ЗАДАЧИ 2009 ГОДА

1. L — линейное подпространство матриц из $\mathbb{C}^{n\times n}$ с двумя свойствами: (1) $AB = BA$ для всех $A, B \in L$; (2) $A^2 = 0$ для всех $A \in L$. Докажите, что $\dim L \le n^2/4$.

2. Дана матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Доказать замкнутость множества
$$\{y = Ax, \quad x = [x_1, \ldots, x_n]^\top, \quad x_1, \ldots, x_n \ge 0\}.$$

3. Пусть $\mathcal{M}_p$ — множество всех комплексных $n \times n$-матриц A таких, что $||Ax||_p = ||x||p$ для любого $x \in \mathbb{C}^n$. Доказать, что для всех $p \ne 2$ множество $\mathcal{M}_p$ одно и то же и совпадает с множеством матриц вида DP, где D — диагональная матрица с элементами $|d_{ii}| = 1$, а P — матрица перестановки.

4. Докажите, что функционал $f(p) = p'(0)$ (значение производной многочлена $p(t)$ при $t = 0$) на линейном пространстве многочленов $p(t)$ с нормой $||p|| = \max\limits_{-1\le t\le 1} |p(t)|$ не будет ограниченным.

5. Даны компактные выпуклые множества $L \subset \mathbb{R}^m$, $M \subset \mathbb{R}^n$ и матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Доказать, что
$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} \min_{y\in\mathbb{R}^m} y^\top Ax \;=\; \min_{y\in\mathbb{R}^m} \max_{x\in\mathbb{R}^n} y^\top Ax.$$

6. Пусть $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что пересечение полупространств
$$a_1^\top x \le c_1, \; \ldots, \; a_m^\top x \le c_m$$
пусто тогда и только тогда, когда для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \ge 0$ выполняются равенства
$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m = 0, \qquad \alpha_1 c_1 + \ldots + \alpha_m c_m = -1.$$

7. Пусть $A = [a_{ij}]$ и $D = [d_{ij}]$ — комплексные матрицы порядка n, при этом D — диагональная матрица с элементами $d_{ii} = a_{ii}$ при $1 \le i \le n$. Докажите, что если $||A||_2 = ||D||_2$, то нулевых элементов в матрице A не меньше, чем $2n - 2$.

8. Пусть L — нижняя треугольная матрица с нижней треугольной частью, взятой из матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Докажите, что
$$||L||_2 \le \log_2 2n \, ||A||_2.$$

9. Докажите, что матрица порядка $n > 1$ имеет конечное число инвариантных подпространств в том и только том случае, когда каждому собственному значению соответствует ровно одна жорданова клетка.

10. Матрицы A и B порядка n коммутируют. Докажите, что существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что $PAQ = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$ и $PBQ = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$, где блоки I_k, X и N, Y имеют порядок k и $n - k$, соответственно, и, кроме того, матрица I_k единичная, а N нильпотентная.

11. Пусть $A = A^\top \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Докажите, что матрица A обладает сингулярным разложением $A = V\Sigma U^*$ с дополнительным условием $U^* = V^\top$.

12. Пусть $\sigma_1 \ge ... \ge \sigma_n$ — сингулярные числа $n \times n$-матрицы
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$
Докажите, что $1 \le \sigma_{n-1} \le ... \le \sigma_1 \le 3$ и, кроме того, $0 < \sigma_n < 2^{-n+1}$.

13. Известно, что $A = A^* > B = B^* \ge 0$. Докажите, что $A^{1/2} > B^{1/2}$.