4.I. Произвольная матрица сводится к тёплицевым

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу A порядка n с элементами a_{ij} $(0 \le i, j \le n-1)$ и поставим ей в соответствие квадратную матрицу ΔA такого же порядка, в которой первые строка и столбец берутся из A, а при $0 < i, j \le n-1$ соответствующий элемент равен

$$\Delta a_{ij} = a_{ij} - a_{i-1,j-1}. \qquad (4.I.I)$$

Представим ΔA суммой t одноранговых матриц:

$$\Delta A = \sum_{s=1}^{t} \begin{bmatrix} \alpha_{s,0} \\ \cdots \\ \alpha_{s,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{s,0} & \cdots & \beta_{s,n-1} \end{bmatrix}. \qquad (4.I.2)$$

Тогда A есть сумма t парных произведений тёплицевых треугольных матриц:

$$A = \sum_{s=1}^{t} L(\alpha_s) L^T(\beta_s), \qquad (4.I.3)$$

где s-е по счету произведение имеет вид

$$L(\alpha_s)L^T(\beta_s) = \begin{bmatrix} \alpha_{s0} & & & 0 \\ \alpha_{s1} & \alpha_{s0} & & \\ \cdots & & \ddots & \\ \alpha_{sn-1} & \alpha_{sn-2} & \cdots & \alpha_{s0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{s0} & \beta_{s1} & \cdots & \beta_{sn-1} \\ & \beta_{s0} & \cdots & \beta_{sn-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \beta_{s0} \end{bmatrix}$$

Здесь и в дальнейшем $L(x)$ обозначает тёплицеву нижнюю треугольную матрицу с первым столбцом, составленным из компонент вектора x. Разложение вида (4.I.3) будем называть тёплицевым разложением матрицы A.

Действительно, согласно (4.I.I), (4.I.2) имеем

$$a_{ij} = a_{i-1,j-1} + \sum_{s=1}^{t} \alpha_{si} \beta_{sj}, \quad 0 \le i, j \le n-1;$$

считаем, что $a_{ij} = 0$ при $i < 0$ или $j < 0$. Эти же соотношения, как несложно проверить, равносильны матричному представлению (4.I.3).

Матрицу A можно свести к тёплицевым и другими способами. Образуем, например, матрицу δA, в которой последние строка и столбец берутся из A, а при $0 \le i, j \le n-2$ соответствующий элемент равен

$$\delta a_{ij} = a_{ij} - a_{i+1,j+1}. \qquad (4.I.4)$$

Тогда если для δA имеет место разложение

$$\delta A = \sum_{s=0}^{t} \begin{bmatrix} \alpha_{s0} \\ \cdots \\ \alpha_{s,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{s0} & \cdots & \beta_{s,n-1} \end{bmatrix}, \qquad (4.I.5)$$

то A есть сумма t парных произведений тёплицевых и левых треугольных матриц:

$$A = \sum_{s=1}^{t} L^T(J\alpha_s) L(J\beta_s), \qquad (4.I.6)$$

где

$$J = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}. \qquad (4.I.7)$$

Наименьшее t в разложении (4.I.3) называется левым тёплицевым рангом матрицы A; наименьшее t в разложении (4.I.6) называется правым тёплицевым рангом матрицы A. Эти величины будем обозначать соответственно $\tau_+(A)$ и $\tau_-(A)$.

Соотношения (4.I.3) и (4.I.6) показывают, что любую матрицу можно рассматривать как аналог тёплицевой матрицы и при этом число t определяет меру "отклонения" матрицы A от тёплицевой матрицы. Представления матрицы суммами произведений тёплицевых матриц изучались в работах /60, 61, 79, 80, 9I, 95, 98, III/; тёплицевы ранги введены в /98/.

Для любого t соотношение (4.I.2) равносильно (4.I.3); (4.I.5) равносильно (4.I.6). Поэтому для любой матрицы A порядка n ее левый и правый тёплицевы ранги равны обычным рангам определенных выше матриц ΔA и δA. Полезно иметь в виду, что ΔA и δA можно записать в виде

$$\Delta A = A - ZAZ^T, \tag{4.I.8}$$

$$\delta A = A - Z^TAZ, \tag{4.I.9}$$

где

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & & & & O \\ I & 0 & & & \\ & I & 0 & & \\ & & & \cdots & \\ O & & & I & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.I.I0}$$

Отметим ниже следующие свойства тёплицевых рангов.

I. Любую матрицу порядка n можно представить суммой произведений тёплицевых левых и правых (правых и левых) треугольных матриц, где число слагаемых не превышает n, т.е. $\tau_\pm(A) \le n$.

2. Для любой матрицы левый и правый тёплицевы ранги различаются между собой не более чем на 2.

3. Для любой невырожденной матрицы A ее левый (правый) тёплицев ранг равен правому (левому) тёплицеву рангу обратной матрицы, т.е. $\tau_\pm(A) = \tau_\mp(A^{-1})$.

4. Левый (правый) тёплицев ранг суммы двух матриц не превосходит суммы левых (правых) тёплицевых рангов слагаемых.

5. Левый (правый) тёплицев ранг произведения двух матриц не превосходит суммы левых (правых) рангов сомножителей, увеличенной на I.

6. Для любой невырожденной матрицы A и для любой ее невырожденной ведущей подматрицы левый тёплицев ранг подматрицы и ее дополнения по Шуру не превосходят левого тёплицева ранга матрицы A.

7. Для любой матрицы A ее левый (правый) тёплицев ранг совпадает с правым (левым) тёплицевым рангом матрицы JAJ, где J имеет вид (4.I.7).

8. Любой из тёплицевых рангов невырожденной матрицы A совпадает с соответствующим тёплицевым рангом матрицы $JA^{-1}J$.

9. Пусть L и U - произвольные невырожденные тёплицевы соответственно левая и правая треугольные матрицы. Тогда для любой матрицы A ее левый (правый) тёплицев ранг тот же, что и для матрицы LAU (UAL).

Наименее очевидными являются свойства 3 (получено в / 99 /) и 5 (получено автором в / III /); мы не будем останавливаться здесь на доказательствах, так как в следующем разделе представим более общие формулировки.

4.2. Обобщенные тёплицевы ранги

Проведенные в § 4.I рассмотрения по существу связаны с определением операторов Δ и δ, действующих в пространстве матриц. В действительности мы занимались изучением свойств операторов Δ и δ; в частности, оказалось, что они реализуют соответствие между двумя типами матричных разложений. Для части утверждений из § 4.I важен не конкретный вид операторов Δ и δ, а лишь некоторые общие их свойства. Здесь мы попытаемся выяснить, что это за свойства и какие более общие утверждения можно получить, исходя из них.

Возьмем в качестве Z произвольную квадратную матрицу порядка n. Оператор Δ_Z определим следующим образом:

$$\Delta_Z A = A - ZAZ^T. \tag{4.2.I}$$

Число $\tau_Z(A) \equiv \operatorname{rg} \Delta_Z A$ назовем Z-рангом матрицы A.

Примем во внимание, что для известной матрицы $\Delta_Z A$ матричное уравнение (4.2.I) есть не что иное, как дискретное уравнение Ляпунова. Поэтому условие обратимости оператора Δ_Z - это хорошо известное условие однозначной разрешимости дискретного уравнения Ляпунова (см. / 3I /); таким образом, справедлива

Лемма 4.2.I. Оператор Δ_Z, определенный равенством (4.2.I), является обратимым тогда и только тогда, когда для любых двух собственных значений матрицы Z их произведение отлично от I.

Следствие I. Если матрица Z сходящаяся (т.е. все ее собственные значения по модулю меньше I), то оператор Δ_Z обратим, и при этом имеет место разложение

$$A=\sum_{s=0}^{\infty} Z^s \Delta_Z A\left(Z^T\right)^s. \qquad (4.2.2)$$

Следствие 2. Если все собственные значения матрицы Z нулевые, то оператор Δ_Z обратим, и при этом

$$A=\sum_{s=0}^{n-1} Z^s \Delta_Z A\left(Z^T\right)^s. \qquad (4.2.3)$$

Чтобы доказать (4.2.2), рассмотрим равенства, получаемые из (4.2.I) умножением обеих частей слева на Z^s и справа на $(Z^T)^s$. Сложив эти равенства, отвечающие $s = 0, I, \dots, N$, находим

$$\sum_{s=0}^{N} Z^s \Delta_Z A\left(Z^T\right)^s = A - Z^{N+1} A\left(Z^T\right)^{N+1}.$$

Поскольку матрица Z сходящаяся, имеем $\|Z^{N+1}A(Z^T)^{N+1}\| \to 0$ при $N \to 0$, т.е. в пределе получаем именно (4.2.2). Если все собственные значения матрицы Z нулевые, то очевидно $Z^n = 0$ (все пространство является корневым для Z); поэтому в (4.2.2) все слагаемые нулевые при $s \geq n$, т.е. имеет место (4.2.3).

Замечание. Матрица Z вида (4.I.I0) удовлетворяет условиям следствия 2; представление (4.I.3) можно вывести из (4.2.3), заменяя $\Delta_Z A$ разложением (4.I.2).

Лемма 4.2.2. Пусть Z - произвольная матрица порядка n. Тогда для любой невырожденной матрицы A порядка n ее Z-ранг совпадает с Z^T-рангом обратной матрицы:

$$r_Z(A) = r_{Z^T}\left(A^{-1}\right). \qquad (4.2.4)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любых матриц P, Q матрицы $I-PQ$ и $I-QP$ имеют одинаковый дефект. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим матрицу

$$M=\begin{bmatrix} I & P \\ Q & I \end{bmatrix}.$$

Ее дефект равен дефекту матрицы $I-PQ$, поскольку имеет место равенство

$$\begin{bmatrix} I & -P \\ 0 & I \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} I-PQ & 0 \\ Q & I \end{bmatrix},$$

и в то же время он равен дефекту матрицы $I-QP$ в силу равенства

$$M\begin{bmatrix} -P & I \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I-QP & Q \end{bmatrix}.$$

Эти выводы используют, в частности, факт сохранения ранга и дефекта при умножении на невырожденную матрицу.

Теперь рассмотрим последовательность матриц $\Delta_Z A = A - ZAZ^T$, $(I - ZAZ^TA^{-1})A$, $I-(ZA)(Z^TA^{-1})$, $I-(Z^TA^{-1})(ZA)$, $(A^{-1}-Z^TA^{-1}Z)A$, $A^{-1}-Z^TA^{-1}Z = \Delta_{Z^T}A^{-1}$.

Все они имеют одинаковый ранг (нужно учесть невырожденность матрицы A и предыдущие замечания); следовательно, $\operatorname{rg}\Delta_Z A = \operatorname{rg}\Delta_{Z^T}A^{-1}$. Лемма доказана.

Замечание. Пусть Z имеет вид (4.I.I0). Тогда свойство 3 тёплицевых рангов, отмеченное в § 4.I, является прямым следствием леммы 4.2.2.

Лемма 4.2.3. Пусть Z – произвольная матрица порядка n. Тогда для любых матриц A и B порядка n имеет место неравенство

$$r_Z(AB) \le r_Z(A) + r_Z(B) + rg\,(I - Z^T Z). \qquad (4.2.5)$$

Доказательство. Рассмотрим очевидное тождество

$$\Delta_Z(AB) = AB - ZABZ^T =$$
$$= (A - ZAZ^T)B + ZAZ^T(B - ZBZ^T) -$$
$$- (A - ZAZ^T)B + ZAZ^T(B - ZBZ^T) -$$
$$- ZA(I - Z^T Z)BZ^T =$$
$$= \Delta_Z(A)B + ZAZ^T\Delta_Z(B) - ZA(I - Z^T Z)BZ^T.$$

Остается учесть, что ранг произведения нескольких матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей и ранг суммы нескольких матриц не превосходит суммы рангов слагаемых. Лемма доказана.

Замечание. Пусть Z имеет вид (4.I.I0). Тогда $rg\,(I - Z^T Z) = 1$. Следовательно, установлено свойство 5 тёплицевых рангов, отмеченное в § 4.I.

Пусть A – невырожденная матрица порядка n и Z – матрица такого же порядка. Тогда в соответствии с леммой 4.2.2 можно записать разложения

$$\Delta_Z A = UV^T, \quad \Delta_{Z^T} A^{-1} = XY^T, \qquad (4.2.6)$$

где U, V, X, Y – прямоугольные матрицы одинаковых размеров.

Лемма 4.2.4. Для того чтобы имели место соотношения (4.2.6), достаточно существование квадратных матриц Φ и Ψ, обеспечивающих выполнение равенства

$$S(A \oplus I)R = A \oplus I, \qquad (4.2.7)$$

где

$$S = \begin{bmatrix} Z & U \\ Y^T & \Phi \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} Z^T & X \\ V^T & \Psi \end{bmatrix}. \qquad (4.2.8)$$

Доказательство. В силу (4.2.7) матрицы S и R должны быть невырожденными. Запишем R^{-1} в блочном виде, согласованном с блочными разбиениями (4.2.8):

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} Z_1^T & X_1 \\ V_1 & \Psi_1 \end{bmatrix}.$$

Тогда согласно (4.2.7) имеем

$$\begin{bmatrix} ZA & U \\ Y^T A & \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AZ_1^T & AX_1 \\ V_1^T & \Psi_1 \end{bmatrix}, \qquad (4.2.9)$$

$$\begin{bmatrix} A^{-1}Z & A^{-1}U \\ Y^T & \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1^T A^{-1} & X_1 \\ V_1^T A^{-1} & \Psi_1 \end{bmatrix}. \qquad (4.2.10)$$

Умножив (4.2.9) справа на матрицу $[Z \;\; V]^T$, находим $ZAZ^T + UV^T = AZ_1^T Z^T + AX_1 V^T = A$. Умножив (4.2.I0) слева на матрицу $[Z X]$, находим $Z^T A^{-1} Z + XY^T = Z^T Z_1 A^{-1} + XV_1^T A^{-1} = A^{-1}$. Фактически мы получили равенства (4.2.6). Лемма доказана.

Известно, что в случае тёплицевой матрицы ее невырожденность вытекает лишь из факта существования решений двух систем с этой матрицей, для которых правые части выбираются специальным образом (и, вообще говоря, зависят от элементов матрицы) / 53 /. Для матриц общего вида ситуация аналогичная, с той лишь разницей, что число этих систем больше двух. В действительности это число связано с Z-рангом матрицы.

Лемма 4.2.5. Пусть задана матрица Z порядка n и для матрицы A выполняется соотношение

$$AZ - ZA = PQ^T, \qquad (4.2.11)$$

где P, Q – прямоугольные матрицы размеров $r \times n$, составленные из столбцов $p_1, \dots, p_r$ и $q_1, \dots, q_r$. Предположим, что в жордановой форме матрицы Z максимальное число жордановых блоков, отвечающих одному собственному значению, равно s. Тогда существуют столбцы $p_{r+1}, \dots, p_{r+s}$ и $q_{r+1}, \dots, q_{r+s}$, определяемые матрицей Z и такие, что системы

$$Ax_l = p_l, \quad l = 1, \dots, r+s, \qquad (4.2.12)$$

разрешимы в том и только том случае, когда разрешимы системы

$$y_l^T A = q_l^T, \quad l = 1, \dots, r+s. \qquad (4.2.13)$$

Существование решений влечет невырожденность матрицы A.

Доказательство. Предположим, что матрица Z имеет s жордановых блоков, отвечающих собственному значению λ. Соберем вместе жордановы блоки максимального порядка для каждого собственного значения и обозначим через n_1 порядок полученного суммарного блока. Затем возьмем второй по размеру блок, отвечающий λ, и присоединим к нему вторые по размеру блоки, отвечающие другим собственным значениям; сумму порядков этих блоков обозначим через n_2. Таким образом мы получим s расширенных блоков, каждый из которых есть прямая сумма жордановых блоков матрицы A. Пусть $n_1, \dots, n_s$ – порядки этих расширенных блоков. Тогда существуют векторы – их и возьмем в качестве $p_{r+1}, \dots, p_{r+s}$ – такие, что система векторов

$$p_{r+1},\ Zp_{r+1},\ \dots,\ Z^{n_1-1}p_{r+1}, \qquad (4.2.14)$$

$$p_{r+s},\ Zp_{r+s},\ \dots,\ Z^{n_s-1}p_{r+s}$$

является линейно независимой. Пусть системы (4.2.12) разрешимы. Чтобы доказать невырожденность матрицы A, рассмотрим равенство $y^T A = 0$, где y – некоторый вектор. В силу условий леммы имеем

$$AZ - ZA = A[x_1, \dots, x_r]Q^T,$$

вследствие чего находим $y^T Z^k A = 0$ для всех $k = 0, 1, \dots$. Умножая эти равенства справа на векторы $x_{r+1}, \dots, x_{r+s}$, получаем $y^T M = 0$, где M – матрица, имеющая своими столбцами векторы (4.2.14). Поскольку M невырожденная, $y = 0$, т.е. матрица A невырожденная. Лемма доказана.

Замечание I. Для любых A, Z выполняются следующие неравенства:

$$r = rg(AZ - ZA) \le r_Z(A) + rg(I - Z^T Z); \qquad (4.2.15)$$

$$r_Z(A) \le rg(AZ - ZA) + rg(I - Z^T Z). \qquad (4.2.16)$$

Они показывают, что число систем, разрешимость которых влечет невырожденность матрицы A, оценивается сверху через Z-ранг матрицы A.

Чтобы получить (4.2.15), достаточно рассмотреть тождество

$$AZ - ZA = (A - ZAZ^T)Z - ZA(I - Z^T Z);$$

неравенство (4.2.16) вытекает из тождества

$$A - ZAZ^T = (AZ - ZA)Z^T + A(I - ZZ^T).$$

Замечание 2. Если матрица Z простая (т.е. для нее минимальный многочлен совпадает с характеристическим), то $s = 1$. Вектор p_{r+1} может совпадать с одним из векторов $p_1, \dots, p_s$. Если это так, то число систем, разрешимость которых влечет невырожденность матрицы A, оказывается равным r.

4.3. Представления обратных матриц

Если тёплицев ранг мал по сравнению с порядком матрицы, то получаются компактные и удобные для использования формулы для обратных матриц. В этом случае обратные матрицы определяются относительно небольшим числом параметров, в качестве которых обычно берутся компоненты нескольких решений линейных систем с рассматриваемой матрицей коэффициентов и со специально подбираемыми правыми частями. Какими могут быть эти правые части, можно увидеть, обратившись к лемме 4.2.5.

При построении формул для обратных матриц удобнее работать с оператором Δ, отличающимся от рассмотренных выше операторов (4.2.I). Именно, положим $\Delta A = AZ - ZA$. В этом случае разложение $\Delta A = PQ^T$ очевидно влечет $\Delta A^{-1} = -XY^T$, где $X = A^{-1}P$, $Y^T = Q^T A^{-1}$. Таким образом, столбцы из X и строки из Y^T суть решения систем, в которых правыми частями служат столбцы из P и строки из Q^T. Теперь, однако, необходимо принять во внимание, что оператор Δ такого типа не будет обратимым.

Матрица Z вида (4.I.I0) является простой, и в качестве p_{r+1} и q_{r+1} (см. лемму 4.2.5) можно взять единичный вектор

$$e_0 = [1 \quad 0 \dots \quad 0]^T .$$

Несложно убедиться, что в этом случае матрица A^{-1} восстанавливается по векторам $A^{-1}p_l$, $q_l^T A^{-1}$ $(1 \le l \le r+1)$. При этом имеет место представление

$$A^{-1} = L(A^{-1}e_0) + \sum_{l=1}^{r} L(A^{-1}p_l)\, L^T\left(Z(q_l^T A^{-1})^T\right); \qquad (4.3.I)$$

определение матрицы $L(\cdot)$ см. в § 4.I.

Различные формулы для A^{-1} можно получать, выбирая в качестве Z, например, такие матрицы:

$$Z = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & 1/2 & 1 \dots & 1 & 1 \\ & 0 & & 1/2 & 1 \\ & & & & 1/2 \end{bmatrix}; \qquad (4.3.2)$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad (4.3.3)$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}; \qquad (4.3.4)$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & \dots & & \\ & 0 & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}. \qquad (4.3.5)$$

Оператор Δ с Z вида (4.3.2) был использован в / 53 / для обращения произвольной невырожденной тёплицевой матрицы; в /I6 , 60 / с его помощью изучались обратные к матрицам малого тёплицева ранга. Оператор Δ с Z вида (4.3.3) рассмотрен в / I7 /. Матрицы Z вида (4.I.I0) и (4.3.5) использованы в / 5I , 94 /.

Отметим ниже некоторые факты, нужные нам для дальнейшего.

Пусть матрица A – тёплицева, порядка n. Тогда (см. / 94 /) ее невырожденность равносильна существованию решений $x = [x_0 \dots x_{n-1}]^T$ и $w = [w_0 \dots w_{n-1}]^T$ двух систем

$$Ax = [1 \; 0 \dots 0]^T, \quad Aw = [\alpha \; a_{-n+1} \dots a_{-1}]^T, \qquad (4.3.6)$$

где α - произвольное фиксированное число. Для обратной матрицы имеет место представление

$$A^{-1} = L(x)\,L^T(\hat{w}) + L(w)\,L^T(\hat{x}), \qquad (4.3.7)$$

где $\hat{w} = [1 \; -w_{n-1} \dots -w_1]^T$, $\hat{x} = [0 \; x_{n-1} \dots x_1]^T$.

Далее, предположим, что для тёплицевой матрицы A существуют решения $x = [x_0 \dots x_{n-1}]^T$ и $y = [y_0 \dots y_{n-1}]^T$ двух систем

$$Ax = [1 \; 0 \dots 0]^T, \quad Ay = [0 \dots 0 \; 1]^T. \qquad (4.3.8)$$

Тогда / 2I / если $x_0 \ne 0$, то матрица A невырожденная и обратная к ней имеет вид

$$A^{-1} = x_0^{-1}\left(L(x)\,L^T(\tilde{y}) - L(\hat{y})\,L^T(\tilde{x})\right), \qquad (4.3.9)$$

где $\tilde{y} = [y_{n-1} \dots y_0]^T$, $\hat{y} = [0 \; y_0 \dots y_{n-2}]^T$, $\tilde{x} = [0 \; x_{n-1} \dots x_1]^T$.

Представления типа (4.3.7) или (4.3.9) могут быть получены и в случае блочных матриц. Чтобы записывать их компактно, нам понадобится операция блочного транспонирования: если $A=[a_{ij}]$, то по определению $A'=[a_{ji}]$, в то время как $A^T=[a_{ji}^T]$.

Следующая теорема представляет довольно простое обобщение формулы (4.3.7) на блочный случай.

Теорема 4.3.I. Пусть A - блочно-тёплицева матрица блочного порядка n с блоками порядка p и пусть существуют блочные столбцы $x=[x_0 \dots x_{n-1}]'$ и $w=[w_0 \dots w_{n-1}]'$, удовлетворяющие уравнениям

$$Ax=[I\;0\dots 0]',\quad Aw=[\lambda\;a_{-n+1}\dots a_{-1}]', \tag{4.3.10}$$

или же блочные строки $r'=[r_0\dots r_{n-1}]$ и $s'=[s_0\dots s_{n-1}]$, удовлетворяющие уравнениям

$$r'A=[0\dots 0\;I],\quad s'A=[a_{-1}\dots a_{-n+1}\;\lambda], \tag{4.3.11}$$

где λ - произвольный $p\times p$ -блок. В любом случае матрица A невырожденная и обратная к ней имеет вид

$$A^{-1}=L(x)L'(\hat{s})+L(w)L'(\hat{r}), \tag{4.3.12}$$

где $\hat{s}=[I\;-s_0\dots -s_{n-2}]'$, $\hat{r}=[0\;r_0\dots r_{n-2}]'$. В то же время

$$A^{-1}=L'(\tilde{w})L(\tilde{r})+L'(\tilde{x})L(\tilde{s}), \tag{4.3.13}$$

где $\tilde{w}=[I\;-w_{n-1}\dots -w_1]'$, $\tilde{r}=[r_{n-1}\dots r_0]'$, $\tilde{x}=[0\;x_{n-1}\dots x_1]'$, $\tilde{s}=[s_{n-1}\dots s_0]'$.

Доказательство. В силу блочной тёплицевости матрицы A находим

$$AZ-ZA=\begin{bmatrix}I\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}[a_{-1}\dots a_{-n+1}\;\lambda]-\begin{bmatrix}\lambda\\a_{-n+1}\\\vdots\\a_{-1}\end{bmatrix}[0\dots 0\;I], \tag{4.3.14}$$

где

$$Z=\begin{bmatrix}0 & & & O\\ I & 0 & & \\ & I & 0 & \\ & & \ddots & \\ O & & I & 0\end{bmatrix} \tag{4.3.15}$$

Чтобы установить невырожденность матрицы A, обратимся к лемме 4.2.5. Легко видеть, что в данном случае $s=p$ и в качестве $p_{r+1},\dots,p_{r+p}$ можно взять столбцы блочного вектора $[I\;0\dots 0]'$, которые содержатся в правых частях систем (4.3.10).

Далее, вследствие (4.3.14) получаем

$$A^{-1}Z-ZA^{-1}=wr'-xs'. \tag{4.3.16}$$

Отсюда видно, что блоки $a_{ij}^{(-1)}$ матрицы A^{-1} связаны соотношениями

$$a_{i,j+1}^{(-1)}-a_{i-1,j}^{(-1)}=w_i r_j-x_i s_j, \tag{4.3.17}$$

и если заменить j на $j-1$, при $1\le i,j\le n-1$ получаем

$$a_{ij}^{(-1)}=a_{i-1,j-1}^{(-1)}+w_i r_{j-1}-x_i s_{j-1}. \tag{4.3.18}$$

Кроме того, в силу (4.3.16)

$$a_{0j}^{(-1)}=w_0 r_{j-1}-x_i s_{j-1},\quad 1\le j\le n-1, \tag{4.3.19}$$

и согласно (4.3.10)

$$a_{i0}^{(-1)}=x_i,\quad 0\le i\le n-1. \tag{4.3.20}$$

В совокупности (4.3.18)-(4.3.20) доказывают формулу (4.3.12).

Чтобы установить (4.3.13), в (4.3.17) заменим i на $i+1$; тогда при $0\le i,j\le n-2$ получаем

$$a_{ij}^{(-1)}=a_{i+1,j+1}^{(-1)}+x_{i+1}s_j-w_{i+1}r_j. \tag{4.3.21}$$

Кроме того, в силу (4.3.16), (4.3.11)

$$a_{i,n-1}^{(-1)}=x_{i+1}s_{n-1}-w_{i+1}r_{n-1},\quad 0\le i\le n-2; \tag{4.3.22}$$

$$a_{n-1,j}^{(-1)}=r_j,\quad 0\le j\le n-1. \tag{4.3.23}$$

Соотношения (4.3.21)-(4.3.23) приводят к (4.3.13). Теорема доказана.

Следствие. Пусть блочные столбцы y, v, z, t удовлетворяют уравнениям

$$Ay = [0 \dots 0\ I]', \quad Av = [a_1 \dots a_{n-1}\ \lambda]', \tag{4.3.24}$$

$$z'A = [I\ 0 \dots 0], \quad t'A = [\lambda\ a_{n-1} \dots a_1]. \tag{4.3.25}$$

Тогда справедливы также формулы

$$A^{-1} = L(\hat{v})L'(z) + L(\hat{y})L(t), \tag{4.3.26}$$

где $\hat{v} = [I\ -v_0 \dots -v_{n-2}]'$, $\hat{y} = [0\ y_0 \dots y_{n-2}]'$;

$$A^{-1} = L'(\tilde{y})L(\tilde{t}) + L'(\tilde{v})L(\tilde{z}), \tag{4.3.27}$$

где $\tilde{y} = [y_{n-1} \dots y_0]'$, $\tilde{t} = [I\ -t_{n-1} \dots -t_1]'$, $\tilde{v} = [v_{n-1} \dots v_0]'$, $\tilde{z} = [0\ z_{n-1} \dots z_1]'$.

Для доказательства достаточно рассмотреть матрицу JAJ, где

$$J = \begin{bmatrix} O & & I \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ I & & O \end{bmatrix}, \tag{4.3.28}$$

и записать для обратной к ней формулы (4.3.12) и (4.3.13); тогда (4.3.26) вытекает из (4.3.13), а (4.3.27) – из (4.3.12).

Полезно отметить здесь еще одну формулу, полученную в / 22 /. Пусть существуют блочные столбцы $x = [x_0 \dots x_{n-1}]$ и $y = [y_0 \dots y_{n-1}]$, удовлетворяющие уравнениям

$$Ax = [I\ 0 \dots 0]', \quad Ay = [0 \dots 0\ I]', \tag{4.3.29}$$

или же блочные столбцы $z = [z_0 \dots z_{n-1}]'$ и $w = [w_0 \dots w_{n-1}]'$, удовлетворяющие уравнениям

$$z'A = [I\ 0 \dots 0], \quad w'A = [0 \dots 0\ I]. \tag{4.3.30}$$

Тогда (см. / 22 /) в первом случае невырожденность одного из блоков x_0 или y_{n-1} влечет невырожденность другого и невырожденность матрицы A; во втором случае невырожденность одного из блоков z_0 или w_{n-1} влечет невырожденность другого и невырожденность матрицы A. При этом обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = L(x)x_0^{-1}L'(z) - L(\hat{y})y_{n-1}^{-1}L'(\hat{w}), \tag{4.3.31}$$

где $\hat{y} = [0\ y_0 \dots y_{n-2}]'$, $\hat{w} = [0\ w_0 \dots w_{n-2}]'$.

Обзор формул для матриц, обратных к тёплицевым и блочно-тёплицевым, можно найти в / 16, 17 /. Ниже мы остановимся подробнее на случае, когда матрицы, обратные к тёплицевым, обладают дополнительной спецификой, помимо существования представлений типа (4.3.7) или (4.3.9).

Вообще говоря, тёплицев тип обратной матрицей не наследуется. Однако возможны случаи сохранения тёплицевости, и все они охватываются следующим утверждением, обобщающим результат Хуанга-Клайна / 97 /.

Теорема 4.3.1. Для того чтобы невырожденная тёплицева матрица имела тёплицеву обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была либо треугольной, либо косой циркулянтной с коэффициентом скоса $\varphi \neq 0$.

Доказательство. Предположим дополнительно, что в невырожденной тёплицевой матрице $A = [a_{i-j}]_{i,j=1}^{n}$ также является невырожденной ее ведущая подматрица $\hat{A}$ порядка $n-1$. В этом случае в обратной матрице элемент $a_{11}^{(-1)}$ отличен от нуля; поэтому можно записать представление (4.3.9), вследствие которого получаем

$$a_{ij}^{(-1)} = a_{i-1,j-1}^{(-1)} + x_0^{-1}(x_{i-1}y_{n-j} - y_{i-2}x_{n+1-j}),$$

$$2 \le i,\ j \le n.$$

Если обратная матрица тёплицева, то выполняются соотношения

$$x_{i-1}y_{n-j} = y_{i-2}x_{n+1-j}, \quad 2 \le i,\ j \le n. \tag{4.3.32}$$

Пусть ведущая подматрица $\hat{A}$ вырожденная. Тогда рассмотрим семейство матриц вида $A^{(\varepsilon)} = A + \varepsilon I$, где ε – вещественное число. Уравнение $\det(\hat{A}+\varepsilon I_{n-1})=0$ имеет лишь конечное число корней. Поэтому существует $\varepsilon_0>0$ такое, что при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ матрица $A^{(\varepsilon)}$ и ее ведущая подматрица $\hat{A}^{(\varepsilon)}=\hat{A}+\varepsilon I_{n-1}$ порядка $n-1$ невырожденные. Для $A^{(\varepsilon)}$ запишем формулу (4.3.9); снабдив входящие в нее величины меткой ε, находим

$$x_0^{(\varepsilon)}\left(a_{ij}^{(-1)(\varepsilon)}-a_{i-1,j-1}^{(-1)(\varepsilon)}\right)=x_{i-1}^{(\varepsilon)}y_{n-j}^{(\varepsilon)}-y_{i-2}^{(\varepsilon)}x_{n+1-j}^{(\varepsilon)}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, вновь получаем (4.3.32).

Итак, независимо от вырожденности или невырожденности подматрицы $\hat{A}$, соотношения (4.3.32) выполняются. Для каждого i $(2\le i\le n)$ обе части (4.3.32) умножим на число $\bar{x}_{n+1-j}$ (комплексно сопряженное к x_{n+1-j}) и просуммируем по j $(2\le j\le n)$. Находим

$$x_{i-1}\alpha=y_{i-2}\beta,$$

где

$$\alpha=\sum_{j=2}^{n}y_{n-j}\bar{x}_{n+1-j},\quad \beta=\sum_{j=2}^{n}|x_{n+1-j}|^2.$$

Если $\beta=0$, то матрица A^{-1}, будучи тёплицевой, в то же время является правой треугольной, и такой же вид обязана иметь матрица A. Если $\beta\ne 0$, но $\alpha=0$, то матрица A^{-1} - левая треугольная, и такой же вид имеет матрица A. Если $\beta\ne 0$, $\alpha\ne 0$, то получаем $y_{i-2}=(\alpha/\beta)x_{i-1}$; или $a_{ij}^{(-1)}=(\alpha/\beta)a_{n,j-1}^{(-1)}$. Таким образом, матрица A^{-1} есть φ-косой циркулянт, где $\varphi=\alpha/\beta$. Остается учесть замкнутость множества φ-косых циркулянтов относительно обращения. Теорема доказана.

Рассмотрим матрицу $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ такую, что для некоторых неотрицательных целых чисел l и r, не превосходящих n, элемент a_{ij} может быть отличен от нуля в том и только в том случае, если выполняется условие $l-1\geqslant i-j\geqslant r-1$. Число l называется левой, а r - правой шириной ленты матрицы A. Известно (см. / 17 /), что для того чтобы невырожденная матрица имела правую (левую) ширину ленты r (l) и отличные от нуля элементы на диагонали $i-j=-r+1$ $(i-j=l-1)$, необходимо и достаточно, чтобы элементы обратной к ней матрицы при $i-j<r-1$ $(i-j>-l+1)$ совпадали с соответствующими элементами некоторой матрицы такого же порядка, имеющей ранг не выше $r-1$ $(l-1)$.

Изучим вопрос о том, в каких случаях для ленточных матриц обратные к ним будут тёплицевы. Прежде всего сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма 4.3.1. Пусть для целых $k\geqslant l$ при $k\geqslant i-j\geqslant l$ элементы a_{i-j} тёплицевой матрицы порядка n совпадают с элементами некоторой матрицы такого же порядка, имеющей ранг 1. Тогда выполняется одно из трех условий:

1) $k=n-1$, $a_{n-1}\ne 0$ и $a_{i-j}=0$, если $n-1>i-j\geqslant l$;

2) $l=-n+1$, $a_{-n+1}\ne 0$ и $a_{i-j}=0$, если $k\geqslant i-j>-n+1$;

3) существуют числа α,β, причем $\beta\ne 0$, и для всех i,j при $k\geqslant i-j\geqslant l$ имеют место равенства $a_{i-j}=\alpha\beta^{i-j}$.

Доказательство. Если $k\geqslant m\geqslant l$ и хотя бы одна диагональ $i-j=m$ при $n-1>m>-n+1$ состоит из нулей, то и все диагонали в этом интервале изменения m содержат только нули. Если же $k>l$ и указанные диагонали не имеют нулей, то возьмем две соседние диагонали и рассмотрим следующие уравнения относительно α и β:

$$a_m=\alpha\beta^m,\quad a_{m+1}=\alpha\beta^{m+1} \tag{4.3.33}$$

Если $a_{n-1}=0$, то непременно и $a_{n-2}=0$, иначе ранг тёплицевой матрицы будет не меньше 2. По этой же причине, если $a_{-n+1}=0$, то с необходимостью $a_{-n+2}=0$. Поэтому числа a_m и a_{m+1} оба отличны от нуля и α,β определяются однозначно. Далее, пусть $k\geqslant m+s\geqslant l$ и $k\geqslant m+s+1\geqslant l$. Если выполнено одно из равенств

$$a_{m+s}=\alpha\beta^{m+s},\quad a_{m+s+1}=\alpha\beta^{m+s+1},$$

то в силу (4.3.33) и условия леммы справедливо и другое равенство. Лемма доказана.

Следствие 1. Для тёплицевой матрицы $A=[a_{i-j}]$ ранг равен 1 в том и только в том случае, когда для всех i,j $a_{i-j}=\alpha\beta^{i-j}$ или же матрица имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} & 0 \\ \alpha & \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad A=\begin{bmatrix} & \alpha \\ 0 & \end{bmatrix}.$$

Следствие 2. Тёплицева матрица A порядка $n>2$ имеет трехдиагональную обратную в том и только том случае, когда для некоторых α, β и ненулевого γ она представима в виде

$$A=\gamma\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-2} & \alpha^{n-1} \\ \beta & 1 & \alpha & \dots & \alpha^{n-3} & \alpha^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta^{n-1} & \beta^{n-2} & \beta^{n-3} & \dots & \beta & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.3.34}$$

Предположим, что крайние диагонали матрицы A^{-1} ненулевые. Тогда каждый из треугольников матрицы A совпадает с таким же треугольником некоторой матрицы ранга I. При $n>2$ в любом из первых двух случаев, описанных в лемме 4.3.I, матрица оказывается вырожденной. Значит, имеет место третий случай, который и приводит к (4.3.34). Если какая-либо из крайних диагоналей в A^{-1} содержит хотя бы один нуль, то несложно показать, что в силу тёплицевости матрицы A вся эта диагональ нулевая, т.е. матрица оказывается треугольной (при этом $\alpha=0$ или $\beta=0$).

Теорема 4.3.3. Пусть матрица A блочного порядка n составлена из квадратных блоков a_{ij} $(1\le i, j\le n)$ и обладает блочной шириной ленты левой l и правой r, причем $l+r\le n$. Предположим, что A невырожденная и обратная к ней матрица блочно-тёплицева. Тогда A совпадает с блочно-тёплицевой матрицей, за исключением блоков a_{ij} при $1\le i<l$, $1\le j<r$ или $n-r+1<i\le n$, $n-l+1<j\le n$. Подматрица, содержащая блоки a_{ij} с номерами $1\le i\le l$, $1\le j\le r$ $(n-r+1\le i\le n,\ n-l+1\le j\le n)$, представима парным произведением блочно-тёплицевых блочно-трапециевидных левой и правой (правой и левой) матриц.

Доказательство. Воспользуемся формулами (4.3.I2) и (4.3.24) - получим два представления для A. Заметим, что по условию $x_{i-1}=0$ при $i>l$; $r_{j-1}=0$ при $j\le n-l+1$; $z_{j-1}=0$ при $j>r$; $y_{i-1}=0$ при $i\le n-r+1$. Вследствие этих соотношений и

с учетом условия $l+r\le n$ равенство $a_{ij}=a_{i-1,j-1}$ обеспечивается для всех пар i,j, не удовлетворяющих хотя бы одному из неравенств $1\le i\le l$, $1\le j\le r$ и хотя бы одному из неравенств $n-r+1<i\le n$, $n-l+1<j\le n$. Теорема доказана.

Заметим, что при представлении указанных в теореме 4.3.3 подматриц парными произведениями число блочных столбцов и число блочных строк соответственно первого и второго сомножителя может быть равно $\min(l,r)$.

4.4. Метод тёплицева погружения

Предположим, что матрица A порядка n задана в виде

$$A=T+\sum_{s=1}^{t} L_s R_s. \tag{4.4.I}$$

и образуем блочную матрицу

$$\hat{A}=\begin{bmatrix} T & L_1 & \dots & L_t \\ R_1 & -I & & \\ \dots & & \ddots & 0 \\ & 0 & & \\ R_t & & & -I \end{bmatrix}, \tag{4.4.2}$$

имеющую блочный порядок $t+1$ и блоки порядка n. Здесь мы проведем исследования довольно общего характера, опирающиеся на следующее почти очевидное утверждение (см. / 60 /).

Лемма 4.4.I. Для того чтобы матрица A вида (4.4.I) была обратимой, необходима и достаточна обратимость матрицы $\hat{A}$ вида (4.4.2). Матрица A^{-1} совпадает с левым верхним блоком в $\hat{A}^{-1}$. Множество всех решений системы $Ax=b$ совпадает с множеством векторов x_0 таких, что $A[x_0 \dots]'=[b\ 0 \dots 0]'$.

Предположим дополнительно, что матрицы T, L_s, R_s тёплицевы. Тогда в $\hat{A}$ каждый блок тёплицев, и поэтому - согласно лемме о перестановках уровней (см. § I.I) – с помощью перестановок строк и столбцов с одинаковыми номерами от тёплицево-блочной $\hat{A}$ можно перейти к блочно-тёплицевой $\tilde{A}$. Имея алгоритмы, работающие с блочно-тёплицевой матрицей $\tilde{A}$, мы можем получить алгоритмы для матрицы A вида (4.4.I). Этот метод конструирования алгоритмов и будем называть методом тёплицева погружения.

В действительности при использовании метода тёплицева погружения приходится опираться не на тёплицевость непосредственно, а на некоторые (связанные с ней) более общие свойства матриц. В этом разделе эти свойства и будут изучаться. Ниже рассматриваются матрицы с элементами, принадлежащими произвольному кольцу Ω с единицей I.

Пусть G_p обозначает тип $p \times p$-матриц общего вида, а Γ, Σ_1 и Σ_2 суть такие стандартные типы матриц (см. § I.I), что для любого p обратная к матрице типа ΓG_p выражается суммой k парных произведений, где левый и правый сомножители имеют тип $\Sigma_1 G_p$ и $\Sigma_2 G_p$ соответственно.

Теорема 4.4.I. Пусть обратимая матрица A имеет вид (4.4.I), где матрицы T, L_s, R_s имеют тип Γ. Тогда обратная матрица представима суммой $k(t+1)$ парных произведений, в которых левые и правые сомножители имеют тип Σ_1 и Σ_2 соответственно.

Доказательство. Согласно общему предположению тип Γ является стандартным, т.е. $0 \in \Gamma$ и $-I \in \Gamma$. Поэтому матрица (4.4.2) имеет тип $G_{t+1}\Gamma$, и согласно лемме о перестановках уровней существует матрица перестановки P такая, что матрица $\tilde{A} = P\hat{A}P^T$ имеет тип ΓG_{t+1}. Значит, по условию теоремы,

$$\tilde{A}^{-1} = \sum_{l=1}^{k} \tilde{L}_l \tilde{R}_l ,$$

где $\tilde{L}_l$ и $\tilde{R}_l$ имеют соответственно тип $\Sigma_1 G_{t+1}$ и $\Sigma_2 G_{t+1}$. Следовательно,

$$\hat{A}^{-1} = \sum_{l=1}^{k} (P^T \tilde{L}_l P)(P^T \tilde{R}_l P),$$

причем в силу леммы о перестановках уровней левый и правый сомножители имеют соответственно тип $G_{t+1}\Sigma_1$ и $G_{t+1}\Sigma_2$. Теперь остается лишь принять во внимание лемму 4.4.I. Теорема доказана.

Теорема 4.4.2. Предположим, что обратимая матрица задана как сумма матрицы типа Γ и m парных произведений матриц, каждая из

которых есть сумма некоторой матрицы типа Γ и сумма l парных произведений матриц типа Γ. Тогда обратная матрица представима суммой $k(m+1)(2l+1)$ парных произведений матриц типов Σ_1 и Σ_2.

Доказательство. Имея в виду представление

$$A = T_0 + \sum_{i=1}^{m} \Big(T_i + \sum_{j=1}^{l} T_{ij} V_{ij}\Big)\Big(S_i + \sum_{j=1}^{l} S_{ij} W_{ij}\Big),$$

где все матрицы справа имеют тип Γ, сформулируем блочную матрицу

$$\begin{bmatrix} T_0 & T_1 + \sum T_{ij} V_{ij} & \cdots \\ S_1 + \sum S_{ij} W_{ij} & -I & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

и запишем ее как сумму парных произведений матриц типа $G_{m+1}\Gamma$:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} T_0 & T_1 & \dots & T_m \\ S_1 & -I & & 0 \\ \dots & & \ddots & \\ S_m & 0 & & -I \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{l} \begin{bmatrix} 0 & T_{1j} & \dots & T_{mj} \\ & & & \\ & & 0 & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & V_{1j} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & V_{mj} \end{bmatrix} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & S_{1j} & 0 \\ 0 & & \ddots \\ & & S_{mj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \\ W_{1j} & 0 \\ \dots & \\ W_{mj} & \end{bmatrix}.$$

8957

Далее от $\hat{A}$ переходим к матрице $\tilde{A} = PAP^T$, которая есть сумма матрицы типа ΓG_{m+1} и $2l+1$ парных произведений матриц типа ΓG_{m+1}. Значит, по теореме 4.4.I, $\tilde{A}^{-1}$ есть сумма $k(2l+1)$ парных произведений матриц типов $\Sigma_1 G_{m+1}$ и $\Sigma_2 G_{m+1}$. Учитывая лемму 4.4.I, получаем требуемое. Теорема доказана.

В конкретных применениях метод тёплицева погружения допускает различные модификации, например, в случае вещественной симметричной матрицы A вместо (4.4.I) более удобно использовать представление

$$A = T + \sum_{s=1}^{t} \delta_s L_s L_s^T, \tag{4.4.3}$$

где $\delta_s = \pm 1$, матрицы T, L_s вещественные и при этом T симметричная. Теперь тёплицево-блочная матрица $\hat{A}$ строится следующим образом:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} T & L_1 & \dots & L_t \\ L_1^T & -\delta_1 I & & O \\ \dots & & \ddots & \\ L_t^T & O & & -\delta_t I \end{bmatrix}. \tag{4.4.4}$$

Эта матрица симметричная, так же как и блочно-тёплицева матрица $\tilde{A}$, к которой $\hat{A}$ приводится перестановками строк и столбцов. Если матрица A положительно определенная, то ее всегда можно представить в виде (4.4.3), где $\delta_s = -1$ для всех s, а матрицы L_s треугольные, однако, вообще говоря, разных наименований при различных s. Соответствующие матрицы $\hat{A}$ и $\tilde{A}$ будут также положительно определенными.

4.5. Быстрое вычисление следов

Пусть имеется некоторый запас тёплицевых матриц $\{A, B, \dots\}$ порядка n. След любой из них вычисляется, очевидно, с помощью одной операции: $\mathrm{tr}\, A = n a_0$. Какие затраты потребуются, чтобы найти следы матриц A^2, AB и т.п.? Этот вопрос связан с построением опти-

мальных циркулянтных предобусловливателей. Он же требует изучения и в случае дважды тёплицевых матриц A, B, ..., связанном с дважды циркулянтным предобусловливанием (см. § 3).

В действительности при построении предобусловливателей необходимо быстро решать несколько более общую задачу. Именно, для матрицы $M = [m_{ij}]$, имеющей вид A^2, AB и т.п., нужно находить величины $\mathrm{tr}\, s_l$, где

$$s_l = s_l(M) = \sum_{i-j=l \pmod{n}} m_{ij}, \quad l = 0, 1, \dots, n-1. \tag{4.5.I}$$

Лемма 4.5.I. Пусть $M = LR$, где L - (блочная) тёплицева треугольная с первым (блочным) столбцом $[a_0 \dots a_{n-1}]$, R - (блочная) тёплицева правая треугольная с первой (блочной) строкой $[b_0 \dots b_{n-1}]$. Тогда

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_{n-1} \end{bmatrix} = H_1 \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} + H_2 \begin{bmatrix} 0 \\ (n-1) b_1 \\ (n-2) b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{4.5.2}$$

где

$$H_1 = \begin{bmatrix} n a_0 & (n-1) a_1 & (n-2) a_2 & \dots & a_{n-1} \\ (n-1) a_1 & (n-2) a_2 & \dots & \dots & \\ (n-2) a_2 & \dots & \dots & & \\ \dots & & & & O \\ a_{n-1} & & & & \end{bmatrix}, \tag{4.5.3}$$

8957

$$H_2 = \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & O & & 0 & a_0 \\ & & 0 & a_0 & a_1 \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & a_0 & \dots & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \end{bmatrix}. \qquad (4.5.4)$$

Доказательство. Учитывая треугольный вид матриц L, R, находим $m_{ij} = m_{i-1,j-1} + a_i b_j$. Вследствие этих равенств получаем

$$s_k = \sum_{j=0}^{n-k-1} m_{k+j,j} + \sum_{j=0}^{k-1} m_{j,n-k+j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-k-1} (n-k-j) a_{k+j} b_j + \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) a_j b_{n-k+j}.$$

Два слагаемых в правой части соответствуют двум слагаемым в (4.5.2). Лемма доказана.

Следствие I. В условиях леммы 4.5.I величины s_l $(l=0,1,\dots,n-1)$ могут быть вычислены с затратой $O(n\log_2 n)$ операций.

Достаточно обратить внимание на то, что матрицы H_1 и H_2 из (4.5.2) ганкелевы, а умножение ганкелевой матрицы на вектор очевидно сводится к апериодической свертке, которая и реализуется с затратой $O(n\log_2 n)$ операций (см. § I).

Следствие 2. В условиях леммы 4.5.I величины $s_l(RL)$ $(l=0,1,\dots,n-1)$ могут быть вычислены с затратой $O(n\log_2 n)$ операций.

Несложно проверить, что для произвольной матрицы M имеют место соотношения

$$s_l(M) = s_l(JMJ), \quad l = 0,1,\dots,n-1, \qquad (4.5.5)$$

где

$$J = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}$$

Таким образом, $s_l(RL) = s_{n-l}((JRJ)(JLJ))$; остается заметить, что матрицы JRJ и JLJ – треугольные, соответственно левая и правая, т.е. можно воспользоваться следствием I.

Следствие 3. Для произвольных тёплицевых матриц A и B порядка n величины $s_l(AB)$ $(l=0,1,\dots,n-1)$ могут быть вычислены с затратой $O(n\log_2 n)$ операций.

Запишем $A = L_A + R_A$, $B = L_B + R_B$, где матрицы L_A, L_B – тёплицевы левые треугольные и R_A, R_B – тёплицевы правые треугольные. Тогда $AB = T + L_A R_B + R_A L_B$, где матрица $T = L_A L_B + R_A R_B$ тёплицева. Первые строку и столбец в T можно получить с затратой $O(n\log_2 n)$ операций. Далее,

$$s_l(AB) = s_l(T) + s_l(L_A R_B) + s_l(R_A L_B);$$

остается обратиться к следствиям I, 2.

В заключение рассмотрим случай блочных матриц L и R; пусть a_i, b_i – блоки порядка p. Тогда задача вычисления величин $\mathrm{tr}\, s_l$ сводится в силу (4.5.2) к двум задачам следующего типа: по заданным блочным циркулянтам $\tilde A = [\tilde a_{i-j}]$, $\tilde B = [\tilde b_{i-j}]$ блочного порядка N найти $\mathrm{tr}\,\tilde c_{i-j}$, где $\tilde C = [\tilde c_{i-j}] = \tilde A \tilde B$. Положим

$$\begin{bmatrix} \hat a_0 \\ \dots \\ \hat a_{N-1} \end{bmatrix} = (F_N \times I_p) \begin{bmatrix} \tilde a_0 \\ \dots \\ \tilde a_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \hat b_0 \\ \dots \\ \hat b_{N-1} \end{bmatrix} = (F_N \times I_p) \begin{bmatrix} \tilde b_0 \\ \dots \\ \tilde b_{N-1} \end{bmatrix}. \qquad (4.5.6)$$

Тогда (см. § I)

$$\begin{bmatrix} \tilde c_0 \\ \dots \\ \tilde c_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} (F_N^* \times I_p) \begin{bmatrix} \hat a_0 & \hat b_0 \\ & \dots \\ \hat a_{N-1} & \hat b_{N-1} \end{bmatrix}. \qquad (4.5.7)$$

Следовательно,

$$\begin{bmatrix} \mathrm{tr}\,\tilde c_0 \\ \dots \\ \mathrm{tr}\,\tilde c_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} F_n^* \begin{bmatrix} \mathrm{tr}(\hat a_0 \hat b_0) \\ \dots \\ \mathrm{tr}(\hat a_{N-1} \hat b_{N-1}) \end{bmatrix}. \qquad (4.5.8)$$

В качестве N можно взять любое положительное целое число не меньше чем $2n - 1$.

Если блоки a_i, b_i не обладают какой-либо спецификой, то величины $\operatorname{tr} s_l$ $(l = 0, 1, \ldots, n-1)$ можно найти с затратой $O(p^2 N \log_2 N)$ операций - в соответствии с (4.5.6)-(4.5.8). Если же блоки a_i, b_i тёплицевы, то и $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i$ тёплицевы; поэтому общее число операций снижается до $O(pN\log_2 N)$. Соотношения (4.5.6)-(4.5.8) позволяют также строить оптимальные дважды циркулянтные предобусловливатели для дважды тёплицевых матриц порядка n (см. § 3) с затратой $O(n \log_2 n)$ операций; при построении соответствующего алгоритма нужно лишь учесть, что для любых матриц $A_1, \ldots, A_n$ одного порядка и любых чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ выполняются соотношения

$$s_l(\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n) = \lambda_1 s_l(A_1) + \ldots + \lambda_n s_l(A_n).$$

§ 5. Ускоренные реализации метода окаймления

5.1. Метод окаймления и особенности его применения

Пусть задана матрица $A = [a_{ij}]_{ij=0}^{n-1}$ и предполагается, что она невырожденная вместе со своими ведущими подматрицами $A_k = [a_{ij}]_{ij=0}^{k}$. Классический метод окаймления / 73 / заключается в указании рекуррентного способа вычисления матриц $A_0^{-1}, A_1^{-1}, \ldots, A_{n-1}^{-1}$. Однако во многих случаях, особенно для матриц специального вида, есть основания отказаться от вычисления всех элементов обратных матриц, а вместо этого перейти к получению их "в операторном виде". Последнее означает, что имеются некоторые представления обратных матриц, допускающие быстрое умножение их на вектор, а задача обращения матрицы ставится как задача вычисления параметров, входящих в эти представления. Описанный подход позволяет получать весьма экономичные реализации метода окаймления в случае матриц, обладающих различного рода спецификой.

Напомним основную конструкцию метода окаймления, применяемого к решению линейных алгебраических систем. Наряду с исходной системой

$$Ax = b,$$
$$x = [x_0 \ldots x_{n-1}]', \quad b = [b_0 \ldots b_{n-1}]' \tag{5.1.1}$$

рассматривается последовательность усеченных систем

$$A_k x^{(k)} = b^{(k)},$$
$$x^{(k)} = [x_0^{(k)} \ldots x_{n-1}^{(k)}]', \quad b^{(k)} = [b_0 \ldots b_k]'. \tag{5.1.2}$$

Легко проверить, что вектор $x^{(k)} - [x^{(k-1)} \; 0]'$ пропорционален последнему столбцу в A_k^{-1}; соответствующий коэффициент пропорциональности легко вычисляется, причем для этого нужно знать лишь вектор $x^{(k-1)}$ - на этом наблюдении и основывается метод окаймления для решения систем.

Более точно, предположим, что для некоторого $k \geqslant 1$ матрица A_k невырожденная. Обозначим $y^{(k)}$ последний столбец в A_k^{-1}. Тогда если $k-1$-я усеченная система (5.1.2) совместна и $x^{(k-1)}$ есть ее решение, то выполняются соотношения

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} x^{(k-1)} \\ 0 \end{bmatrix} + y^{(k)} \lambda_k, \tag{5.1.3}$$

$$\lambda_k = b_k - \sum_{j=0}^{k-1} a_{kj} x_j^{(k-1)} \tag{5.1.4}$$

Реализация соотношений (5.1.3), (5.1.4) требует выполнения $O(k)$ арифметических операций. При изменении k от 0 до $n-1$ это составит $O(n^2)$ операций. Следовательно, для того чтобы построить $O(n^2)$-алгоритм решения системы (5.1.1), остается найти ускоренный способ рекуррентного вычисления векторов $y^{(k)}$.

Заметим, что описанные здесь построения остаются в силе, если матрицы и векторы являются блочными. Единственное ограничение на матрицу A, которое в последующих разделах будем считать выполненным, - это обратимость подматриц A_k для всех $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Для записи алгоритмов ниже мы будем использовать операторы $\downarrow$ и $\uparrow$, переводящие m-мерный вектор $x = [x_0 \ldots x_{m-1}]'$ в $m+1$-векторы:

$$\downarrow x \equiv [x_0 \ldots x_{m-1} \; 0]', \tag{5.1.5}$$

$$\uparrow x \equiv [0 \; x_0 \ldots x_{m-1}]'. \tag{5.1.6}$$

Нам понадобятся также операторы $\uparrow$ и $\downarrow$, действующие по сле-