1. Можно ли ввести норму на $\mathbb{R}^2$ так, чтобы множество всех векторов x с нормой $||x|| \le 1$ имело бы форму треугольника?
2. Многие нормы на $\mathbb{R}^n$ как функции координат вектора $x = [x_1, \dots, x_n]^\top$ обладают свойством $f(x_1, \dots, x_n) = f(|x_1|, \dots, |x_n|)$. Приведите пример нормы, которая этим свойством не обладает.
3. Докажите, что последовательность функций $f^k(x) = \sin kx/k$ не является сходящейся по норме C^1.
4. Всегда ли замыкание открытого шара совпадает с замкнутым шаром с тем же центром и радиусом?
5. Верно ли, что замыкание выпуклого множества является выпуклым? Верно ли, что множество внутренних точек выпуклого множества будет выпуклым?
6. Докажите, что любая внутренняя точка замыкания выпуклого множества S принадлежит S. Верно ли это в случае произвольного множества S?
7. Пусть $M = \mathbb{N}$, а расстояние между натуральными числами m, n определяется как $\rho(m,n) = 1 + \min\{1/m, 1/n\}$ при $m \ne n$ и 0 при $m = n$. Докажите, что M — полное метрическое пространство. Докажите также, что замкнутые шары
$$\overline{M}(1, 1+1/2) \supset \overline{M}(2, 1+1/3) \supset \overline{M}(3, 1+1/4) \supset \dots$$
вложены, но имеют пустое пересечение.
8. Докажите, что для непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ существует многочлен $p_n(x)$ степени не выше n такой, что для любого многочлена $g_n(x)$ степени не выше n имеет место неравенство
$$||f(x) - p_n(x)||_{C[a,b]} \le ||f(x) - g_n(x)||_{C[a,b]}.$$
9. Докажите, что функция $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ при $-1 \le x \le 1$ является многочленом степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1}. Докажите также, что для любого многочлена $p_n(x)$ степени n с тем же старшим коэффициентом выполняется неравенство $||T_n(x)||_{C[-1,1]} \le ||p_n(x)||_{C[-1,1]}$.
10. Дана матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Доказать замкнутость множества
$$\{y = Ax, \quad x = [x_1, \dots, x_n]^\top, \quad x_1, \dots, x_n \ge 0\}.$$
11. Для двух векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено равенство $||x+y||_2 = ||x||_2 + ||y||_2$. Докажите, что x и y линейно зависимы. Верно ли это в случае равенства $||x+y||_p = ||x||_p + ||y||_p$ для нормы Гельдера при $p \ne 2$?
12. Для матриц $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ квадрат суммы диагональных элементов матрицы AB равен произведению сумм диагональных элементов матриц $A^\top A$ и $B^\top B$. Докажите, что A и B отличаются лишь скалярным множителем.
13. По определению, $||f(x)||_{C[a,b]} \equiv \max\limits_{a\le x\le b} |f(x)|$. Докажите, что эта норма в пространстве $C[a,b]$ функций, непрерывных на $[a,b]$, не порождается никаким скалярным произведением.
14. Найдите все $p \ge 1$, при которых норма Гельдера $||\cdot||_p$ порождается некоторым скалярным произведением.
15. В пространстве со скалярным произведением даны две системы векторов $u_1, \dots, u_m$ и $v_1, \dots, v_m$. При этом $L^\perp \cap M = \{0\}$, где L и M — линейные оболочки векторов первой и второй системы. Докажите, что обе системы линейно независимы в том и только том случае, когда $m \times m$-матрица A с элементами $a_{ij} = (v_j, u_i)$ невырожденная.
16. Пусть L и M — подпространства в конечномерном пространстве V со скалярным произведением. Равносильны ли равенства $L^\perp \cap M = \{0\}$ и $L \cap M^\perp = \{0\}$?
17. В пространстве вещественных многочленов скалярное произведение (f, g) определено произвольным образом, но так, что для любых многочленов $f(x)$ и $g(x)$ выполняется равенство
$$(xf(x), g(x)) = (f(x), xg(x)),$$
и пусть при применении процесса ортогонализации к системе многочленов 1, x, x^2, ..., x^n получены многочлены $L_0(x)$, $L_1(x)$, ..., $L_n(x)$. Докажите, что имеют место трехчленные соотношения
$$L_k(x) = a_k x L_{k-1}(x) + b_k L_{k-1}(x) + c_k L_{k-2}(x), \quad 2 \le k \le n, \qquad a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}.$$

18. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ имеет столбцы $a_1, \dots, a_n \in C^n$. Докажите неравенство

$$|\det A| \ \le \ \prod_{j=1}^{n} ||a_j||_2.$$

19. Пусть A — матрица порядка n с элементами $a_{ij} = \pm 1$. Докажите, что если $|\det A| = n^{n/2}$ (такие матрицы называются *матрицами Адамара*) и $n \ge 3$, то n делится на 4.

20. Пусть $\mathcal{P}$ — линейное пространство всех вещественных многочленов на отрезке $[-1, 1]$ с C-нормой $||p||_C = \sup\limits_{-1\le x\le 1} |p(x)|$; $p'(x)$ обозначает производную многочлена $p(x)$ (ясно, что $p' \in \mathcal{P}$). Докажите, что функционал $f(p) = p'(0)$ не будет ограниченным.

21. Гиперплоскость $\pi : (x, h) = (x_0, h)$, проходящая через граничную точку $x_0 \in M$, называется *опорной гиперплоскостью* для M, если $(x, h) \le (x_0, h) \ \ \forall \ \ x \in M$. Пусть M — выпуклое множество. Докажите, что гиперплоскость, проходящая через его граничную точку, является опорной для M тогда и только тогда, когда она не содержит ни одной внутренней точки множества M.

22. Дано замкнутое выпуклое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ и $x_0 \notin M$. Доказать, что существует гиперплоскость $(x, h) = (x_0, h)$ такая, что $(x, h) < (x_0, h) \ \ \forall \ \ x \in M$.

23. Пусть $A = [a_{ij}]$ — матрица размеров $m \times n$. Докажите, что

$$||A||_\infty \ = \ \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

$$||A||_1 \ = \ \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

24. Может ли норма подматрицы быть больше нормы матрицы?

25. Дана обратимая матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, выбирается произвольная матрица $X_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и строится последовательность матриц $X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k, \quad k = 0, 1, \dots$. Доказать, что если для некоторой матричной нормы $||I - AX_0|| < 1$, то $X_k \to A^{-1}$ при $k \to \infty$.

26. Доказать, что при любом фиксированном $c > 1$ величина

$$||A|| \ = \ \max\{|a_{11}| + c|a_{12}|, \ |a_{22}| + c|a_{21}|\}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

определяет в пространстве 2×2-матриц норму с неравенством $||AB|| \le ||A||||B||$, справедливым для любых 2×2-матриц A и B. Является ли она операторной нормой?

27. Доказать неравенство $||A||_F \ \le \ \sqrt{\mathrm{rank} A}\,||A||_2$.

28. Пусть $\mathcal{M}_p$ — множество всех комплексных $n \times n$-матриц A таких, что $||Ax||_p = ||x||p$ для любого $x \in \mathbb{C}^n$. Доказать, что для всех $p \ne 2$ множество $\mathcal{M}_p$ одно и то же и совпадает с множеством матриц вида DP, где D — диагональная унитарная матрица, а P — матрица перестановки.

29. Даны произвольные числа $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$. Доказать, что любая двухдиагональная $n \times n$-матрица A вида

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & & & \\ & \alpha_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha_{n-1} & 1 \\ & & & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

подобна некоторой $n \times n$-матрице $B = [b_{ij}]$, в которой $b_{11} = \beta_1, \ \ \dots, \ \ b_{n-1\,n-1} = \beta_{n-1}$.

30. Найти все инвариантные подпространства оператора дифференцирования в пространстве вещественных многочленов.

31. Приведите пример линейного оператора $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, сохраняющего определитель матрицы. Докажите, что любой такой оператор является обратимым.