_2(I, \rho) \otimes H^1(D).$$

Дискретизация параметрического уравнения

- Существенно многомерная ($d + M$ -мерная) задача.

Дискретизация параметрического уравнения

- Существенно многомерная ($d + M$ -мерная) задача.
- Стохастический метод Галеркина: ищем

$$u_h = \sum_{i=1}^N \sum_{j_1, \dots, j_M=1}^n u_{i;\mathbf{j}} \phi_i(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{j}}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{j} = \{j_1, \dots, j_M\},$$

решаем задачу

$$(a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u_h(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \nabla_{\mathbf{x}} \phi_{i_2}(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{j}_2}(\mathbf{y}))_{L_2(I, \rho) \otimes H^1(D)} = (f, \phi_{i_2} \psi_{\mathbf{j}_2}).$$

Дискретизация параметрического уравнения

- Существенно многомерная ($d + M$ -мерная) задача.
- Стохастический метод Галеркина: ищем

$$u_h = \sum_{i=1}^N \sum_{j_1, \dots, j_M=1}^n u_{i;\mathbf{j}} \phi_i(x) \psi_{\mathbf{j}}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{j} = \{j_1, \dots, j_M\},$$

решаем задачу

$$(a(x, \mathbf{y}) \nabla_x u_h(x, \mathbf{y}), \nabla_x \phi_{i_2}(x) \psi_{\mathbf{j}_2}(\mathbf{y}))_{L_2(I, \rho) \otimes H^1(D)} = (f, \phi_{i_2} \psi_{\mathbf{j}_2}).$$

- Метод коллокации: выбираем сетку в параметрическом пространстве $\{y_m^{j_m}\} = I_h \subset I$, решаем физические задачи при параметрах, фиксированных в точках $y_m^{j_m}$:

$$-\nabla_x a(x, y_m^{j_m}) \nabla_x u(x, y_m^{j_m}) = f(x), \quad y_m^{j_m} = 1, \dots, n.$$

Метод коллокации

- Расчет статистик можно вести непосредственно в переменных y :

$$\mathbb{E}u^\alpha(x) = \sum_{j_1, \dots, j_M=1}^n u^\alpha(x, y_m^{j_m}) \rho_m(y_m^{j_m}) \gamma_m^{j_m},$$

где $\gamma_m^{j_m}$ - веса квадратурной формулы (например, $\gamma_m^{j_m} = 1/n^M$).

Метод коллокации

- Расчет статистик можно вести непосредственно в переменных y :

$$\mathbb{E}u^\alpha(x) = \sum_{j_1, \dots, j_M=1}^n u^\alpha(x, y_m^{j_m}) \rho_m(y_m^{j_m}) \gamma_m^{j_m},$$

где $\gamma_m^{j_m}$ - веса квадратурной формулы (например, $\gamma_m^{j_m} = 1/n^M$).

- Базис $\{\varphi_m(x)\}$ часто можно выбирать произвольный ортогональный, например, $\{\sin(mx)\}$, тогда

$$\sqrt{\lambda_m} = \max_{\Omega} \left| \int_D (a(x, \omega) - \mathbb{E}_a(x)) \varphi_m(x) dx \right|, \quad Y_m \in [-1, 1].$$

Случай нескольких коэффициентов

- Несколько стохастических коэффициентов:
$$-\nabla_x a(x, \omega) \nabla_x u(x, \omega) + q(x, \omega) u(x, \omega) = f(x, \omega).$$

Случай нескольких коэффициентов

- Несколько стохастических коэффициентов:
$$-\nabla_x a(x, \omega) \nabla_x u(x, \omega) + q(x, \omega) u(x, \omega) = f(x, \omega).$$
- Коэффициенты независимы \Rightarrow наборы параметров
$$\mathbf{y} = \{\mathbf{y}^{(a)}, \mathbf{y}^{(q)}, \mathbf{y}^{(f)}\},$$
$$a = a(x, \mathbf{y}^{(a)}), \quad q = q(x, \mathbf{y}^{(q)}), \quad f = f(x, \mathbf{y}^{(f)}).$$

Случай нескольких коэффициентов

- Несколько стохастических коэффициентов:

$$-\nabla_x a(x, \omega) \nabla_x u(x, \omega) + q(x, \omega) u(x, \omega) = f(x, \omega).$$

- Коэффициенты независимы \Rightarrow наборы параметров

$$\mathbf{y} = \{\mathbf{y}^{(a)}, \mathbf{y}^{(q)}, \mathbf{y}^{(f)}\},$$

$$a = a(x, \mathbf{y}^{(a)}), \quad q = q(x, \mathbf{y}^{(q)}), \quad f = f(x, \mathbf{y}^{(f)}).$$

- Решение зависит от совокупности $u = u(x, \mathbf{y})$:

$$-\nabla_x a(x, \mathbf{y}^{(a)}) \nabla_x u(x, \mathbf{y}^{(a)}, \mathbf{y}^{(q)}, \mathbf{y}^{(f)}) + q(x, \mathbf{y}^{(q)}) u(x, \mathbf{y}) = f(x, \mathbf{y}^{(f)}).$$

TT представление многомерного вектора и матрицы

TT-Vector

$$x(\mathbf{i}) = x(i_1, \dots, i_d) = X^{(1)}(i_1) \cdots X^{(d)}(i_d), \quad X^{(k)}(i_k) \in \mathbb{R}^{r_{k-1} \times r_k}, \\ i_k = 1, \dots, n_k.$$

i_k - физические (модовые) индексы, r_k - TT ранги:

$$r_k = \text{rank} [x(\overline{i_1}, \dots, \overline{i_k}, \overline{i_{k+1}}, \dots, \overline{i_d})]. \quad r_0 = r_d = 1.$$

TT-Matrix

$$A(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = A(i_1, j_1, \dots, i_d, j_d) = A^{(1)}(i_1, j_1) \cdots A^{(d)}(i_d, j_d).$$

Операции с TT форматом

Линейные операции

- $y = Ax \Rightarrow Y^{(k)}(i_k) = \sum_{j_k=1}^{n_k} A^{(k)}(i_k, j_k) \otimes X^{(k)}(j_k),$
- $z = x + y \Rightarrow Z^{(k)}(i_k) = \begin{bmatrix} X^{(k)}(i_k) & 0 \\ 0 & Y^{(k)}(i_k) \end{bmatrix}.$

Дожатие (рекомпрессия, тензорное округление)

Пусть дан x , $X^{(k)}(i_k) \in \mathbb{R}^{R_{k-1} \times R_k}$.

$y = \mathcal{T}_{\varepsilon, R}(x)$:

$Y^{(k)}(i_k) \in \mathbb{R}^{r_{k-1} \times r_k}$, $r_k \leq R_k \leq R$, и/или $\|x - y\| \leq \varepsilon \|x\|$.

Квантизация, QTT формат

- Бинарное разложение индекса:

$$i \equiv \overline{i_1 i_2 \dots i_{d_0}} = 1 + \sum_{k=1}^{d_0} (i_k - 1) 2^{k-1}, \quad i_k = 1, 2.$$

Квантизация, QTT формат

- Бинарное разложение индекса:

$$i \equiv \overline{i_1 i_2 \dots i_{d_0}} = 1 + \sum_{k=1}^{d_0} (i_k - 1) 2^{k-1}, \quad i_k = 1, 2.$$

- Представление вектора (в т.ч. 1D) как тензора:

$$x(i) = x(\overline{i_1 i_2 \dots i_{d_0}}) = x(i_1, i_2, \dots, i_{d_0}).$$

Квантизация, QTT формат

- Бинарное разложение индекса:

$$i \equiv \overline{i_1 i_2 \dots i_{d_0}} = 1 + \sum_{k=1}^{d_0} (i_k - 1) 2^{k-1}, \quad i_k = 1, 2.$$

- Представление вектора (в т.ч. 1D) как тензора:

$$x(i) = x(\overline{i_1 i_2 \dots i_{d_0}}) = x(i_1, i_2, \dots, i_{d_0}).$$

- Применение TT-аппроксимации

$$x(i_1, i_2, \dots, i_{d_0}) \approx X^{(1)}(i_1) \dots X^{(d_0)}(i_{d_0}).$$

Additive and log-additive cases

- Additive case: непосредственное применение KLT для коэффициента:

$$a(x, \mathbf{y}) = a_0(x) + \sum_{m=1}^M a_m(x) y_m.$$

Additive and log-additive cases

- Additive case: непосредственное применение KLT для коэффициента:

$$a(x, \mathbf{y}) = a_0(x) + \sum_{m=1}^M a_m(x) y_m.$$

- *log*-additive case: $a \rightarrow \log(a) \rightarrow \text{KLT} \rightarrow \exp(\log(a))$:

$$a(x, \mathbf{y}) = \exp \left(a_0(x) + \sum_{m=1}^M a_m(x) y_m \right).$$

Матрица дискретизации, additive case

- Каждый член ряда KL с разделенными переменными \Rightarrow TT ранги 1.

Матрица дискретизации, additive case

- Каждый член ряда KL с разделенными переменными \Rightarrow TT ранги 1.
- дискретизация: по x - матрица жесткости $a_m(x) \rightarrow \Gamma_m[a_m] = [(a_m(x) \nabla \phi_i(x), \nabla \phi_j(x))]_{ij=1}^N$;
по y - диагональная матрица $y_m \rightarrow D_m = \text{diag}[y_m]$.

Матрица дискретизации, additive case

- Каждый член ряда KL с разделенными переменными \Rightarrow TT ранги 1.
- дискретизация: по x - матрица жесткости $a_m(x) \rightarrow \Gamma_m[a_m] = [(a_m(x)\nabla\phi_i(x), \nabla\phi_j(x))]_{ij=1}^N$;
по y - диагональная матрица $y_m \rightarrow D_m = \text{diag}[y_m]$.
- Полная параметрическая матрица жесткости

$$\Gamma[a] = \Gamma_0[a_0] \otimes I \otimes \cdots \otimes I + \Gamma_1[a_1] \otimes D_1 \otimes I \otimes \cdots \otimes I + \cdots + \Gamma_M[a_M] \otimes I \otimes \cdots \otimes D_M$$

точный TT ранг $M + 1$.

- Правая часть

$$\mathbf{f} = f \otimes e \otimes \cdots \otimes e.$$

Матрица дискретизации, log-additive case

- переменные x и y не разделены:

$$a(x, y) = e^{a_0(x)} \prod_{m=1}^M e^{a_m(x)y_m}.$$

Матрица дискретизации, log-additive case

- переменные x и y не разделены:

$$a(x, y) = e^{a_0(x)} \prod_{m=1}^M e^{a_m(x)y_m}.$$

- решение: цикл по $i = 1, \dots, N$, при фиксированном x ранг коэффициента 1. Сумма тензоров вида

$$\begin{bmatrix} 0 \\ e^{a_0(x_i)} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \otimes e^{a_1(x_i)y_1} \otimes \dots \otimes e^{a_M(x_i)y_M}$$

+ дожатия

TT vs QTT

- Естественное разделение переменных - x, y_1, \dots, y_M (TT).

TT vs QTT

- Естественное разделение переменных - x, y_1, \dots, y_M (TT).
- Физическая задача многомерна \Rightarrow разделение $x \rightarrow x_1, x_2, x_3$ (прямоугольная область).

TT vs QTT

- Естественное разделение переменных - x, y_1, \dots, y_M (TT).
- Физическая задача многомерна \Rightarrow разделение $x \rightarrow x_1, x_2, x_3$ (прямоугольная область).
- Использование QTT структуры для некоторых переменных.

TT vs QTT

- Естественное разделение переменных - x, u_1, \dots, u_M (TT).
- Физическая задача многомерна \Rightarrow разделение $x \rightarrow x_1, x_2, x_3$ (прямоугольная область).
- Использование QTT структуры для некоторых переменных.

Что лучше на практике?

- QTT для u_m ,
- QTT для x , если физическая задача 1D, иначе полное представление.

Итерационные методы

- Линейные операции в TT + дожатия:

$$y = Ax \rightarrow y = \mathcal{T}_{\varepsilon, R}(Ax), \quad z = x + y \rightarrow z = \mathcal{T}_{\varepsilon, R}(x + y).$$

Итерационные методы

- Линейные операции в TT + дожатия:

$$y = Ax \rightarrow y = \mathcal{T}_{\varepsilon, R}(Ax), \quad z = x + y \rightarrow z = \mathcal{T}_{\varepsilon, R}(x + y).$$

- Метод Рундсона:

$$\begin{aligned} x_{k+1} = x_k + B(f - Ax_k) &\rightarrow y = \mathcal{T}(Ax), \\ r = \mathcal{T}(f - y), \\ z = \mathcal{T}(Br), \\ x_{k+1} = \mathcal{T}(x_k + z) \end{aligned}$$

Итерационные методы

- Линейные операции в TT + дожатия:

$$y = Ax \rightarrow y = \mathcal{T}_{\varepsilon,R}(Ax), \quad z = x + y \rightarrow z = \mathcal{T}_{\varepsilon,R}(x + y).$$

- Метод Рундсона:

$$\begin{aligned} x_{k+1} = x_k + B(f - Ax_k) &\rightarrow y = \mathcal{T}(Ax), \\ r = \mathcal{T}(f - y), \\ z = \mathcal{T}(Br), \\ x_{k+1} = \mathcal{T}(x_k + z) \end{aligned}$$

- Продвинутое методы (CG, TT-GMRES)

Предобуславливатели

- одноточечные $B = \Gamma[a(x, \mathbf{y}^*)]^{-1}$:
 - $B = \Gamma^{-1}[a(x, 0, \dots, 0)]$,
 - $B_k = \Gamma^{-1}[a(x, \mathbf{y}_k^*)]$, $\mathbf{y}_k^* = \arg \min_y (f - A x_k)$ (меняется на каждом шаге).

Необходим быстрый солвер физической задачи

Предобуславливатели

- одноточечные $B = \Gamma[a(x, \mathbf{y}^*)]^{-1}$:
 - $B = \Gamma^{-1}[a(x, 0, \dots, 0)]$,
 - $B_k = \Gamma^{-1}[a(x, \mathbf{y}_k^*)]$, $\mathbf{y}_k^* = \arg \min_y (f - Ax_k)$ (меняется на каждом шаге).

Необходим быстрый солвер физической задачи

- Специальные (для эллиптического уравнения - $B = \Gamma[1]^{-1}\Gamma[1/a]\Gamma[1]^{-1}$):
 - обращение коэффициента в TT формате (метод Ньютона),
 - быстрый решатель уравнения Лапласа (с постоянным коэффициентом) (в 1D: [Kazeev, Khoromskij]).

Предобуславливатели

- одноточечные $B = \Gamma[a(x, \mathbf{y}^*)]^{-1}$:
 - $B = \Gamma^{-1}[a(x, 0, \dots, 0)]$,
 - $B_k = \Gamma^{-1}[a(x, \mathbf{y}_k^*)]$, $\mathbf{y}_k^* = \arg \min_y (f - A x_k)$ (меняется на каждом шаге).

Необходим быстрый солвер физической задачи

- Специальные (для эллиптического уравнения - $B = \Gamma[1]^{-1} \Gamma[1/a] \Gamma[1]^{-1}$):
 - обращение коэффициента в TT формате (метод Ньютона),
 - быстрый решатель уравнения Лапласа (с постоянным коэффициентом) (в 1D: [Kazeev, Khoromskij]).

Слабая зависимость от параметров (быстрое убывание ряда KL) \Rightarrow быстрая сходимость.

Расчет статистик

$y_m, \rho_m(y_m)$ независимы \Rightarrow расчет параллельный по TT блокам:

- пусть дан $x(i, \mathbf{j}) = X^{(0)}(i)X^{(1)}(j_1) \dots X^{(M)}(j_M)$,

- расчет среднего для каждого блока:

$$Y^{(m)} = \sum_{j_m=1}^{n_m} X^{(m)}(j_m) \rho_k(j_m) \gamma_m^{j_m}, \quad m = 1, \dots, M,$$

- свертка блоков: $\mathbb{E}x(i) = X^{(0)}(i) Y^{(1)} \dots Y^{(M)}$.

- Аналогично для $\mathbb{E}x^\alpha$.

Специальные методы для TT формата

- Adaptive Cross Approximation: зависимость от y определяется многомерным крестовым методом [Savostyanov, Oseledets, Tyrtshnikov]. Интерполируемые данные - решения физической задачи при фиксированных параметрах.
 - Найти текущий набор параметров $\{y_j^*\}_{j=1}^P$ из крестового метода;
 - Решить физические задачи $\{\Gamma[a(x, y_j^*)]u(x, y_j^*) = f\}$;
 - использовать полученные данные для обновления TT тензора в крестовом методе.

Специальные методы для TT формата

- Adaptive Cross Approximation: зависимость от y определяется многомерным крестовым методом [Savostyanov, Oseledets, Tyrtshnikov]. Интерполируемые данные - решения физической задачи при фиксированных параметрах.
 - Найти текущий набор параметров $\{y_j^*\}_{j=1}^P$ из крестового метода;
 - Решить физические задачи $\{\Gamma[a(x, y_j^*)]u(x, y_j^*) = f\}$;
 - использовать полученные данные для обновления TT тензора в крестовом методе.
- DMRG-solve: модифицированный метод переменных направлений для TT блоков.

2D уравнение из [Khoromskij, Oseledets]

Коэффициенты:

- Polynomial decay: $a_0 = 1$, $a_m = \frac{0.5}{(m+1)^2} \sin(mx)$, $x \in [-\pi, \pi]$;
- Exponential decay: $a_0 = 1$, $a_m = e^{-0.7m} \sin(mx)$, $x \in [-\pi, \pi]$
- Additive case: $a(x, \mathbf{y}) = a_0(x) + \sum_{m=1}^M a_m(x) y_m$,
- log-additive case: $a(x, \mathbf{y}) = \exp\left(a_0(x) + \sum_{m=1}^M a_m(x) y_m\right)$,
- Метод Ричардсона с однотоочечным предобуславливателем.

2D уравнение из [Khoromskij, Oseledets]

Ранги матрицы в log-additive case, *polynomial* decay. Сетки дискретизации: для x $N = 128$, для y $n = 256$.

M	QTT-rank(10^{-7})	QTT-rank(10^{-3})
5	27	10
10	44	17
20	78	27
40	117	49

2D уравнение из [Khoromskij, Oseledets]

Ранги матрицы в log-additive case, *exponential* decay. Сетки дискретизации: для x $N = 128$, для y $n = 256$.

M	QTT-rank(10^{-7})	QTT-rank(10^{-3})
5	33	11
10	43	21
20	51	23
40	50	25

2D уравнение из [Khoromskij, Oseledets]

Additive case, exponential decay. $M = 40$, $N = 128$, $n = 256$.

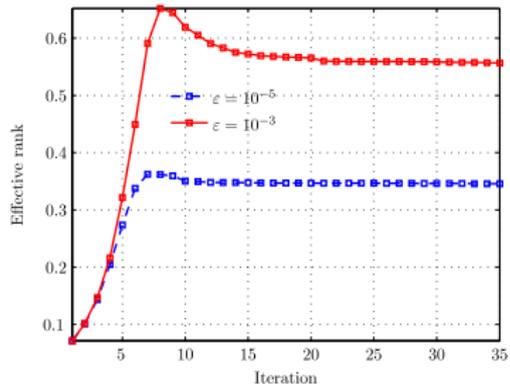
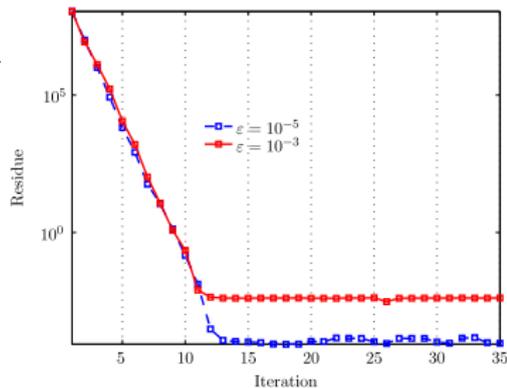


Рис.: Невязка и эффективный ранг от номер итерации

Формула расчета эффективного ранга: $\hat{r}(x) = \sqrt{\frac{\sum n_k r_k r_{k+1}}{\sum n_k}}$.

2D уравнение из [Khoromskij, Oseledets]

Additive case, exponential decay. $M = 40$, $N = 128$, $n = 256$.

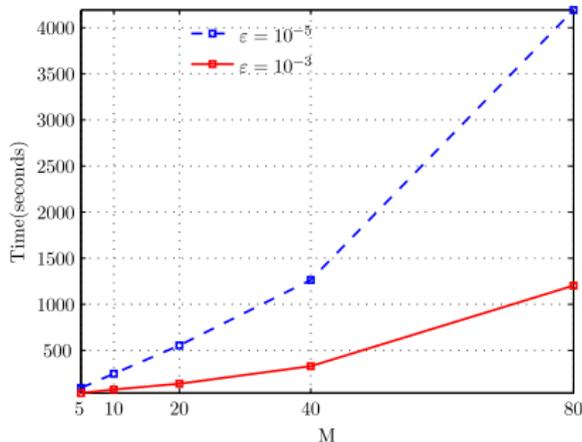


Рис.: Время 35 итераций от числа параметров M

1D уравнение из [Kressner, Tobler]

Коэффициенты:

- Polynomial decay: $a_0 = 1$, $a_m = \frac{1}{(m+1)^2} \sin(\pi m x)$, $x \in [0, 1]$;
- Additive case.
- Предобуславливатель $B = \Delta^{-1} \Gamma [1/a] \Delta^{-1} + \text{TT-GMRES}$.

1D уравнение из [Kressner, Tobler]

Polynomial decay, зависимость от M , $N = 128$, $n = 64$:

M	it.	time	rank	residual
10	2	15	28	$2.07 \cdot 10^{-5}$
	3	59	28	$2.51 \cdot 10^{-7}$
20	2	24	33	$6.27 \cdot 10^{-5}$
	3	87	36	$5.03 \cdot 10^{-6}$
40	4	216	72	$1.19 \cdot 10^{-4}$
	5	400	71	$2.00 \cdot 10^{-6}$

1D уравнение из [Kressner, Tobler]

Polynomial decay, зависимость от N , $n = 64$, $M = 20$:

N	it.	time	rank	residual
64	6	146	65	$1.29 \cdot 10^{-5}$
	7	205	74	$1.68 \cdot 10^{-6}$
128	6	193	66	$3.25 \cdot 10^{-5}$
	7	240	67	$1.83 \cdot 10^{-6}$
256	6	245	83	$7.49 \cdot 10^{-5}$
	7	293	82	$5.47 \cdot 10^{-6}$
512	7	379	114	$2.55 \cdot 10^{-5}$
	8	418	114	$9.55 \cdot 10^{-6}$

1D уравнение из [Kressner, Tobler]

Polynomial decay, зависимость от n , $N = 128$, $M = 20$:

n	it.	time	rank	residual
64	6	193	66	$3.25 \cdot 10^{-5}$
	7	240	67	$1.83 \cdot 10^{-6}$
128	6	130	72	$4.48 \cdot 10^{-5}$
	7	160	77	$7.07 \cdot 10^{-6}$
256	9	174	69	$2.22 \cdot 10^{-5}$
	10	217	79	$3.18 \cdot 10^{-6}$
512	12	233	80	$1.10 \cdot 10^{-5}$
	13	274	87	$3.79 \cdot 10^{-6}$

Список литературы

- 1 *Sparse high order FEM for elliptic sPDEs.*
M. Bieri and C. Schwab, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 198 (2009).
- 2 *Tensor-structured Galerkin approximation of parametric and stochastic elliptic PDEs.*
B. Khoromskij and C. Schwab. *Research Reports of SAM ETHZ*, No. 2010-04.
- 3 *Low-rank tensor Krylov subspace methods for parametrized linear systems.*
D. Kressner and C. Tobler. *Research Reports of SAM ETHZ*, No. 2010-16.
- 4 *Quantics-TT collocation approximation of parameter-dependent and stochastic elliptic PDEs.*
B. Khoromskij and I. Oseledets. *Preprint 37/2010, MPI MiS.*