

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ  
по курсу "Линейная алгебра и аналитическая геометрия" (2 семестр)  
1-й поток

1. Нормированное пространство. Нормы Гельдера.
2. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве.
3. Сходящиеся и фундаментальные последовательности векторов. Полнота. Существование сходящейся подпоследовательности для векторов на единичной сфере.
4. Задача о наилучшем приближении в конечномерном нормированном подпространстве.
5. Скалярное произведение в вещественном и комплексном пространствах. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца.
6. Длина вектора и тождество параллелограмма.
7. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Угол между векторами в евклидовом пространстве. Теорема Пифагора.
8. Матрица Грама и общий вид скалярного произведения в конечномерном унитарном (евклидовом) пространстве. Изоморфизм унитарных (евклидовых) пространств.
9. Ортогональное дополнение множества. Прямая и ортогональная сумма подпространств. Перпендикуляр и проекция.
10. Задача о наилучшем приближении на выпуклом замкнутом множестве в конечномерном евклидовом пространстве.
11. Ортонормированные базисы и унитарные (ортогональные) матрицы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидга.
12. Биортогональные системы в заданных подпространствах. Существование и единственность системы, биортогональной к заданной системе.
13. Линейные функционалы (формы) и гиперплоскости в евклидовом пространстве. Опорные гиперплоскости и разделение выпуклых множеств.
14. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Норма линейного оператора. Сопряженное пространство.
15. Матрицы линейного оператора в различных базисах. Эквивалентность и подобие матриц. Критерий эквивалентности матриц.
16. Линейное пространство линейных операторов и пространство матриц. Произведение линейных операторов и его матрица.
17. Ядро и образ линейного оператора. Обратный оператор.
18. Собственные значения и собственные векторы. Диагонализуемые матрицы и операторы простой структуры.
19. Характеристический многочлен матрицы и линейного оператора. Существование собственных значений.
20. Инвариантные подпространства. Сужение оператора (индуцированный оператор). Треугольная форма матрицы линейного оператора. Теорема Шура.
21. Собственные значения нильпотентного и обратимого операторов.
22. Расщепление пространства в прямую сумму корневых подпространств.
23. Циклические подпространства (инвариантные подпространства минимальной размерности).

24. Жорданова форма матрицы. Критерий подобия матриц.
25. Многочлены от матрицы. Теорема Гамильтона–Кэли. Минимальный многочлен.
26. Блочно-диагональный аналог жордановой формы для вещественных матриц.
27. Сопряженный оператор. Существование и единственность. Матрица сопряженного оператора.
28. Нормальные операторы и нормальные матрицы. Унитарные операторы и унитарные матрицы. Эрмитовы операторы и эрмитовы матрицы.
29. Эрмитово разложение. Знакоопределенные операторы и матрицы. Квадратный корень из оператора.
30. Блочно-диагональная форма вещественной нормальной матрицы и ортогональной матрицы.
31. Сингулярные числа и сингулярные векторы матрицы. Сингулярное и полярное разложения.
32. Ортогональные дополнения ядра и образа линейного оператора (матрицы). Теорема и альтернатива Фредгольма.
33. Матричные нормы. Унитарно инвариантные нормы. Спектральная норма. Спектральный радиус и нормы.
34. Сингулярное разложение матрицы и обобщенные решения линейных систем. Псевдообратная матрица.
35. Наилучшие аппроксимации матриц на множестве матриц заданного ранга. Расстояние до множества вырожденных матриц.
36. Билинейные и полутаролинейные формы. Квадратичные формы. Приведение к каноническому виду, приведение к главным осям. Конгруэнтность и эрмитова конгруэнтность.
37. Закон инерции квадратичных форм.
38. Одновременное приведение к каноническому виду пары квадратичных форм.
39. Положительно (неотрицательно) определенные квадратичные формы. Критерий положительной определенности.
40. Приведенные уравнения гиперповерхности в  $n$ -мерном пространстве.
41. Вариационные (экстремальные) свойства собственных значений эрмитовой матрицы и сингулярных чисел произвольной матрицы.
42. Соотношения разделения для собственных значений эрмитовых матриц и сингулярных чисел произвольных матриц.