как ведущую подматрицу некоторой циркулянтной матрицы порядка N, где N можно выбрать любым, удовлетворяющим неравенству $N \geq 2n-1$. Следовательно, умножение на вектор тёплицевой матрицы порядка n сводится к умножению на вектор циркулянтной матрицы порядка N, а последнее - к выполнению трех преобразований Фурье порядка N. Произвол в выборе N позволяет взять его равным степени двойки; при этом дискретное преобразование Фурье можно реализовать, например, по быстрому алгоритму Кули-Тьюки или даже еще более эффективным способом - на основе так называемой сплит-редукции. В последнем случае требуется выполнить $(1/3) N \log_2 N$ комплексных умножений и $N \log_2 N$ комплексных сложений-вычитаний (при обработке комплексного вектора). Если исходный вектор вещественный или обладает симметрией определенного типа, то число операций может быть снижено вдвое. Эти вопросы подробно изложены в / I7 /.

Операция умножения вектора на тёплицеву (циркулянтную) матрицу часто называется апериодической (периодической) сверткой. Мы видим, что апериодическая свертка сводится к периодической, а обе они - к дискретным преобразованиям Фурье. Последнее, в свою очередь, может быть редуцировано к апериодической свертке.

Действительно, запишем (см. / 9, I7 /)

$$f_{kl} = \varepsilon_n^{\frac{k^2+l^2-(k-l)^2}{2}} = \varepsilon_{2n}^{k^2}\, \varepsilon_{2n}^{-(k-l)^2}\, \varepsilon_{2n}^{l^2}; \qquad (I.8.3)$$

следовательно,

$$F_n = N_n T_n N_n, \qquad (I.8.4)$$

где

$$T_n = \left[\varepsilon_{2n}^{-(k-l)^2} \right] \text{ - тёплицева матрица,}$$

$$N_n = \begin{bmatrix} \varepsilon_{2n}^{0^2} & & 0 \\ & \cdot\ \cdot & \\ 0 & & \varepsilon_{2n}^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \text{ - диагональная матрица.}$$

В силу (I.8.4) дискретное преобразование Фурье любого порядка можно свести к апериодической свертке, а затем - к преобразованию Фурье порядка, равного степени двойки. В случае простого n известен и

другой способ редукции - к апериодической свертке порядка $n-1$ (см. / 9, I7 /).

Различные алгоритмы дискретного преобразования Фурье можно записать в виде последовательности инструкций

$$r_k = \alpha_k r_{i(k)} + \beta_k r_{j(k)}, \qquad i(k) < j(k) < k,$$

$$k = n+1,\ n+2,\ \ldots,\ n+N;$$

$r_0, \ldots, r_{n-1}$ - компоненты исходного вектора. Обычно алгоритм, представленный таким образом, называется линейным вычислением; число N называется его сложностью. Для N получены различные оценки вида (см. / I /).

$$N \geq \gamma \log_2 |\det F_n|,$$

где γ зависит от величин α_k, β_k. Поскольку $|\det F_n| = n^{n/2}$, отсюда выводим нижнюю оценку

$$N \geq \frac{\gamma}{2} n \log_2 n.$$

Ее недостаток - зависимость γ от α_k, β_k; таким образом, вопрос о нижней оценке для произвольного линейного вычисления, реализующего дискретное преобразование Фурье, до сих пор не решен. Заметим, что сложность этой задачи по порядку такая же, как сложность апериодической или периодической свертки.

§ 2. Примеры вычислительных задач

2.I. Интегральные уравнения специального вида

При решении интегральных уравнений возникают, как правило, плотные матрицы. Однако ядра, в основном, имеют весьма специальный вид, и это дает повод рассчитывать на то, что и матрицы будут обладать какой-либо спецификой. В действительности же строение матриц в сильной степени зависит как от вида области интегрирования, так и от используемого способа редукции к алгебраической задаче.

Пусть интегральное уравнение имеет вид

$$u(y)+\int\limits_G K(y,x)\,u(x)\,d\sigma_x = f(y), \qquad (2.\mathrm{I}.\mathrm{I})$$

и предположим, что ядро $K(y,x)$ инвариантно относительно некоторого преобразования R :

$$K(Ry, Rx) = K(y,x), \qquad (2.\mathrm{I}.2)$$

а область интегрирования G представлена в виде суммы своих непересекающихся частей:

$$G = G_0 \cup RG_0 \cup \ldots \cup R^{n-1} G_0 . \qquad (2.\mathrm{I}.3)$$

Решение $u(x)$ ищем в виде

$$u(x) = \sum_{j=0}^{N-1} u_j \varphi_j(x); \qquad (2.\mathrm{I}.4)$$

предположим, что $N = nm$ и функции $\varphi_{km}(x), \varphi_{km+1}(x), \ldots, \varphi_{km+m-1}(x)$ имеют носитель, сосредоточенный на G_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, причем

$$\varphi_{(k+1)m+j}(Rx) = \varphi_{km+j}(x), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1. \qquad (2.\mathrm{I}.5)$$

Далее, подставим (2.I.4) в (2.I.I) и потребуем, чтобы равенство (2.I.I) выполнялось в точках y_i, таких, что

$$y_{(k+1)m+j} = R y_{km+j}, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (2.\mathrm{I}.6)$$

Тогда (2.I.I) редуцируется к линейной алгебраической системе

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_{ij} u_j = f_i , \quad i = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad (2.\mathrm{I}.7)$$

где

$$a_{ij} = \varphi_j(y_i) + \int\limits_{R^l G_0} K(y_i, x)\,\varphi_j(x)\,d\sigma_x ,$$

$$f_i = f(y_i) .$$

В силу (2.2.2)-(2.2.6)

$$a_{i+lm,\, j+lm} = a_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \ldots, m-1, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (2.\mathrm{I}.8)$$

Таким образом, матрица коэффициентов системы (2.I.7) является блочно-тёплицевой; ее блочный порядок равен n , а порядок блоков равен m.

Аналогичные построения могут быть выполнены и по отношению к интегральному уравнению I-го рода. Довольно часто при решении алгебраической задачи приходится учитывать какие-либо дополнительные предположения; в частности, это относится к тем случаям, когда используются методы регуляризации.

Примеров конкретных интегральных уравнений и соответствующих алгебраических систем специального вида можно привести очень много. В электростатике используется, например, следующее уравнение Лава[x)] (см. /87/):

$$u(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{d}{d^2 + (x-t)^2}\, u(t)\, dt = 1 .$$

Если ввести равномерную сетку

$$-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$$

---

x) Формально возможен и такой перевод: "Love's equation" - "уравнение любви".

и положить

$$y_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2},$$

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1, & x_{j-1} \le x < x_j, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

то матрица коэффициентов для (2.2.7) будет тёплицевой.

Если равномерность сетки нарушается для небольшого (по сравнению с n) числа узлов, то получится матрица, составленная из тёплицевых прямоугольных блоков. Такие матрицы будем называть мозаично-тёплицевыми.

Приведем еще один пример, в котором тоже появляется мозаично-тёплицева матрица. Пусть интегральное уравнение имеет вид

$$\int_0^L k(\alpha y - \beta x)\, u(x)\, dx = f(y), \quad 0 \le y \le L,$$

где α, β - положительные постоянные, и предположим, что для его решения формируется алгебраическая система

$$\frac{L}{n} \sum_{j=0}^{n-1} k(\alpha x_i - \beta x_j)\, u_j = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Будем считать, что числа α, β целые и малы по сравнению с n. Матрица $A = [a_{ij}]_{ij=0}^{n-1}$, отвечающая полученной системе, обладает следующим свойством:

$$a_{ij} = a_{i'j'}, \quad \text{если} \quad \alpha i - \beta j = \alpha i' - \beta j'.$$

В случае тёплицевых матриц $\alpha = \beta = 1$, т.е. это свойство можно считать обобщением тёплицевости.

Введем матрицы перестановок P и Q, отвечающие соответственно перестановкам

$$0, \alpha, 2\alpha, \dots, \left[\frac{n}{\alpha}\right]\alpha, 1, \alpha+1, 2\alpha+1, \dots;$$

$$0, \beta, 2\beta, \dots, \left[\frac{n}{\beta}\right]\beta, 1, \beta+1, 2\beta+1, \dots.$$

Тогда матрица PAQ^T будет мозаично-тёплицевой; число ее тёплицевых прямоугольных блоков не превосходит $(\alpha+1)\times(\beta+1)$. Доказательство проводится непосредственно.

Мы рассмотрели здесь некоторые типы специфики, относящейся к "внешнему" виду матриц. Однако специфика может быть "внутренней" и заключаться в существовании быстро сходящихся итерационных процессов (см. § 3), в которых в качестве предобусловливателей используются матрицы, обладающие "внешней" спецификой. Сказанное имеет отношение к широкому классу интегральных уравнений с различными типами особенностей; выбор предобусловливателя обычно связывается с выделением в уравнении главной части, включающей особенность. В § 3 мы рассмотрим эту ситуацию более подробно в случае сингулярных интегральных уравнений. В следующих разделах этого параграфа, кроме последнего, остановимся на примерах конкретных уравнений; в последнем разделе рассказывается о задачах статистики.

2.2. Плоские волноводные решётки

Рассмотрим задачу о возбуждении плоской конечной волноводной решётки с произвольными расстояниями между волноводами. В соответствующей алгебраической задаче матрица коэффициентов будет тёплиц-ганкелевой (блочной).

Пусть имеется N плоских полубесконечных волноводов, имеющих одинаковую ширину l; расстояния между соседними волноводами равны l_i $(i = 1, \dots, N-1)$, за волноводами располагаются бесконечные фланцы. Волноводы занимают области $D_1, D_2, \dots, D_N$, а излучение происходит в однородное полупространство D_0. Границы волноводов $\Gamma_j = \{x \le 0,\ z = (j-1)l + \nu_j$ или $z = jl + \nu_j\}$, где $\nu_j = l_1 + l_2 + \dots + l_{j-1}$ $(j = 1, \dots, N)$ - идеально проводящие. Граница полупространства $\Gamma_0 = \{x = 0,\ -\infty < z < \infty\}$ состоит из двух частей: суммы $\Gamma_0^{(1)}$ открытых концов волноводов и суммы $\Gamma_0^{(2)}$ идеально проводящих фланцев. Возбуждается m-й волновод нормальной волной единичной амплитуды

$$u_{n_0}(x, z) = e^{i\mu_{n_0} x} \cos\left(n_0 \pi \left(z - (m-1)l - \nu_{m-1}\right)/l\right),$$

$$\mu_{n_0} = \sqrt{k^2 - (n_0 \pi / l)^2}$$

Рассматривается случай магнитной поляризации; поле во времени изменяется по закону $e^{-i\omega t}$. Тогда электромагнитное поле выражается через одну скалярную функцию $u(x, z)$:

$$\vec{H} = (0, H_y, 0), \qquad \vec{E} = (E_x, 0, E_z),$$

$$H_y = u(x, z), \qquad E_x = (-i/\omega\varepsilon)\cdot \partial u/\partial z,$$

$$E_z = (i/\omega\varepsilon)\cdot \partial u/\partial x.$$

Функция $u(x, z)$ удовлетворяет (см. /27/):

а) уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u\big|_M = 0, \quad M \in D_0 + \bigcup_{j=1}^{N} D_j, \quad k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu};$$

б) граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_p = 0, \quad p \in \Gamma_0^{(2)} + \bigcup_{j=1}^{N} \Gamma_j$$

(n - нормаль к границам Γ_0 , Γ_j);

в) условию сопряжения

$$[u(p)] = [\partial u(p)/\partial x] = 0, \quad p \in \Gamma_0^{(1)};$$

г) условию излучения в полупространство D_0 :

$$u \sim O(1/\sqrt{r}), \quad \partial u/\partial r - iku \sim o(1/\sqrt{r}),$$

$$r = \sqrt{x^2 + z^2} \longrightarrow \infty;$$

д) парциальным условиям излучения внутри волноводов $(M \in D_j)$

$$\int_{(j-1)l+\nu_j}^{jl-\nu_j} (\partial u/\partial z + i\mu_n u)\cos(n\pi(z-(j-1)l-\nu_j)/l)\,dz =$$

$$= \begin{cases} 0, & j \neq m, \\ \Delta_{nn_0}, & j = m, \end{cases}$$

где

$$\Delta_{nn_0} = \begin{cases} 0, & n = n_0, \\ il\mu_{n_0} e^{i\mu_{n_0} x}, & n = n_0 \neq 0, \\ 2ikle^{ikx}, & n = n_0 = 0. \end{cases}$$

Краевая задача а)-д) для $u(x, z)$ редуцируется к системе интегральных уравнений I рода относительно поля на раскрывах волноводов (методика описана в /58/:

$$\sum_{j=1}^{N} \int_0^l \varphi_j(x_0) K_{jj'}(x, x_0)\,dx_0 = F_{mj'}(x),$$

$$j' = 1, \ldots, N, \qquad 0 < x < l,$$

где

$$K_{jj'}(x, x_0) = \begin{cases} K(x, x_0) + M_{jj'}(x, x_0), & j = j', \\ M_{jj'}(x, x_0), & j \neq j', \end{cases}$$

$$K(x, x_0) = i/kl - 1/\pi \cdot \ln\left|4\sin(\pi(x-x_0)/2l)\sin(\pi(x+x_0)/2l)\right| +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 - (kl/\pi)^2}} - \frac{1}{n}\right)\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x_0}{l}.$$

$$M_{jj'}(x, x_0) = \frac{i}{2} H_0^{(1)}\left(k\,|x - x_0 + (j'-j)l + \vartheta_{j'} - \vartheta_j|\right),$$

$$F_{mj'}(x) = \begin{cases} 0, & j' \neq m, \\ -2\cos(n_0 \pi x / l), & j' = m, \end{cases}$$

$$\varphi_j(x_0) = \partial u / \partial x_0 \Big|_{\Gamma_0^{(j)}}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Ядро имеет логарифмическую особенность, и для решения этой системы можно использовать метод саморегуляризации /56/.

Однако, прежде чем сводить систему интегральных уравнений к алгебраической системе, заметим, что ядро может быть представлено в виде суммы

$$K(x, x_0) = K'(x, x_0) + K''(x, x_0),$$

где первое слагаемое зависит только от разности аргументов x и x_0, а второе - от суммы, а именно:

$$K'(x, x_0) = i/kl - 1/\pi \ln|2\sin(\pi(x - x_0)/2l)| + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 - (kl/\pi)^2}} - \frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi(x - x_0)}{2l};$$

$$K''(x, x_0) = -\frac{1}{\pi}\ln|2\sin(\pi(x + x_0)/2l)| + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 - (kl/\pi)^2}} - \frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi(x + x_0)}{2l}.$$

Отрезок интегрирования разобьем на M одинаковых отрезков и будем считать неизвестные функции постоянными на этих отрезках. Для определения постоянных естественным образом возникает линейная алгебраическая система. При естественной нумерации постоянных, соответствующей нумерации волноводов и движению по отрезку интегрирования слева направо, матрица оказывается представимой в виде суммы двух двухуровневых матриц: типа $G_M T_N$ и типа $D_M H_N$ (символами D, T, H, G обозначены типы диагональной, тёплицевой, ганкелевой и общего вида матриц; индекс указывает порядок). Согласно лемме о перестановках уровней с помощью перестановки строк и столбцов матрицы типов $G_M T_N$ и $D_M H_N$ преобразуются соответственно в матрицы типов $T_N G_M$ и $H_N D_M$. Таким образом, нужно найти решение системы с матрицей $A = A_T + A_H$, представленной суммой двух матриц: блочно-тёплицевой A_T и блочно-ганкелевой A_H. Кроме того, матрица A симметрична (но не эрмитова), блоки в A_H имеют диагональный, и даже скалярный вид.

2.3. Плоские задачи аэродинамики

Рассмотрим кусочно-гладкую простую незамкнутую кривую L, заданную параметрически:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad 0 \le t \le \tau, \tag{2.3.1}$$

и следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\int_0^{\tau} \frac{(x(t_0) - x(t))\,x'(t_0) + (y(t_0) - y(t))\,y'(t_0)}{(x(t_0) - x(t))^2 + (y(t_0) - y(t))^2}\,\varphi(t)\,dt = f(t_0). \tag{2.3.2}$$

Это уравнение возникает при изучении обтекания непроницаемого профиля, находящегося в потоке идеальной несжимаемой жидкости (см. /7, 45/). Предполагается, что L является проекцией на плоскость Oxy. Профиль моделируется вихревым слоем интенсивности $\gamma(t)$ в точке с координатами $x(t)$, $y(t)$, $0 \le t \le \tau$; тогда скорость, возмущенная профилем в любой точке (x_0, y_0) плоскости Oxy, определяется по формуле /7/

$$\vec{V}(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau} \frac{(y_0 - y(t))\vec{e}_x - (x_0 - x(t))\vec{e}_y}{(x_0 - x(t))^2 + (y_0 - y(t))^2} \varphi(t)\, d(t),$$

где $\varphi(t) = \gamma(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$; $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ - орты. Вне профиля это поле потенциально, на бесконечности возмущенные скорости стремятся к нулю. Записывая условие непротекания на профиле, мы и приходим к уравнению (2.3.2).

В стационарных задачах предполагается, что с профиля не сходит вихревая пелена. Если на профиль набегает однородный стационарный поток с вектором скорости (p, q), то правая часть в (2.3.2) имеет вид

$$f(t_0) = 2\pi\left(q x'(t_0) - p y'(x_0)\right). \tag{2.3.3}$$

При решении нестационарных задач, со сходом вихревой пелены с профиля, обычно возникает последовательность уравнений (2.3.2) с различными правыми частями, в которых последовательно учитываются скорости, возмущаемые имеющейся в данный момент пеленой свободных вихрей.

При решении сингулярного интегрального уравнения (2.3.2) необходимо указывать те или иные дополнительные условия, выделяющие класс функций, в котором ищется решение. В аэродинамике в случае гладкого незамкнутого контура L обычно рассматриваются три вида обтекания: циркуляционное, бесциркуляционное и безударное; это отвечает поиску решений индекса $\varkappa$ = 0, I и -I. В каждом из трех случаев решение ищется в классе абсолютно интегрируемых функций с известными особенностями при $t = 0$ и $t = \tau$. При изучении профилей с закрылком возникают решения, имеющие также логарифмическую особенность во внутренней точке, т.е. при $0 < t < \tau$. Представляют интерес также так называемые сингулярные решения, отвечающие эжектированию потока в одной или нескольких точках профиля (см. / 7 /).
Таким образом, уравнение (2.3.2) связано с довольно широким кругом задач аэродинамики.

Мы рассмотрим здесь алгебраические системы, к которым приводятся различные задачи для уравнения (2.3.2) с помощью так называемого метода дискретных вихрей / 7, 8 /. Вопросы сходимости подробно освещены в / 7 /; предмет наших исследований - специфика этих алгебраических систем и быстрые алгоритмы для них.

Согласно методу дискретных вихрей на отрезке $[0, \tau]$ вводятся две равномерные сетки с шагом

$$h = \frac{\tau}{n+1},$$

одна - вихревых точек $t_j = jh$, другая - расчетных точек $t_{0j} = t_j + h/2$ $(j = 0, 1, \dots)$. Обозначим через $k(t_0, t)$ ядро интегрального уравнения (2.3.2). Предположим, что L - гладкий незамкнутый контур. Тогда возникают следующие системы линейных алгебраических уравнений (см. / 45 /:

$$\sum_{j=1}^{n} k(t_{0i}, t_j) h \varphi_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n \tag{2.3.4}$$

(циркуляционное обтекание);

$$\sum_{j=1}^{n} k(t_{0i}, t_j) h \varphi_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} h \varphi_j = C \tag{2.3.5}$$

(бесциркуляционное обтекание);

$$\varphi_0 + \sum_{j=1}^{n} k(t_{0i}, t_j) h \varphi_j = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \tag{2.3.6}$$

(безударное обтекание).

Здесь $f_i = f(t_{0i})$; $\varphi_j \approx \varphi(t_j)$ при $j \neq 0$; в системе (2.3.6) присутствует дополнительная неизвестная φ_0, называемая регуляризующим фактором (если безударное обтекание существует, то $\varphi_0 \approx 0$).

В системе (2.3.5) последнее уравнение играет роль дополнительного условия, выделяющего единственное решение недоопределенной системы. Иногда бывает известно значение $\varphi(t)$ в некоторой точке $t = t_k \in (0,\tau)$. Тогда вместо (2.3.5) рассматривается следующая система:

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} k(t_{0i}, t_j) h\varphi_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \qquad (2.3.7)$$

Здесь $f_i = f(t_{0i}) - k(t_{0i}, t_k) h\,\varphi(t_k)$.

В задачах с эжектированием потока в точке $t = t_k \in (0,\tau)$ возникают алгебраические системы следующего вида (см. / 45 /):

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} k(t_{0i}, t_j) h\varphi_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad i \neq k \qquad (2.3.8)$$

(циркуляционное обтекание с известной мощностью эжектора);

$$\sum_{j=1}^{n} k(t_{0i}, t_j) h\varphi_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad i \neq k,$$

$$\sum_{j=1}^{n} h\varphi_j = C \qquad (2.3.9)$$

(циркуляционное обтекание с эжекцией при заданной суммарной вихревой интенсивности);

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} k(t_{0i}, t_j) h\varphi_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad i \neq k,$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} h\varphi_j = C \qquad (2.3.10)$$

(бесциркуляционное обтекание с известными мощностью эжектора и суммарной вихревой интенсивностью);

$$\sum_{j=1}^{n} k(t_{0i}, t_j) h\varphi_j = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad i \neq k \qquad (2.3.11)$$

(безударное обтекание с эжектированием).

Заметим, что правые части систем (2.3.4)-(2.3.11) определяются, вообще говоря, различным образом.

Матрицы коэффициентов рассмотренных алгебраических систем разные, но все они могут быть получены из матрицы

$$A = [\,k(t_{0i}, t_j)\,h\,] \qquad (2.3.12)$$

путем вычеркивания строки или столбца или путем замены строки или столбца. В общем случае (например, когда имеется несколько эжекторов) таких строк и столбцов может быть несколько, но их число мало по сравнению с порядком матрицы A.

Матрица A в общем случае не обладает какой-либо "внешней" спецификой. Однако, если кривая L есть отрезок и функции $x(t), y(t)$ зависят от t линейно, то матрица A тёплицева. Если L есть часть окружности и в качестве t берется длина дуги, то A также тёплицева.

Далее, в уравнении (2.3.2) можно выделить главную (сингулярную) и регулярную части:

$$k(t_0, t) = \frac{1}{t_0 - t} + \tilde{k}(t_0, t). \qquad (2.3.13)$$

Следовательно, матрицу A можно представить как сумму тёплицевой матрицы

$$T = \left[\frac{h}{t_{0i} - t_j}\right] \qquad (2.3.14)$$

и некоторой матрицы (общего вида), отвечающей $\tilde{k}(t_0, t)$. В ряде случаев T оказывается главной частью для A в том смысле, что матрица $T^{-1}A$ близка к единичной. Это заведомо имеет место для слабоизогнутых контуров. При равномерно малых $x''(t)$, $y''(t)$ в аэродинамике пренебрегают $\tilde{k}(t_0, t)$ и в результате получают уравнение тонкого слабопрогнутого профиля, для которого возникает в чистом виде тёплицева матрица. В случае произвольного контура матрица $T^{-1}A$ не обязательно близка к единичной. Однако, как показали наши исследования, в любом случае в качестве "главной части" (предобусловливателя) можно выделять тёплицеву матрицу, которая вообще говоря, отличается от матрицы (2.3.13). Эти вопросы мы рассмотрим в § 3.

Теперь предположим, что контур L замкнутый, т.е. $x(0)=x(\tau)$, $y(0)=y(\tau)$, и будем считать, что $\tau=2\pi$. В этом случае главная и регулярная части в (2.3.2) выделяются следующим образом:

$$k(t_0,t)=\frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{t_0-t}{2}+\hat{k}(t_0,t). \qquad (2.3.15)$$

Если L - единичная окружность и t - длина дуги, то $\hat{k}(t_0,t)=0$. Для замкнутых контуров берется

$$h=\frac{2\pi}{n};$$

тогда точки e^{it_k} ($k=1,\dots,n$; i - мнимая единица) делят единичную окружность на n одинаковых дуг, а точки $e^{it_{0k}}$ - середины этих дуг. Вот основные типы алгебраических систем, рассматриваемых для замкнутых контуров:

$$\varphi_0+\sum_{j=1}^{n}k(t_{0i},t_j)h\varphi_j=f_i,\qquad i=1,\dots,n,$$
$$\sum_{j=1}^{n}h\varphi_j=c; \qquad (2.3.16)$$

$$\varphi_0+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}k(t_{0i},t_j)h\varphi_j=f_i,\qquad i=1,\dots,n; \qquad (2.3.17)$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}k(t_{0i},t_j)h\varphi_j=f_i,\qquad i=1,\dots,n,\ i\neq k,$$
$$\sum_{j=1}^{n}h\varphi_j=c. \qquad (2.3.18)$$

Здесь φ_0 - регуляризирующий фактор; правые части в системах (2.3.15)-(2.3.17) определяются, вообще говоря, по-разному. Как и в случае разомкнутых контуров, матрицы коэффициентов систем (2.3.15)-(2.3.17) могут быть получены из A вычеркиванием или заменой строки и столбца.

Обратим внимание на то, что матрица

$$C=\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{t_{0i}-t_j}{2}\,h\right]_{ij=1}^{n}, \qquad (2.3.19)$$

отвечающая единичной окружности, является циркулянтной и притом вырожденной, так как суммы элементов в любой ее строке и в любом столбце равны нулю. Для произвольного замкнутого контура матрица

$$\left[k(t_{0i},t_j)h\right]_{ij=1}^{n}$$

оказывается близкой к вырожденной или, более точно, к матрице ранга $n-1$.

Как уже отмечалось, вопросы сходимости метода дискретных вихрей изучены в / 7 /, и здесь мы не будем их обсуждать. Заметим, лишь, что более быстрой сходимости можно добиваться за счет выбора подходящей параметризации контура. Вообще говоря, это можно трактовать как переход к неравномерным сеткам (определенным образом согласованным между собой).

Пусть рассматривается уравнение для тонкого слабоизогнутого профиля и параметр t изменяется от -I до I. При использовании квадратурных формул интерполяционного типа (см. / 7 /) в случае циркуляционного обтекания возникает алгебраическая система

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{t_{0i}-t_j}\varphi_j=f_i,\qquad i=1,\dots,n, \qquad (2.3.20)$$

где

$$t_{0i}=\cos\frac{2i-1}{2n+1}\pi,\qquad t_j=\cos\frac{2j}{2n+1}\pi,$$
$$a_j=\frac{4\pi}{2n+1}\sin^2\frac{j\pi}{2n+1} \qquad (2.3.21)$$

Для бесциркуляционного обтекания:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{t_{0i}-t_j}\,\varphi_j = f_i, \qquad i=1,\dots,n-1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j = c, \tag{2.3.22}$$

где

$$t_{0i} = \cos\frac{i\pi}{n}, \qquad t_j = \cos\frac{2j\pi}{n},$$

$$a_j = \frac{\pi}{n}. \tag{2.3.23}$$

Для безударного обтекания:

$$\varphi_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{t_{0i}-t_j}\,\varphi_j = f_i, \qquad i=1,\dots,n+1, \tag{2.3.24}$$

где

$$t_{0i} = \cos\frac{2i-1}{2(n+1)}\pi, \qquad t_j = \cos\frac{j}{n+1}\pi,$$

$$a_j = \frac{\pi}{n+1}\sin^2\frac{j}{n+1}. \tag{2.3.25}$$

Матрицы систем (2.3.I9), (2.3.2I), (2.3.23) - обозначим их через $K_{(0)}$, $K_{(1)}$, $K_{(-1)}$ - не тёплицевы, однако с точностью до умножения на диагональную матрицу они отличаются от матрицы Коши лишь строкой и столбцом. Для матриц, отвечающих сильноизогнутым контурам, следует $1/(t_{0i}-t_j)$ заменить на $k(t_{0i},t_j)$.

Отметим еще две задачи, непосредственно приводящие к тёплицевым матрицам.

Пусть тонкий слабоизогнутый профиль находится близко от поверхности земли - на расстоянии H. Тогда для вихревой интенсивности $\gamma(t)$ получается следующее сингулярное интегральное уравнение /7/:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{t_0-t} - \frac{t_0-t}{(t_0-t)^2+4H^2}\right)\gamma(t)\,dt = f(t_0).$$

Для решетки профилей, представляющих собой бесконечную систему отрезков, получаемых сдвигом на вектор $(0,l)$ из отрезка [-I, I], уравнение для $\gamma(t)$ имеет вид / 7 /

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \operatorname{cth}\frac{\pi}{l}(t_0-t)\,\gamma(t)\,dt = f(t_0).$$

Применяя метод дискретных вихрей для каждого из этих двух уравнений, приходим к линейным алгебраическим системам, в которых матрица коэффициентов является тёплицевой или отличается от таковой лишь строкой и столбцом.

2.4. Пространственные задачи аэродинамики

В пространственных задачах аэродинамики даже в модельных расчетах приходится иметь дело с линейными алгебраическими системами, порядок которых достигает нескольких тысяч. Поэтому потребность в быстрых алгоритмах решения алгебраических задач здесь ощущается особенно остро.

В последнее время получил развитие подход, в котором поверхность тела и след за ним моделируются потенциалом двойного слоя (см. / 45, 46 /). Рассмотрим здесь бесциркуляционное безотрывное обтекание гладкой поверхности S. Для плотности $g(M)$ записывается следующее сильно сингулярное интегральное уравнение / 46 /:

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma} g(M)\frac{\partial}{\partial n_{M_0}}\frac{\partial}{\partial n_M}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)d\sigma_M = f(M_0),\ M_0\in\sigma. \qquad (2.4.1)$$

Если поверхность σ замкнутая, то для правой части должно выполняться равенство

$$\int\limits_{\sigma} f(M_0)\,d\sigma_{M_0} = 0, \qquad (2.4.2)$$

при этом решение определяется с точностью до константы; если поверхность σ разомкнутая, то ищется (единственное) решение, обращающееся в нуль на ее границе как корень квадратный из расстояния до границы (см. / 46 /).

Уравнение (2.4.I) можно записать в виде

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma} g(M)\frac{(\vec{n}_{M_0},\vec{n}_M)r^2_{MM_0}-3(\vec{r}_{MM_0},\vec{n}_{M_0})(\vec{r}_{MM_0},\vec{n}_M)}{r^5_{MM_0}}d\sigma_M = \qquad (2.4.3)$$

$$= f(M_0),\quad M_0\in\sigma.$$

Если σ - часть плоскости Oxy или же слабоизогнутая поверхность, заданная уравнением

$$z=\varphi(x,y),\qquad (x,y)\in D,$$

то рассматривается уравнение

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{D}\frac{g(x,y)}{\left[(x_0-x)^2+(y_0-y)^2\right]^{3/2}}\,dx\,dy = f(x_0,y_0), \qquad (2.4.4)$$

$$(x_0,y_0)\in D.$$

Интегралы в (2.4.I), (2.4.3), (2.4.4) понимаются в смысле конечной части по Адамару:

$$\iint\limits_{D}\frac{g(x,y)}{r^3_{MM_0}}\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\iint\limits_{D\setminus V(\varepsilon,M_0)}\frac{g(x,y)\,dx\,dy}{r^3_{MM_0}}-\frac{2\pi}{\varepsilon}g(x_0,y_0)\right],$$

где $V(\varepsilon,M_0)$ - окрестность радиуса ε точки M_0.

Рассмотрим более подробно уравнение (2.4.4) в случае, когда D - прямоугольник:

$$D=[0,a]\times[0,b]. \qquad (2.4.5)$$

Пусть точки x_j и y_l образуют на отрезках $[0,a]$ и $[0,b]$ равномерные сетки соответственно с шагом $h_x=a/m$ и $h_y=b/n$:

$$x_j=jh_x,\qquad y_l=lh_y. \qquad (2.4.6)$$

Положим $x_{0j}=x_j+h_x/2$, $y_{0l}=y_l+h_y/2$, введем элементарные прямоугольники

$$D_{jl}=[x_j,x_{j+1}]\times[y_l,y_{l+1}] \qquad (2.4.7)$$

и рассмотрим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1} g_{jl}\,a_{ij;kl} = f_{ik}, \qquad (2.4.8)$$

$$i=0,1,\dots,m-1,\qquad k=0,1,\dots,n-1,$$

где

$$a_{ij;kl}=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{D_{jl}}\frac{dx\,dy}{\left[(x_{0i}-x)^2+(y_{0k}-y)^2\right]^{3/2}} \qquad (2.4.9)$$

Занумеруем неизвестные g_{jl} в лексикографическом порядке, считая индекс l младшим, а j - старшим. Аналогично занумеруем уравнения, считая индекс k младшим, а i - старшим. В результате получим матрицу коэффицинетов A для (2.4.8), являющуюся двухуровневой матрицей типа T_mT_n (T_n обозначает тип тёплицевой матрицы; см. § I.I). Итак, A является дважды тёплицевой, т.е. она блочнотёплицева и каждый блок тёплицев.

Интегралы (2.4.9) легко находятся в явном виде / 7 /:

$$\iint\limits_{D_{jl}} \frac{dx\,dy}{[(x_{0i}-x)^2+(y_{0k}-y)^2]^{3/2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{(x_{0i}-x_{j+1})^2+(y_{0k}-y_{l+1})^2}}{(x_{0i}-x_{j+1})(y_{0k}-y_{l+1})} + \frac{\sqrt{(x_{0i}-x_j)^2+(y_{0k}-y_{l+1})^2}}{(x_{0i}-x_j)(y_{0k}-y_{l+1})} +$$

$$+ \frac{\sqrt{(x_{0i}-x_{j+1})^2+(y_{0k}-y_l)^2}}{(x_{0i}-x_{j+1})(y_{0k}-y_l)} - \frac{\sqrt{(x_{0i}-x_j)^2+(y_{0k}-y_l)^2}}{(x_{0i}-x_j)(y_{0k}-y_l)} . \quad (2.4.10)$$

Из этих формул вытекают следующие важные свойства матрицы A :

1) $a_{ii;kk} < 0, \quad 0 \le i \le m-1, \quad 0 \le k \le n-1;$

2) $a_{ij;kl} > 0 \quad , \quad i \ne j \quad$ или $\quad k \ne l$;

3) $\sum\limits_{j,l} a_{ij;kl} < 0, \quad 0 \le i \le m-1, \quad 0 \le k \le n-1;$

4) $\sum\limits_{i,k} a_{ij;kl} < 0, \quad 0 \le j \le m-1, \quad 0 \le l \le n-1.$

Отметим также, что матрица A является дважды симметричной, т.е. это блочно-симметричная матрица и каждый ее блок симметричен. Отсюда следует, что A является симметричной матрицей порядка $N = mn$ (поэтому свойства 3) и 4) равносильны), имеющей диагональное преобладание. Последнее означает, что матрица A невырожденная. В силу 3)-4) матрица $-A$ является матрицей Стилтьеса, т.е. симметричной M-матрицей.

В § 3 мы покажем, что решение систем типа (2.4.8) может быть

вычислено весьма экономичным способом, т.е. с относительно небольшими затратами времени и памяти ЭВМ. Расчеты показывают, что для достаточно широкого класса незамкнутых поверхностей дважды тёплицевы матрицы оказываются хорошими предобусловливателями.

Заметим еще, что если δ - "правильная" часть цилиндра, то матрица соответствующей алгебраической системы оказывается в чистом виде дважды тёплицевой.

2.5. Задачи статистики

Особые алгебраические свойства тёплицевых матриц, по-видимому, впервые нашли практическое применение именно в статистических вычислениях. Основополагающей здесь является работа Левинсона / 10 /.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу регрессионного анализа. Пусть случайный процесс x_t с дискретным временем t удовлетворяет соотношению

$$x_t = -\sum_{\tau=1}^{n} x_{t-\tau}\, a_{\tau n} + \varepsilon_t , \quad (2.5.1)$$

где ε_t - белый шум. Предполагается, что процесс x_t стационарный, с нулевым средним, т.е. математическое ожидание $E x_\tau^* x_t$ зависит лишь от разности $t-\tau$ и $E x_t = 0$ для всех t. Кроме того, ε_t не коррелирует с x_τ при $\tau \ne t$, т.е. $E x_\tau^* \varepsilon_t = 0$ при $\tau \ne t$, и $E x_t^* \varepsilon_t = E \varepsilon_t^* \varepsilon_t = p_n$. Задача заключается в определении коэффициентов авторегрессии $a_{\tau n}$.

Запишем (2.5.1) в виде

$$[x_t \;\; x_{t-1} \dots x_{t-n}] \begin{bmatrix} 1 \\ a_{1n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \varepsilon_t , \quad (2.5.2)$$

Умножим обе части на вектор-столбец $[x_t^* \;\; x_{t-1}^* \dots x_{t-n}^*]^T$ и, переходя к математическим ожиданиям, получим

$$\Phi_n a_n = [p_n \;\; 0 \dots 0]^T , \quad (2.5.3)$$

где $a_n = [1 \; a_{1n} \dots a_{nn}]^T$, $\Phi_n = [E x_{t-i}^* \, x_{t-j}]_{ij=0}^{n} = [E x_j^* \, x_i]_{ij=0}^{n}$

В силу стационарности ковариационная матрица Φ_n является (эрмитовой положительно определенной) тёплицевой: $\Phi_n = [\varphi_{i-j}]$, $\varphi_{-l} = \varphi^*_l$ $(l = 0, 1, \dots, n)$.

Уравнения (2.5.3) часто называют уравнениями Юля-Уолкера. Для оценки параметров авторегрессии можно использовать следующий алгоритм Левинсона-Дурбина (см. / I6 /):

$$a_{kk} = -\sum_{j=0}^{k-1} a_{jk-1}\varphi_{n-j} / \rho_{n-1}, \tag{2.5.4}$$

$$a_{jk} = a_{j,k-1} + a_{kk} a^*_{k-j,k-1}, \quad j = 1, \dots, k-1, \tag{2.5.5}$$

$$\rho_k = \rho_{k-1}(1 - |a_{kk}|^2). \tag{2.5.6}$$

Положительная определенность матрицы Φ_n гарантирует выполнение неравенств $|a_{kk}| < 1$ $(k = 1, \dots, n)$.

Обычно элементы ковариационной матрицы оцениваются по результатам наблюдений $x_0, \dots, x_N$:

$$\varphi_l = \frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N-l} x^*_j x_{j+l}, \quad l = 0, 1, \dots, n. \tag{2.5.7}$$

В этой же ситуации, когда φ_l не известны заранее, могут быть использованы и другие методы. Прежде всего - классический метод наименьших квадратов. Здесь значения ε_t рассматриваются как ошибки предсказания и ставится задача минимизации суммы квадратов

$$f = |\varepsilon_n|^2 + |\varepsilon_{n+1}|^2 + \dots + |\varepsilon_N|^2 \tag{2.5.8}$$

при условии, что ε_t имеет вид (2.5.2), $t = n, n+1, \dots, N$.
Введем матрицу

$$X = \begin{bmatrix} x_n & x_{n-1} & \dots & x_0 \\ x_{n+1} & x_n & \dots & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_N & x_{N-1} & \dots & x_{N-n} \end{bmatrix} \tag{2.5.9}$$

и предположим, что она имеет полный ранг. Тогда поставленная задача сводится к нахождению первого столбца z матрицы $(X^*X)^{-1}$, а именно $a_n = z_0^{-1} z$. Обратим внимание на то, что матрица X^*X есть произведение двух тёплицевых (прямоугольных) матриц.

Отметим также другой подход, предложенный Марплом / I02 /. В статистике величина ε_t называется ошибкой линейного предсказания вперед; наряду с ней рассматривается также ошибка линейного предсказания назад

$$\delta_t = x_{t-n} + \sum_{\tau=1}^{n} x_{t-n+\tau} a^*_{\tau n}, \quad t = n, n+1, \dots, N. \tag{2.5.10}$$

При этом параметры авторегрессии предлагается оценивать, минимизируя сумму квадратов

$$e_n = \sum_{t=n}^{N} |\varepsilon_t|^2 + \sum_{t=n}^{N} |\delta_t|^2. \tag{2.5.11}$$

Введем матрицу

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} x_{N-n} & x_{N-n-1} & \dots & x_1 & x_0 \\ x_{N-n+1} & x_{N-n} & \dots & x_2 & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_N & x_{N-1} & \dots & x_{n+1} & x_n \end{bmatrix} \tag{2.5.12}$$

Тогда указанная задача наименьших квадратов сводится в вычислению первого столбца матрицы $(X^*X + \tilde{X}\tilde{X}^*)^{-1}$; таким образом, здесь возникает матрица, представленная суммой двух парных произведений тёплицевых (прямоугольных) матриц.

В статистике популярен также метод Бурга (см. / I02 /), в котором величины a_{jk} вычисляются по формулам (2.5.5), как в методе Левинсона-Дурбина, но при этом a_{kk} находится как решение задачи минимизации e_k при условии (2.5.5). В методе Бурга сумма квадратов e_k удовлетворяет рекуррентному соотношению $e_k = e_{k-1}(1 - |a_{kk}|^2)$, аналогичному (2.5.6) для ρ_k.

Заметим, что матрицы типа тёплицевых возникают не только в связи со стационарными случайными процессами, но также и в связи с процессами, в определенном смысле близкими к стационарным (см. / 98 /). Роль быстрых алгоритмов особенно велика при конструировании приборов, выполняющих статистическую обработку, и, конечно, при моделировании.

§ 3. Итерационные методы и способы предобусловливания

3.I. Общие замечания

Пусть требуется решить систему линейных алгебраических уравнений

$$A_n \varphi_n = f_n, \tag{3.I.1}$$

где A_n - невырожденная плотная матрица порядка n. Предположим, что использование прямых методов нежелательно или даже невозможно из-за чрезмерно больших запросов к машинным ресурсам. В этой ситуации естественно обратиться к итерационным методам. Обычно быстрая сходимость бывает связана с выделением хорошей главной части для A_n, т.е. с выбором расщепления

$$A_n = T_n - K_n, \tag{3.I.2}$$

где T_n - невырожденная "легко обратимая" матрица, рассматриваемая как главная часть для A_n.

Пусть имеется одномерное сингулярное интегральное уравнение

$$\int_0^\tau \frac{1}{t_0 - t}\,\varphi(t)\,dt - \int_0^\tau k(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0). \tag{3.I.3}$$

Тогда при формировании соответствующей ему алгебраической задачи естественно T_n и K_n связать с главной и регулярной частями для (3.I.3). Если используется метод дискретных особенностей, то матрица T_n будет тёплицевой. Вообще говоря, тёплицевость связана с использованием равномерных сеток. Однако заметим, что расщепление (3.I.3) может записываться для различных способов параметризации. Очевидно, для интегральных уравнений с логарифмической или степенной

особенностью возможны аналогичные построения.

Таким образом, целесообразно рассмотреть класс расщеплений (3.I.2) с тёплицевой матрицей T_n. В случае двумерных уравнений в качестве T_n будет выбираться дважды тёплицева матрица.

На базе расщепления (3.I.2) можно строить различные итерационные процессы, в том числе с использованием известных приемов ускорения за счет выбора итерационных параметров. Не касаясь последнего, рассмотрим здесь два основных метода. Первый - метод простой итерации:

$$T x_k = K x_{k-1} + f, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.I.4}$$

или

$$x_k = x_{k-1} + T^{-1}(f - A x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.I.5}$$

Второй - метод сопряженных градиентов с предобусловливанием (метод неполного эрмитова разложения):

$$
\begin{aligned}
&z_{k-1} = T^{-1} r_{k-1},\\
&\beta_k = z_{k-1}^T r_{k-1} / z_{k-2}^T r_{k-2} \quad (\text{при } k \geq 2),\\
&d_k = z_{k-1} + \beta_k d_{k-1} \quad (\text{при } k \geq 2), \quad d_1 = z_0,\\
&\alpha_k = z_{k-1}^T r_{k-1} / z_{k-1}^T A d_k,\\
&x_k = x_{k-1} + \alpha_k d_k,\\
&r_k = r_{k-1} - \alpha_k A d_k.
\end{aligned}
\tag{3.I.6}
$$

Здесь $r_0 = f - A x_0$, где x_0 - начальное приближение.

Метод (3.I.5) сходится при любом начальном приближении x_0 тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы $I - T^{-1}A$ лежат внутри единичного круга. При выборе T из некоторого множества матриц $\mathcal{T}$ полезно рассмотреть следующую задачу оптимизации:

$$\| I - T^{-1} A \| \longrightarrow \min, \quad T \in \mathcal{T}, \tag{3.I.7}$$