ЗАДАНИЕ 1.

1. Для каждого n приведите пример матрицы Вандермонда порядка n, для которой спектральное число обусловленности равно 1.

2. Пусть $W(x_0, ..., x_n)$ — матрица Вандермонда с узлами $x_i \in [-1, 1]$. Докажите, что
$$\operatorname{cond}_2 W(x_0, ..., x_n) \geq 2^{n-1}.$$

3. Дана таблица значений полинома 2-й степени:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	7	3	1	0	3

Известно, что во второй строке содержится ровно одна ошибка. Найти ошибку, исправить ее и восстановить исходный полином.

4. Некто составляет таблицу значений для функции
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-t^2} d\,t$$
на отрезке $[0, 1]$ с постоянным шагом h. При квадратичной интерполяции табличных значений ошибка не должна превышать 0.01. Каким должно быть h?

5. Полином $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ имеет попарно различные корни $x_1, \ldots, x_n$. Докажите, что
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq n-2, \\ 1, & k = n-1. \end{cases}$$

6. Докажите, что если $f \in C^k$, то
$$f(x_0; \ldots; x_k) = \int\limits_{\substack{\xi_0, ..., \xi_k \geq 0 \\ \xi_0 + ... + \xi_k = 1}} f^{(k)}(\xi_0 x_0 + ... + \xi_k x_k) d\xi_0 ... d\xi_k$$
$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} ... \int\limits_0^{t_{k-1}} f^{(k)}\left(x_0 + t_1 (x_1 - x_0) + ... + t_k (x_k - x_{k-1})\right) dt_k \, ... \, dt_1.$$

7. Докажите единственность полинома, решающего задачу эрмитовой интерполяции.

8. Интерполяционный полином Лагранжа $L_n(x)$ приближает функцию $f(x)$ с точностью $\varepsilon > 0$. С какой точностью $L_n'(x)$ приближает $f'(x)$?

9. По значениям функции $f(x)$ в попарно различных точках $x_1, \ldots x_n$ требуется найти коэффициенты интерполяционного полинома. Придумайте алгоритм, делающий это за $\mathcal{O}(\log_2 n)$ параллельных шагов.

10. Пусть фиксированы попарно различные числа $\alpha_1, \ldots \alpha_n$. Докажите, что функции вида $e^{\alpha_1 x}, ..., e^{\alpha_n x}$ линейно независимы на любом интервале. Докажите также, что на любом интервале можно выбрать попарно различные узлы $x_1, \ldots x_n$, для которых задача интерполяции $c_1 e^{\alpha_1 x_j} + ... + c_n e^{\alpha_n x_j} = f(x_j)$, $1 \leq j \leq n$, имеет и притом единственное решение.

11. Пусть задана аналитическая функция $f\,(x) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ и требуется найти функцию вида

$$\phi\,(x) \;=\; \frac{p_0 + p_1\, x + \cdots + p_{n-1}\, x^{n-1}}{q_0 + q_1\, x + \cdots + q_n\, x^n},$$

удовлетворяющую обобщенным интерполяционным условиям:

$$\phi^{(j)}\,(0) \;=\; f^{(j)}\,(0), \quad j \;=\; 0,\, 1,\, \ldots,\, 2n.$$

Докажите, что для существования решения достаточно, чтобы матрицы $A_k \;=\; [a_{k+i-j}]_{ij=0}^{k}$ были невырожденными при $k = n$ и $k = n - 1$.

12. На отрезке $[-\pi,\, \pi]$ заданы значения на простой сетке с $2n + 1$ узлом. Докажите существование и единственность тригонометрического полинома

$$Q_n(\phi) \;=\; \alpha_0 \;+\; \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k\, \cos\, k\, \phi \;+\; \beta_k\, \cos\, k\, \phi\right),$$

интерполирующего эти значения.

13. Пусть $f(x) \;=\; |x|$ и $L_n(x)$ — полиномы Лагранжа, построенные по чебышевским сеткам на $[-1,\, 1]$. Докажите, что $L_n(x) \;\to\; f(x)$ равномерно по $x \;\in\; [-1,\, 1]$.

14. Пусть C — банахово пространство вещественных непрерывных 2π-периодических функций с нормой пространства $C\,[-\pi,\, \pi]$ и S_n — проектор, переводящий $f \;\in\; C$ в n-й отрезок ее ряда Фурье. Докажите, что

$$||S_n|| = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin\,(n + \frac{1}{2})\, t}{\sin\, \frac{t}{2}} \right| \, d\, t.$$

15. Пусть C — банахово пространство вещественных непрерывных 2π-периодических функций с нормой пространства $C\,[-\pi,\, \pi]$ и S_n — проектор, переводящий $f \;\in\; C$ в n-й отрезок ее ряда Фурье. Докажите, что

$$||S_n|| \le c\, \ln n,$$

где $c > 0$ не зависит от n.

16. Пусть C — банахово пространство вещественных непрерывных четных 2π-периодических функций с нормой пространства $C\,[-\pi,\, \pi]$ и S_n — проектор, переводящий $f \;\in\; C$ в n-й отрезок ее ряда Фурье. Докажите, что

$$||S_n|| \ge c\, \ln n,$$

где $c > 0$ не зависит от n.

17. Пусть на отрезке $[-1, 1]$ выбраны попарно различные точки $x_0, ..., x_n$ и $P_n : C[-1, 1] \to C[-1, 1]$ — проектор, переводящий непрерывную функцию в ее интерполяционный полином степени не выше n. Докажите, что

$$||P_n|| = \max_{-1 \le x \le 1} \sum_{0 \le i \le n} \left| \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right|.$$

18. Пусть Γ_ρ — эллипс Бернштейна для некоторого $\rho > 1$. Докажите, что

$$d_\rho \equiv \min_{z \in \Gamma_\rho,\; x \in [-1,\, 1]} |z - x| \ge \frac{(\rho - 1)^2}{2\rho}, \qquad \gamma_\rho \equiv \int\limits_{\Gamma_\rho} |dz| \le 2\rho.$$

19. Докажите, что для матрицы T вида

$$T = \begin{bmatrix} 2\,(h_1 + h_2) & h_2 & & & \\ h_2 & 2\,(h_2 + h_3) & h_3 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & & h_{n-1} & 2\,(h_{n-1} + h_n) \end{bmatrix}$$

имеет место неравенство $||T^{-1}||_\infty \leq \frac{1}{\min\limits_{1 \leq k \leq n-1}(h_k + h_{k+1})}$.

20. Постройте естественный кубический сплайн, который в узлах $x = -2, -1, 0, 1, 2$ принимает значения $y = 0, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, 0$.

21. Пусть задана сетка $a = x_0 < ... < x_n = b$, и пусть для функции f с периодом $b - a$ строится интерполяционный кубический сплайн, удовлетворяющий дополнительным условиям периодичности

$$S'(x_0) \; = \; S'(x_0), \quad S''(x_n) \; = \; S''(x_n).$$

Какой вид имеет алгебраическая система относительно величин $u_k \; = \; S''(x_k)$? Докажите, что она имеет единственное решение.

22. Пусть на сетке $a = x_0 < ... < x_n = b$ заданы значения $f_0, \dots, f_{n-1}, f_n = f_0$, и пусть $S(x)$ — интерполяционный кубический сплайн, удовлетворяющий условиям периодичности. Докажите, что если функция $\phi \in C^2\,[-\infty, \infty]$ с периодом $b - a$ интерполирует те же значения, то

$$\int_a^b (\phi''(x))^2 \, d\,x \; \geq \; \int_a^b (S''(x))^2 \, d\,x.$$

23. Пусть $\phi \in C^r\,[a, b]$ и $\phi\,(x_k) = f_k, \; 0 \leq k \leq n$. Докажите, что минимум функционала $E\,(\phi) \equiv \int_a^b (f^{(r)}(x))^2 \, d\,x$ достигается на функции ϕ, являющейся сплайном степени $2r - 1$, интерполирующим значения f_k и удовлетворяющим дополнительным условиям $f^{(j)}(x_0) \; = \; f^{(j)}(x_n) \; = \; 0, \quad r \leq j \leq 2r - 2$.

24. Естественный сплайн S интерполирует значения $f \in C^4\,[a, b]$ на сетке с максимальным шагом h. Докажите, что $||S^{(j)} - f^{(j)}||_{C\,[a,\,b]} \; = \; \mathcal{O}\,(h^{4-j}),\, 0 \leq j \leq 3$.

25. На сетке с узлами $x = -2, -1, 0, 1, 2$ построить кубический сплайн $B(x) \in C^2$, подчиненный условиям $B^{(r)}\,(\pm 2) = 0, \quad r = 0, 1, 2$. Будет ли такой сплайн единственным? Может ли такой сплайн быть нечетной функцией?

26. Фиксирована сетка $a = x_0 \;<\; \dots \;<\; x_n = b$. Доказать, что функция, минимизирующая на $C^2\,[a, b]$ функционал

$$J\,(f) \equiv \int_a^b (f'')^2 \, d\,x + \sum_{k=0}^{n} (f\,(x_k) - y_k)^2,$$

где y_k — заданные значения, с необходимостью является является естественным сплайном.

27. Верно ли, что любой сплайн степени m на сетке $0 < 1 < ... < n$ представим в виде линейной комбинации сплайнов $B_m(x - k)$ для целых $-m \leq k \leq n - 1$?

28. Рассматриваются равномерные сетки $x_k = kh$ с шагом $h = b/n$ и функция $f \in C^2(\mathbb{R})$ аппроксимируется на отрезке $[0, b]$ с помощью функций S_h вида

$$S_h\,(x) = \sum_{k=-1}^{n+1} \alpha_k \, B_3\,(h^{-1}\,x - (k - 2)).$$

Пусть $\alpha_k = f\,(x_k)$ при $-1 \leq k \leq n + 1$. Докажите, что $||f - S_h||_{C[0,b]} \; = \; O(h^2)$. Является ли S_h интерполяционным сплайном?

29. Докажите, что вывод предыдущей задачи остается в силе, если $\alpha_k = f\,(x_k)$ лишь при $0 \leq k \leq n$, а значения α_{-1} и α_{n+1} определяются соответственно по $f\,(x_0)$, $f\,(x_1)$ и по $f\,(x_n)$, $f\,(x_{n-1})$ с помощью линейной интерполяции.

30. Докажите, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} B_m^k(x) = (m+1)/(x_{k+m+1} - x_k)$.

31. Докажите, что для любого целого $0 \le l \le m$

$$x^l \;=\; \frac{1}{C_m^l}\;\sum_k \sigma_l(x_{k+1}, ..., x_{k+m})\, B_m^k(x),$$

где суммирование ведется по всем целым k таким, что $x \in \mathrm{supp} B_m^k$;

$$\sigma_l(z_1, ..., z_m) = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_l \le m} z_{i_1} ... z_{i_l}$$

— элементарная симметрическая функция степени l от m переменных; C_m^l обозначает число сочетаний из m по l.

32. Докажите единственность полинома наилучшего равномерного приближения для $f \in C\,[a,\, b]$.

33. Для любой функции $f \in C\,[a,\, b]$ докажите существование полинома наилучшего равномерного приближения.

34. Пусть функция $f \in C\,[-1,\, 1]$ четная. Докажите, что полином наилучшего равномерного приближения для нее должен быть четной функцией. Верно ли, что для нечетной функции он должен быть нечетной функцией?

35. Докажите, что полиномы Чебышева — это ортогональные полиномы на отрезке $[-1,\, 1]$ с весом $w\,(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

36. Докажите, что произвольные ортогональные полиномы представляются формулой

$$L_n(x) = \gamma_n \det \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & ... & h_{n-1} & h_n \\ h_1 & h_2 & ... & h_n & h_{n+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ h_{n-1} & h_n & ... & h_{2n-2} & h_{2n-1} \\ 1 & x & ... & x^{n-1} & x^n \end{bmatrix}, \qquad h_k = (x^k, 1).$$

37. Полиномы, ортогональные на отрезке $[-1,\, 1]$ с весом $w\,(x) = 1$, называются *полиномами Лежандра*. Докажите, для при условии нормировки $P_n(1) = 1$ справедлива *формула Родрига*

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n.$$

38. Докажите, что для полиномов Лежандра с нормировкой $P_n(1) = 1$

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}.$$

39. Найдите коэффициенты трехчленных рекуррентных соотношений для полиномов Лежандра $P_n(x)$, нормированных условием $P_n(1) = 1$.

40. Докажите, что для полиномов Лежандра с условием нормировки $P_n(1) = 1$ справедливы соотношения

$$(2n+1)P_n(x) = \frac{d}{dx}(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)), \quad n = 1,\, 2,\, ... \,.$$

41. Докажите, что значения полиномов Лежандра с условием нормировки $P_n(1) = 1$ удовлетворяют неравенству $|P_n(x)| \le 1$ при $-1 \le x \le 1$.

42. Полиномы, ортогональные на отрезке $[0,\, +\infty)$ с весом $w\,(x) = e^{-x}$, называются *полиномами Лагерра*. Докажите, что при условии нормировки $P_n(0) = 1$ имеет место формула

$$P_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

43. Докажите, что разложение по степеням x для полиномов Лагерра с условием нормировки $P_n(0) = 1$ имеет вид

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\left(x^n - \frac{n^2}{1!}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2} - ... + (-1)^n n!\right).$$

44. Найдите коэффициенты трехчленных рекуррентных соотношений для полиномов Лагерра $P_n(x)$, нормированных условием $P_n(0) = 1$.

45. Докажите, что множество корней всех полиномов Лагерра не может принадлежать какому-либо конечному отрезку.

46. Функции

$$U_n(x) \;=\; \frac{\sin((n+1)\arccos x))}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1,$$

называются *полиномами Чебышева второго рода*. Докажите, что $U_n(x)$ являются полиномами от x, ортогональными на $[-1,\, 1]$ с весом $w(x) = \sqrt{1-x^2}$. Получите для них трехчленные рекуррентные соотношения.

47. Пусть имеется последовательность квадратурных формул

$$S_n\,(f) \;=\; \sum_{i=1}^{n} d_{ni}\, f\,(x_{ni}), \quad x_{ni} \;\in\; [a,\, b].$$

Докажите, что если $\sum\limits_{i=1}^{n} |d_{ni}| \to \infty$ при $n \to \infty$, то существует функция $f \in C\,[a,\, b]$, для которой $S_n\,(f)$ не сходится к интегралу от f по $[a,\, b]$.

48. Пусть формула Ньютона–Котеса с нечетным числом узлов n используется для вычисления интеграла по отрезку $[a,\, b]$ от функции $f \in C^{n+1}\,[a,\, b]$. Докажите, что погрешность по абсолютной величине не превосходит $c\,||f^{n+1}||_{C\,[a,\, b]}\, h^{n+2}$, где $c > 0$ не зависит от f или $h = b - a$.

49. Докажите, что веса в квадратурной формуле Гаусса положительны.

50. Пусть формула Гаусса с n узлами применяется к $f \in C^{2n}\,[a,\, b]$. Докажите, что погрешность по абсолютной величине не превосходит $c\,||f^{2n}||_{C\,[a,\, b]}\, h^{2n+1}$, где $c > 0$ не зависит от f и $h = b - a$.

51. Оцените погрешность для составной квадратурной формулы, использующей на каждом элементарном отрезке длины h формулу Симпсона.

52. Пусть на отрезке $[a,\, b]$ рассматривается последовательность S_n составных формул трапеций с шагом $h = (b-a)/n$. Докажите, что если $f \in C^4\,[a,\, b]$, то

$$\int_a^b f\,(x)\, d\,x \;=\; S_n\,(f) - \frac{1}{12}(f''\,(b) - f''\,(a))\, h^2 + \mathcal{O}\,(h^4).$$