

**Основные результаты проекта
РФФИ 13-01-00115
в научно-популярной форме**

Введение. Говоря неформально, риманова поверхность – это поверхность, на которой определены углы между касательными векторами. Римановы поверхности допускают много конструктивных моделей: это комплексные алгебраические кривые, многообразия орбит разрывно действующих групп, многогранники, или даже просто набор лоскутов, сшитых по краям не слишком плохими отображениями. Это позволяет иметь несколько точек зрения на предмет исследования. Соответственно, и сама теория римановых поверхностей находится на стыке нескольких дисциплин: комплексного анализа, алгебраической геометрии, арифметики и топологии. Еще более многогранна теория модулей римановых поверхностей -- непрерывных параметров, описывающих конформные классы поверхностей.

Вот вопросы, постановка которых доступна даже школьникам: какова длина дуги эллипса, как движется маятник, как вращается твердое тело в невесомости (эйлеров волчок). Ответы на эти вопросы дает теория эллиптических функций, т.е. специальных функций связанных с одними из простейших римановых поверхностей -- торами. Современные приложения римановых поверхностей вышли за пределы математики и известны в механике, теоретической физике, кодировании и даже в экономике и медицине. Пожалуй, самым известным и ярким примером таких приложений является алгебро-геометрическое интегрирование нелинейных уравнений математической физики (КдФ, НШ, КП, СГ и др.). Другие приложения, возникающие например в задачах равномерных рациональных приближений, конформных отображений, обработке сигналов рассматриваются в данном проекте. Приложения украшают и углубляют любую теорию, потому что ставят новые вопросы.

1. Конформные отображения.

Конформные (т.е. сохраняющие углы) преобразования -- феномен двумерной геометрии: в старших размерностях их очень мало. Конформные преобразования сохраняют и двумерное уравнение Лапласа, поэтому их используют для решения краевых задач для гармонических функций в областях сложной формы. Среди многочисленных разделов физики, где возникает эта задача, упомянем описание движения идеальной жидкости, расчет стационарных магнитных, электрических и температурных полей, фильтрацию.

Хотя для любой односвязной двумерной области существует конформное отображение на верхнюю полуплоскость, написать для него явные формулы в большинстве случаев нельзя. В случае многоугольных областей есть представление отображения в виде так называемого интеграла Кристоффеля-Шварца, содержащего много неизвестных параметров. Оказывается, его можно эффективно вычислять с помощью римановых η -функций, если углы многоугольника соизмеримы с развернутым.

Рассмотрим плоскую область, стенки которой вертикальны либо горизонтальны, подобную изображенной на Рис. 1. Пусть в один из уходящих на бесконечность каналов втекает идеальная жидкость, в другой – вытекает. Необходимо рассчитать поле скоростей и давления. Оказывается такие задачи имеют аналитическое решение в терминах η функций (для данного случая – рода 2). Соответственно, данная задача может быть решена с машинной точностью равномерно во всей области, и такое решение можно использовать для тестирования других численных методов, использующих

сеточные аппроксимации. Кроме того, аналитические формулы позволяют создавать потоки жидкости с желаемыми свойствами. Например, в случае трех каналов с ненулевым расходом жидкости, на стенке области возникает отрыв струи и точку этого отрыва можно за счет изменения геометрических размеров или расходов поместить в заданное место.

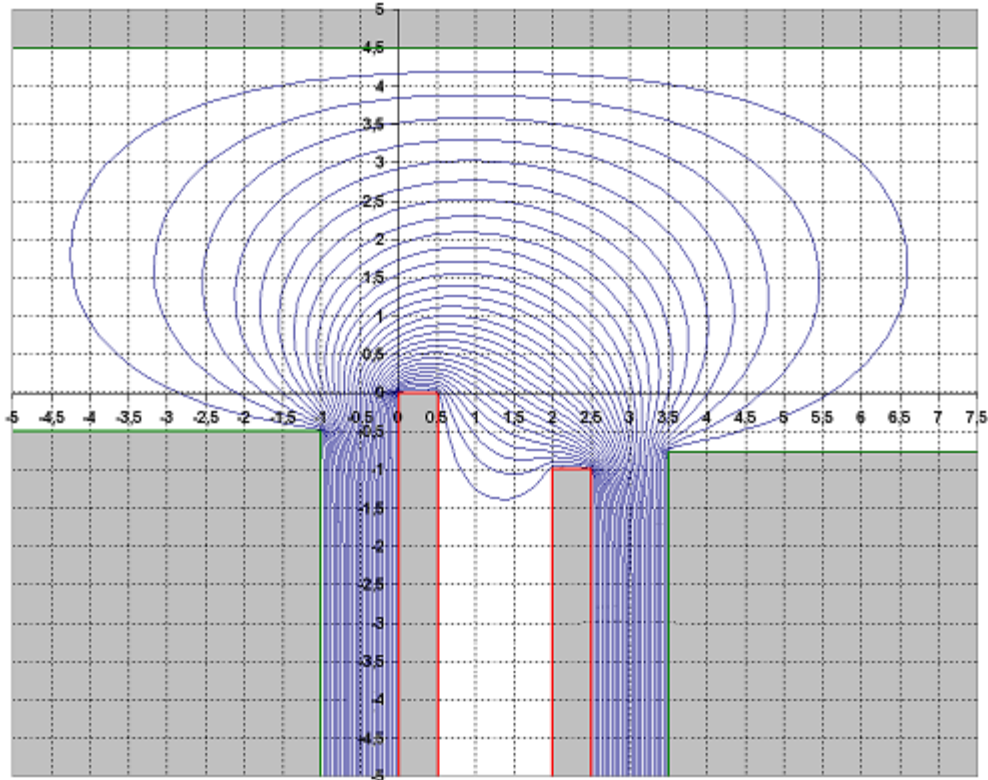


Рис. 1 Течение идеальной жидкости в канале, расчет сделан О.А.Григорьевым с помощью тэта функций

2. Многополосные фильтры. Предположим, что есть много радиостанций, каждой из которых выделен свой частотный диапазон. Нужен прибор, который бы без искажения пропускал сигналы со станций из заданного списка и подавлял бы сигналы со всех остальных станций. Такой прибор называется многополосным фильтром. Амплитудно-частотная характеристика фильтра (амплитуда пропущенного через прибор гармонического сигнала данной частоты) есть рациональная функция от частоты. Эта рациональная функция должна равномерно приближать 0 на полосах задержки сигнала и 1 на полосах пропускания. Соответствующая оптимизационная задача для рациональных функций была решена русским ученым Е.И.Золотаревым в случае одной полосы пропускания и одной полосы задержки в примерно в 1870. На основе этого решения В.Кауэр, немецкий физик и электротехник, в 1930-х изобрел т.н. “эллиптические” фильтры низких и высоких частот, широко использующиеся в электронике и по сей день. Термин “эллиптический” в названии фильтра указывает на то, что представление Золотарева использует эллиптические функции.

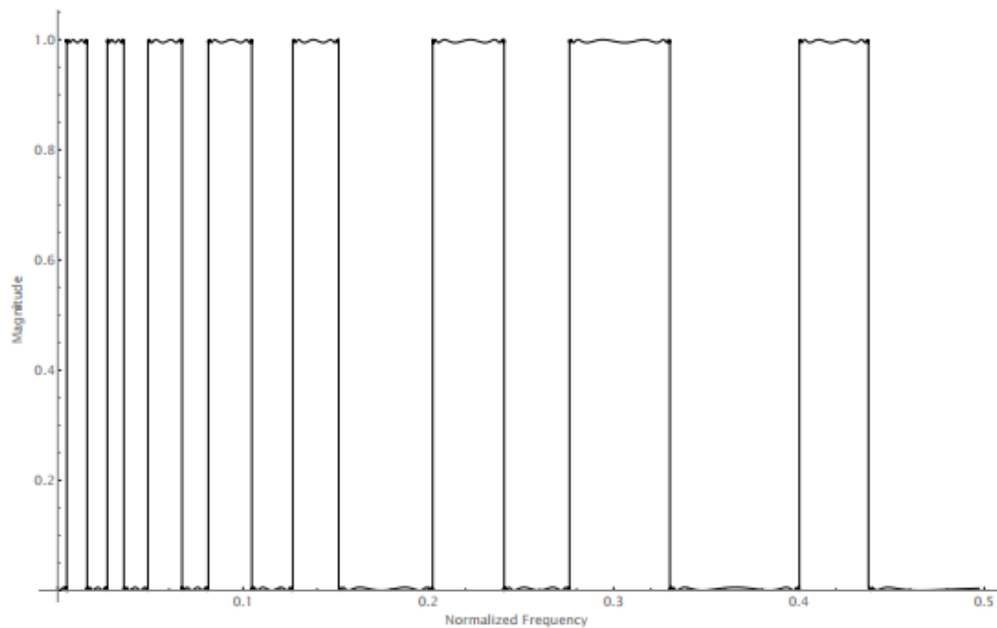
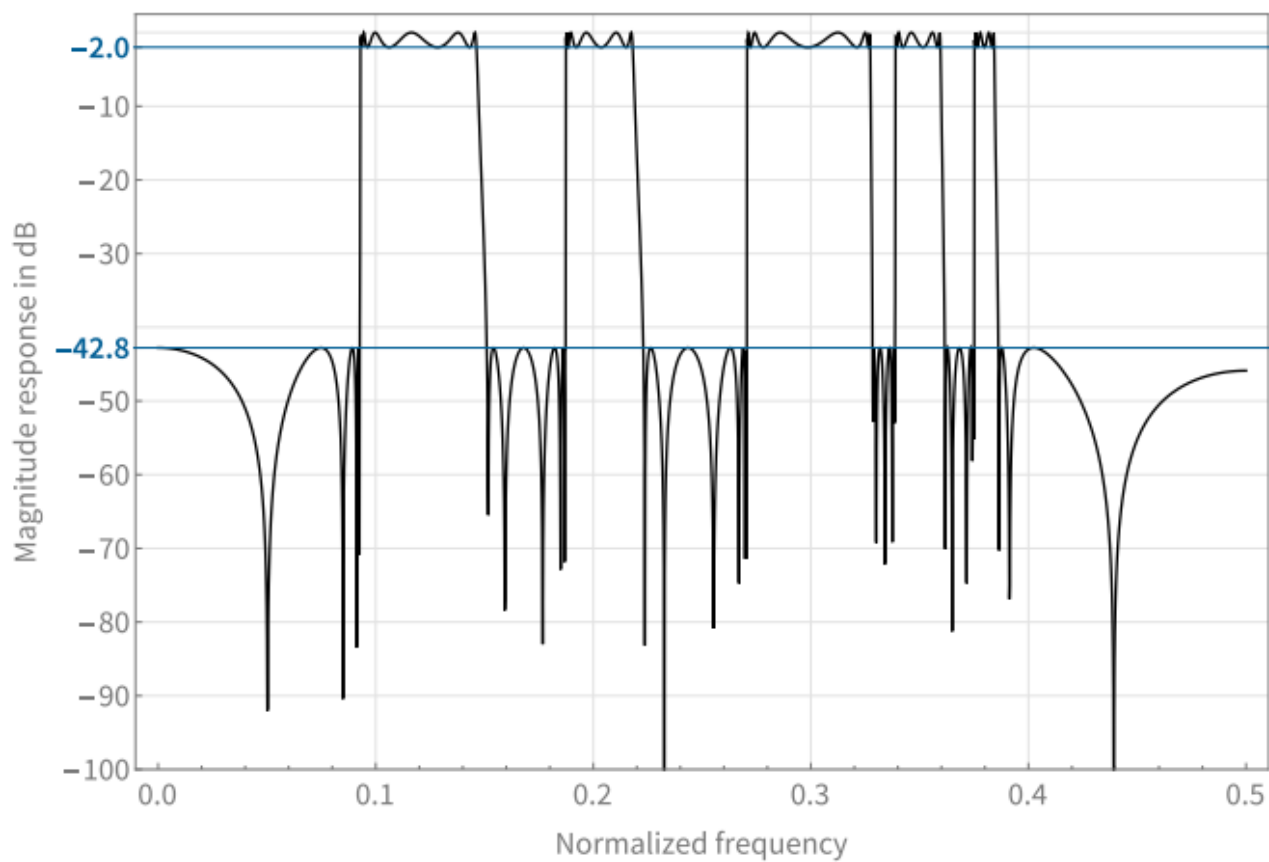


Рис. 2 АЧХ наилучшего фильтра с восемью полосами пропускания\задержки. Степень фильтра 326. (Расчет произведен С.Лямаевым)



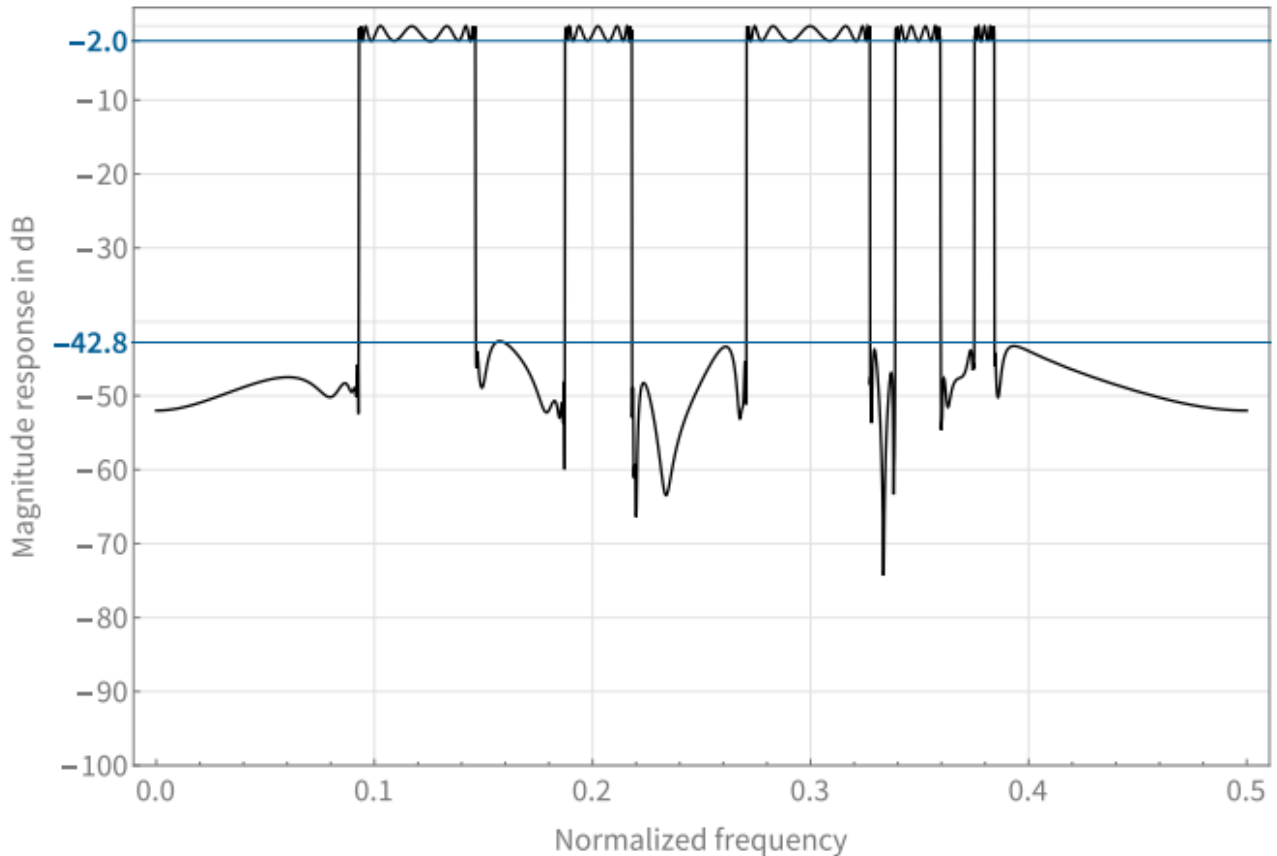


Рис 3. Наилучший многополосный фильтр (сверху) имеет степень 76, степень фильтра, полученного разделением полос фильтрации (снизу) равна 132 при той же спецификации. (Расчет произведен С.Лямаевым)

Сегодня инженеры-радиотехники во всем мире строят многополосные фильтры следующим образом. Каждая полоса пропускания вырезается при помощи фильтра (Кауэра-Золотарева) низких частот и фильтра высоких частот. Далее отфильтрованные сигналы суммируются.

Оказывается, что привлечение римановых поверхностей высоких родов позволяет на основе явных аналитических формул производить фильтрацию в целом при произвольном числе полос пропускания и задержки. Получающиеся фильтры обладают лучшими характеристиками, например большей резкостью перехода от полосы задержки к полосе пропускания при фиксированной степени фильтра либо же меньшей степенью при той же функциональности.

3. Конформные сетки

Рассмотрим канал с периодическим прямоугольным оребрением, по которому поперек плоскости рисунка течет жидкость. Для анализа характеристик устойчивости течения Пуазейля в этом канале используются конформные сетки.

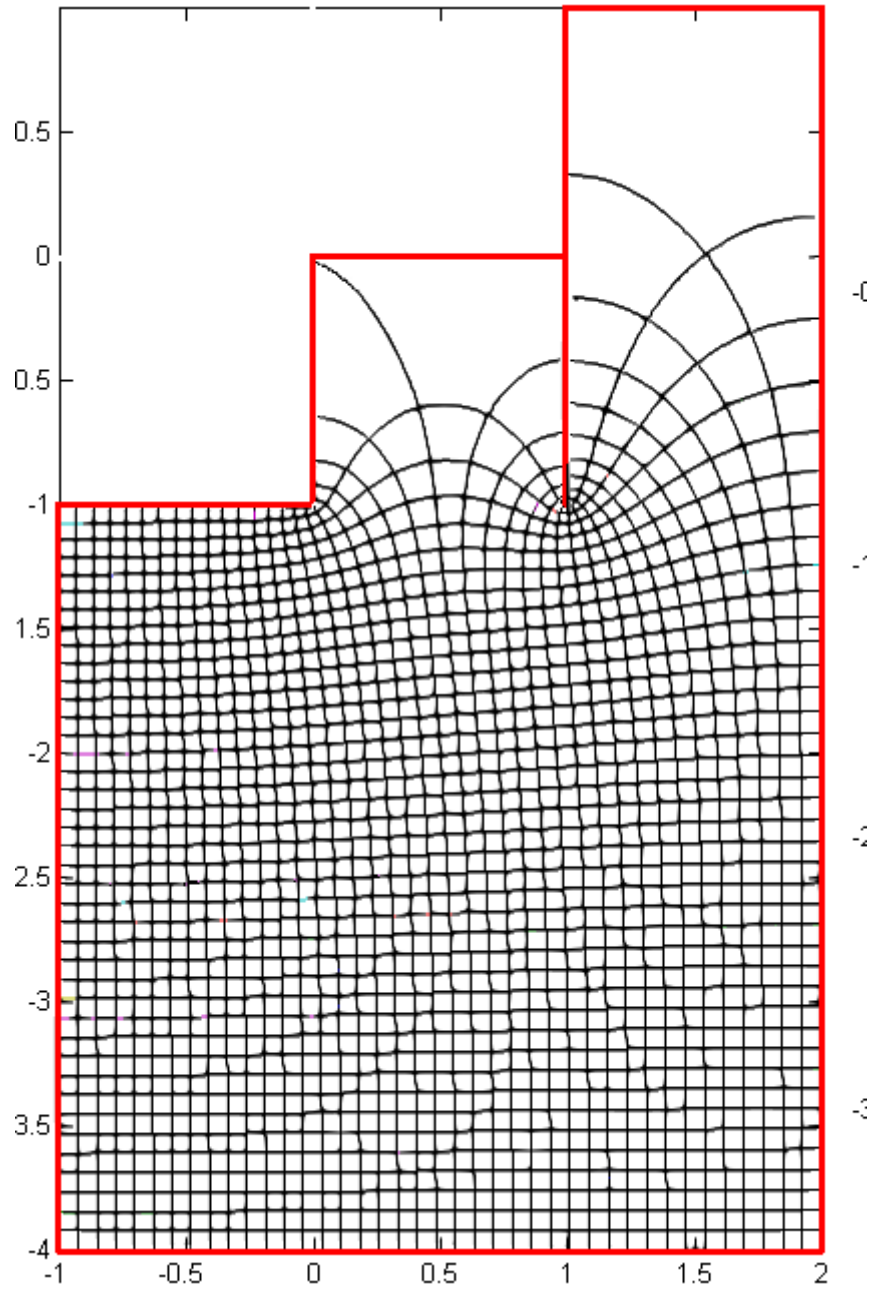


Рис. 4 Равномерная сетка в прямоугольнике, конформно перенесенная в прямоугольный многоугольник (О.А.Григорьев).