Проект РФФИ 13-01-00115
Результаты по теме «Оптимальные многополосные фильтры» в научно-популярной форме

Под *сигналом* обычно понимают некоторое воздействие, поступающее на вход измерительной системы. При работе с сигналами часто возникает необходимость преобразовывать их в более удобную для использования или восприятия форму, отсеивая какие-либо нежелательные составляющие и выделяя полезные. Устройства, выполняющие такие преобразования, называются *фильтрами*. Обычно также предполагают, что выполняемое фильтром преобразование сигналов является *линейным* и *стационарным*. Под стационарностью понимается то, что сдвиг по времени входного сигнала приводит к такому же сдвигу по времени выходного.

Примером нежелательных составляющих сигнала могут служить помехи и шумы, неизбежно присутствующие в реальных сигналах. Так, при регистрации сигнала в электротехнической системе с помощью прибора, работающего от бытовой сети переменного тока, вне зависимости от качества заземления и экранирования в сигнале будут присутствовать спектральные компоненты, отвечающие частоте питающего напряжения.

Наиболее распространёнными на практике являются *частотно-селективные фильтры*, которые подавляют спектральные составляющие входного сигнала в некотором наборе частотных полос, называемых *полосами задержки*, и оставляют без изменения в другом наборе полос, называемых *полосами пропускания*. В зависимости от количества полос пропускания частотно-селективные фильтры разделяют на *однополосные* и *многополосные*. Электрические частотно-селективные фильтры в настоящий момент встречаются настолько повсеместно, что трудно представить себе электронный прибор средней сложности, не содержащий в своей конструкции таких фильтров.

Выходной сигнал $y(t)$ линейного стационарного фильтра может быть определён как свёртка входного сигнала $x(t)$ с некоторой (вообще говоря, обобщённой) функцией $h(t)$, называемой *импульсной характеристикой*:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t-\tau)x(\tau)\,d\tau.$$

Если на вход фильтру подать сигнал $x(t) = e^{wt}$, $w \in \mathbb{C}$, то на выходе будем иметь

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau)e^{w(t-\tau)}d\tau = e^{wt}\int_{\mathbb{R}} h(\tau)e^{-w\tau}d\tau, \tag{1}$$

то есть экспонента $x(t) = e^{wt}$ является собственной функцией фильтра, рассматриваемого как линейный оператор на пространстве сигналов, и отвечающее ей собственное значение $H(w)$ равно преобразованию Лапласа от импульсной характеристики:

$$H(w) := (\mathcal{L}h)(w) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau)e^{-w\tau}d\tau$$

(в этих равенствах w – произвольное комплексное число, лежащее в области сходимости преобразования Лапласа). Функцию $H(w)$ называют *передаточной функцией* фильтра. Поскольку $\mathcal{L}(h * x) = \mathcal{L}h\,\mathcal{L}x$, передаточная функция линейного стационарного фильтра может быть также определена из соотношения $H(w) = Y(w)/X(w)$, где $Y = \mathcal{L}y$ и $X = \mathcal{L}x$.

Если область сходимости преобразования Лапласа включает мнимую ось (что на практике всегда выполняется), то можно рассмотреть функцию $H(\mathrm{i}\,w)$, $w \in \mathbb{R}$, называемую *частотной характеристикой* фильтра. Из соотношений (1) следует, что гармонический сигнал $e^{\mathrm{i}\,wt}$ при прохождении через фильтр не меняет своей природы (остаётся гармоническим), при этом его амплитуда умножается на $|H(\mathrm{i}\,w)|$, а к фазе прибавляется $\arg H(\mathrm{i}\,w)$. Аналогичный смысл имеет и равенство $Y(\mathrm{i}\,w) = H(\mathrm{i}\,w)X(\mathrm{i}\,w)$, которое показывает каким образом преобразуется спектр входного сигнала $X(\mathrm{i}\,w)$ в спектр выходного сигнала $Y(\mathrm{i}\,w)$ под действием фильтра. Функцию $|H(\mathrm{i}\,w)|$ называют амлитудно-частотной характеристикой (АЧХ) фильтра, а функцию $\arg H(\mathrm{i}\,w)$ – фазово-частотной характеристикой (ФЧХ).

В общем случае отсутствуют какие-либо соображения, позволяющие по спецификации фильтра задавать непосредственно его импульсную характеристику. В то же время, если желаемые свойства фильтра могут быть описаны в терминах его действия на спектр входного сигнала, то равенство $Y(\mathrm{i}\,w) = H(\mathrm{i}\,w)X(\mathrm{i}\,w)$ позволяет задавать его частотную характеристику. Например, АЧХ идеального частотно-селективного фильтра равна единице на полосах пропускания и нулю на полосах задержки.

Известно, что во всех электрических линейных стационарных фильтрах, допускающих реализацию на элементах R, L, C и активных элементах (операционных усилителях), зависимость между входным и выходным сигналами записывается в виде дифференциального уравнения с постоянными вещественными коэффициентами вида

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^{(i)}(t).$$

Вычисляя преобразование Лапласа от обеих частей этого равенства, получаем

$$H(w) \;=\; \frac{Y(w)}{X(w)} \;=\; \frac{b_m w^n + \ldots + b_1 w + b_0}{a_n w^n + \ldots + a_1 w + a_0},$$

то есть передаточная функция такого фильтра является вещественной дробно-рациональной функцией.

В связи с этим естественным образом возникает следующая оптимизационная задача: заданы N непересекающихся отрезков действительной оси, на каждом из которых функция пропускания равна 0 (полоса задержки) или 1 (полоса пропускания), требуется найти наилучшее рациональное приближение заданной степени для функции пропускания в равномерной норме на этих отрезках.

До недавнего времени было известно аналитическое решение этой задачи только для случая $N = 2$ (третья задача Золотарёва), на основе которого в 1930-х годах В. Кауэром были разработаны *эллиптические фильтры*, называемые также фильтрами Кауэра-Золотарёва. Эти фильтры благодаря своим оптимальным свойствам нашли широкое применение в технике.

Многополосную фильтрацию в настоящий момент осуществляют путём комбинирования однополосных фильтров – сигнал подаётся на вход нескольким однополосным фильтрам и их выходные сигналы суммируются (такая схема может рассматриваться как простейший случай банка фильтров, в котором сразу после прохождения фильтров анализа субполосные сигналы суммируются в выходной сигнал). Однако параметры получаемых таким путём фильтров могут быть далеки от оптимальных.

Новый подход к решению сформулированной оптимизационной задачи был предложен А.Б. Богатыревым в 2010 г. и позволяет находить её аналитические решения при произвольном $N > 2$. Многополосные фильтры, рассчитанные по заданной спецификации на основе таких решений, оптимальны, то есть обладают наименьшим порядком среди всех допускающих практическую реализацию фильтров, АЧХ которых удовлетворяет требованиям этой спецификации. В ходе численных экспериментов было выяснено, что применение такого подхода к синтезу многополосных фильтров во многих случаях даёт по сравнению с методом, применяемым в настоящий момент, существенный выигрыш – степень фильтра при заданной спецификации оказывается в два и более раз меньше. Как известно, уменьшение степени фильтра на практике означает упрощение его устройства, удешевление, уменьшение тепловыделения и потребления энергии. Таким образом, использование многополосных фильтров, построенных на основе изложенного метода, в перспективе позволит улучшить характеристики многих электронных приборов, либо упростить их устройство при прежнем качестве работы.

Пример АЧХ и ФЧХ четырёхполосного цифрового оптимального фильтра 36-ого порядка: