

и положим

$$[\Phi^{(k)}(z) \Psi^{(k)}(z)] = [\Phi^{(k-1)}(z) \Psi^{(k-1)}(z)] \begin{bmatrix} I - \beta_k \delta_k z & \beta_k z \\ \beta_k \delta_k & -\beta_k \end{bmatrix}, \quad (8.2.14)$$

$$[x^{(k)}(z) y^{(k)}(z)] = [x^{(k-1)}(z) y^{(k-1)}(z)] \begin{bmatrix} I - \beta_k \delta_k z & -\beta_k z \\ \beta_k \delta_k & -\beta_k \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$[x^{(n-1)}(z) y^{(n-1)}(z)] = [a_0^{-1} \ a_0^{-1}] R^{0, n-1}(z), \quad (8.2.15)$$

где

$$R^{kl}(z) = \begin{bmatrix} I - \beta_{k+1} \delta_{k+1} z & \beta_{k+1} z \\ \beta_{k+1} \delta_{k+1} & -\beta_{k+1} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} I - \beta_l \delta_l z & \beta_l z \\ \beta_l \delta_l & -\beta_l \end{bmatrix}, \quad (8.2.16)$$

$0 \leq k < l \leq n-1.$

Поставим задачу: по заданным n , $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Psi^{(0)}(z)$ вычислить $R^{0, n-1}(z)$. Ее дихотомия осуществляется подобно тому, как это сделано в алгоритме \mathcal{F} . В результате получается быстрый алгоритм, по вычислительным затратам аналогичный \mathcal{F} . Заметим, что как для этого алгоритма, так и для \mathcal{F} можно построить модификации, переводящие вычисления в "частотную область", - по аналогии с алгоритмом F_k для трёхдиагональных матриц.

1. Ахо, Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. - М.: Мир, 1979. - 536 с.
2. Бабенко К.И. О трёхдиагональных и ганкелевых матрицах//УМН. - 1986. - Т. 41, № 1. - С. 171-178.
3. Бадева В., Морозов В.А. Алгоритмы быстрого и ускоренного решения некоторых специальных систем линейных алгебраических уравнений //Численный анализ на Фортране. Вып. 20. - М.: МГУ, 1977. - С. 80-88.
4. Балинский А.И., Ли Пон-ы, Об обращении ганкелевых и трёхдиагональных матриц//Мат.методы и физ.-мех.полю. - 1979. - № 9. - С. 31-37.
5. Банч Дж.Р. К решению трёхдиагональных систем линейных уравнений //Вычис.методы линейной алгебры: Тр. Всес.конф. - М.: ОВМ АН СССР, 1983. - С. 7-24.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987. - 600 с.
7. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. - М.: Наука, 1985. - 256 с.
8. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К., Ништ М.И. Метод дискретных вихрей в задачах аэродинамики и теория многомерных сингулярных интегральных уравнений//VI Международная конференция по численным методам в гидродинамике. - Тбилиси. - 1978. - С. 30-34.
9. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. - М.: Мир, 1989. - 448 с.
10. Блехер П.М. Обращение трёхдиагональных матриц//Тр. Моск.мат.общества. - 1979. - Т. 40. - С. 207-240.
11. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. - М.: Наука, 1977. - 304 с.
12. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. - М.: Наука, 1984. - 320 с.
13. Воеводин В.В., Свешников А.Г., Тиртышников Е.Е. Эффективный численный метод решения интегрального уравнения II рода в задачах электродинамики//Вестн. МГУ. Вычисл.матем. и киберн. - 1980. - № 1. - С. 14-26.
14. Воеводин В.В., Тиртышников Е.Е. Численные методы решения задач с матрицами типа трёхдиагональных//ЖВМ и МФ. - 1981. - Т. 21, № 3. - С. 531-544.

15. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Об обобщении методов сопряженных градиентов//Числ.методы алгебры.- М.: МГУ, 1981.- С. 3-9.
16. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычисления с трёхдиагональными матрицами//Вычисл.процессы и системы. Вып. I.- М.: Наука, 1983.- С. 124-266.
17. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычислительные процессы с трёхдиагональными матрицами.- М.: Наука, 1987.- 320 с.
18. Воеводина С.Н. Клеточно-трёхдиагональные матрицы и интегральные уравнения Фредгольма//Вычисл.методы и программирование. Вып. 24.- М.: МГУ, 1975.- С. 94-100.
19. Воеводина С.Н., Дмитриев В.И. Дифракция на конечной решетке круговых цилиндров//Прямые и обратные задачи теории антенн.- М.: МГУ, 1976.
20. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- М.: Наука, 1967.- 576 с.
21. Гохберг И.Ц., Семенцул А.А. Об обращении конечных трёхдиагональных матриц и их непрерывных аналогов//Матем.исследов.- 1972.- Т. 7, № 2(24).- С. 201-223.
22. Гохберг И.Ц., Хайниг Г. Об обращении конечных трёхдиагональных матриц//Матем.исследов.- 1973.- Т. 8, № 3(29).- С. 151-156.
23. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы и решения.- М.: Наука, 1971.- 352 с.
24. Грэгг В.Б. Положительно определенные трёхдиагональные матрицы, процесс Хессенберга для изометричных операторов и квадратура Гаусса на единичной окружности//Численные методы линейной алгебры.- М.: МГУ, 1982.- С. 16-32.
25. Грэгг В.Б., Уорнер Д.Д. О быстром решении систем линейных уравнений с положительно определенной ганкелевой матрицей//Численные методы линейной алгебры.- М.: МГУ, 1982.- С. 10-15.
26. Дмитриева И.В., Тыртышников Е.Е. К численному решению некоторых классов интегральных уравнений//Вестн.МГУ. Вычисл.матем. и киберн.- 1986.- № 1.- С. 3-6.
27. Енгибарян Н.Б., Мнацаканян М.А. Линейные алгебраические системы с трёхдиагональными матрицами//ЖВМ и МФ.- 1977.- Т. 17, № 5.- С. 1102-1116.
28. Икрамов Х.Д. О сложности некоторых спектральных задач для трёхдиагональных матриц//ЖВМ и МФ.- 1981.- Т. 21, № 4.- С. 1031-1035.
29. Икрамов Х.Д. О быстрых методах решения некоторых классов вырожденных трёхдиагональных линейных систем//Вестн.МГУ. Вычисл.матем. и киберн.- 1982.- № 4.- С. 55-57.

30. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений.- М.: Наука, 1984.- 192 с.
31. Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трёхдиагональные матрицы и их приложения.- М.: Наука, 1985.- 208 с.
32. Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Алгебраические основы численного анализа.- Новосибирск: Наука, 1986.- 184 с.
33. Ильин В.П., Лиснянский И.М. О решении алгебраических уравнений с ленточными трёхдиагональными матрицами//Сиб.матем.ж.- 1978.- Т. 19 № 1.- С. 44-48.
34. Иохвидов И.С. Ганкелевы и трёхдиагональные матрицы и формы.- М.: Наука, 1974.- 263 с.
35. Ким Г.Д., Чепурина И.В. Решение систем с трёхдиагональной матрицей в пакете линейной алгебры//Вычисл.методы и программирование. Вып. 22.- М.: МГУ, 1974.- С. 136-142.
36. Краснов С.А., Тыртышников Е.Е. Векторизованные алгоритмы и систолические массивы для трёхдиагональных систем//Архитектура ЭВМ и численные методы.- М.: ОВМ АН СССР, 1985.- С. 33-56.
37. Краснов С.А., Тыртышников Е.Е. Систолический массив для систем с матрицами малого трёхдиагонального ранга//Архитектура ЭВМ и численные методы.- М.: ОВМ АН СССР, 1987.- С. 49-61.
38. Краснов С.А., Тыртышников Е.Е. Новый векторный алгоритм и систолический массив для решения систем с ганкелевой матрицей//Архитектура ЭВМ и численные методы.- М.: ОВМ АН СССР, 1987.- С. 12-25.
39. Крейн М.Г., Наймарк М.А. Метод симметричных и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений.- Харьков, 1936.- 44 с.
40. Кутиков Л.М. Обращение корреляционных матриц и некоторые задачи самонастройки//Изв.АН СССР. Сер.Техн.киберн.- 1965.- № 5.- С. 42-47.
41. Кутиков Л.М. О структуре матриц, обратных корреляционным матрицам векторных случайных процессов//ЖВМ и МФ.- 1967.- Т. 7, № 4.- С. 764-773.
42. Ландер Ф.И. Безуглянт и обращение ганкелевых и трёхдиагональных матриц//Матем.исследов.- 1974.- № 2(32).- С. 69-87.
43. Ли Гюн-ы. Новый алгоритм обращения ганкелевых и трёхдиагональных матриц//Укр.матем.ж.- 1984.- Т. 36, № 6.- С. 715-720.
44. Лифанов И.К., Тыртышников Е.Е. Трёхдиагональные матрицы и сингулярные интегральные уравнения//Вычисл.процессы и системы. Вып. 7.- М.: Наука, 1989.

46. Лифанов И.К., Михайлов А.А. Математические вопросы расчета безотрывного обтекания тел//Применение ЭВМ для исследования аэродинамических характеристик летательных аппаратов. Труды ВВИА им. Н.Е. Жуковского. Вып. 1313.- М., 1986.- С. 454-464.
47. Нерсесян А.Б., Папоян А.А. Построение матрицы, обратной к сумме матриц Тёплица и Ганкеля//Изв. АН Арм.ССР. Матем.- 1983.- Т. 18-№ 2.- С. 150-160.
48. Нечепуренко Ю.М. Некоторые свойства матрицы Коши//Архитектура ЭВМ и численные методы.- М.: ОВМ АН СССР, 1988.- С. 93-102.
49. Парийский В.С. Экономичные методы численного решения уравнений в свертках и систем алгебраических уравнений с трёхдиагональными матрицами.- М.: ВЦ АН СССР, 1977.- 75 с.
50. Пустыльников Л.Д. Трёхдиагональные и ганкелевы матрицы и их применение//УМН.- 1984.- Т. 39.- № 4(238).- С. 53-84.
51. Руссаковский Е.М. О ганкелевых и трёхдиагональных матрицах и безугловатости. I, II//Теор. функций, функц. анализ и их приложения.- 1979, 1980.- Т. 32, 33.- С. 77-82, 119-124.
52. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений.- М.: Наука, 1978.- 592 с.
53. Сахнович А.Л. Об одном методе обращения трёхдиагональных матриц//Матем. Исследов.- 1973.- № 4(30).- С. 180-186.
54. Сегё Г. Ортогональные многочлены.- М.: Физматгиз, 1962.
55. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.- М.: Наука, 1979.- 288 с.
56. Тихонов А.Н., Дмитриев В.И. Методы расчета распределения тока в системе вибраторов и диаграммы направленности этой системы//Вычисл. методы и программирование. Вып. 12.- М.: МГУ, 1968.- С. 3-8.
57. Третьяков А.А., Тиртышников Е.Е. Транспонирование больших прямоугольных матриц//Численные методы алгебры.- М.: МГУ, 1981.- С. 1-8.
58. Тиртышников Е.Е. О некоторых задачах, связанных с трёхдиагональными матрицами//Численный анализ на Фортране. Методы и алгоритмы.- М.: МГУ, 1979.- С. 105-113.
59. Тиртышников Е.Е. О решении систем с матрицами типа трёхдиагональных//Численный анализ на Фортране. Вычисл. методы и инструмент. системы.- М.: МГУ, 1979.- С. 60-72.
60. Тиртышников Е.Е. О суммах произведений трёхдиагональных матриц//Вычисл. методы линейной алгебры. Материалы Всес. конф.- Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1980.

61. Тиртышников Е.Е. Некоторые алгоритмы, связанные с матрицами типа трёхдиагональных//Вычисл. методы и программирование. Вып. 35.- М.: МГУ, 1981.- С. 158-180.
62. Тиртышников Е.Е. Об алгоритмах дискретного преобразования Фурье//Числ. методы алгебры.- М.: МГУ, 1981.- С. 10-26.
63. Тиртышников Е.Е. О сложности некоторых алгебраических задач//Методы и алгоритмы в численном анализе.- М.: МГУ, 1982.- С. 98-107.
64. Тиртышников Е.Е. О формах записи алгоритмов//Архитектура ЭВМ и численные методы.- М.: ОВМ АН СССР, 1984.- С. 137-144.
65. Тиртышников Е.Е. Возможности параллелизма в нелинейных итерационных процессах//Архитектура ЭВМ и численные методы.- М.: ОВМ АН СССР, 1987.- С. 80-88.
66. Тиртышников Е.Е. Новые экономичные и быстрые алгоритмы для специальных классов трёхдиагональных систем.- Препринт/ОВМ АН СССР.- М., 1987.- № 144.- 22 с.
67. Тиртышников Е.Е. Параллельные алгоритмы в задачах с трёхдиагональными матрицами//Вычисл. процессы и системы. Вып. 5.- М.: Наука, 1987.- С. 51-67.
68. Тиртышников Е.Е. Конструктивный подход к разработке векторных и быстрых алгоритмов для матриц специального вида//Методы матем. физики.- М.: ОВМ АН СССР, 1988.- С. 117-150.
69. Тиртышников Е.Е. Об одном классе вырожденных систем//Архитектура ЭВМ и численные методы.- М.: ОВМ АН СССР, 1988.- С. 120-128.
70. Тиртышников Е.Е. Векторные алгоритмы в алгебраических задачах//Вычисл. процессы и системы. Вып. 6.- М.: Наука, 1988.- С. 257-263.
71. Тиртышников Е.Е. Новые быстрые алгоритмы для систем с ганкелевой и трёхдиагональными матрицами//ЖВМ и МФ.- 1989.- Т. 29.- № 5.- С. 645-652.
72. Тиртышников Е.Е. Хрычкова Т.С. О возможности экономии машинных ресурсов при решении некоторых интегральных уравнений электродинамики//Числ. анализ на Фортране. Методы и алгоритмы.- М.: МГУ, 1980.- С. 76-82.
73. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры.- М.-Л.: Физматгиз, 1963.- 734 с.
74. Цецохо В.А. О методе коллокации решения интегральных уравнений первого рода со слабыми особенностями в случае разомкнутых контуров//Обратные задачи и интерпретация геофизических наблюдений.- Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983.- С. 82-94.

75. Ammar G.S., Gregg W.B. Superfast solution of real positive definite Toeplitz systems//SIAM J. Matrix Anal.Appl.- 1988.-V. 9, N 1.- P. 61-76.
76. Arushanian O.B., Samarin M.K., Voevodin V.V., Tyrtysnikov E.E., Garbow B.S., Boyle J.M., Cowell W.R., Dritz K.W. The Toeplitz package user's guide.- Argonne Nat.Lab., 1983.- ANL-83-16.- 128 p.
77. Axelsson O., Lindskog G. On the rate of convergence of the preconditioned conjugate gradient method//Numer.Math.- 1986.- V. 13, N 5.- P. 499-523.
78. Baxter G., Hirshman I.I. An explicit inversion formula for finite section Wiener-Hopf operators//Bull.AMS.- 1964.- N 70.- P. 820-823.
79. Bistriz Y., Kailath T. Inversion and factorization of non-Hermitian quasi-Toeplitz matrices//Linear Alg.Appl.- 1988.- N 98.- P. 77-121.
80. Bitmead R.R., Anderson B.D.O. Asymptotically fast solution of Toeplitz and related systems of linear equations//Linear Alg. Appl.- 1980.- N 34.- P. 103-116.
81. Bottcher A., Silbermann B. Invertibility and asymptotics of Toeplitz matrices.- Berlin: Academic-Verlag, 1983.
82. Brent R.P., Gustavson F.G., Yun D.Y.Y. Fast solution of Toeplitz systems of equations and computation of Padé approximants//J. Algorithms.- 1980.- N 1.- P. 259-295.
83. Bultheel A. Triangular decomposition of Toeplitz and related matrices: a guided tour in the algorithmic aspects//Bull.Soc. Math.Belg.- 1985.- A37, N 2.- P. 101-141.
84. Chan R.H., Strang G. The asymptotic Toeplitz-circulant eigenvalue problem//Numer.Anal.Rep. 87-5.-Mass.Inst. of Technology, 1987.- 31 p.
85. Cornyn J.J. Direct methods for solving systems of linear equations involving Toeplitz or Hankel matrices//NRL memorandum rep. N 2920.- N.Y.: Naval Research Lab., 1974.
86. Cybenko G. The numerical stability of the Levinson-Durbin algorithm for Toeplitz systems of equations//SIAM J.Sci.Stat.Comput.- 1980.- V. 1, N. 3.- P. 303-319.
87. Dellwo D.R. Accelerated refinement with applications to integral equations//SIAM J.Numer.Anal.- 1988.- V. 25, N 6.- P. 1327-1339.
88. Delsarte P., Genin Y.V. The split Levinson algorithm//IEEE Trans.- 1986.- ASSP-34.- P. 470-478.

89. Duhamel P. Implementation of split-radix FFT algorithms for complex, real and real-symmetric data//IEEE Trans.- 1986.- ASP-34.- P. 285-295.
90. Durbin J. The fitting of time series models//Rev.Int.Inst. Statist.- 1960.- V. 28, N 3.- P. 233-243.
91. Friedlander B., Morf M. Efficient inversion formulae for sums of products of Toeplitz and Hankel matrices//Proc. of 18th Annu.Allerton Conf. on Communications, Control and Computing.- 1980.- P. 574-583.
92. Gohberg I., Kailath T., Koltracht I. Efficient solution of linear systems of equations with recursive structure//Linear Alg. Appl.- 1986.- N 80.- P. 80-113.
93. Gohberg I., Kailath T., Koltracht I., Lancaster P. Linear complexity parallel algorithms for linear systems of equations with recursive structure//Linear Alg.Appl.- 1987.- N 88/89.- P. 271-315.
94. Heinig G., Rost K. Algebraic methods for Toeplitz-like matrices and operators.- Berlin: Academic-Verlag, 1984.
95. Heinig G., Rost K. Fast inversion of Toeplitz-plus-Hankel matrices//Wiss.Z.d.Techn.Hochsch.Karl-Marx-Stadt.- 1985.- V. 27, N 1.- P. 66-71.
96. de Hoog F. A new algorithm for solving Toeplitz systems of equations//Linear Alg.Appl.- 1987.- N 88/89.- P. 123-138.
97. Huang N.M., Cline R.E. Inversion of persymmetric matrices having Toeplitz inverses//J.Assoc.Comput.Mech.- 1972.- V. 19, N 3.- P. 437-444.
98. Kailath T., Kung S.Y., Morf M. Displacement ranks of matrices and linear equations//J.Math.Anal.Appl.- 1979.- V. 68, N 2.- P. 395-407.
99. Kailath T., Vieria A., Morf M. Inverses of Toeplitz operators, innovations and orthogonal polynomials//SIAM Rev.- 1978.- V. 20, N 1.- P. 106-119.
100. Kumar R. A fast algorithm for solving Toeplitz system of equations//IEEE Trans.- 1985.- ASSP-33.- P. 254-267.
101. Levinson N. The Wiener RMS error criterion in filter design and prediction//J.Math. and Phys.- 1947.- N 25.- P. 261-278.
102. Marple L. A new autoregressive spectrum analysis algorithm//IEEE Trans.- 1980.- ASSP-28.- N 4.- P. 441-454.
103. Merchant G.A., Parks T.W. Efficient solution of Toeplitz-plus-Hankel coefficients matrix systems of equations//IEEE Trans.- 1982.- ASSP-30.- P. 40-44.

104. Muir T. Theory of circulants from 1900 to 1920//Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh.- 1923.- N 44.- P. 218-241.

105. Parter S.V. On the distribution of the singular values of Töeplitz matrices//Linear Alg.Appl.- 1986.- N 80.- P. 115-130.

106. Sexton H., Shenea M., Speiser J. Remarks on a displacement rank inversion method for Töeplitz systems//Linear Alg.Appl.- 1982.- N 45.- P. 127-130.

107. Sherman P.J. Circulant approximations of the inverses of Töeplitz matrices and related quantities with applications to stationary random processes//IEEE Trans.- 1985.- ASSP-33.- P. 1630-1632.

108. Strang G. A proposal for Töeplitz matrix calculations//Studies in Appl.Math.- 1986.- N 74.- P. 171-176.

109. Töeplitz O. Zur Theorie der quadratischen und bilinearen unendlichvielen Veränderlichen, I Teil: Theorie des L-Formen//Math. Ann.- 1911.- N 70.- P. 351-376.

110. Trench W.F. An algorithm for the inversion of finite Töeplitz matrices//SIAM J.Appl.Math.- 1964.- V. 12, N 3.- P. 515-522.

111. Tyrtshnikov E.E. Fast algorithms for block Töeplitz matrices//Sov.J.Numer.Anal.Math.Modelling.- 1985.- V. 1, N 2.- P. 121-139.

112. Tyrtshnikov E.E. New cost-effective and fast algorithms for special classes of Töeplitz systems//Sov.J.Numer.Anal.Math.Modelling.- 1988. N 1.- P. 63-76.

113. Tyrtshnikov E.E. Constructive approach to develop vectorized and fast algorithm for special-type matrices//Sov.J.Numer.Anal.Math.Modelling.- 1988.- N 5. - P. 409-430.

114. Tyrtshnikov E.E. Fast algorithms for Töeplitz and quasi-Töeplitz systems//Sov.J.Numer.Anal.Math.Modelling.- 1989.- N 5.- P. 138-160.

115. Voevodin V.V., Tyrtshnikov E.E. Töeplitz matrices and their applications//Computing methods in Applied Sciences and Engineering. Vol. VI. - Amsterdam: North-Holland, 1984.- P. 75-85.

116. Zohar Sh. The solution of a Töeplitz set of linear equations//J.ACM.- 1974.- V. 21, N 2.- P. 272-276.

Оглавление

	Стр.
Предисловие	3
§ I. Математические задачи и тёплицевы матрицы	5
I.1. Основные типы матриц	5
I.2. Матрицы, связанные с рядами Лорана	10
I.3. Некоторые задачи для аналитических функций	16
I.4. Проблема моментов	17
I.5. Ортогональные многочлены	18
I.6. Локализация корней многочленов	27
I.7. Паде-аппроксимации	29
I.8. Дискретное преобразование Фурье	31
§ 2. Примеры вычислительных задач	33
2.1. Интегральные уравнения специального вида	33
2.2. Плоские волноводные решетки	37
2.3. Плоские задачи аэродинамики	41
2.4. Пространственные задачи аэродинамики	49
2.5. Задачи статистики	53
§ 3. Итерационные методы и способы предобусловливания	56
3.1. Общие замечания	56
3.2. Главные части для матриц метода дискретных особенностей	60
3.3. Модифицированное предобусловливание	74
3.4. Циркулянтное предобусловливание и его оптимизация ..	81
§ 4. Тёплицевы ранги и тёплицевы разложения	92
4.1. Произвольная матрица сводится к тёплицевым	92
4.2. Обобщенные тёплицевы ранги	95
4.3. Представления обратных матриц	101
4.4. Метод тёплицева погружения	111
4.5. Быстрое вычисление следов	114