1. Матрица A порядка n коммутирует со всеми матрицами порядка n: $AB = BA$ для всех матриц B порядка n. Докажите, что A — диагональная матрица с равными элементами на диагонали.

2. Для каждого n найдите все значения параметра a, при которых столбцы трехдиагональной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ -1 & a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & a & 1 \\ & & & -1 & a \end{bmatrix}$$

порядка n линейно независимы.

3. Матрица размеров $(n+1) \times n$ имеет элементы $a_{ij} > 0$ при $i = j$ и $a_{ij} < 0$ при $i \neq j$. Докажите, что при $n = 3$ ее столбцы линейно независимы. Верно ли это при $n = 4$?

4. Система линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

имеет решение, причем $x_1 \neq 0$. Докажите, что столбцы матрицы коэффициентов линейно независимы.

5. Докажите, что столбцы вещественной прямоугольной матрицы A линейно независимы тогда и только тогда, когда линейно независимы столбцы матрицы $A^\top A$.

6. Пусть $u, v \in \mathbb{R}^n$ и I — единичная матрица. Докажите, что $\det(I + uv^\top) = 1 + v^\top u$.

7. В $n \times n$-матрице имеется единственный минор порядка $r < n$, отличный от нуля. Докажите, что все миноры порядка $k \geq r + 1$ равны нулю.

8. Пусть A — матрица порядка n с элементами $a_{ij} = \pm 1$. Докажите, что если $n = 4$, то $|\det A| \leq 16$, и постройте матрицу, для которой $\det A = 16$.

9. Дана квадратная матрица A такая, что $A^3 = 0$. Докажите, что матрица $I - A$ обратима.

10. Найти все обратимые матрицы A порядка n, для которых все элементы A и A^{-1} неотрицательны. Доказать, что множество всех таких матриц образует группу относительно операции умножения матриц.

11. Даны матрицы $P_1, \ldots, P_n$ порядка n, каждая отличается от единичной матрицы перестановкой столбцов (такие матрицы называются *матрицами перестановки*). Пусть $P_1 + ... + P_n = E$, где E — матрица, все элементы которой равны 1. Кроме того, пусть $P_i P_j = P_j P_i$ для всех i, j. Докажите, что множество матриц $P_1, \ldots, P_n$ образует группу относительно операции умножения матриц.

12. Докажите, что определитель трехдиагональной матрицы не изменится, если каждый наддиагональный элемент умножить, а каждый поддиагональный элемент поделить на одно и то же число.

13. Пусть I_n и I_m — единичные матрицы порядка n и m. Докажите, что для любых матриц A размеров $m \times n$ и B размеров $n \times m$ из обратимости $I_m - AB$ вытекает обратимость $I_n - BA$. Докажите также, что обратимость каждой из этих матриц равносильна обратимости матрицы порядка $m + n$ с блочным разбиением вида

$$\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}.$$

14. Даны числа a и b такие, что $1 - ab \neq 0$. Докажите, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & \ldots & a^n \\ b & 1 & a & \ldots & a^{n-1} \\ b^2 & b & 1 & \ldots & a^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

обратима и обратная к ней матрица является трехдиагональной.

15. Путь A — $n \times n$-матрица ранга k, а B — любая невырожденная подматрица порядка k. Обозначим через R подматрицу размеров $k \times n$, состоящую из строк матрицы A, содержащих подматрицу B, а через C — подматрицу размеров $n \times k$, состоящую из столбцов, содержащих B. Доказать, что
$$A = CB^{-1}R.$$

16. Докажите, что подматрица, расположенная на пересечении r линейно независимых строк и r линейно независимых столбцов матрицы ранга r, является невырожденной.

17. Известно, что $A^\top = -A$. Докажите, что ранг матрицы A — число четное.

18. Пусть A и B — матрицы ранга 1. Докажите, что если $AB = BA \neq 0$, то ранг матрицы $A + B$ не больше 1.

19. Заданы столбцы $x, y \in \mathbb{R}^n$, причем $x \neq 0$. Докажите, что существует симметричная матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ такая, что $\mathrm{rank} A \leq 2$ и $Ax = y$.

20. Матрица A имеет r столбцов, а матрица B имеет r строк. Докажите, что
$$r \ \geq \ \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - \mathrm{rank}(AB).$$

21. Даны матрицы A и B порядка n такие, что $AB = 0$ и при этом матрица $A + B$ невырожденная. Доказать, что $\mathrm{rank} A + \mathrm{rank} B = n$.

22. Невырожденная матрица и обратная к ней разбиты на блоки одинаковых размеров:
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$
Доказать, что блок A_{11} невырожден тогда и только тогда, когда невырожден блок B_{22}.

23. Пусть A — невырожденная матрица порядка n и $A(I,J)$ — ее невырожденная подматрица на строках и столбцах, определенных системами номеров $I = (i_1, \ldots, i_k)$ и $J = (j_1, \ldots, j_k)$, соответственно. Пусть $k < n$, а I' и J' — дополнительные системы номеров. Доказать, что
$$\det A^{-1}(I', J') \ = \ (-1)^{i_1 + \ldots + i_k + j_1 + \ldots + j_k} \det A(I,J) / \det A.$$

24. Докажите, что $\det(I + F) \neq 0$, если каждый элемент матрицы F порядка n по модулю меньше $1/n$.

25. Пусть числа $x_1, ..., x_n$, $y_1, ..., y_n$ попарно различны. Доказать невырожденность матрицы с элементами $a_{ij} = 1/(x_i - y_j)$.

26. Группа H порядка n является нормальной подгруппой группы G порядка $2n$. При этом все нормальные подгруппы группы H — это H и $\{e\}$. Докажите, что все нормальные подгруппы группы G — это G, H и $\{e\}$.

27. В конечной группе G выбраны подгруппы H_1 и H_2 порядка n_1 и n_2, соответственно. Докажите, что число элементов в множестве $H_1 H_2 = \{g \in G : g = h_1 h_2, h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$ равно $n_1 n_2 / d$, где d — число элементов в пересечении $H_1 \cap H_2$.

28. Докажите, что любая абелева группа порядка pq, где p и q — различные простые числа, является циклической.

29. Докажите, что группа положительных рациональных чисел относительно умножения не изоморфна группе всех рациональных чисел с операцией сложения.

30. Докажите, что в любой бесконечной группе число различных подгрупп бесконечно.

31. Найдите все группы, изоморфные любой своей неединичной подгруппе.

32. Подгруппа H симметрической группы степени n обладает следующими свойствами: (1) для любых номеров $i, j \in \{1, ..., n\}$ существует подстановка $\sigma \in H$ такая, что $\sigma(i) = j$; (2) в H содержатся транспозиции $(1, j)$ при $2 \leq j \leq m$ и нет транспозиций вида $(1, i)$, где $m + 1 \leq i \leq n$. Докажите, что n делится на m.

33. Докажите, что любая группа порядка p^k в случае простого p содержит элемент порядка p.