1. Можно ли ввести норму на $\mathbb{R}^2$ так, чтобы множество всех векторов x с нормой $||x|| \le 1$ имело бы форму треугольника?

2. Всегда ли замыкание открытого шара совпадает с замкнутым шаром с тем же центром и радиусом?

3. Дана матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Доказать замкнутость множества

$$\{y = Ax, \quad x = [x_1, \ldots, x_n]^\top, \quad x_1, \ldots, x_n \ge 0\}.$$

4. Докажите, что функция $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ при $-1 \le x \le 1$ является многочленом степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1}. Докажите, что для любого многочлена $p_n(x)$ степени n с тем же старшим коэффициентом выполняется неравенство $||T_n(x)||_{C[-1,1]} \le ||p_n(x)||_{C[-1,1]}$.

5. Для матриц $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ квадрат суммы диагональных элементов матрицы $A^\top B$ равен произведению сумм диагональных элементов матриц $A^\top A$ и $B^\top B$. Докажите, что A и B отличаются лишь скалярным множителем.

6. Найдите все $p \ge 1$, при которых норма Гельдера $||\cdot||_p$ порождается некоторым скалярным произведением.

7. Пусть $\mathcal{M}_p$ — множество всех комплексных $n\times n$-матриц A таких, что $||Ax||_p = ||x||p$ для любого $x \in \mathbb{C}^n$. Доказать, что для всех $p \ne 2$ множество $\mathcal{M}_p$ одно и то же и совпадает с множеством матриц вида DP, где D — диагональная матрица с элементами $|d_{ii}| = 1$, а P — матрица перестановки.

8. Может ли определитель матрицы Грама быть числом отрицательным?

9. Пусть $\rho(x)$ — произвольная непрерывная положительная функция при $0 \le x \le 1$. Докажите, что $n \times n$-матрица A с элементами $a_{ij} = \int\limits_0^1 x^{i+j}\rho(x)dx$ является невырожденной.

10. Пусть L и M — подпространства в конечномерном пространстве V со скалярным произведением. Равносильны ли равенства $L^\perp \cap M = \{0\}$ и $L \cap M^\perp = \{0\}$?

11. Докажите, что в n-мерном евклидовом пространстве любая система из $n+2$ векторов содержит пару векторов, для которых скалярное произведение неотрицательно.

12. Пусть $\mathcal{P}_n$ — линейное пространство всех вещественных многочленов степени не выше n со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^1 f(t)g(t)dt$. Докажите, что расстояние от многочлена x^n до подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$ не превосходит $\sqrt{2}/2^n$.

13. В пространстве вещественных многочленов скалярное произведение (f, g) определено произвольным образом, но так, что для любых многочленов $f(x)$ и $g(x)$ выполняется равенство

$$(xf(x), g(x)) \;=\; (f(x), xg(x)),$$

и пусть при применении процесса ортогонализации Грама–Шмидта к системе многочленов 1, x, x^2, ..., x^n получены многочлены $L_0(x)$, $L_1(x)$, ..., $L_n(x)$. Докажите, что имеют место трехчленные соотношения

$$L_k(x) \;=\; a_k x L_{k-1}(x) + b_k L_{k-1}(x) + c_k L_{k-2}(x), \quad 2 \le k \le n, \qquad a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}.$$

14. Пусть A — матрица порядка n с элементами $a_{ij} = \pm 1$. Докажите, что если $|\det A| = n^{n/2}$ (такие матрицы называются *матрицами Адамара*) и $n \ge 3$, то n делится на 4.

15. Линейный функционал f определен на пространстве векторов вида Ax, где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $x \in \mathbb{R}^m$. Докажите, что $f(Ax) = y^\top Ax$ для некоторого $y \in \mathbb{R}^m$, не зависящего от x.

16. Пусть ϕ — линейный функционал на сопряженном пространстве V^* для конечномерного пространства V. Докажите, что $\phi(f) = f(x_0)$, где $x_0 \in V$ — некоторый фиксированный вектор, зависящий от ϕ и не зависящий от $f \in V^*$.

17. Докажите, что функционал $f(p) = p'(0)$ (значение производной многочлена $p(t)$ при $t = 0$) на линейном пространстве многочленов $p(t)$ с нормой $||p|| = \max\limits_{-1\le t\le 1} |p(t)|$ не будет ограниченным.

18. Докажите, что множество всех внутренних точек выпуклого множества в нормированном пространстве является выпуклым.

19. Докажите, что любая внутренняя точка замыкания выпуклого множества S в конечномерном нормированном пространстве принадлежит S. Верно ли это в случае произвольного множества S?

20. Дано замкнутое выпуклое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ и $x_0 \notin M$. Доказать, что существует гиперплоскость $(x, h) = (x_0, h)$ такая, что $(x, h) < (x_0, h) \ \ \forall \ \ x \in M$.

21. Множество называется *выпуклым конусом*, если вместе с любыми двумя точками x и y оно содержит все точки вида $\alpha x + \beta y$ при произвольных $\alpha, \beta \geq 0$. Докажите, что любая опорная гиперплоскость для выпуклого конуса проходит через 0.

22. В пространстве $\mathbb{R}^n$ с естественным скалярным произведением $(x, y) = y^\top x$ дано компактное выпуклое множество M и для него построено множество K всех векторов $y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $(x, y) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что K — замкнутый выпуклый конус. Докажите также, что для любой его опорной гиперплоскости с нормальным вектором h проходящая через 0 прямая с направляющим вектором h содержит точку из M.

23. В $\mathbb{R}^n$ с естественным скалярным произведением компактные выпуклые множества L и M таковы, что для всякого $x \in M$ с каким-то $y = y(x) \in L$ выполняется неравенство $(x, y) \geq 0$. Докажите, что можно выбрать $y_0 \in L$, для которого $(x, y_0) \geq 0$ для всех $x \in M$.

24. Даны компактные выпуклые множества $L \subset \mathbb{R}^m$, $M \subset \mathbb{R}^n$ и матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Доказать, что

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \min_{y \in \mathbb{R}^m} y^\top A x \ = \ \min_{y \in \mathbb{R}^m} \max_{x \in \mathbb{R}^n} y^\top A x.$$

25. Пусть $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что пересечение полупространств

$$a_1^\top x \leq c_1, \ \ldots, \ a_m^\top x \leq c_m$$

пусто тогда и только тогда, когда для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0$ выполняются равенства

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m = 0, \qquad \alpha_1 c_1 + \ldots + \alpha_m c_m = -1.$$

26. Пусть $A = [a_{ij}]$ — матрица размеров $m \times n$. Докажите, что

$$||A||_\infty \ = \ \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad ||A||_1 \ = \ \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

27. Может ли норма подматрицы быть больше нормы матрицы?

28. Дана обратимая матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, выбирается произвольная матрица $X_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и строится последовательность матриц $X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k, \quad k = 0, 1, \ldots$. Доказать, что если для некоторой матричной нормы $||I - AX_0|| < 1$, то $X_k \to A^{-1}$ при $k \to \infty$.

29. Доказать неравенство $||A||_F \ \leq \ \sqrt{\mathrm{rank} A}\, ||A||_2$.

30. Докажите, что $\displaystyle\max_{A \in \mathbb{C}^{n \times n},\, A \neq 0} ||A||_2 / ||A||_1 = \sqrt{n}$.

31. Пусть $A = [a_{ij}]$ и $D = [d_{ij}]$ — комплексные матрицы порядка n, при этом D — диагональная матрица с элементами $d_{ii} = a_{ii}$ при $1 \leq i \leq n$. Докажите, что если $||A||_2 = ||D||_2$, то нулевых элементов в матрице A не меньше, чем $2n - 2$.

32. Пусть L — нижняя треугольная матрица с нижней треугольной частью, взятой из матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Докажите, что
$$||L||_2 \leq \log_2 2n \, ||A||_2.$$

33. Оператор $\mathcal{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ сохраняет скалярные произведения. Докажите, что $\mathcal{A}$ является обратимым оператором. Обязан ли он быть линейным?

34. Найти характеристический многочлен матрицы $A = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}_{n \times n}$.

35. Пусть A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка. Докажите, что AB и BA имеют одинаковые характеристические многочлены.

36. Пусть A — верхняя почти треугольная матрица порядка n с ненулевыми поддиагональными элементами $a_{i+1\,i}$, $1 \le i \le n-1$. Докажите, что если A диагонализуема, то она имеет n попарно различных собственных значений.

37. Матрица A порядка n имеет попарно различные собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $X \mapsto A^3XA^4$, $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

38. Матрица $A = A^*$ порядка n и ее окаймление $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}$ с помощью $n \times r$-матрицы B являются обратимыми матрицами. Докажите, что матрица

$$Z = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B^*A^{-1}B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}$$

имеет собственные значения 1 и $(1 \pm \sqrt{5})/2$ алгебраической кратности, соответственно, $n-r$ и r.

39. Докажите, что спектральный радиус получается как предел $\rho(A) = \lim\limits_{k\to\infty} ||A^k||^{1/k}$, где $||\cdot||$ — произвольная фиксированная матричная норма.

40. Докажите, что $\rho(A) = \inf ||X^{-1}AX||_p$, где точная нижняя грань берется по всем обратимым матрицам X, а $||\cdot||_p$ — операторная норма, порожденная p-нормой векторов.

41. Для элементов квадратных матриц A и B имеют место неравенства $0 \le a_{ij} \le b_{ij}$, $1 \le i,j \le n$. Докажите, что $\rho(A) \le \rho(B)$.

42. Все элементы квадратной матрицы A неотрицательны, а суммы элементов в каждой строке одинаковы и равны λ. Доказать, что λ является наибольшим по модулю собственным значением матрицы A.

43. Докажите, что для любой комплексной матрицы A порядка 3 существует унитарная матрица Q такая, что матрица $B = Q^*AQ$ является трехдиагональной. (Матрица B называется *трехдиагональной*, если $b_{ij} = 0$ при $|i-j| > 1$.)

44. Для квадратных матриц A и B выполняется равенство $AB - BA = A^{1955}$. Доказать, что матрица A нильпотентная.

45. Пусть верхняя треугольная матрица порядка $n = n_1 + n_2$ имеет вид $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ и при этом блоки $A_{11} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ и $A_{22} \in \mathbb{C}^{n_2\times n_2}$ не имеют общих собственных значений. Докажите, что существует матрица $X \in \mathbb{C}^{n_1\times n_2}$ такая, что

$$\begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

46. Докажите, что $\mathrm{ker}A^l = \mathrm{ker}A^{l+1}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{im}A^l = \mathrm{im}A^{l+1}$.

47. Докажите, что если $\mathrm{ker}A \cap \mathrm{im}A = \{0\}$, то $\mathrm{ker}A = \mathrm{ker}A^2$.

48. Докажите, что для диагонализуемости матрицы A необходимо и достаточно, чтобы для любого числа λ ядро и образ матрицы $A - \lambda I$ имели в пересечении лишь нулевой вектор.

49. Всегда ли можно построить жорданов базис, содержащий произвольно выбранные базисы в собственных подпространствах?

50. Пусть J — жорданова клетка порядка n с нулевым собственным значением. Докажите, что уравнение $X^2 = J$ относительно $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ не имеет решений, если $n \ge 2$.

51. Известно, что $A^{k+1} = A$, $k > 0$. Докажите, что матрица A диагонализуема.

52. Докажите, что матрица порядка $n > 1$ имеет конечное число инвариантных подпространств в том и только том случае, когда каждому собственному значению соответствует ровно одна жорданова клетка.

53. Нормальная матрица имеет блочно-треугольный вид

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

с квадратными блоками A_{11} и A_{22}. Докажите, что матрицы A_{11} и A_{22} нормальные и, кроме того, $A_{12} = 0$.

54. Унитарная матрица $Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$ порядка $2n$ разбита на блоки порядка n. Доказать, что $|\det Q_{12}| = |\det Q_{21}|$.

55. Дано подпространство $L \subset \mathbb{C}^n$. Докажите, что среди всех матриц A таких, что $\mathrm{im}A = L$ и $A^2 = A$, наименьшее значение 2-нормы достигается для некоторой эрмитовой и притом только одной матрицы A.

56. Эрмитовы матрицы $A, B \in \mathbb{C}^n$ таковы, что $A^2 = A$ и $B^2 = B$. Докажите, что если $||A - B||_2 < 1$, то $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$.

57. Пусть A — квадратная матрица и $H_A = (A + A^*)/2$ — ее эрмитова часть. Докажите, что для произвольной эрмитовой матрицы H того же порядка имеет место неравенство $||A - H_A||_2 \leq ||A - H||_2$.

58. Пусть $A = H + \mathbf{i}K$ — эрмитово разложение матрицы A. Докажите, что вещественные части собственных значений матрицы A заключены между минимальным и максимальным собственными значениями эрмитовой матрицы H, а мнимые части — между минимальным и максимальным собственными значениями эрмитовой матрицы K.

59. Даны квадратные матрицы A и B одного порядка, при этом матрица B невырожденная. Докажите, что из неотрицательной определенности матрицы $B^*B - A^*A$ вытекает, что спектральный радиус матрицы $B^{-1}A$ не больше 1.

60. Докажите, что если H — эрмитова неотрицательно определенная, а U — унитарная матрица того же порядка, то $||H - I||_2 \leq ||H - U||_2 \leq ||H + I||_2$.

61. Пусть заданы вещественная положительно определенная матрица A порядка n и вектор $b \in \mathbb{R}^n$. Доказать, что функционал $f(x) = (Ax, x) + (b, x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$ ограничен снизу и существует единственная точка x_0, в которой $f(x_0)$ есть его минимальное значение.

62. Матрицы A и B обе эрмитовы, при этом A положительно определенная. Докажите, что собственные значения матриц AB и BA вещественные.

63. Докажите, что любая вещественная матрица вращения является произведением двух вещественных матриц отражения.

64. Найти максимальное значение функции $f(A) = |\det A|$ на множестве всех комплексных матриц A с элементами $|a_{ij}| \leq 1$.

65. Матрицы A и B порядка n коммутируют. Докажите, что существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что $PAQ = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$ и $PBQ = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$, где блоки I_k, X и N, Y имеют порядок k и $n - k$, соответственно, и, кроме того, матрица I_k единичная, а N нильпотентная.

66. Дана квадратная матрица с нормой $||A||_2 \leq 1$. Докажите, что существуют квадратные матрицы B, C, D такие, что матрица $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ является унитарной.

67. Пусть $A = A^\top \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Докажите, что матрица A обладает сингулярным разложением $A = V\Sigma U^*$ с дополнительным условием $U^* = V^\top$.

68. Найти нормальное псевдорешение несовместной системы

$$x_1 + x_2 + .. + x_n = 1, \quad x_1 + x_2 + ... + x_n = 0.$$

69. Пусть A — произвольная прямоугольная матрица и A^+ — ее псевдообратная матрица. Докажите, что выполняются соотношения

$$(AA^+)^* = AA^+, \quad (A^+A)^* = A^+A, \quad AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+.$$

Докажите также, что A^+ — единственная матрица, удовлетворяющая этой системе уравнений.

70. Доказать, что для любой положительно определенной матрицы $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ имеет место неравенство

$$\det A \;\leq\; a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}.$$

71. Матрица $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ является эрмитовой, а ее подматрица A_{11} — положительно определенной. Доказать, что положительная определенность матрицы A равносильна положительной определенности матрицы $A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$.

72. Пусть $\sigma_1 \geq ... \geq \sigma_n$ — сингулярные числа $n \times n$-матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что $1 \leq \sigma_{n-1} \leq ... \leq \sigma_1 \leq 3$ и, кроме того, $0 < \sigma_n < 2^{-n+1}$.

73. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $f_k(A) = \sigma_1(A) + \ldots + \sigma_k(A)$. Докажите, что для любого $1 \leq k \leq n$ функция $f_k(A)$ является матричной нормой на $\mathbb{C}^{n \times n}$.

74. Докажите, что для любой квадратной матрицы A наименьшее собственное значение ее эрмитовой части $H = (A + A^*)/2$ не больше наименьшего сингулярного числа матрицы A.