1. Пусть A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка. Докажите, что AB и BA имеют одинаковые характеристические многочлены.

2. Матрица A порядка n имеет ненулевые попарно различные собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $X \mapsto AXA^{-1}$, $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

3. Матрица A порядка n имеет попарно различные собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $X \mapsto AX^\top A$, $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

4. Матрица $A = A^*$ порядка n и ее окаймление $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}$ с помощью $n \times r$-матрицы B являются обратимыми матрицами. Докажите, что матрица

$$Z = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B^* A^{-1} B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}$$

имеет собственные значения 1 и $(1 \pm \sqrt{5})/2$ алгебраической кратности, соответственно, $n - r$ и r.

5. Пусть $\mathrm{tr}A = 0$, а характеристический многочлен матрицы A записан в виде $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + ... + a_0$. Доказать, что $a_{n-1} = 0$ и $a_{n-2} = -\mathrm{tr}A^2/2$.

6. Квадратные матрицы A и B порядка n имеют собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $\mu_1, \ldots, \mu_n$ (с учетом кратностей). Найти все собственные значения (с учетом кратностей) линейного оператора $X \mapsto AX + XB, \;\; X \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

7. Докажите, что спектральный радиус получается как предел $\rho(A) = \lim\limits_{k\to\infty} ||A^k||^{1/k}$, где $||\cdot||$ — произвольная фиксированная матричная норма. (В силу теоремы о верхней треугольной форме достаточно рассмотреть случай верхней треугольной матрицы A.)

8. Для произвольной фиксированной матричной нормы $\rho(A) = \inf ||P^{-1}AP||$, где точная нижняя грань берется по всем обратимым матрицам P. (В силу теоремы о верхней треугольной форме достаточно рассмотреть случай верхней треугольной матрицы A.)

9. Все элементы квадратной матрицы A неотрицательны, а суммы элементов в каждой строке одинаковы и равны λ. Доказать, что λ является наибольшим по модулю собственным значением матрицы A.

10. Докажите, что для любой комплексной матрицы A порядка 3 существует унитарная матрица Q такая, что матрица $B = Q^*AQ$ является трехдиагональной. (Матрица B называется *трехдиагональной*, если $b_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$.)

11. Доказать, что матрица A является нильпотентной тогда и только когда, когда $\mathrm{tr}A^k = 0$ для всех натуральных k.

12. Для квадратных матриц A и B выполняется равенство $AB - BA = A^{1955}$. Доказать, что матрица A нильпотентная.

13. Известно, что $A^{k+1} = A, \;\; k > 0$. Докажите, что матрица A диагонализуема.

14. Докажите, что матрица порядка $n > 1$ имеет конечное число инвариантных подпространств в том и только том случае, когда каждому собственному значению соответствует ровно одна жорданова клетка.

15. Докажите, что спектральный радиус (максимальный модуль собственных значений) нормальной матрицы A допускает представление $\rho(A) = \max\limits_{x\neq 0} |x^*Ax|/|x^*x|$.

16. Унитарная матрица $Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$ порядка $2n$ разбита на блоки порядка n. Доказать, что $|\det Q_{12}| = |\det Q_{21}|$.

17. Известно, что $A^2 = A$ и $\mathrm{ker}A \perp \mathrm{im}\, A$ (ортогональность относительно естественного скалярного произведения). Докажите, что $A = A^*$.

18. Дано подпространство $L \subset \mathbb{C}^n$. Докажите, что среди всех матриц A таких, что $\mathrm{im}A = L$ и $A^2 = A$, наименьшее значение 2-нормы достигается для некоторой эрмитовой и притом только одной матрицы A.

19. Докажите, что для любой эрмитовой матрицы H матрица $Q = (I - \mathbf{i}H)^{-1}(I + \mathbf{i}H)$ является унитарной. Любую ли унитарную матрицу можно представить таким образом?

20. Эрмитовы матрицы $A, B \in \mathbb{C}^n$ таковы, что $A^2 = A$ и $B^2 = B$. Докажите, что если $||A - B||_2 < 1$, то $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$.

21. Пусть $A = H + \mathbf{i}K$ — эрмитово разложение матрицы A. Докажите, что вещественные части собственных значений матрицы A заключены между минимальным и максимальным собственными значениями эрмитовой матрицы H, а мнимые части — между минимальным и максимальным собственными значениями эрмитовой матрицы K.

22. Даны квадратные матрицы A и B одного порядка, при этом матрица B невырожденная. Докажите, что из неотрицательной определенности матрицы $B^*B - A^*A$ вытекает, что спектральный радиус матрицы $B^{-1}A$ не больше 1.

23. Пусть заданы вещественная положительно определенная матрица A порядка n и вектор $b \in \mathbb{R}^n$. Доказать, что функционал $f(x) = (Ax, x) + (b, x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$ ограничен снизу и существует единственная точка x_0, в которой $f(x_0)$ есть его минимальное значение.

24. Матрицы A и B обе эрмитовы, при этом A положительно определенная. Докажите, что собственные значения матриц AB и BA вещественные.

25. Докажите, что любая вещественная матрица вращения является произведением двух вещественных матриц отражения.

26. Найти собственные значения матрицы Фурье порядка n.

27. Найти максимальное значение функции $f(A) = |\det A|$ на множестве всех комплексных матриц A с элементами $|a_{ij}| \le 1$.

28. Доказать, что два многочлена степени n можно перемножить с затратой $O(n \log_2 n)$ арифметических операций.

29. Даны числа $x_1, \ldots, x_n$. Доказать, что коэффициенты многочлена $f(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} (x - x_i)$ можно найти с затратой $O(n \log_2^2 n)$ арифметических операций.

30. Найдите сингулярное разложение $2 \times n$-матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{bmatrix}$.

31. Дана квадратная матрица с нормой $||A||_2 \le 1$. Докажите, что существуют квадратные матрицы B, C, D такие, что матрица $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ является унитарной.

32. Пусть A — квадратная матрица и $H_A = (A + A^*)/2$ — ее эрмитова часть. Докажите, что для произвольной эрмитовой матрицы H того же порядка имеет место неравенство $||A - H_A||_2 \le ||A - H||_2$.

33. Докажите, что если H — эрмитова, а U — унитарная матрица того же порядка, то $||H - I||_2 \le ||H - U||_2 \le ||H + I||_2$.

34. Пусть $\sigma_1 \ge ... \ge \sigma_n$ — сингулярные числа $n \times n$-матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & & & \\ & 1 & a_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \qquad a_1, \ldots, a_{n-1} > 0.$$

Докажите, что $0 < \sigma_n < 1/(a_1 ... a_{n-1})$.

35. Пусть ранг вещественной симметричной матрицы порядка n равен 1 и, кроме того, $A^2 = A$. Докажите, что $||A||_\infty \le \frac{\sqrt{n}+1}{2}$.

36. Доказать, что для любой положительно определенной матрицы $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ имеет место неравенство

$$\det A \;\le\; a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}.$$

37. Матрица $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ является эрмитовой, а ее подматрица A_{11} — положительно определенной. Доказать, что положительная определенность матрицы A равносильна положительной определенности подматрицы A_{22}.

38. Даны эрмитова матрица H и столбец b. Докажите неравенство

$$\left\| \begin{bmatrix} H & b \\ b^* & 0 \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \frac{||H||_2 + \sqrt{||H||_2^2 + 4||b||_2^2}}{2}.$$

39. Пусть $\sigma_1 \geq ... \geq \sigma_n$ — сингулярные числа $n \times n$-матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что $1 \leq \sigma_{n-1} \leq ... \leq \sigma_1 \leq 3$ и, кроме того, $0 < \sigma_n < 2^{-n+1}$.

40. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $f_k(A) = \sigma_1(A) + \ldots + \sigma_k(A)$. Докажите, что для любого $1 \leq k \leq n$ функция $f_k(A)$ является матричной нормой на $\mathbb{C}^{n \times n}$.

41. Докажите, что для любой квадратной матрицы A наименьшее собственное значение ее эрмитовой части $H = (A + A^*)/2$ не больше наименьшего сингулярного числа матрицы A.

42. Доказать, что матрица A является нормальной тогда и только тогда, когда сумма квадратов ее сингулярных чисел равна сумме квадратов модулей собственных значений.

43. Докажите, что множество всех двоякостохастических матриц порядка n является выпуклым и при этом матрицы перестановок и только они являются его угловыми точками.

44. Пусть $\mathcal{A} : V \to V$ — линейный оператор в произвольном конечномерном унитарном пространстве V. Докажите, что существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ является верхней треугольной.

45. Собственные значения вещественной симметричной матрицы A попарно различны. Докажите, что при всех достаточно малых по норме возмущениях F собственные значения возмущенной матрицы $A + F$ будут вещественными.