Академия наук СССР
Отдел вычислительной математики

Е.Е. Тыртышников

Тёплицевы матрицы, некоторые их аналоги и приложения

Москва 1989

Тёплицевы матрицы образуют специальный класс матриц, в которых равные элементы располагаются на любой диагонали, параллельной главной. Тем не менее они связаны со многими аналитическими и трудными вычислительными проблемами в различных областях математики и ее приложений. Этим матрицам и некоторым их аналогам посвящены известные монографии, принадлежащие У. Гренандеру и Г. Сегё, И.С. Иохвидову, Г. Хайнигу и К. Рост.

В течение последнего десятилетия получено большое число теоретических и практических результатов, относящихся к матрицам типа тёплицевых и связанных со многими прикладными вопросами (в электродинамике, геофизике, акустике, аэро- и гидродинамике, обработке изображений, автоматическом регулировании и др.). В предлагаемой книге представлены быстрые последовательные и параллельные алгоритмы нового типа, полученные на базе предложенной автором методики векторизации. Описаны некоторые приложения, в частности связанные с задачами метода дискретных особенностей.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и научных сотрудников, деятельность которых связана с решением задач линейной алгебры на ЭВМ.

Ответственный редактор
чл.-корр. АН СССР В.В. Воеводин

Предисловие

Последнее десятилетие отмечено буквально новой волной интереса к тёплицевым матрицам и различным их аналогам и обобщениям. Число публикаций достигло нескольких сотен и за это время увеличилось примерно вдвое, причем акцент в них явно сместился в сторону проблем вычислений. Фактически сейчас уже сложилось научное направление, связанное с изучением алгебраических свойств матриц типа тёплицевых и разработкой быстрых алгоритмов для них.

Может показаться, тем не менее, что речь идет о какой-то очень узкой области. Но прежде чем делать такое заключение, стоит принять во внимание, что в действительности совершенно произвольная матрица сводится к тёплицевым. К тому же, целый ряд классических вопросов, связанных с рядами Лорана, проблемой моментов, ортогональными многочленами, аппроксимацией Паде и т.д., приводит непосредственно к тёплицевым матрицам. В еще большем числе математических и прикладных задач тёплицевы матрицы возникают неявным образом.

В конкретных вычислительных задачах свойство матрицы "быть тёплицевой" зависит не только от специфики исходной проблемы, но и в сильной степени от способа ее редукции к алгебраической задаче. В общем случае, по-видимому, можно рассчитывать на то, что специфика будет проявляться неявным образом - в существовании быстро сходящихся итерационных процессов. Матрицы типа тёплицевых здесь играют роль главных частей или предобусловливателей, обеспечивающих быструю сходимость. Этим вопросам посвящен § 3; соответствующие результаты публикуются впервые.

В настоящей монографии представлены, в основном, новые результаты, полученные автором. Если попытаться дать краткое резюме, то по нашему мнению, нужно выделить следующее:

- быстрые итерационные процессы с применением матриц типа тёплицевых (§ 3);
- развитие метода тёплицева погружения и исследование обобщенных тёплицевых рангов (§ 4, 5);
- разработка новых быстрых алгоритмов с числом операций $O(n\log^2 n)$, где n - порядок матрицы (§ 8).

Выполненные исследования связаны с изучением различных типов специфики алгебраических задач, с одной стороны, и специфики алгоритмов - с другой. Последнее выходит за рамки линейной алгебры и, очевидно, имеет прямое отношение к проблеме отображения алгоритмов на параллельные вычислительные системы. По существу, выделен некоторый класс последовательных алгоритмов, которые определенным образом трансформируются в параллельные алгоритмы (§ 6).

Автору приятно выразить свою признательность В.В. Воеводину, который во многом инициировал и постоянно поддерживал эти исследования. Хотелось бы поблагодарить здесь И.К. Лифанова, общение с которым сформировало интерес автора к алгебраическим задачам метода дискретных особенностей. С особой благодарностью автор должен отметить разностороннюю помощь и участие Т.К. Тыртышниковой; надеюсь, читателю понравится элегантный левый наклон в формулах. Автор приносит искреннюю благодарность также всем, кто участвовал в обсуждении результатов этой работы и так или иначе способствовал ее появлению.

Е.Е. Тыртышников

§ I. Математические задачи и теплицевы матрицы

I.I. Основные типы матриц

В вычислительной алгебре используются самые разные матрицы специального вида. Однако к основным способам описания специфики можно отнести, по-видимому, следующие два. Во-первых, определяются "простейшие" типы матриц - обычно с помощью системы соотношений, явно или неявно выражающих элементы матриц через относительно небольшое число параметров. Во-вторых, новые типы матриц появляются в результате выполнения матричных операций с матрицами "простейших" типов.

Основные "простейшие" типы матриц, изучаемые в этой работе, - это матрицы Тёплица, Ганкеля, Коши и Вандермонда.

Матрица T с элементами $t_{ij} = t_{i-j}$ называется матрицей Тёплица, или тёплицевой. Квадратная тёплицева матрица порядка n имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \dots & t_{-n+1} \\ t_1 & t_0 & \dots & t_{-n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \dots & t_0 \end{bmatrix}.$$

Если $t_{-j} = t_{n-j}$ $(j = 1, \dots, n-1)$, то соответствующая тёплицева матрица называется циркулянтной, или циркулянтом. Если, в более общем случае, $t_{-j} = \varphi t_{n-j}$ $(j = 1, \dots, n-1)$ для некоторого числа $\varphi \neq 0$, то матрица T называется косым циркулянтом, а число φ - её коэффициентом скоса (такую матрицу T называют также φ-косым циркулянтом или φ-косоциркулянтом). Косая циркулянтная матрица с коэффициентом скоса $\varphi = -1$ - это то, что обычно называется косоциркулянтной матрицей.

Матрица H с элементами $h_{ij} = h_{i+j}$ называется матрицей Ганкеля, или ганкелевой. Квадратная ганкелева матрица порядка n имеет вид

$$H = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{n-1} & h_n & \dots & h_{2n-2} \end{bmatrix}$$

Если $h_{n+j} = h_j$ $(j = 0, 1, \dots, n-2)$, то соответствующая ганкелева матрица называется перциркулянтной. Если $h_{n+j} = \varphi h_j$ для некоторого числа $\varphi \neq 0$, то матрица H называется косым перциркулянтом с коэффициентом скоса φ.

Матрица A с элементами $a_{ij} = 1/(x_i - y_j)$ называется матрицей Коши; $\{x_i\}$, $\{y_j\}$ - некоторые совокупности чисел, причем предполагается, что $x_i \neq y_j$ для любых i, j. Квадратная матрица Коши порядка n имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_0 - y_0} & \frac{1}{x_0 - y_1} & \dots & \frac{1}{x_0 - y_{n-1}} \\ \frac{1}{x_1 - y_0} & \frac{1}{x_1 - y_1} & \dots & \frac{1}{x_1 - y_{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{x_{n-1} - y_0} & \frac{1}{x_{n-1} - y_1} & \dots & \frac{1}{x_{n-1} - y_{n-1}} \end{bmatrix}.$$

Классический пример матрицы Коши - известная своей плохой обусловленностью (экспоненциально растущей вместе с n) матрица Гильберта, для которой

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j+1}, \quad 0 \le i, j \le n-1.$$

Очевидно, матрица Гильберта одновременно является ганкелевой.

Матрица W с элементами $w_{ij} = \omega_i^j$ называется матрицей Вандермонда; $\{\omega_i\}$ - некоторая совокупность отличных от нуля чисел. Квадратная матрица Вандермонда порядка n имеет вид

$$W = \begin{bmatrix} 1 & \omega_0 & \omega_0^2 & \dots & \omega_0^{n-1} \\ 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \omega_{n-1} & \omega_{n-1}^2 & \dots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Если $\omega_l = \varepsilon^l$ $(l = 0, 1, \dots, n-1)$, где ε - некоторый первообразный корень из единицы степени n, то соответствующая матрица Вандермонда называется матрицей Фурье. При $\varepsilon = \exp\left(-\frac{2\pi}{n} i\right)$ матрица W называется матрицей прямого дискретного преобразования Фурье; при $\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi}{n} i\right)$ W называется матрицей обратного дискретного преобразования Фурье (здесь i - мнимая единица).

Заметим, что элементы квадратной матрицы Коши порядка n выражаются через $2n-1$ независимых параметров. Для матрицы Вандермонда число таких параметров равно n, а матрица дискретного преобразования Фурье полностью определяется лишь одним параметром - своим порядком. Зависимость от параметров имеет нелинейный характер. В то же время в случае квадратных тёплицевых и ганкелевых матриц порядка n число независимых параметров, определяющих их элементы, равно $2n-1$, и зависимость от них линейная. Для тёплицевой матрицы такими параметрами являются элементы первого столбца и первой строки, для ганкелевой - элементы первого столбца и последней строки.

Тёплицевы и ганкелевы матрицы - это конкретные реализации следующего достаточно общего типа специфики. Пусть класс Γ состоит из тех и только тех матриц одних и тех же размеров, элементы которых выражаются с помощью фиксированных линейных функционалов от какой-то совокупности независимых параметров. Легко видеть, что такой и только такой класс Γ можно задать, зафиксировав некоторые коэффициенты $d_{ij}^{(q)}$ $(1 \le q \le Q)$ и потребовав, чтобы в него входили матрицы с элементами a_{ij}, удовлетворяющими однородным линейным уравнениям

$$\sum_{i,j} d_{ij}^{(q)} a_{ij} = 0, \quad 1 \le q \le Q.$$

О матрицах, принадлежащих Γ будем говорить, что они имеют один и тот же тип. Если блочная матрица состоит из блоков a_{ij}, удовлетворяющих такой же системе уравнений, с той лишь разницей, что справа 0 будет обозначать нулевой блок, то будем говорить, что она имеет блочный тип Γ.

Пусть имеются два типа матриц Γ_1 и Γ_2. Будем говорить, что матрица имеет композиционный тип $\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2$, если ее можно рассматривать как блочную, имеющую блочный тип Γ_1, и при этом каждый блок имеет тип Γ_2. Несложно убедиться в том, что любой композиционный тип также описывается некоторой однородной системой линейных алгебраических уравнений.

Операция композиции типов ассоциативна. Поэтому запись $\Gamma = \Gamma_1 \ldots \Gamma_s$ не требует скобок. Матрицу типа Γ будем называть s-уровневой.

Заметим, что одна и та же матрица может считаться имеющей разные типы в зависимости от нашего отношения к информации о ее строении. В частности, s-уровневая матрица может рассматриваться и как матрица с числом уровней, отличным от s.

Операция композиции типов, вообще говоря, некоммутативна. Поэтому типы $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ порождают очень много новых типов даже при небольшом s. Однако изучение многоуровневых матриц сильно упрощается благодаря тому, что эти композиционные типы могут быть легко сведены один к другому. Здесь мы ограничимся формулировкой этого важного результата (см. /14, 17/).

Лемма о перестановках уровней. Пусть заданы типы $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ и любая σ - любая подстановка на множестве индексов $1, \ldots, s$. Тогда для композиционных типов

$$M = \Gamma_1 \ldots \Gamma_s, \quad N = \Gamma_{\sigma(1)} \ldots \Gamma_{\sigma(s)}$$

существуют матрицы перестановок P и Q, определяемые лишь размерами матриц типов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$, и такие, что для любой матрицы A типа M матрица $B = PAQ$ имеет тип N, и для любой матрицы B типа N матрица $A = P^T B Q^T$ имеет тип M. В случае квадратных матриц $Q = P^T$.

Замечание. Операцию композиции типов можно ввести и для типов, задаваемых неоднородными линейными системами / 17 /; лемма остается в силе. Однако здесь мы будем иметь дело лишь с однородными системами. Более того, всюду, если не оговорено противное, будем далее предполагать, что тип Γ определяется для квадратных матриц и единичная

матрица входит в Γ. Для определенности такой тип будем называть стандартным.

В дальнейшем мы постоянно будем иметь дело, в частности, с диагональными, ленточными, треугольными матрицами. Все они легко описываются в терминах типов, рассмотренных выше. То же относится к матрицам с одним и тем же портретом расположения нулевых элементов. Лемма о перестановках уровней позволяет, в частности, в случае разреженных матриц "улучшать" структуру разреженности.

Как правило, рассмотренные выше "простейшие" классы матриц специального вида не замкнуты относительно основных матричных операций, таких, как сложение, умножение и обращение матрицы. Однако если использовано лишь небольшое число таких операций, то в результате будут получены матрицы, также определяемые относительно небольшим числом независимых параметров. Выражение специфики в подобной форме, конечно, не конструктивно, и одна из главных тем наших дальнейших иследований будет связана с поиском компактных и удобных способов представления результатов матричных операций с "простейшими" матрицами.

Матрицы типа тёплицевых в узком смысле - это результаты выполнения матричных операций с тёплицевыми матрицами, при условии, что число операций мало по сравнению с порядком матриц.

В расширенном смысле к матрицам типа тёплицевых можно отнести также матрицы Ганкеля, Коши, Вандермонда и результаты матричных операций с ними, поскольку все эти матрицы определенным образом связаны между собой.

В приложениях нередко возникают матрицы, представимые суммой двух матриц - тёплицевой и ганкелевой. Такие матрицы называются тёплиц-ганкелевыми.

Мы будем использовать также такие матричные операции, как адамарово (шуровское) произведение матриц и кронекерово (прямое) произведение. Напомним, что адамаровым произведением матриц $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ одних и тех же размеров называется матрица $C = [c_{ij}]$ тех же размеров, где $c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$ для всех i, j; для адамарова произведения используется обозначение $C = A \circ B$. Кронекеровым произведением матриц A и B называется матрица, имеющая следующее блочное строение:

$$A \times B \equiv [a_{ij} B].$$

Матрицей типа Коши будем называть адамарово произведение матрицы Коши и некоторой матрицы, ранг которой мал по сравнению с порядком. Элементы такой матрицы имеют вид

$$a_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{r} \alpha_{ik} \beta_{kj}}{x_i - y_j}, \quad 0 \le i, j \le n-1,$$

где $r \ll n$. Мы будем рассматривать также обобщенные матрицы типа Коши, в которых допускается равенство $x_i = y_i$; при этом соответствующий числитель обязан быть нулевым, а элемент a_{ii} определяется отдельно (произвольным образом).

I.2. Матрицы, связанные с рядами Лорана

Произвольному ряду Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k \qquad (I.2.I)$$

естественным образом ставится в соответствие бесконечная тёплицева матрица

$$F = [a_{k-l}]_{kl=-\infty}^{\infty}. \qquad (I.2.2)$$

Именно такие матрицы рассматривались в работах Тёплица / I09 /, давшего имя матрицам такого типа. В частности, Тёплиц доказал, что если ряд $f(z)$ сходится в кольце, содержащем единичную окружность, то спектр для F совпадает с множеством значений, принимаемых $f(z)$ при $|z| = 1$.

При $|z| = 1$ ряд (I.2.I) является рядом Фурье функции $f(z)$. Обозначим через W множество абсолютно сходящихся рядов Фурье. Легко видеть, что формально определяемые сумма и произведение таких рядов остаются в W. Множество W обладает структурой коммутативного кольца с единицей $e(z) = +0 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^0 + 0 \cdot z + \ldots$ Ряд $f^{-1}(z) \in W$ называется обратным к $f(z)$, если $f(z) f^{-1}(z) = e(z)$. Известная теорема Винера о делении на абсолютно сходящийся ряд /10, 23 / утверждает, что если $f(z)$ не обращается в нуль при $|z| = 1$, то ряд $f^{-1}(z)$ существует и является рядом Фурье

функции $1/f(z)$. В этом случае для $f(z)$ имеет место факторизация

$$f(z) = f_-(z) f_+(z), \qquad (I.2.3)$$

где

$$f_-(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} a_k^{(-)} z^k \in W, \qquad (I.2.4)$$

$$f_+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(+)} z^k \in W. \qquad (I.2.5)$$

Вследствие (I.2.3) имеем

$$f^{-1}(z) = f_-^{-1}(z) f_+^{-1}(z) = f_+^{-1}(z) f_-^{-1}(z). \qquad (I.2.6)$$

Все перечисленные выше свойства операций с рядами находят отражение в свойствах соответствующих операций с бесконечными матрицами вида (I.2.2). Безотносительно каких-либо рядов мы можем рассматривать бесконечные матрицы

$$A = [a_{ij}]_{ij=-\infty}^{\infty}; \qquad (I.2.7)$$

операции сложения и умножения определяются естественным образом, причем умножать разрешается лишь такие матрицы, для которых сходятся ряды, представляющие компоненты их произведения. В такой постановке для умножения даже ассоциативность не имеет места, поскольку существование произведения нескольких матриц может зависеть от порядка выполнения парных умножений. Поэтому множество M рассматриваемых матриц вида (I.2.7) разумно сузить; будем считать, например, что рассматриваются только такие матрицы (I.2.7), для которых ряды

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{ik}|, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{kj}|$$

сходятся при всех i, j и их суммы ограничены равномерно по i, j. Операция умножения определена для любой пары матриц из M и является ассоциативной. Следовательно, в силу теоремы Винера о делении на абсолютно сходящийся ряд. для любой обратимой бесконечной тёплицевой матрицы из M обратная матрица также является бесконечной тёплицевой. Далее, вследствие соотношений (I.2.3)-(I.2.6) любая обратимая бесконечно тёплицева матрица F из M, как и обратная к ней, представима в виде произведения двух бесконечных тёплицевых верхней и нижней треугольных матриц из M :

$$F = F_- F_+ = F_+ F_- , \tag{I.2.8}$$

$$F^{-1} = F_-^{-1} F_+^{-1} = F_+^{-1} F_-^{-1} . \tag{I.2.9}$$

Легко видеть, что любые две бесконечные тёплицевы матрицы из M коммутируют.

Заметим, что бесконечная матрица вида (I.2.7) называется верхней или нижней треугольной, если для некоторого l $a_{ij} = 0$ соответственно при $i-j>l$ или при $i-j<l$. Диагональ $i-j=l$ будем называть граничной. Главная даигональ отвечает $l=0$ и даже для обратимой бесконечной треугольной матрицы может быть нулевой.

Обозначим через Δ_+ и Δ_- соответственно множества всех бесконечных верхних и нижних треугольных матриц, не принимая во внимание, входят ли они в M. В отличие от общего случая бесконечных матриц, произведение любых двух матриц из Δ_+ (или из Δ_-) существует и также принадлежит Δ_+ (или Δ_-), поскольку его компоненты выражаются лишь конечными суммами. Кроме того, любая матрица из Δ_+ (или из Δ_-) с ненулевой граничной диагональю является обратимой (при этом для матрицы из M обратная матрица не обязательно принадлежит M). Следовательно, любая ненулевая бесконечная тёплицева треугольная матрица обратима (возможно, не будучи обратимой в M).

Легко видеть, что множества бесконечных тёплицевых верхних и нижних треугольных матриц замкнуты относительно операций сложения, умножения и обращения ненулевой матрицы. Для каждого из этих множеств выполняются все аксиомы поля.

Часто с рядом (I.2.I) сопоставляется также полубесконечная тёплицева матрица

$$A = \left[a_{i-j} \right]_{ij=0}^{\infty} . \tag{I.2.10}$$

Теперь условие $f(z) \neq 0$ при $|z|=1$ необходимо и достаточно лишь для односторонней обратимости матрицы A, отвечающей ряду $f(z) \in W$. Критерием обратимости слева, справа или с двух сторон является положительность, отрицательность или равенство нулю приращения $\arg f(e^{i\varphi})$ при изменении φ от 0 до 2π.

Наряду с матрицами (I.2.I0) естественно ввести в рассмотрение полубесконечные матрицы общего вида:

$$A = \left[a_{ij} \right]_{ij=0}^{\infty} \tag{I.2.II}$$

Будем считать, что ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{ik}|, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_{kj}|$$

сходятся абсолютно и ограничены равномерно по i, j. Множество таких матриц обозначим через N.

Полубесконечная матрица называется верхней (нижней) треугольной, если все ее элементы ниже (выше) главной диагонали $i-j=0$ равны нулю. Такие матрицы можно рассматривать безотносительно к N, поскольку операции сложения и умножения здесь всегда выполнимы и сохраняют треугольный вид. В данном случае обратимость равносильна тому, что все элементы главной диагонали отличны от нуля. Обратная матрица тоже сохраняет треугольный вид (но не обязательно принадлежит N).

При сложении, умножении или обращении полубесконечных тёплицевых треугольных матриц результат сохраняет тёплицевость и треугольность. В отличие от случая бесконечных тёплицевых матриц, ненулевая полубесконечная тёплицева треугольная матрица может и не быть обратимой. Полубесконечные тёплицевы треугольные матрицы одного наименования образуют коммутативное кольцо с единицей. В общем случае полубесконечные тёплицевы матрицы не коммутируют (в отличие от бесконечных тёплицевых матриц).

Как видим, бесконечные и полубесконечные тёплицевы матрицы обладают, в целом, различными свойствами. В частности, матрица, обратная к полубесконечной тёплицевой матрице, вообще говоря, будет не тёплицевой. Однако обратимая (в N) полубесконечная тёплицева матрица всегда может быть представлена произведением двух полубесконечных тёплицевых треугольных матриц: верхней и нижней (но не нижней и верхней!). Этот факт мгновенно вытекает из разложения $F = F_- F_+$ соответствующей тому же ряду бесконечной тёплицевой матрицы F. Матрица, обратная к полубесконечной тёплицевой матрице, представима произведением двух полубесконечных тёплицевых треугольных матриц - нижней и верхней. Собственно, на этом и основан так называемый метод Винера-Хопфа для решения уравнений $Au = f$, где A - матрица вида (I.2.I0); эти вопросы подробно освещены в работе /23/.

В приложениях особенно часто приходится иметь дело с какими-либо семействами конечных тёплицевых матриц. Типичным можно считать рассмотрение семейства матриц

$$A_n = [a_{i-j}]_{ij=0}^{n}, \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad \text{(I.2.I2)}$$

вложенных в полубесконечную тёплицеву матрицу A, отвечающую ряду (I.2.I).

В 20-х годах Г. Сегё изучил распределение собственных значений матриц A_n вида (I.2.I2), составленных из коэффициентов Фурье вещественной ограниченной интегрируемой по Лебегу на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$, т.е.

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x)\, dx, \quad k = 0, \pm 1, \ldots \qquad \text{(I.2.I3)}$$

Ясно, что для любого n матрица A_n эрмитова и поэтому имеет вещественные собственные значения

$$\lambda_0^{(n)} \le \lambda_1^{(n)} \le \ldots \le \lambda_n^{(n)}.$$

Согласно теореме Г. Сегё (см. / 24 /), если $m \le f(x) \le M$, где m, M - конечные точные нижняя и верхняя грани функции $f(x)$, то для любой непрерывной на отрезке $[m, M]$ функции

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} F(\lambda_j^{(n)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(f(x))\, dx. \qquad \text{(I.2.I4)}$$

Это означает, что последовательности

$$\left\{\lambda_{j-1}^{(n)}\right\}_{j=1}^{n+1}, \qquad \left\{f\left(-\pi + \frac{2j\pi}{n+2}\right)\right\}_{j=1}^{n+1}$$

при $n \to \infty$ являются равнораспределенными (в соответствии с теорией Г. Вейля). Например, если

$$f(x) \equiv a_0 + \bar{a}_1 e^{-ix} + a_1 e^{ix} \equiv a_0 - \lambda \cos(x - \beta),$$

то при $\lambda \ne 0$ собственные значения матрицы A_n в точности равны $f\left(\beta + \frac{j\pi}{n+2}\right)$, $j = 1, \ldots, n+1$ / 24 /.

Теореме Г. Сегё сопутствуют многочисленные аналоги и обобщения. Если функция $f(x)$ принимает комплексные значения, то изучение распределения собственных значений требует, по-видимому, какой-то иной техники. Однако и в этом случае в духе теоремы Г. Сегё описывается распределение сингулярных чисел

$$b_0^{(n)} \le b_1^{(n)} \le \ldots \le b_n^{(n)}$$

матрицы A_n. Пусть $f(x)$ - комплекснозначная ограниченная интегрируемая по Лебегу на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция - представима в виде

$$f(x) = f_0(x) R_0(x),$$

где $f_0(x)$ принимает вещественные занчения, а $R_0(x)$ - непрерывная на всей оси периодическая функция с периодом 2π, причем $|R_0(x)| = 1$. Тогда, согласно теореме С. Партера / I05 /, для любой функции $F(\lambda)$, непрерывной на отрезке $[0, M]$, где $M = \sup |f(x)|$, имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} F(b_j^{(n)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(|f(x)|)\, dx.$$

1.3. Некоторые задачи для аналитических функций

Предположим, что функция $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ аналитична в круге $|z| < 1$, и рассмотрим отвечающую ей полубесконечную тёплицеву нижнюю треугольную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & & 0 & \cdots \\ a_1 & a_0 & & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

а также следующие две связанные с ней полубесконечные матрицы:

$$T = \frac{1}{2}(A + A^*), \qquad K \equiv AA^*.$$

Матрица T, очевидно, тёплицева, а K есть произведение тёплицевых нижней и верхней треугольных матриц. При этом $T_n = \frac{1}{2}(A_n + A_n^*)$ и $K_n = A_n A_n^*$ - это ведущие подматрицы порядка $n+1$ соответственно в T и K.

Приведем ниже некоторые результаты, связанные с оценкой величин

$$R(f) = \inf_{|z|<1} \operatorname{Re} f(z),$$

$$M(f) = \sup_{|z|<1} |f(z)|.$$

Обозначим через λ_n минимальное собственное значение матрицы T_n и μ_n - максимальное сингулярное число матрицы A_n (т.е. μ_n^2 - максимальное собственное значение матрицы K). Тогда справедливы следующие утверждения /24/.

1. Последовательность $\{\lambda_n\}$ монотонно не возрастает и сходится к $R(f)$.

2. $\operatorname{Re} f(z) > 0$ при $|z| < 1$ тогда и только тогда, когда матрицы T_n неотрицательно определенные при всех n. При этом либо $T_n > 0$ при всех n, либо существует $m \geq 1$ такое, что $T_n > 0$ при $n \leq m-1$ и $T_n \geq 0$ при $n \geq m$.

3. Последовательность $\{\mu_n\}$ монотонно не убывает и сходится к $M(f)$.

4. $|f(z)| < 1$ при $|z| < 1$ тогда и только тогда, когда $\mu_n \leq 1$ при всех n. При этом либо $\mu_n < 1$ при всех n, либо существует $m \geq 1$ такое, что $\mu_n < 1$ при $n \leq m-1$ и $\mu_n = 1$ при $n \geq m$.

1.4. Проблема моментов

Тригонометрическая проблема моментов формулируется следующим образом: для заданной последовательности $\{a_k\}$ комплексных чисел, таких, что $a_k = \bar{a}_{-k}$ для всех k, найти функцию распределения $\lambda(x)$, обеспечивающую равенства

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\, d\lambda(x), \qquad k = 0, \pm 1, \ldots . \tag{1.4.1}$$

Известно, что необходимым и достаточным условием существования $\lambda(x)$ является неотрицательная определенность тёплицевых матриц $A_n = [a_{i-j}]_{ij=0}^{n}$ для всех n / 24 /.

С проблемой моментов тесно связана интерпретация эрмитовых тёплицевых матриц как матриц Грама, отвечающих последовательностям векторов специального вида. Обозначим через X_{n+1} унитарное пространство размерности $n+1$, фиксируем унитарный оператор U, вектор $x \in X_{n+1}$ и рассмотрим последовательность векторов

$$x,\ Ux,\ U^2 x,\ \ldots,\ U^n x \tag{1.4.2}$$

и отвечающую ей матрицу Грама $G_n = [(U^i x, U^j x)]_{ij=0}^{n}$. В силу унитарности U матрица G_n тёплицева:

$$(U^i x, U^j x) = (U^{i-j} x, x). \tag{1.4.3}$$

Теперь возьмем произвольную эрмитову тёплицеву матрицу A_n и поставим вопрос о существовании унитарной матрицы U и вектора x таких, что $A_n = G_n$.

Обозначим через ε_j и e_j собственные значения и соответствующие ортонормированные собственные векторы матрицы U. Запишем

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n. \qquad (I.4.4)$$

Тогда должны выполняться равенства

$$a_j = \varepsilon_0^j |x_0|^2 + \varepsilon_1^j |x_1|^2 + \dots + \varepsilon_n^j |x_n|^2, \qquad (I.4.5)$$

$$|\varepsilon_j| = 1, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости поставленной задачи является неотрицательная определенность матрицы A_n.

Согласно теореме К. Каратеодори (см. / 24 /), если $\det A_n = 0$, $A_n \neq 0$, то можно считать, что $x_0 = 0$, $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$, и при этом числа $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ попарно различны; m, ε_j, $|x_j|^2$ определяются однозначно. Если $A_n > 0$, то можно считать, что $\varepsilon_0 = 1$.

Если взять эрмитов оператор H и построить матрицу Грама G для векторов $x, Hx, \dots, H^n x$, то G будет ганкелевой. В этом случае проблема существования H и x сводится к следующей степенной проблеме моментов:

$$a_j = \lambda_0^j |x_0|^2 + \lambda_1^j |x_1|^2 + \dots + \lambda_n^j |x_n|^2,$$

$$j = 0, 1, \dots, 2n-2.$$

Здесь λ_j - собственные значения искомой эрмитовой матрицы H, а x_j - коэффициенты разложения (I.4.4) по системе соответствующих ортонормированных собственных векторов e_j.

I.5. Ортогональные многочлены

Фиксируем функцию распределения $\lambda(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ с бесконечным множеством значений и рассмотрим последовательность многочленов $\varphi_n(z)$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) $\varphi_n(z) = \varphi_{0n} + \varphi_{1n} z + \dots + \varphi_{nn} z^n, \quad \varphi_{nn} > 0;$

2) $$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(e^{ix}) \overline{\varphi_m(e^{ix})} \, d\lambda(x) = \delta_{nm},$$

$$n, m = 0, 1, \dots .$$

Такая последовательность $\{\varphi_n(z)\}$ определяется однозначно по $\lambda(x)$ и называется ортонормированной системой многочленов на единичной окружности.

Многочлены $\{\varphi_n(z)\}$ непосредственно связаны с тёплицевыми матрицами $A = [a_{i-j}]_{i,j=0}^n$, составленными из коэффициентов Фурье-Стилтьеса для $\lambda(x)$; a_k имеет вид (I.4.I). В самом деле, согласно 2) имеем

$$\sum_{k=0}^{m} \overline{\varphi_{km}} \sum_{j=0}^{n} a_{k-j} \varphi_{jn} = \delta_{nm},$$

что равносильно матричному равенству

$$\begin{bmatrix} \bar\varphi_{00} & & 0 \\ \bar\varphi_{01} & \bar\varphi_{11} & \\ \dots & \dots & \\ \bar\varphi_{0n} & \bar\varphi_{1n} & \dots\ \bar\varphi_{nn} \end{bmatrix} A_n \begin{bmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} & \dots\ \varphi_{0n} \\ & \varphi_{11} & \dots\ \varphi_{1n} \\ & 0 & \dots \\ & & \varphi_{nn} \end{bmatrix} = I. \qquad (I.5.I)$$

Мы получили так называемое обратное разложение Холецкого эрмитовой положительно определенной тёплицевой матрицы A_n.

Вследствие (I.5.I) вектор

$$[\varphi_{0n}\ \ \varphi_{1n}\ \dots\ \varphi_{nn}]^T \varphi_{nn} \qquad (I.5.2)$$

есть не что иное, как последний столбец матрицы A_n^{-1}. Используя правило Крамера, можно записать $\varphi_n(z)$ как определитель некоторой тёплицевой матрицы:

$$\varphi_n(z)=c\begin{vmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & a_{-n} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots & a_{-n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_{-1} \\ 1 & z & z^2 & \dots & z^n \end{vmatrix}=$$

$$=c\begin{vmatrix} a_0 z-a_{-1} & a_{-1}z-a_{-2} & \dots & a_{-n+1}z-a_{-n} \\ a_1 z-a_0 & a_0 z-a_{-1} & \dots & a_{-n+2}z-a_{-n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}z-a_{n-2} & a_{n-2}z-a_{n-3} & \dots & a_0 z-a_{-1} \end{vmatrix}, \qquad (I.5.3)$$

$$c=(\det A_{n-1}\cdot\det A_n)^{-1/2}.$$

Далее, наряду с $\varphi_n(z)$ введем в рассмотрение также "сопряженный" многочлен

$$\varphi_n^*(z)=\bar\varphi_{nn}+\bar\varphi_{n-1\,n}z+\dots+\bar\varphi_{on}z^n\equiv z^n\bar\varphi_n(z^{-1}); \qquad (I.5.4)$$

при $|z|=1$ имеем

$$\varphi_n^*(z)=z^n\overline{\varphi_n(z)}. \qquad (I.5.5)$$

Легко видеть, что $\varphi_n(z)$ ортогонален любому многочлену меньшей степени (ниже $z=e^{ix}$):

$$\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\varphi_n(z)}\,z^k\,d\alpha(x)=0,\quad k=0,1,\dots,n-1. \qquad (I.5.6)$$

Отсюда находим

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n^*(z)\,\overline{z^{n-k}}\,d\alpha(x)=0,\quad k=0,1,\dots,n-1; \qquad (I.5.7)$$

значит, $\varphi_n^*(z)$ ортогонален любому многочлену степени k, где $1\le k\le n$.

Положим $p_n=\varphi_{nn}$, $q_n=\varphi_{on}$. Очевидно, каждое из выражений

$$\frac{1}{z}\left(p_{n+1}\varphi_{n+1}(z)-q_{n+1}\varphi_{n+1}^*(z)\right),$$

$$\frac{1}{z}\left(p_n\varphi_{n+1}(z)-q_{n+1}\varphi_n^*(z)\right)$$

представляет собой многочлен степени не выше n. Учитывая отмеченные выше свойства ортогональности для $\varphi_n(z)$ и $\varphi_n^*(z)$, заключаем, что каждый из этих двух многочленов ортогонален любому многочлену степени не выше $n-1$; следовательно, каждый из них есть кратное $\varphi_n(z)$. Непосредственно проверяется, что для первого многочлена соответствующий коэффициент равен p_n, а для второго - p_{n+1}.

Таким образом,

$$p_{n+1}\varphi_{n+1}(z)-q_{n+1}\varphi_{n+1}^*(z)=p_n z\varphi_n(z), \qquad (I.5.8)$$

$$p_n\varphi_{n+1}(z)-q_{n+1}\varphi_n^*(z)=p_{n+1}z\varphi_n(z); \qquad (I.5.9)$$

мы получили трехчленные рекуррентные соотношения для многочленов, ортогональных на единичной окружности.

В теории ортогональных многочленов важную роль играют следующие многочлены от z и $\bar w$:

$$s_n(z,w)=\begin{bmatrix}1 & z & \dots & z^n\end{bmatrix} A_n^{-1}\begin{bmatrix}1\\ \bar w\\ \dots\\ \bar w^n\end{bmatrix}. \qquad (I.5.I0)$$

Они называются полиномиальными ядрами распределения $\sigma(x)$; $s_n(z,w)$ представляет собой производящую функцию для A_n^{-1} .

Используя обратное разложение Холецкого (I.5.I), находим

$$s_n(z,w)=\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(w)}. \qquad (I.5.II)$$

Отсюда легко вывести, что для любого многочлена $g(z)$ степени не выше n выполняется равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(z,w)\,g(w)\,d\sigma(x)=g(z), \qquad w=e^{ix}. \qquad (I.5.I2)$$

Кроме того, имеют место так называемые формулы Кристоффеля-Дарбу:

$$s_n(z,w)=\frac{\varphi^*_{n+1}(w)\varphi^*_{n+1}(z)-\varphi_{n+1}(w)\varphi_{n+1}(z)}{1-\bar w z}, \qquad (I.5.I3)$$

$$s_n(z,w)=\frac{\overline{\varphi^*_n(w)}\varphi^*_n(z)-\bar w z\overline{\varphi_n(w)}\varphi_n(z)}{1-\bar w z}. \qquad (I.5.I4)$$

Эти формулы легко доказываются по индукции - с использованием трехчленных рекуррентных соотношений (I.5.8).

Согласно (I.5.I4) элементы матрицы A_n^{-1} восстанавливаются по элементам ее последнего столбца. Более того, формулы Кристоффеля-Дарбу, по существу, описывают строение матрицы A_n^{-1}. В самом деле, принимая во внимание (I.5.I0) и (I.5.I4), запишем

$$(1-z\bar w)\,s_n(z,w)=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & z & \dots & z^{n+1}\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}A_n^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & A_n^{-1}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}1 & \bar w & \dots & \bar w^{n+1}\end{bmatrix}^T=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & z & \dots & z^{n+1}\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}\bar\varphi_{nn} & \dots & \bar\varphi_{on} & 0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\varphi_{nn} & \dots & \varphi_{on} & 0\end{bmatrix}-\right. \qquad (I.5.I5)$$

$$\left.-\begin{bmatrix}0 & \varphi_{on} & \dots & \varphi_{nn}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0 & \bar\varphi_{on} & \dots & \bar\varphi_{nn}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}1 & \bar w & \dots & \bar w^{n+1}\end{bmatrix}^T,$$

откуда

$$(A_n^{-1})_{ij}=(A_n^{-1})_{i-1\,j-1}=\bar\varphi_{n-i\,n}\varphi_{n-j\,n}-\varphi_{i-1\,n}\,\varphi_{j-1\,n},$$

$$i,j=1,\dots,n. \qquad (I.5.I6)$$

Нетрудно убедиться в том, что полученные соотношения равносильны следующему матричному представлению:

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} \bar\varphi_{nn} & & & 0 \\ \bar\varphi_{n-1\,n} & \bar\varphi_{nn} & & \\ \cdots & \cdots & & \\ \bar\varphi_{0n} & \bar\varphi_{1n} & \cdots & \bar\varphi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{nn} & \varphi_{n-1\,n} & \cdots & \varphi_{0n} \\ & \varphi_{nn} & \cdots & \varphi_{1n} \\ 0 & & \cdots & \cdots \\ & & & \varphi_{nn} \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ \varphi_{0n} & 0 & & \\ \cdots & \cdots & & \\ \varphi_{n-1\,n} & \varphi_{0n} & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \bar\varphi_{0n} & \cdots & \bar\varphi_{n-1\,n} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & 0 & \bar\varphi_{0n} \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{I}.5.\mathrm{I}7)$$

Итак, матрица, обратная к теплицевой эрмитовой положительно определенной матрице, представима в виде разности двух эрмитовых матриц - положительно определенной и неотрицательно определенной, каждая из которых есть произведение двух тёплицевых треугольных матриц.

Исходя из (I.5.I3), можно получить аналогичное представление:

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} \bar\varphi_{n+1\,n+1} & & & 0 \\ \bar\varphi_{n\,n+1} & \bar\varphi_{n+1\,n+1} & & \\ \cdots & \cdots & & \\ \bar\varphi_{1\,n+1} & \bar\varphi_{2\,n+1} & \cdots & \bar\varphi_{n+1\,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{n+1\,n+1} & \varphi_{n\,n+1} & \cdots & \varphi_{1\,n+1} \\ & \varphi_{n+1\,n+1} & \cdots & \varphi_{2\,n+1} \\ 0 & & \cdots & \cdots \\ & & & \varphi_{n+1\,n+1} \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} \varphi_{0\,n+1} & & & 0 \\ \varphi_{1\,n+1} & \varphi_{0\,n+1} & & \\ \cdots & & & \\ \varphi_{n\,n+1} & \varphi_{n-1\,n+1} & \cdots & \varphi_{0\,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar\varphi_{0\,n+1} & \bar\varphi_{1\,n+1} & \cdots & \bar\varphi_{n\,n+1} \\ & \bar\varphi_{0\,n+1} & \cdots & \bar\varphi_{n-1\,n+1} \\ 0 & & & \cdots \\ & & & \bar\varphi_{0\,n+1} \end{bmatrix}. \qquad (\mathrm{I}.5.\mathrm{I}8)$$

В дальнейшем мы рассмотрим различные аналоги и обобщения формул (I.5.I7), (I.5.I8). Здесь же уделим внимание одному из обобщений, связанному с изучением биортогональной системы многочленов.

Пусть функция $f(z)$ представима рядом (I.2.I), абсолютно сходящимся при $z=1$. Будем говорить, что многочлены

$$\varphi_n(z) = \varphi_{0n} + \varphi_{1n} z + \ldots + \varphi_{nn} z^n,$$

$$\psi_m(z) = \psi_{0m} + \psi_{1m} z + \ldots + \psi_{mm} z^m, \quad \varphi_{nn} = \psi_{nn} \equiv c_n,$$

образуют биортогональную систему Сегё, если

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \varphi_n(z)\, \psi_m(\bar z)\, f(z)\, \frac{dz}{z} = \delta_{nm}.$$

Последнее равносильно соотношениям

$$\sum_{k=0}^{m} \psi_{km} \sum_{j=0}^{n} a_{k-j} \varphi_{jn} = \delta_{nm} ,$$

или матричному равенству

$$\begin{bmatrix} \psi_{00} & & \\ \psi_{01} & \psi_{11} & 0 \\ \dots & \dots & \\ \psi_{0n} & \psi_{1n} \dots & \psi_{nn} \end{bmatrix} A_n \begin{bmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} \dots & \varphi_{0n} \\ & \varphi_{11} \dots & \varphi_{1n} \\ 0 & \dots & \dots \\ & & \varphi_{nn} \end{bmatrix} = I. \qquad (I.5.19)$$

Таким образом, столбец и строка

$$[\varphi_{0n} \dots \varphi_{nn}]^T \varphi_{nn}^{-1}, \quad \psi_{nn}^{-1} [\psi_{0n} \dots \psi_{nn}]$$

являются последними столбцом и строкой в матрице A_n^{-1} .

Биортогональная система Сегё обладает следующими основными свойствами:

I) справедливы рекуррентные соотношения

$$c_{n+1} \begin{bmatrix} \varphi_{n+1}(z) \\ \overline{\psi^*_{n+1}(z)} \end{bmatrix} = c_n \begin{bmatrix} z & \varphi_{0\,n+1} \\ z\psi_{0\,n+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_n(z) \\ \overline{\psi^*_n(z)} \end{bmatrix}; \qquad (I.5.20)$$

2) для любого многочлена $g(z)$ степени не выше

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} s_n(z, w)\, g(w)\, f(z) \frac{dz}{z} = g(z), \qquad (I.5.2I)$$

где

$$s_n(z, w) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} z^i \left(A_n^{-1}\right)_{ij} \bar{w}^j = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z) \psi_k(\bar{w}); \qquad (I.5.22)$$

3) имеют место формулы Кристоффеля-Дарбу

$$s_n(z, w) = \frac{\overline{\varphi^*_{n+1}(w)}\, \psi^*_{n+1}(z) - \varphi_{n+1}(z) \psi_{n+1}(\bar{w})}{1 - z\bar{w}}, \qquad (I.5.23)$$

$$s_n(z, w) = \frac{\overline{\varphi^*_n(w)}\, \psi^*_n(z) - z\bar{w} \varphi_n \psi_n(\bar{w})}{1 - z\bar{w}}. \qquad (I.5.24)$$

От формулы Кристоффеля-Дарбу можно перейти к представлениям типа (I.5.I7), (I.5.I8) для матрицы, обратной к тёплицевой (неэрмитовой) матрице. При этом матрица A_n обязана иметь отличные от нуля ведущие миноры. В действительности это ограничение связано лишь с особенностями рассмотренного здесь подхода (см. /21,60,94/).

Заметим, что ортогональные и биортогональные системы можно вводить с помощью соотношений (I.5.I) и (I.5.I9), полагая, что матрицы A_n суть невырожденные ведущие подматрицы некоторой полубесконечной матрицы (не обязательно тёплицевой). В случае вещественных ганкелевых A_n мы получим классические ортогональные многочлены на отрезке вещественной прямой. Соответствующие формулы Кристоффеля-Дарбу будут описывать строение матрицы, обратной к ганкелевой.

I.6. Локализация корней многочленов

Пусть задан нормированный многочлен $L_n(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a$

и требуется определить, сколько его корней (с учетом кратностей) находится внутри, вне единичного круга и на единичной окружности. Искомые числа обозначим ν_+, ν_- и ν_0. Чтобы решить задачу, эти числа пытаются связать с инерцией $\mathrm{in}\, S = (\pi_+, \pi_-, \pi_0)$ некоторой эрмитовой матрицы $S = S(\alpha_n)$ (напомним, что π_+, π_- и π_0 - это число положительных, эрмитовых и нулевых собственных значений матрицы S):

В качестве S возьмем сумму двух парных произведений тёплицевых треугольных матриц:

$$S=\begin{bmatrix} 1 & & \\ \bar a_{n-1} & & 0 \\ \cdots & & \\ \bar a_0 & \bar a_1 \ldots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & \ldots & a_0 \\ & 1 & \ldots & a_1 \\ & & & \cdots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a_0 & & 0 \\ a_1 & a_0 & \\ \cdots & & \\ a_{n-1} & a_{n-2} \ldots & a_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar a_0 & \bar a_1 & \ldots & \bar a_{n-1} \\ & \bar a_0 & \ldots & \bar a_{n-2} \\ & & & \cdots \\ 0 & & & \bar a_0 \end{bmatrix}. \qquad (\mathrm{I.6.1})$$

Теорема Шура-Кона. Обозначим через ρ число пар (u, v) корней многочлена $\alpha_n(z)$, симметричных относительно единичной окружности $(|u| \neq 1, \quad \bar u = v^{-1})$. Тогда

$$\nu_\pm = \pi_\pm + \rho, \qquad \nu_0 = \pi_0 - 2\rho. \qquad (\mathrm{I.6.2})$$

Следствие. Для того чтобы все корни многочлена $\alpha_n(z)$ были расположены внутри единичного круга, необходимо и достаточно, чтобы матрица S была положительно определенной.

В случае положительно определенной S многочлен $\alpha_n(z)$ оказывается принадлежащим (с точностью до нормировки) некоторой системе многочленов, ортонормированных на единичной окружности; поэтому свойство его корней - это хорошо известное свойство корней ортогональных многочленов. При этом можно доказать, что матрица S^{-1} тёплицева (см. / I6, 99 /).

Заметим, что инерция эрмитовой матрицы может быть определена по числу перемен знака в последовательности ее ведущих миноров (см. / I2 /). Это число может быть вычислено весьма экономичным способом, учитывающим специфику матрицы S (см. / I6/).

Используя дробно-линейное преобразование, можно перевести единичную окружность в любую прямую, проходящую через нуль комплексной плоскости. Фактически теорема Шура-Кона позволяет оценить число корней на этой прямой (чтобы применить теорему, нужно сначала получить соответствующую пару многочленов). В частности, таким образом можно установить критерий устойчивости многочлена (прямая является мнимой осью). В случае вещественной оси на этом пути можно получить теорему Эрмита (см. / I6,94/).

I.7. Паде-аппроксимации

Рассмотрим формальный ряд

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots \qquad (\mathrm{I.7.1})$$

и пару многочленов

$$u(z) = u_0 + \ldots + u_m z^m, \qquad v(z) = v_0 + \ldots + v_n z^n \neq 0, \qquad (\mathrm{I.7.2})$$

обладающую следующим свойством:

$$f(z)v(z) - u(z) = \lambda z^{m+n+1} + \ldots, \qquad (\mathrm{I.7.3})$$

т.е. ряд в правой части имеет нулевые коэффициенты при z^j, где $0 \le j \le m+n$. Такая пара многочленов $u(z)$, $v(z)$ называется Паде-аппроксимацией ряда $f(z)$ типа (m, n). Если $\lambda \neq 0$ то Паде-аппроксимация называется строгой.

Для того чтобы пара многочленов (I.7.2) образовывала Паде-аппроксимацию типа (m, n), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\sum_{j=0}^{n} a_{i-j} v_j = \begin{cases} u_i, & 0 \le i \le m, \\ 0, & m < i \le m+n, \end{cases} \qquad (\mathrm{I.7.4})$$

или, в матрично-векторной интерпретации,

$$\begin{bmatrix} a_0 & & & \\ a_1 & a_0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_m & a_{m-1} & \dots & a_0 \\ a_{m+1} & a_m & \dots & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{m+n} & a_{m+n-1} & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_m \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (I.7.5)$$

Таким образом, вычисление Паде-аппроксимаций равносильно нахождению решений систем линейных алгебраических уравнений с тёплицевыми матрицами.

В случае $m=n$ находим

$$A[v_0 \dots v_n]^T = [u_n \; 0 \dots 0], \qquad (I.7.6)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \\ a_{n+1} & a_n & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n} & a_{2n-1} & \dots & a_n \end{bmatrix} \qquad (I.7.7)$$

Если матрица A невырожденная, то $u_n \neq 0$ и столбец $[v_0 \dots v_n]^T$ есть кратное первого столбца в A^{-1}.

В случае $m = n-1$ получаем

$$A[v_0 \dots v_n]^T = [0 \dots 0 \; \lambda]^T, \qquad (I.7.8)$$

где A имеет вид (I.7.6). Если A невырожденная, то $\lambda \neq 0$ и столбец $[v_0 \dots v_n]^T$ есть кратное последнего столбца в A^{-1}.

I.8. Дискретное преобразование Фурье

Под дискретным (прямым) преобразованием Фурье вектора x размерности n понимается умножение его на матрицу $F_n = [f_{kl}]_{k,l=0}^{n-1}$, где $f_{kl} = \varepsilon_n^{kl}$, $\varepsilon_n = \exp(2\pi i/n)$. Под t-мерным преобразованием Фурье порядка $(n_1 \dots n_t)$ понимается умножение вектора x на матрицу $\mathcal{F}_n = F_{n_1} \times \dots \times F_{n_t}$, $n = n_1 + \dots + n_t$. Эти действия теснейшим образом связаны с умножением на вектор тёплицевых и циркулянтных матриц.

Прежде всего напомним широко известную (см. /17/) спектральную теорему для циркулянтных матриц.

Теорема I.8.I. Для произвольной циркулянтной матрицы C_n с первым столбцом $c = [c_0 \; c_1 \dots c_{n-1}]^T$ имеет место разложение

$$C_n = n^{-1} F_n^* \operatorname{diag}(F_n c) F_n, \qquad (I.8.I)$$

где $\operatorname{diag}(\lambda)$ обозначает диагональную матрицу с диагональю, составленную из компонент вектора λ. Для произвольного столбца размерности n матрица, определяемая формулой (I.8.I), является циркулянтной.

Пусть C_ν обозначает тип циркулянтной матрицы порядка ν.

Теорема I.8.2. Для произвольной матрицы A, имеющей композиционный тип $C_{n_1} \dots C_{n_t}$, справедливо разложение

$$A = n^{-1} \mathcal{F}_n^* \operatorname{diag}(\mathcal{F}_n a) \mathcal{F}_n, \qquad (I.8.2)$$

где $n = n_1 + \dots + n_t$, $\mathcal{F}_n = F_{n_1} \times \dots \times F_{n_t}$, a - первый столбец матрицы A. В случае произвольного столбца a размерности формула (I.8.2) определяет матрицу A, имеющую тип $C_{n_1} \dots C_{n_t}$.

Теорема I.8.3 / I6 /. Пусть P - матрица перестановок, такая, что для любой матрицы A типа $C_{n_1} \dots C_{n_t}$ матрица $P^T A P$ имеет тип C_n, $n = n_1 + \dots + n_t$. Такая матрица P существует в том и только в том случае, когда числа $n_1, \dots, n_t$ попарно взаимно просты.

Любую тёплицеву матрицу порядка n можно рассматривать как ведущую подматрицу некоторой циркулянтной матрицы порядка N, где N можно выбрать любым, удовлетворяющим неравенству $N \geq 2n-1$. Следовательно, умножение на вектор тёплицевой матрицы порядка n сводится к умножению на вектор циркулянтной матрицы порядка N, а последнее - к выполнению трех преобразований Фурье порядка N. Произвол в выборе N позволяет взять его равным степени двойки; при этом дискретное преобразование Фурье можно реализовать, например, по быстрому алгоритму Кули-Тьюки или даже еще более эффективным способом - на основе так называемой сплит-редукции. В последнем случае требуется выполнить $(1/3) N \log_2 N$ комплексных умножений и $N \log_2 N$ комплексных сложений-вычитаний (при обработке комплексного вектора). Если исходный вектор вещественный или обладает симметрией определенного типа, то число операций может быть снижено вдвое. Эти вопросы подробно изложены в / I7 /.

Операция умножения вектора на тёплицеву (циркулянтную) матрицу часто называется апериодической (периодической) сверткой. Мы видим, что апериодическая свертка сводится к периодической, а обе они - к дискретным преобразованиям Фурье. Последнее, в свою очередь, может быть редуцировано к апериодической свертке.

Действительно, запишем (см. / 9, I7 /)

$$f_{kl} = \varepsilon_n^{\frac{k^2+l^2-(k-l)^2}{2}} = \varepsilon_{2n}^{k^2}\,\varepsilon_{2n}^{-(k-l)^2}\,\varepsilon_{2n}^{l^2}; \qquad (I.8.3)$$

следовательно,

$$F_n = N_n T_n N_n, \qquad (I.8.4)$$

где

$$T_n = \left[\varepsilon_{2n}^{-(k-l)^2}\right] \text{ - тёплицева матрица,}$$

$$N_n = \begin{bmatrix} \varepsilon_{2n}^{0^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_{2n}^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \text{ - диагональная матрица.}$$

В силу (I.8.4) дискретное преобразование Фурье любого порядка можно свести к апериодической свертке, а затем - к преобразованию Фурье порядка, равного степени двойки. В случае простого n известен и другой способ редукции - к апериодической свертке порядка $n-1$ (см. / 9, I7 /).

Различные алгоритмы дискретного преобразования Фурье можно записать в виде последовательности инструкций

$$r_k = \alpha_k r_{i(k)} + \beta_k r_{j(k)}, \qquad i(k) < j(k) < k,$$

$$k = n+1,\ n+2,\ \ldots,\ n+N;$$

$r_0, \ldots, r_{n-1}$ - компоненты исходного вектора. Обычно алгоритм, представленный таким образом, называется линейным вычислением; число N называется его сложностью. Для N получены различные оценки вида (см. / I /).

$$N \geq \gamma \log_2 |\det F_n|,$$

где γ зависит от величин α_k, β_k. Поскольку $|\det F_n| = n^{n/2}$, отсюда выводим нижнюю оценку

$$N \geq \frac{\gamma}{2} n \log_2 n.$$

Ее недостаток - зависимость γ от α_k, β_k; таким образом, вопрос о нижней оценке для произвольного линейного вычисления, реализующего дискретное преобразование Фурье, до сих пор не решен. Заметим, что сложность этой задачи по порядку такая же, как сложность апериодической или периодической свертки.

§ 2. Примеры вычислительных задач

2.I. Интегральные уравнения специального вида

При решении интегральных уравнений возникают, как правило, плотные матрицы. Однако ядра, в основном, имеют весьма специальный вид, и это дает повод рассчитывать на то, что и матрицы будут обладать какой-либо спецификой. В действительности же строение матриц в сильной степени зависит как от вида области интегрирования, так и от используемого способа редукции к алгебраической задаче.