ЗАДАНИЕ 2.

1. Докажите, что в банаховом пространстве последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение, состоящее из единственной точки.

2. Пусть $F \in C^1\,[z-\delta,\, z+\delta]$, где z — единственная неподвижная точка для F. Может ли метод простой итерации сходиться к z, если $|F'(z)| = 1$? Может ли он расходиться в этом случае?

3. Пусть отображение $F:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет единственную неподвижную точку $z = F(z)$ и непрерывно дифференцируемо в некоторой ее окрестности. Докажите, что если все собственные значения его якобиана в точке z по модулю больше 1, то метод простой итерации расходится.

4. Отображение $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет единственную неподвижную точку $z = F(z)$ и непрерывно дифференцируемо в некоторой ее окрестности. Известно, что хотя бы одно собственное значение якобиана $F'(z)$ по модулю больше 1. Может ли метод простой итерации сходиться для всех начальных приближений x_0, достаточно близких к z?

5. Выяснить сходимость метода простой итерации при различных начальных приближениях для следующих уравнений:
$$(1)\quad x = e^{2x} - 1; \quad (2)\quad x + \ln x = \frac{1}{2}; \quad (3)\quad x = \operatorname{tg} x.$$

6. В полном метрическом пространстве M с расстоянием $\rho(x,y)$ задано отображение $f: M \to M$ с неподвижной точкой z и свойством
$$\rho(f(x), f(y)) \le \rho(x,y)/(1+\rho(x,y)) \quad \forall\, x, y \in M.$$
Докажите, что простые итерации $x_{k+1} = f(x_k)$ сходятся к z.

7. Проверьте, что $z = [1,\ 1,\ 1]^\top$ — одно из решений уравнения $f(x) = 0$, где $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ имеет вид
$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1x_2^3 + x_2x_3 - x_1^4 - 1 \\ x_2 + x_2^2 + x_3 - 3 \\ x_2x_3 - 1 \end{bmatrix}.$$
Будет ли метод Ньютона сходиться к z при достаточно близких к z начальных приближениях?

8. Согласно преданию, метод Ньютона впервые был опробован на уравнении
$$f(x) \equiv x^5 - 2x - 5 = 0.$$
Возьмите $x_0 = 2$ и проведите две итерации по методу Ньютона. Докажите, что уравнение имеет единственный вещественный корень z и что $|z - x_2| \le 10^{-4}$.

9. Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции f, для которой уравнение $f(x) = 0$ имеет корень z такой, что метод Ньютона не сходится к z для всех $x_0 \neq z$.

10. При $1 \le a \le 4$ решается уравнение $x^2 = a$. В качестве начального приближения x_0 берется значение $p_1(a)$, где $p_1(t)$ — полином степени 1 наилучшего равномерного приближения к функции $\sqrt{t}$ на отрезке $[1,\,4]$, а затем применяется метод Ньютона. Найдите вид полинома $p_1(t)$ и докажите, что $|x_4 - \sqrt{a}| \le \frac{1}{2}\,10^{-25}$.

11. Функция $f \in C^{p+1}$ имеет изолированный нуль z кратности p. Рассмотрите итерационный процесс
$$x_{k+1} = x_k - p\,\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
и докажите, что если он сходится к z, то сходимость квадратичная и для погрешностей $e_k \equiv z - x_k$ справедливо предельное соотношение
$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{f^{(p+1)}(z)}{p\,(p+1)\,f^{(p)}(z)}.$$

12. Матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ невырожденная, а обратная для нее матрица ищется как решение уравнения $A - X^{-1} = 0$. Докажите, что итерации метода Ньютона в данном случае имеют вид

$$X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k.$$

Докажите, что $X_k \to A^{-1}$ квадратично для любой начальной матрицы X_0 такой, что $\rho(I - AX_0) < 1$ ($\rho(\cdot)$ — спектральный радиус).

13. Покажите, что метод скорейшего спуска в общем случае не может сходиться быстрее, чем со скоростью геометрической прогрессии.

14. Пусть $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ и существуют положительные константы m и M такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$m\,||y||^2 \le (f''(x)\,y,\,y) \le M\,||y||^2. \tag{1}$$

Докажите, что метод скорейшего спуска сходится к точке минимума со скоростью геометрической прогрессии для любого начального приближения.

Верно ли, что

$$\varepsilon_{k+1} \le \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 \varepsilon_k\ ?$$

15. Множество элементарных операций содержит лишь операции сложения, вычитания, умножения и деления. Докажите, что если значение функционала $f(x)$ в точке x находится простым вычислением сложности m, то $f(x)$ и $\mathrm{grad} f(x)$ в точке x можно найти с помощью некоторого простого вычисления сложности не выше $5\,m$.

16. Множество элементарных операций содержит лишь операции сложения, вычитания и умножения. Докажите, что если значение функционала $f\,(x)$ в точке x находится простым вычислением сложности m, то $f(x)$ и $\mathrm{grad} f(x)$ в точке x можно найти с помощью некоторого простого вычисления сложности не выше $3\,m$.

17. Линейное вычисление сложности m находит компоненты вектора $y = A\,x$, $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Верно ли, что компоненты вектора $z = A^T y$ могут быть найдены с помощью некоторого линейного вычисления сложности m ?

18. Предположим, что A и $B = A - uu^\top + vv^\top$ — вещественные симметричные положительно определенные $n \times n$-матрицы и $u, v \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что разложение Холецкого для B можно получить из разложения Холецкого для A с помощью $O(n^2)$ операций.

19. Пусть $Az = b$ и $f\,(x) = \frac{1}{2}(A\,x,\,x) - \mathrm{re}(b,\,x)$, $A = A^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{C}^n$. Докажите, что $f\,(x) - f\,(z) = \frac{1}{2}(A\,(x - z),\,x - z)$.

20. Пусть $A = A^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и $b \in \mathbb{C}^n$. Докажите, что ограниченность функционала $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - \mathrm{re}(b, x)$ снизу равносильна неотрицательной определенности матрицы A.

21. Какие векторы являются одновременно ортогональными и A-ортогональными?

22. Докажите, что в методе сопряженных градиентов i-я невязка A-ортогональна любой j-й невязке, если $|j - i| > 1$.

23. Объясните, почему после рестарта в методе минимальных невязок обычно наблюдается увеличение невязки.

24. Возможно ли возрастание невязки в методе квазиминимальных невязок?

25. Пусть метод минимальных невязок применяется для решения системы $Ax = b$ и известно, что для некоторого комплексного числа ζ с модулем $|\zeta| = 1$ матрица A является строго эллиптической. Докажите, что в этом случае выполняется неравенство

$$||r_i||_2 \le \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{||A||_2^2}}\;||r_{i-1}||_2.$$

26. Пусть все собственные значения матрицы A принадлежат сектору $\mathrm{re}\lambda(A) \geq \tau > 0$, $|\lambda(A)| \leq \rho$. Докажите, что оценка

$$||r_i||_2 \leq \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{||A||_2^2}}\, ||r_{i-1}||_2$$

имеет место, если матрица A нормальная, и может не выполняться в противном случае (приведите пример).

27. При некотором $\tau > 0$ для всех векторов x выполняется неравенство $|\mathrm{re}(Ax,x)| \geq \tau(x,x)$ и существует вектор x_0 такой, что $\mathrm{re}(Ax_0,x_0) \geq \tau(x_0,x_0)$. Докажите, что $\mathrm{re}(Ax,x) \geq \tau(x,x)$ для всех x.

28. Пусть x — точное решение системы $Ax = b$ с невырожденной эрмитовой матрицей A, а $x_0, x_1, \ldots$ — приближенные решения, полученные методом минимальных невязок. Докажите, что если $x_{i-1} \neq x$, то $||x_i - x||_2 < ||x_{i-1} - x||_2$.

29. Докажите, что числовая область нормальной матрицы совпадает с выпуклой оболочкой множества ее собственных значений. (Выпуклой оболочкой множества называется минимальное содержащее его выпуклое множество.)

30. Пусть собственные значения нормальной матрицы A принадлежат области Ω, граница которой Γ есть эллипс с центром в точке c, большей полуосью a и расстоянием между фокусами $2d$, причем $0 \notin \Omega \cup \Gamma$. Тогда для метода минимальных невязок при решении системы с матрицей A справедливы оценки

$$||r_i||_2 \leq \left| \frac{T_i(a/d)}{T_i(c/d)} \right| ||r_0||_2,$$

где T_i — полином Чебышева степени i. Докажите.

31. Пусть $0 < m \leq a \leq b \leq M$ и известно, что все собственные значения эрмитовой положительно определенной матрицы A принадлежат отрезку $[a,b]$, за исключением k собственных значений на отрезке $[m,a]$ и l собственныхзначений на отрезке $[b,M]$. Покажите, что для A-норм ошибок в методе сопряженных градиентов выполняются неравенства

$$||e_i||_A \;\leq\; 2\left(\frac{M}{m}\right)^k \left(\frac{1-\sqrt{\frac{a}{b}}}{1+\sqrt{\frac{a}{b}}}\right)^{i-k-l} ||e_0||_A.$$

32. Пусть A — эрмитова положительно определенная матрица порядка n с единичной главной диагональю. Докажите, что для любой положительно определенной диагональной матрицы D

$$\mathrm{cond}_2\,(A) \leq n\,\mathrm{cond}_2\,(DAD).$$