Замечания о преподавании линейной алгебры на ВМК

Е. Е. Тыртышников

В принципе, у нас хороший курс, и замечаний совсем мало, но они кажутся существенными. Я думаю, что можно кое-что сделать для того, чтобы студентам было легче применять методы линейной алгебры к решению самых разных вопросов. Для этого необходимо дать им в руки "удобный" инструмент — практическая аналогия очевидна: без молотка и гвоздь в стену не забьешь! Основные понятия и теория, подлежащие изучению, примерно те же, что и 20-40 лет тому назад. Но вот какие понятия и факты дают наиболее удобный инструмент для развития теории и практических задач — мнение на этот счет несколько менялось, а к настоящему времени у специалистов по предмету, в особенности на западе, сложилось вполне определенное понимание акцентов, которые следует делать при обучении линейной алгебре тех, кто будет работать в области прикладной математики и информатики.

Нужно сказать, что объединение курса линейной алгебры и аналитической геометрии, сделанное при основании факультета ВМК, отражает принятую в мире тенденцию. В дальнейшем на ВМК курс модифицировался таким образом, чтобы "отдалить" введение более абстрактных алгебраических понятий, даже таких как линейное пространство, и начинать непосредственно с матриц, т. е. с объекта, который как бы уже "можно пощупать руками". Это также находится в русле мировой тенденции.

Но время показало, что мировая тенденция идет дальше. Во втором семестре нашего курса заметно доминирует понятие линейного оператора и, несмотря на то, что все сводится к матрицам в конечномерном случае, теория преподносится как теория линейных операторов, а не как теория матриц. Между прочим, у части студентов перевод этой теории на язык матричного анализа вызывает трудности, а как следствие, большие затруднения вообще с применением изученного материала к решению практических вопросов.

Те же факты можно представить как факты матричного анализа, и по-видимому, так и нужно сделать! Разумнее сделать акцент на матрицах, а уже затем объяснить, что все это переносится на линейные операторы в конечномерных пространствах. Это будет в полном соответствии с мировой тенденцией. Вообще можно отметить, что при обучении линейной алгебре она все больше предстает как часть родственной науки — матричного анализа. Безусловно, это приближает нас к условиям практического применения изучаемых вопросов.

Итак, первое общее предложение заключается в том, чтобы подумать о смещении акцентов во вполне определенном и очень полезном направлении — к матричному анализу. За этим предложением стоит, конечно, желание сделать предмет проще и понятнее. Но не только это! Важно то, что на этом пути мы получаем *более удобный* инструмент для исследования и решения самых разных, в том числе не очень простых, задач.

В связи со стремлением к упрощению хочется сказать также вот о чем. В последнее время у нас ощущается, пусть и слабо, какой-то крен к упрощению, исходящему из соображений недостаточной подготовленности студентов. Уверен, что это вредная точка зрения, потому что она, во-первых, не соответствует действительности, а во-вторых, может понизить уровень университетского образования. Последнее очень опасно — и главное, не имеет ничего общего с реальными запросами времени, по крайней мере в том, что касается знаний в области методов матричного анализа и линейной алгебры.

Данное стремление к упрощению выразилось конкретно в такой модификации первого семестра, при которой часть очень важных понятий формально ушла в программу второго семестра. В частности, это произошло с понятием *линейной оболочки* векторов. Без него многие исконные вопросы первого семестра (например, описание решений однородной системы) лишаются естественной и существенной опоры. Уверен, что современный студент не может иметь сложностей с освоением этого понятия буквально в первые недели обучения. Это понятие должно быть центральным в первом семестре. Сначала речь должна идти о линейных оболочках матриц-столбцов или матриц-строк. При этом можно ввести понятия базиса и размерности линейной оболочки, не выписывая аксиомы линейного пространства, и тем самым, конечно, подготовить почву к восприятию более абстрактного понятия линейного пространства, которое появится во второй половине первого семестра. Задержка с введением в дело понятия линейной оболочки выглядит искуственной и делу, уверен, вредит. В самые первые недели нужно сделать акцент на этом понятии как на лекциях, так и на семинарских занятиях. Да и усилий это не потребует: заведомо *удобнее* жить с этим понятием, чем без него.

Схожего типа замечание можно сделать о понятии подпространства. В силу того, что практически подпространства задаются как множество решений однородной системы линейных уравнений или же как линейная оболочка, натянутая на заданную систему векторов, не очень полезно разделять освоение этого понятия от упражнений с решением линейных систем. То же следует сказать о таких понятиях, как сумма и пересечение подпространств. Данные понятия и связанные с ними упражнения изобилуют в начале второго семестра, но их необходимо перенести в первый семестр. Во-первых, это разнообразит и углубит упражнения с линейными системами. Во-вторых, во втором семестре и так наблюдается дефицит времени для изучения другого, сложного для восприятия материала.

Далее, в первом семестре изучаются также такие понятия, как группа, кольцо и поле. Думаю, что с методической точки зрения полезно ввести понятие алгебраической операции и определение группы в самом начале первого семестра. Вряд ли может возникнуть проблема с освоением всего лишь определения группы. Однако, имея определение, в дальнейшем по ходу курса можно и нужно приводить различные конкретные примеры групп (матрицы специального вида, подстановки и т. д.). Традиционно элементы общей алгебры как в лекциях, так и на семинарах относились к предзачетным неделям первого семестра и поэтому не успевали достаточно закрепиться в сознании для основной части студентов, даже несмотря на то, что речь идет о самых началах теории групп.

Что же касается полей, то здесь кажется уместным подчеркнуть роль линейных оболочек при изучении алгебраических расширений полей и конечных полей. Несмотря на относительно высокий уровень абстракции, эти вопросы имеют существенное прикладное значение в вопросах дискретной математики. Кроме того, они связаны с рядом красивых и обычно известных школьникам геометрических задач — все это способно вызвать энтузиазм и интерес к их изучению.

Последнее соображение в отношении программы первого семестра — думаю, что, помимо формул Виета, следует ввести в нее теорему о связи общих и элементарных симметрических многочленов.

Теперь перейдем к конкретным замечаниям по поводу второго семестра. Так или иначе это теория линейных операторов в общих конечномерных пространствах и пространствах со скалярным произведением или в общих нормированных пространствах. Как уже отмечалось, поскольку в конечномерном пространстве изучение операторов сводится к матрицам, можно и говорить преимущественно о матрицах.

Наиболее существенное замечание относится к тому месту, которое занимает к курсе *сингулярное разложение* матрицы. Это место ни в коей мере не соответствует современной роли сингулярного разложения в теории и многочисленных приложениях линейной алгебры. Положение необходимо исправить — надо сделать так, чтобы всем было ясно, что понятие сингулярного разложения является одним из центральных в курсе. Оно же дает прекрасную возможность представления обобщенных решений линейных систем вместе с иллюстрацией неустойчивости возникающих здесь понятий и возможностей регуляризации.

Мне кажется, что понятие нормы вектора лучше ввести в начале второго семестра, а не в конце. В противном случае оно не получает должного ему развития. При изучении эквивалентности норм в конечномерных пространствах естественным образом приходится обсуждать сходящиеся и фундаментальные последовательности и современное понятие компактности в метрическом пространстве. Несмотря на то, что эти понятия будут во всей полноте изучаться в анализе, лучше называть вещи своими именами прямо сейчас. Если уж приходится оперировать с тем, что дает теорема Вейерштрасса для функций, непрерывных на компактных множествах, то не вижу никакой пользы в сокрытии сути происходящего от студентов.

Важно также иметь в курсе примеры норм в некоторых бесконечномерных пространствах — прежде всего, в пространстве непрерывных функций на отрезке. Впрочем, ограничившись многочленами, мы с легкостью возвращаемся к основному для нас конечномерному случаю. При этом мы в состоянии поставить и решить важную задачу о наилучшем приближении на конечномерном подпространстве в нормированном пространстве. При наличии скалярного произведения эту же задачу можно решить для замкнутого выпуклого множества. Вообще в курсе понятие выпуклого множества должно занять достойное место. Опорные и разделяющие гиперплоскости могут дать пищу для ряда полезных упражнений.

В системе семинарских упражнений много внимания по традиции уделяется построению жордановой формы. Вроде бы это полезно. Однако, заученный четкий алгоритм быстро забывается, и даже те, кто им вроде бы владеет, с трудом отвечают на вопросы, требующие логического построения, а не применения алгоритма к конкретной числовой матрице. Такое положение удручает. Вероятно, следует пересмотреть подбор задач и от "натаскивания на числовых примерах" перейти к решению задач логического характера, требующих хорошего понимания теории.

Следует ли включать в список обязательных требований умение подсчитывать число арифметических операций в алгоритмах линейной алгебры? В силу простоты, эстетического совершенства и завершенности классическая линейная алгебра ряду студентов кажется наукой, прекратившей свое развитие. Они пока еще не видят ее связей с другими разделами математики, питающимися от нее и требующими ее развития. В этом плане вопросы алгоритмической сложности открывают новое лицо линейной алгебры, а их включение в курс отражает мировую тенденцию в обучении линейной алгебре.

Наконец, в курсе должны присутствовать характерные для матричного анализа вопросы о матричных унитарно инвариантных нормах, о разделении собственных значений и сингулярных чисел и о приближении матриц матрицами ограниченного ранга (в частности, о расстоянии от матрицы до ближайшей вырожденной матрицы).

Последнее по месту, но не по значению замечание: следует раскрыть, каким образом понятие ранга матрицы связано с классической и вездесущей идеей о разделении переменных. Плохо и несовременно то, что ранг у студентов ассоциируется только с наивысшим порядком ненулевых миноров. Это, так сказать, артефакт системы обучения. В матричном анализе и линейной алгебре, говоря о ранге, специалисты имеют в виду прежде всего минимальное число "внешних произведений" (матриц вида "столбец на строку") в аддитивном представлении матрицы. То же самое можно проинтерпретировать как скелетное разложение — запись матрицы в виде произведения двух матриц с минимальным числом столбцов первого (строк второго) сомножителя. Именно эти ассоциации превращают понятие ранга в *удобный инструмент* и сближают акценты и ассоциации при обучении и в реальной исследовательской и практической работе. Общий смысл данных замечаний, собственно, и заключается в расстановке правильных акцентов.