Институт вычислительной математики РАН
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Ф.В. Должанский

Лекции по геофизической гидродинамике

Москва 2006

УДК 551.513

Должанский Ф.В.

Лекции по геофизической гидродинамике – М.: ИВМ РАН, 2006. – 378 с. – ISBN 5-901854-08-X

Предлагаемый курс лекций посвящен теоретическим вопросам геофизической гидродинамики. Рассматриваются основные свойства движений жидкости, которые позволяют выделить класс движений, традиционно относящийся к геофизической гидродинамике. При построении приближений основное внимание уделяется законам сохранения. Анализируются различные приближения, позволяющие упростить уравнения с учетом сохранения основных свойств рассматриваемых течений.

Обсуждается проблема устойчивости геофизических течений, в частности физический смысл бароклинной и баротропной неустойчивостей и их связь с пространственно-временными масштабами движений атмосферы.

Заключительная часть курса посвящена построению простейшей модели циркуляции атмосферы с помощью ее механического прообраза, построенного на основе понятия обобщенного тяжелого волчка. Проблема атмосферной турбулентности требует отдельного курса, но для полноты здесь даны четыре факультативные лекции, посвященные элементам теории турбулентности и ее специфике в атмосфере. Естественно, они могут служить лишь ориентиром для затрагиваемых вопросов.

Для студентов и аспирантов, специализирующихся в области геофизической гидродинамики и математического моделирования крупномасштабных атмосферных процессов и климата.

Печатается по решению Ученого совета
Института вычислительной математики
Российской академии наук.

Рекомендован кафедрой математического моделирования физических процессов Московского физико-технического института для использования в учебном процессе.

ISBN 5-901854-08-X

© ИВМ РАН, 2006
© Ф.В. Должанский, 2006

Оглавление

Предисловие 4

I ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ И ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ 11

Лекция 1. Уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости. Циркуляционная теорема Кельвина ... 13

Лекция 2. Потенциальный вихрь и законы сохранения энергии и импульса для стратифицированной несжимаемой жидкости 25

Лекция 3. Спиральность, уравнения газовой динамики, инвариант Эртеля 36

Лекция 4. Потенциальный вихрь Россби-Обухова. Энергия и импульс сжимаемой жидкости. Гидродинамическое приближение уравнений газовой динамики 46

II Квазигеострофические приближения уравнений движения вращающихся баротропной и бароклинной жидкостей 57

Лекция 5. Уравнения движения вращающейся жидкости, понятие геофизического течения 59

Лекция 6. Что такое геофизическая гидродинамика? 69

Лекция 7. Уравнения Обухова-Чарни, волны Россби 82

Лекция 8. Резонансное взаимодействие волн Россби, сингулярные вихри Гельмгольца и Обухова, уравнения Кирхгоффа 94

Лекция 9. Уравнения квазигеострофического бароклинного движения 109

Лекция 10. Энергетический баланс, доступная потенциальная энергия и волны Россби в бароклинной атмосфере 120

Лекция 11. Три важных замечания об описании бароклинных геофизических течений 128

III ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ЦИКЛОГЕНЕЗ 139

Лекция 12. Механические прообразы уравнений движения баротропной жидкости и их фундаментальных инвариантов 141

Лекция 13. Механические прототипы уравнений движения идеальной бароклинной жидкости в гравитационном поле и их фундаментальных инвариантов . 152

Лекция 14. Понятие динамической устойчивости на примере движения твердого тела с неподвижной точкой .. 162

Лекция 15. Постановка задачи о линейной устойчивости плоскопараллельных течений идеальных однородной и неоднородной жидкостей 172

Лекция 16. Метод нормальных мод и его простейшие применения в линейной теории устойчивости плоскопараллельных течений 180

Лекция 17. Задача Тейлора об устойчивости движения расслоенной жидкости с линейным профилем скорости 189

Лекция 18. Применение интегральных соотношений и законов сохранения в теории гидродинамической устойчивости 197

Лекция 19. Устойчивость зональных течений баротропной атмосферы. Понятие баротропной неустойчивости 209

Лекция 20. Понятие бароклинной неустойчивости. Модель Иди 218

IV РОЛЬ ВЯЗКОСТИ В ФОРМИРОВАНИИ ГЛОБАЛЬНЫХ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ 229

Лекция 21. Уравнения движения вязкой жидкости, граничные условия. 231

Лекция 22. Механизмы трения в глобальных геофизических течениях. Квазигеострофическое уравнение трансформации потенциального вихря 242

Лекция 23. Течение Колмогорова и роль внешнего трения ... 253

Лекция 24. Устойчивость квазидвумерных сдвиговых течений с произвольным профилем скорости 266

Лекция 25. Уравнения игрушечной модели общей циркуляции атмосферы и их квазигеострофическое приближение 280

Лекция 26. Движение баротропного и бароклинного волчков как механические прототипы общих циркуляций баротропной и бароклинной невязких атмосфер .. 289

Лекция 27. Игрушечная общая циркуляция вязкой атмосферы 302

V ДОПОЛНЕНИЕ
Элементы теории турбулентности и специфика атмосферных турбулентных течений 327

Лекция A. О случайных полях и их статистическом описании 329

Лекция B. Спектральное представление характеристик турбулентности. Уравнение Колмогорова 339

Лекция C. Законы развитой турбулентности по сценарию Ричардсона-Колмогорова-Обухова 348

Лекция D. Специфика атмосферной турбулентности 361

Предисловие

В начале девяностых, когда наука в нашей стране испытывала наиболее трудные времена, связанные прежде всего почти с тотальной эмиграцией молодых сотрудников заграницу или в коммерческие структуры, я получил неожиданное приглашение от академика В.П. Дымникова прочитать короткий полугодовой ознакомительный курс лекций по геофизической гидродинамике студентам МФТИ, специализирующимся в области прикладной математики и имеющим представление о гидродинамике лишь в объеме общего курса физики. В иные времена, когда основанная академиком А.М. Обуховым Лаборатория геофизической гидродинамики была избалована количеством претендентов войти в состав ее сильного научного коллектива, я едва ли взялся бы за это дело хотя бы уже потому, что мой педагогический опыт ограничивался лишь подготовкой студентов старших курсов и аспирантов к защите дипломов. Но в то время, тайно надеясь привлечь новые молодые кадры к проблематике Лаборатории, уже лишившейся по упомянутой причине не только нескольких ключевых сотрудников, но и практически всей перспективной молодежи, я легкомысленно принял предложение, смолоду испытывая тягу к совмещению исследовательской работы с взаимообогащающим научным и дидактическим общением со студентами. 'Why not?' и, руководствуясь наполеоновским принципом "ввязаться в драку, а там посмотрим отправился в неизведанное. Вначале, не помышляя ни о каком издании лекций, я собирался, опираясь на исключительно содержательную книжку А.С. Монина "Прогноз погоды как задача физики превосходные, к сожалению так и не изданные, лекции Л.А. Дикого по динамической метеорологии, некоторые главы известных двухтомных монографий Дж. Педлоского и А. Гилла и собственный научно-исследовательский опыт, сделать короткую выжимку по основам основ геофизической

гидродинамики с единственной целью не столько научить, сколько заинтересовать талантливых физтеховцев фундаментальными проблемами этой науки. И только после первого семестрового чтения лекций я понял, за сколь сложное и рискованное, если не безнадежное, дело я взялся, тем более если учесть, что по одну сторону кафедры – всего лишь research professor без малейшего опыта лекционного общения со студентами, а по другую – аудитория, не владеющая основами гидродинамики. Но отступать было некуда. Мне, уже включенному в штат физтеховских профессоров, по настоятельной просьбе был предоставлен годовой курс по два академических часа в неделю, по прочтении которого сформировались, наконец, общая концепция и идеология курса лекций, предназначенных для незнакомого с гидродинамикой, но математически образованного слушателя. В сущности, именно на такого читателя, заинтересовавшегося проблемами вращающихся жидких систем и желающего, не теряя времени, в них погрузиться, и нацелен предлагаемый курс лекций. Не могу не упомянуть в связи с этим превосходные лекции Р. Сэлмона (R. Salmon), с которыми я ознакомился в конце девяностых, окончательно утвердившими меня если не в правильности, то в разумности выбранной стратегии.

После десятилетнего чтения и конспектирования курса лекций я остановил свой мучительный выбор на следующем его содержании. Первые четыре лекции (Часть 1) посвящены основным принципам и законам движения идеальных несжимаемой и сжимаемой жидкостей, в которых особое внимание уделяется первым интегралам движения гидродинамических уравнений, и в первую очередь инварианту Кельвина и его аналогам в стратифицированной несжимаемой и сжимаемой жидкостях - инвариантам Россби-Обухова и Эртеля. В следующих семи лекциях (Часть 2) речь идет о том, что такое геофизическая гидродинамика с ее необычными свойствами движения жидкости вдоль изобар и подавленной компонентой вертикальной скорости (теорема Праудмена-Тейлора). При выводе квазигеострофических уравнений движения, для сокращения времени изложения, я применил аксиоматический подход, постулируя, что все пространство невязких глобальных геофизических течений натянуто на своеобразный четырехмерный базис Обухова-Чарни, задаваемый условиями квазигидростатического и квазигеострофического равновесий и лагранжевой инвариантности

потенциальной температуры и потенциального вихря. Проблема фильтрации быстрых движений и адаптации метеорологических полей к упомянутым равновесиям обсуждается лишь на уровне иллюстраций и физических объяснений. Вводятся понятия волн Россби, их резонансного взаимодействия, термического ветра, доступной потенциальной энергии, сингулярных вихрей Гельмгольца и Обухова и выводятся уравнения Кирхгоффа их движения с применением к геофизическим ситуациям.

В третьей части обсуждается проблема баротропной и бароклинной устойчивости глобальных геофизических течений, чему предшествует изложение классических результатов теории гидродинамической устойчивости, легко обобщаемых на случай вращающейся жидкости. При выборе материала я остановился на краткой и исключительно доходчивой книге Л.А. Дикого "Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы которой с незначительными изменениями и придерживался при чтении лекций, дополняя материал рассмотрением (по Э. Лоренцу) максимально упрощенных нелинейных уравнений атмосферной динамики, иллюстрирующих эволюцию движения после потери устойчивости первичного течения. Особое внимание уделяется механизму бароклинной неустойчивости и его связи с доступной потенциальной энергией. На мой взгляд, наилучшую физическую трактовку этого непростого явления дал его первооткрыватель Иди, современное изложение работы которого я и включил в этот раздел.

Вязким геофизическим течениям и общей циркуляции атмосферы посвящена четвертая часть курса, которая по материалу и изложению в наибольшей степени отличается от традиционного подхода к такой тематике. После вывода уравнений Навье-Стокса внимание читателя сосредоточивается на описании геофизических пограничных слоев - слоев Экмана и Праудмена-Стюартсона, ответственных за диссипацию кинетической энергии глобальных течений. Выводится квазигеострофическое уравнение трансформации потенциального вихря квазидвумерной баротропной атмосферы с учетом планетарного пограничного слоя и на основе этого уравнения детально исследуется линейная устойчивость зонального течения Колмогорова (синусоидального профиля скорости) на бесконечной f-плоскости. В этом исключительном случае линейная задача устойчивости решается аналитически, что очевидным обра-

зом позволяет проиллюстрировать принципиально важную роль внешнего трения, создаваемого планетарным пограничным слоем, на характеристики устойчивости глобальных атмосферных течений. Результаты решения этой задачи, сформулированные в терминах внутреннего и внешнего чисел Рейнольдса и распространенные затем на течения произвольного профиля скорости, указывают на структурную неустойчивость теории устойчивости строго двумерных течений по отношению к включению внешнего трения и, наоборот, исключение внутреннего трения практически не сказывается на результатах квазидвумерной теории. Тем самым становится очевидным, что определяющим параметром баротропной атмосферы является число Рейнольдса, определенное по внешнему трению, а не обычное число Рейнольдса, достигающее астрономических значений для глобальных движений. Автомодельностью относительно внутреннего числа Рейнольдса и относительно слабой закритичностью глобальных движений по внешнему числу Рейнольдса и объясняется относительно спокойный характер общей циркуляции атмосферы, не захваченной на крупных масштабах развитой турбулентностью.

Заключительная часть курса посвящена описанию общей циркуляции атмосферы с помощью ее механического прообраза, построенного на основе уравнений Эйлера-Пуассона движения тяжелого твердого тела, обобщенных на случай вращения системы в целом. В связи с этим уместно отметить еще одну отличительную особенность этого курса. Опираясь на введенные Арнольдом понятие обобщенного твердого тела и автором лекций понятие обобщенного тяжелого твердого тела, систематически проводится аналогия между гидродинамическими уравнениями Эйлера движения идеальной жидкости и уравнениями Обербека-Буссинеска движения тяжелой жидкости, с одной стороны, и механическими уравнениями Эйлера движения классического гироскопа и уравнениями Эйлера-Пуассона движения тяжелого волчка, обладающими к тому же прямой гидродинамической трактовкой – с другой стороны. Как следствие механические инварианты – квадрат момента импульса и проекция момента импульса на направление гравитации – трактуются как инварианты Кельвина и Эртеля соответственно. Механический прообраз общей циркуляции атмосферы, обладающий фундаментальными свойствами симметрии оригина-

ла, получается введением линейного трения, имитирующего влияние планетарного пограничного слоя, и источников тепла по Ньютону (пропорциональных отклонениям температуры от фонового распределения). В итоге, не обращаясь к труднообозримым результатам численного моделирования общей циркуляции атмосферы, а лишь на основе аналитических расчетов и численного интегрирования малокомпонентных динамических систем, которые студенты могут осуществить прямо на лекции, удается проиллюстрировать действие атмосферы как тепловой машины с ее фундаментальными режимами Хэдли и Россби, обратной меридиональной ячейкой циркуляции, характерным энергетическим циклом, малокомпонентной стохастичностью и, следовательно, непредсказуемостью погоды на длительные сроки и немотивированным извне переходом из одного длительно наблюдаемого метастабильного состояния в другое, до некоторой степени объясняющим возможность спонтанного изменения климата.

Очень важная, не охваченная основным курсом, проблема атмосферной турбулентности затрагивается в дополнении, состоящем из четырех факультативных лекций под общим названием "Элементы теории турбулентности и специфика атмосферных турбулентных течений". В нем подробно излагается теория развитой трехмерной и развитой квазидвумерной турбулентности по сценарию Ричардсона-Колмогорова-Обухова в свете современных достижений, относящихся к теоретической оценке константы Колмогорова, проблемам перемежаемости и описания механизмов диссипации кинетической энергии в окрестностях внутреннего и внешних масштабов диссипации. Применительно к общей циркуляции атмосферы особо выделяется роль обратного каскада передачи энергии по спектру и развитой трехмерной турбулентности в планетарном пограничном слое.

Благодаря последней свободная атмосфера подвержена влиянию нелинейного внешнего трения и нелинейного бета-эффекта.

Для лучшего усвоения материала каждая лекция снабжена упражнениями, подсказками и, как правило, решениями. В Приложении к Лекциям для наглядности и убедительности некоторых теоретических выводов приведены фотографии лабораторных геофизических течений, смоделированных в разные годы в Лаборатории геофизической гидродинамики ИФА РАН А.М. Батчаевым, В.А. Довженко, В.А. Крымовым, Д.Ю. Маниным и Ю.Л. Черноусько. Несколько слов о нумерации формул и цитировании литературы. В каждой лекции принята своя нумерация формул, а при обращении к формулам иной лекции указывается сначала номер этой лекции, а затем номер интересующей нас формулы, так что (14.23) означает ссылку на 23-ю формулу Лекции 14. То же относится к нумерации рисунков. Приводимое полекционно цитирование литературы сведено к минимуму и ориентировано главным образом на широкодоступные издания, в которых читатель найдет подробности ссылки, процитированной в лекциях лишь фамилией автора и годом публикации. Подробно цитируются труднодоступные публикации прошлых и последних лет, так и не вошедшие либо еще не вошедшие в распространенные издания.

Пользуюсь случаем выразить свою искреннюю признательность В.П. Дымникову за привлечение меня к педагогической деятельности и настойчивое стимулирование к скорейшему завершению рукописи. Неоценимую помощь в подготовке лекционного материала оказали многочисленные консультации и сопутствующие им критические замечания моих коллег Е.Б. Гледзера, Г.С. Голицына, В.П. Гончарова, В.И. Кляцкина, В.М. Пономарева и И.Г. Якушкина. Большой вклад в трактовке материала и изложении содержания Дополнения принадлежит Е.Б. Гледзеру, дополнившему рукопись описанием современного состояния дел в теории турбулентности. Особую признательность выражаю А.Е. Гледзеру и В.М. Пономареву за тщательную вычитку рукописи и подготовку иллюстративного материала.

Ф. Должанский август 2006

Часть I

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ И ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Лекция 1

Уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости. Циркуляционная теорема Кельвина

Понятие гидродинамики у ученых-естественников ассоциируется обычно не с движением жидкости как физическим процессом, а с уравнениями Эйлера или Навье-Стокса, претендующими на описание необъятного множества качественно различных явлений – от простейших малых колебаний сплошной среды, например распространения звука в однородной жидкости (газе), до таинственной турбулентности, наблюдаемой в подавляющем большинстве природных и технологических течений. Предсказание, сделанное Лэмбом (H. Lamb) - известным английским гидродинамиком в 20-х годах прошлого столетия, о том, что вопреки уже достигнутым и ожидаемым выдающимся результатам в физике теория турбулентности не будет построена в 20-м веке, полностью оправдалось; это предсказание, по-видимому, можно перенести и на нынешнее столетие. Практически это означает невозможность (по крайней мере на современном этапе) построения общих решений упомянутых уравнений и, как следствие, необходимость их редукции, основанной на наблюдениях и физических представлениях об изучаемом классе движений. По этой причине к настоящему времени отдельные разделы гидродинамики, такие как теория звука, вихревая динамика, теория гидродинамической устойчивости, магнитная гидродинамика, теория конвекции, аэродинамика и многие другие, оформились в самостоятельные науки с характерными для них физической спецификой, практическими приложениями, а нередко и со специально разработанным математическим аппаратом, как это имеет место

в нелинейной теории волн.

Самостоятельной наукой стала и геофизическая гидродинамика, охватывающая весьма широкий круг явлений, наблюдаемых во вращающихся в целом жидкостях. К ним относятся, в частности, океан и атмосфера Земли, их лабораторные аналоги, атмосферы других вращающихся планет, Солнце и другие звезды и даже галактики, эволюция которых происходит в условиях общего вращения.

Чтобы лучше понять, что такое геофизическая гидродинамика и какое место она занимает среди других гидродинамических наук, полезно напомнить основные принципы и законы движения жидкости, нарушение которых недопустимо при упрощении постановок задач.

1. Что такое несжимаемая жидкость? Начнем с идеальной, т.е. невязкой и нетеплопроводной, несжимаемой жидкости. Несжимаемость означает, что плотность $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$ произвольно выделенной жидкой частицы, рассматриваемая как функция времени t и ее местоположения $\mathbf{x}$, остается постоянной в процессе движения. Поскольку радиус-вектор $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ местоположения движущейся частицы, в свою очередь, зависит от времени, условие постоянства ρ математически выражается уравнением

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\rho = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ по определению есть скорость течения жидкости в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t. Оператор

$$\frac{d}{dt} \doteq \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla \tag{2}$$

называется *субстанциональной*, или *индивидуальной, производной* и отражает тот факт, что изменение какой-либо характеристики жидкой частицы в процессе ее движения происходит не только из-за явной зависимости от времени, но и из-за пространственной неоднородности этой величины, скорость изменения которой в направлении течения задается производной $\mathbf{u}\nabla$ по направлению $\mathbf{u}$.

Величины, характеризующие какое-либо состояние жидкости, например плотность или скорость, в любой точке пространства, занимаемой жидкостью, будем называть *полевыми характеристиками* или *просто полями*. Скалярные полевые характеристики,

удовлетворяющие уравнению (1), называются *лагранжевыми инвариантами*, играющими в геофизической гидродинамике, как мы увидим ниже, решающую роль. Пока же еще раз подчеркнем основное свойство лагранжевого инварианта, вытекающего из самого его определения: он пассивно переносится движением жидкости, т.е. его значение остается постоянным для каждой индивидуальной частицы, а изменяется лишь ее местоположение.

2. Уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости. Единственной физической характеристикой, описывающей идеальную несжимаемую жидкость в состоянии покоя, является ее плотность - локальная мера инертности сплошной среды. Поэтому движение такой системы должно управляться исключительно механическими принципами, причем в качестве исходных можно воспользоваться любыми двумя независимыми принципами, например законом сохранения массы и вторым законом Ньютона, на основании которых формулируются затем уравнения баланса энергии, импульса и момента количества движения. Для произвольно выделенного объема жидкости V сохранение массы выражается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho dV = -\oint\limits_{\partial V} \rho\mathbf{u}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\int\limits_V div(\rho\mathbf{u})dV, \tag{3}$$

согласно которому скорость изменения массы выделенного объема равна потоку массы через замкнутую поверхность ∂V, ограничивающую этот объем. (Знак минус в правой части (3) указывает на то, что за положительное направление потока жидкости через элемент $d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{n}d\sigma$ поверхности ∂V выбрано направление внешней нормали $\mathbf{n}$.) Применительно к индивидуальной жидкой частице единичного объема это означает

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{u}) \equiv \frac{d\rho}{dt} + \rho\mathrm{div}\mathbf{u} = 0. \tag{3a}$$

Для несжимаемой среды уравнение (3а) в силу (1) распадается на два уравнения:

$$\frac{d\rho}{dt} \doteq \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\rho = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \tag{4}$$

т.е. движение несжимаемой жидкости описывается бездивергентными векторными полями скорости. Такие поля часто называют *соленоидальными*.

Второй закон Ньютона, примененный к индивидуальной жидкой частице единичного объема, записывается в виде

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \doteq \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} \right) = \mathbf{F}, \tag{5}$$

где $\mathbf{F}$ - реакция связей, т.е. результирующая всех сил, действующих на частицу со стороны окружающей ее среды.

Система (4), (5), однако, еще не замкнута, поскольку число неизвестных величин ρ, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ на две единицы превосходит число уравнений. Иногда для замыкания системы (4), (5) делается не совсем последовательный шаг, связанный с априорным привлечением понятия давления, которое, строго говоря, относится к понятиям термодинамическим, выходя тем самым за пределы чисто механического представления о рассматриваемой среде. Этого можно избежать путем следующих рассуждений.

Положим ради простоты, что плотность жидкости всюду постоянна и равна ρ_0. Для этого случая систему (4), (5) можно переписать в виде

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} + \frac{\mathbf{F}}{\rho_0}. \tag{7}$$

Поскольку для изучаемой жидкости в рамках строго механического подхода нет других независимых принципов движения, кроме упомянутых выше, остается предположить, что векторное поле $\mathbf{F}$ является потенциальным, т.е. существует скалярная функция $p = p(t, \mathbf{x})$, определяемая из уравнений движения и посредством которой $\mathbf{F}$ задается единственным инвариантным способом согласно равенству (смысл выбора отрицательного знака будет ясен чуть ниже)

$$\mathbf{F} = -\nabla p. \tag{8}$$

Величину p можно рассматривать как калибровочную функцию, обеспечивающую бездивергентность (соленоидальность) правой части уравнения (7) и удовлетворяющую уравнению Пуассона (подействуйте на (7) оператором div с учетом (8)):

$$\Delta p = -\rho_0 \sum_{i,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (i, k = 1, 2, 3). \tag{9}$$

Учитывая далее, что сила, действующая на индивидуальную частицу объемом V, равна

$$\int\limits_V \mathbf{F}dV \equiv -\int\limits_V \nabla p dV = -\oint\limits_{\partial V} p d\boldsymbol{\sigma}$$

($d\boldsymbol{\sigma}$ – элемент площади замкнутой поверхности ∂V, ограничивающей объем V), приходим к выводу, что p численно равна силе, действующей в точке $\mathbf{x}$ на единичную площадку произвольной направленности, т.е. величину p можно отождествить с давлением, возникающим в жидкости в результате ее движения. Теперь становится понятен смысл отрицательного знака в (8): положительное ускорение жидкости должно быть направлено в сторону убывания давления, т.е. противоположно его градиенту.

Приведенные выше рассуждения остаются справедливыми и для несжимаемой жидкости переменной плотности, с тем лишь отличием, что вместо (9) давление в этом случае удовлетворяет уравнению

$$\Delta p - \nabla p \cdot \nabla (\ln \rho) = -\rho \sum_{i,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}. \tag{9a}$$

Таким образом, уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости записываются в виде

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \doteq \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{10}$$

$$div\mathbf{u} = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} \doteq \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\rho = 0. \tag{11}$$

Первое из них называется *уравнением Эйлера движения идеальной жидкости* (L. Euler, 1755), которое с помощью известной формулы векторного анализа

$$\tfrac{1}{2}\nabla \mathbf{u}^2 = \mathbf{u} \times rot\mathbf{u} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} \tag{12}$$

иногда удобно записывать в форме Бернулли (D. Bernoulli) или Громеки-Лэмба (H. Lamb)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times rot\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \tfrac{1}{2}\nabla \mathbf{u}^2. \tag{10a}$$

Отметим важную отличительную особенность уравнения Эйлера для жидкости постоянной плотности, которая состоит в том, что его правая часть есть градиент от скалярной функции. В случае переменной плотности такое могло бы иметь место, только если $p = p(\rho)$, т.е. давление было бы функцией плотности (так называемая баротропная жидкость). Для несжимаемой среды это означало бы переопределенность ее уравнений движения, а также то, что давление двигалось бы вместе с жидкостью. Последнее невозможно по самой физической сути этой величины. Указанное различие весьма существенно, как мы увидим ниже, сказывается на свойствах решений гидродинамических уравнений, особенно в случае, когда жидкость помещают во внешнее потенциальное поле.

3. Циркуляционная теорема Кельвина [Kelvin, Lord, 1869]. Фундаментальное значение для понимания и описания движения жидкости постоянной плотности ($\rho = \rho_0$) имеют понятие завихренности и теорема Кельвина о сохранении циркуляции.

Кривая L называется жидкой, если она движется вместе с жидкостью, т.е. любая принадлежащая кривой точка движется вместе с жидкой частицей, с которой эта точка совпадала в начальный момент времени. Циркуляция скорости по замкнутому жидкому контуру определяется интегралом

$$K \doteq \oint_C \mathbf{u}\delta\mathbf{r}, \tag{13}$$

где $\delta\mathbf{r}$ – инфинитезимальный элемент контура C, равный разности радиусов-векторов его (элемента) концов, а знак $\doteq$ означает "по определению равен". Поскольку при движении вместе с жидкостью контур C деформируется, субстанциональная производная от величины K вычисляется согласно равенству

$$\frac{dK}{dt} = \oint_C \frac{d\mathbf{u}}{dt}\delta\mathbf{r} + \oint_C \mathbf{u}\delta\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right), \tag{14}$$

где по определению $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{u}$. Поэтому

$$\oint_C \mathbf{u}\delta\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \oint_C \mathbf{u}\delta\mathbf{u} = \frac{1}{2}\oint_C d\left(\mathbf{u}^2\right) = 0 \tag{15}$$

как интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала. Делая теперь подстановку (10) в (14) с учетом постоянства $\rho = \rho_0$ и (15), по той же причине находим, что

$$\frac{dK}{dt} = \oint\limits_C \frac{d\mathbf{u}}{dt}\delta\mathbf{r} = -\frac{1}{\rho_0}\oint\limits_C \nabla p\delta\mathbf{r} = -\frac{1}{\rho_0}\oint\limits_C dp = 0.$$

Это доказывает теорему Кельвина о сохранении циркуляции, согласно которой K есть лагранжев инвариант, т.е.

$$\frac{dK}{dt} \doteq \frac{d}{dt}\oint\limits_C \mathbf{u}\delta\mathbf{r} = 0. \tag{16}$$

Другая трактовка теоремы Кельвина основана на применении теоремы Стокса

$$\oint\limits_C \mathbf{A}\delta\mathbf{r} = \int\limits_S rot\mathbf{A}d\boldsymbol{\sigma}, \tag{17}$$

справедливой для произвольного достаточно гладкого векторного поля $\mathbf{A}$ и произвольного *стягиваемого* жидкого контура C. Здесь $d\boldsymbol{\sigma}$ - инфинитезимальный элемент площади поверхности S, натянутой на замкнутый контур C. *Контур называется стягиваемым, если его можно гладким образом деформировать в точку, не выходя за пределы области, занятой жидкостью.*

По теореме Стокса

$$K \doteq \oint\limits_C \mathbf{u}\delta\mathbf{l} = \int\limits_S \boldsymbol{\Omega}d\sigma \quad , \quad \boldsymbol{\Omega} \doteq \operatorname{rot}\mathbf{u},$$

а для инфинитезимального замкнутого контура C величина K записывается в виде

$$K \doteq \oint\limits_C \mathbf{u}\delta\mathbf{l} = \boldsymbol{\Omega}d\boldsymbol{\sigma}. \tag{18}$$

Отсюда видно, что циркуляцию скорости по замкнутому стягиваемому жидкому контуру C можно интерпретировать как поток завихренности, задаваемой векторным полем $\boldsymbol{\Omega}$, через поверхность, натянутую на контур C.

Равенство (16) вместе с (18) означает, что упомянутый поток завихренности является лагранжевым инвариантом, и в этом смысле

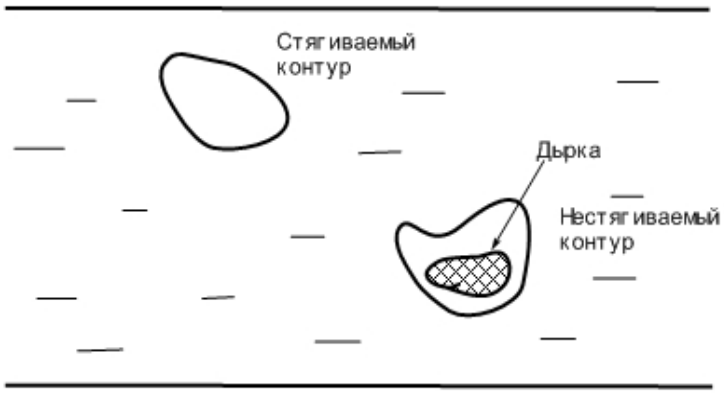


Рис. 1. Стягиваемый и нестягиваемый контуры в двумерной жидкости, заполняющей неодносвязную область с дыркой.

можно говорить о переносе завихренности жидкостью. Следует, однако, отметить, что циркуляция скорости, как видно из приведенного доказательства, сохраняется вдоль любого замкнутого жидкого контура, в том числе и нестягиваемого, например, охватывающего дырку в многосвязной области (см. рис. 1). Поэтому нужно помнить, что циркуляция скорости - понятие более широкое, чем завихренность, и это используется, например, в теории обтекания твердых тел идеальной однородной несжимаемой жидкостью.

Лагранжеву инвариантность величины (18) можно также трактовать в терминах вихревых трубок, которые конструируются следующим образом. Введем понятие вихревой линии, по определению касательной в любой принадлежащей ей точке вектору завихренности $\mathbf{\Omega}$. Вихревые линии задаются семейством решений дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}. \tag{19}$$

Совокупность вихревых линий, проходящих через точки замкнутой стягиваемой кривой, образует цилиндрическую поверхность, называемую вихревой трубкой (см. рис. 2а). По самому построению она обладает тем свойством, что на ее поверхности $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ ($\mathbf{n}$ – единичная нормаль к поверхности). Следовательно,

поток завихренности через любое ее поперечное сечение $\delta\boldsymbol{\sigma}$ постоянен вдоль трубки и называется интенсивностью вихревой трубки. Поэтому перенос завихренности жидкостью означает теперь, что вихревая трубка является жидкой, т.е. движется вместе с жидкостью, потому что согласно теореме Кельвина интенсивность трубки сохраняется в процессе движения.

Чтобы лучше осознать, что поле завихренности неподвижно относительно жидкости или, что то же самое, его силовые линии сами являются жидкими, подействуем на уравнение (10а) операцией ротора, используя следующие формулы векторного анализа:

$$rot\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\nabla)\,\mathbf{A} - (\mathbf{A}\nabla)\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathrm{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathrm{div}\mathbf{A}, \tag{20}$$

$$\mathrm{rot}\,(\varphi\mathbf{A}) = (\nabla\varphi\times\mathbf{A}) + \varphi\mathrm{rot}\mathbf{A}. \tag{21}$$

С учетом бездивергентности поля скорости $\mathbf{u} = \mathbf{u}\,(t,\mathbf{x})$ в результате получим уравнение вихря

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,(\mathbf{u}\times\boldsymbol{\Omega}) \equiv \frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{u} = 0, \tag{22}$$

носящее имя Гельмгольца [H. Helmholtz, 1858]. Уравнение Гельмольца можно переписать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = (\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{u}. \tag{22a}$$

Согласно "Кочин, Кибель, Розе"(см. Литературу) *для того чтобы силовые линии бездивергентного векторного поля являлись жидкими, необходимо и достаточно, чтобы само векторное поле управлялось уравнением Гельмгольца.*

Необходимость легко доказывается. Пусть $\delta\mathbf{l}$ - инфинитезимальный элемент жидкой линии (элемент, касательный к ней). Тогда скорость изменения длины этого элемента равна разности скоростей на его концах, что математически записывается в виде

$$\frac{d\delta\mathbf{l}}{dt} = (\delta\mathbf{l}\nabla)\,\mathbf{u} \text{ или } \frac{\partial\delta\mathbf{l}}{\partial t} = (\delta\mathbf{l}\nabla)\,\mathbf{u} - (\mathbf{u}\nabla)\,\delta\mathbf{l}, \tag{23}$$

что эквивалентно $(22a)$ или (22).

Для доказательства достаточности заметим, что несжимаемость жидкости означает лагранжеву инвариантность элемента

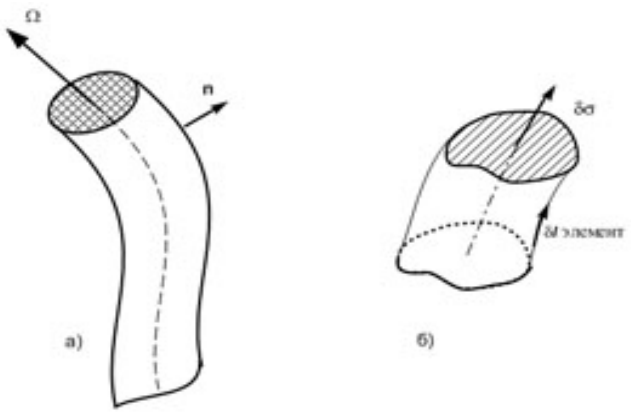


Рис. 2. Вихревая трубка (а) и инфинитезимальный элемент объема (б).

объема $\delta\mu = \delta\mathbf{l}\cdot\delta\boldsymbol{\sigma}$, где $\delta\mathbf{l}$ – линейный жидкий элемент, $\delta\boldsymbol{\sigma}$ – площадь элемента ориентированной поверхности, трансверсальной $\delta\mathbf{l}$ (рис. 2б)

$$\frac{d\delta\mu}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\delta\mathbf{l}\cdot\delta\boldsymbol{\sigma}\right) = 0. \tag{24}$$

Поскольку $\delta\mathbf{l}$ как жидкий линейный элемент удовлетворяет уравнению Гельмгольца, то из (23) и (24) следует, что $\delta\boldsymbol{\sigma}$ описывается уравнением

$$\frac{d\delta\boldsymbol{\sigma}}{dt} = -\delta\boldsymbol{\sigma}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{r}},$$

$$\text{или в тензорных обозначениях } \frac{d\delta\sigma_i}{dt} = -\delta\sigma_k\frac{\partial u_k}{\partial x_i}. \tag{25}$$

В самом деле, подставляя (23) в (24) и переходя к тензорным обозначениям, получаем равенство

$$\delta l_i\left(\delta\sigma_k\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{d\delta\sigma_i}{dt}\right) = 0,$$

которое в силу произвольности $\delta\mathbf{l}$ эквивалентно (25).

Теперь нетрудно доказать, что для того чтобы силовые линии бездивергентного векторного поля были жидкими, достаточно, чтобы само векторное поле удовлетворяло уравнению Гельмгольца. В самом деле, по определению силовых линий (19) элемент

длины $\delta\mathbf{l}$ также управляется уравнением Гельмгольца. Рассмотрим в некоторый начальный момент элемент объема $\delta\mu = \delta\mathbf{l}\cdot\delta\boldsymbol{\sigma}$, где $\delta\boldsymbol{\sigma}$ – элемент *жидкой* поверхности, трансверсальной элементу $\delta\mathbf{l}$ с центром в точке их пересечения. Тогда в силу того что $\delta\mathbf{l}$ и $\delta\boldsymbol{\sigma}$ удовлетворяют соответственно (23) и (25), то $\delta\mu$ – лагранжев инвариант, т.е. жидкий элемент объема, следовательно, $\delta\mathbf{l}$ – жидкий элемент длины.

Попутно отметим, что *необходимым и достаточным условием неподвижности выделенной поверхности относительно жидкости (т.е. того, что поверхность тоже жидкая) является условие, что любой элемент поверхности* $\delta\boldsymbol{\sigma}$ *удовлетворяет уравнению* (25).

Упражнения

1. Покажите, что завихренность в точке $\mathbf{x}$ равна удвоенной угловой скорости локального вращения жидкости в точке $\mathbf{x}$.

2. Пусть двумерное безвихревое (всюду $\boldsymbol{\Omega} = 0$) течение несжимаемой однородной жидкости происходит в неограниченной плоскости с дыркой, циркуляция скорости которого по границе дырки отлична от нуля и равна Γ_0. Покажите, что циркуляция скорости по произвольному контуру, охватывающему дырку, также отлична от нуля и равна Γ_0.

3. Пусть жидкость находится в потенциальном поле Φ ($\nabla\Phi$ – сила, действующая на единицу массы) и в целом вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_0$. Покажите, что в системе координат, вращающейся вместе с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_0$, уравнения Эйлера можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\left(\tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{r}\right)^2 + \Phi\right).$$

Подсказка: Воспользуйтесь формулой преобразования производных по времени

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{A},$$

где индексом R обозначена производная по времени во вращающейся системе координат.

4. Предположим, что нам неизвестны уравнения движения идеальной несжимаемой однородной жидкости, но известно, что выполняется циркуляционная теорема Кельвина (например, как эмпирический факт). Покажите, что из этой теоремы и несжимаемости среды следуют уравнения Эйлера движения упомянутой жидкости. (Второй закон Ньютона можно было бы открыть, используя теорему Кельвина.)

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*, М.: Наука, ГРФМЛ, 1986.

2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика*, М.:ГИТТЛ, 1955.

3. Бэтчелор Дж. *Введение в динамику жидкости*, М.: Мир, 1973.

4. Milne-Thompson L.M. *Theoretical hydrodynamics*, New York, 1996. (Имеется русский перевод.)

Лекция 2

Потенциальный вихрь и законы сохранения энергии и импульса для стратифицированной несжимаемой жидкости

1. Потенциальный вихрь стратифицированной несжимаемой жидкости. Для несжимаемой, но стратифицированной жидкости, у которой $\rho = \rho(t, \mathbf{x}) \neq \rho_0$, теорема Кельвина, вообще говоря, не выполняется, потому что правая часть уравнения Эйлера (1.10) $-\rho^{-1}\nabla p$ уже не есть градиент скалярной функции, а, следовательно, $\rho^{-1}\nabla p \delta\mathbf{r}$ не является полным дифференциалом, обеспечивающим обращение в нуль правой части (1.14). Заметим, однако, важную особенность движения стратифицированной жидкости: она расслаивается на непересекающиеся поверхности постоянной плотности (изопикнические поверхности) и остается таковой в процессе всего движения, потому что любая жидкая частица, принадлежащая такой поверхности в начальный момент, будет всегда оставаться на ней из-за лагранжевой инвариантности плотности. Именно поэтому стратифицированную жидкость называют еще расслоенной. Движение же по изопикнической поверхности $\rho(t, \mathbf{x}) = \rho_0 = const$ есть движение однородной несжимаемой жидкости, для которого справедлива теорема Кельвина, и, в частности,

$$K_0 \doteq \oint\limits_{C_0} \mathbf{u}\delta\mathbf{l} = \mathbf{\Omega} d\boldsymbol{\sigma}_0 \tag{1}$$

есть лагранжев инвариант ($dK_0/dt = 0$), если C_0 - инфинитезимальный замкнутый контур, целиком принадлежащий изопикнической поверхности, а $d\boldsymbol{\sigma}_0$ - элемент этой поверхности, ограниченный контуром C_0 (рис. 1).

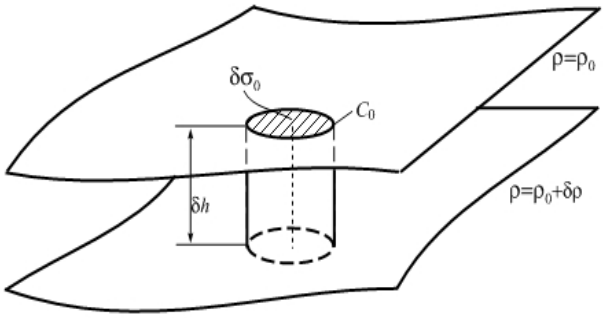


Рис. 1. Торцы жидкого цилиндра, расположенные на поверхностях постоянных плотностей $\rho = \rho_0$ и $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ в начальный момент, будут оставаться на них в процессе всего движения.

Рассмотрим жидкую трубку, пересекающую изопикнические поверхности, одним из сечений которой служит выделенный контур C_0. Две близко расположенные изопикнические поверхности, задаваемые соответственно значениями плотности ρ_0 и $\rho_0 + \delta\rho$, вырезают цилиндрический элемент трубки, объем которого равен

$$\delta\mu = d\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n}\delta h, \tag{2}$$

где $\delta h-$ высота вырезанного цилиндра, а $\mathbf{n}$ - единичная нормаль к изопикнической поверхности, совпадающая по направлению с градиентом плотности. Величину $\delta\rho$, в свою очередь, можно записать в виде

$$\delta\rho = \nabla\rho \cdot \mathbf{n}\delta h. \tag{3}$$

Сопоставляя теперь (2) с (3), находим, что

$$d\boldsymbol{\sigma}_0 = \frac{\delta\mu}{\delta h}\mathbf{n} = \frac{\delta\mu}{\delta\rho}\nabla\rho,$$

а

$$K_0 = \boldsymbol{\Omega}\cdot d\boldsymbol{\sigma}_0 = \frac{\delta\mu}{\delta\rho}\,\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla\rho.$$

Принимая во внимание, что величины $\delta\mu$ и $\delta\rho$ сохраняются в процессе движения соответственно по построению и из-за несжимаемости среды, инвариантность K_0 влечет за собой инвариантность величины

$$\Pi \equiv \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla\rho \tag{4}$$

(и наоборот), называемой *потенциальным вихрем (ПВ) несжимаемой расслоенной жидкости.* Другими словами, *сохранение потенциального вихря означает не что иное как применимость теоремы Кельвина к жидким стягиваемым контурам, целиком принадлежащим поверхностям постоянной плотности.* (Понятие потенциального вихря введено в гидродинамику независимо Россби (C.-G. Rossby, 1939) применительно к океану, Эртелем (H. Ertel, 1942) в наиболее общем виде и А.М. Обуховым (1949) применительно к атмосфере. К различным проявлениям этого понятия, точнее самой теоремы Кельвина, мы неоднократно будем возвращаться в следующих лекциях.)

Формально доказательство сохраняемости величины Π можно выполнить следующим образом. Подействуем на уравнение Эйлера (1.10а) в форме Бернулли операцией ротора, используя формулы (1.20), (1.21). В результате получим уравнение вихря для стратифицированной несжимаемой жидкости, которое носит имя Фридмана и с учетом соленоидальности течения записывается в виде

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,(\mathbf{u}\times\boldsymbol{\Omega}) \equiv \frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{u} = \frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p. \tag{5}$$

Для жидкости постоянной плотности оно становится уравнением Гельмгольца (1.22) или (1.22a). В связи с этим отметим два обстоятельства. Во-первых, вихревые трубки даже однородной несжимаемой жидкости испытывают в процессе движения растяжения и сжатия, потому что элементы жидких силовых линий завихренности также управляются уравнением Гельмгольца ($d\delta\mathbf{l}/dt = (\delta\mathbf{l}\nabla)\,\mathbf{u}$) и, следовательно, со временем не сохраняются. Во-вторых, сопоставляя (5) с (1.22), мы видим, что неоднородность плотности жидкости служит источником завихренности течения. Поэтому потенциальное (описываемое скалярной функцией φ, $\mathbf{u} = \nabla\varphi$), т.е. безвихревое, течение стратифицированной среды – это скорее исключительное, чем типичное явление. В однородной

же жидкости, если завихренность в начальный момент всюду отсутствует, течение остается потенциальным неограниченно долго.

Умножим (5) скалярно на $\nabla\rho$. Учитывая, что правая часть в этом случае обращается в нуль, результат после очевидных тождественных преобразований можно представить в виде

$$\nabla\rho\frac{\partial\mathbf{\Omega}}{\partial t}+(\mathbf{u}\nabla)(\nabla\rho\cdot\mathbf{\Omega})-\mathbf{\Omega}(\mathbf{u}\nabla)\nabla\rho-(\mathbf{\Omega}\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{u}\nabla)\rho+\mathbf{u}(\mathbf{\Omega}\boldsymbol{\nabla})\nabla\rho=0. \tag{6}$$

В силу условия несжимаемости $\partial\rho/\partial t=-(\mathbf{u}\nabla)\rho$ четвертое слагаемое в левой части (6) преобразуется к виду

$$-(\mathbf{\Omega}\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{u}\nabla)\rho=(\mathbf{\Omega}\boldsymbol{\nabla})\frac{\partial\rho}{\partial t}=\mathbf{\Omega}\frac{\partial\nabla\rho}{\partial t}.$$

Теперь (6) можно переписать в форме

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t}+(\mathbf{u}\nabla)\Pi=\mathbf{\Omega}(\mathbf{u}\nabla)\nabla\rho-\mathbf{u}(\mathbf{\Omega}\boldsymbol{\nabla})\nabla\rho.$$

Правая часть последнего равенства обращается в нуль, в чем проще всего убедиться, записывая ее в тензорных обозначениях:

$$\Omega_i u_k\frac{\partial^2\rho}{\partial x_k\partial x_i}-u_k\Omega_i\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_k}=0$$

(по одинаковым индексам подразумевается суммирование). Отсюда

$$\frac{d\Pi}{dt}\equiv\frac{d}{dt}(\mathbf{\Omega}\cdot\nabla\rho)=0, \tag{7}$$

ч.т.д.

2. Уравнение Бернулли (Daniel Bernoulli, 1738). К весьма своеобразным интегралам движения идеальной несжимаемой жидкости относится интеграл Бернулли, или, как его еще называют, уравнение Бернулли, характеризующее стационарные течения жидкости вдоль траекторий движения ее частиц. В связи с этим уместно подчеркнуть, что решения уравнений Эйлера, вообще говоря, описывают не траектории, а *линии тока, определяемые как кривые, касательные к которым в любой фиксированный момент времени совпадают с направлением скоростей в принадлежащих этим кривым точках.* Линии тока задаются семейством решений уравнений

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w} \tag{8}$$

(u, v, w – компоненты скорости в направлении осей x, y, z соответственно) и совпадают с траекториями движения жидких частиц только в стационарном случае. Объясняется это тем, что *касательные к линии тока совпадают с направлениями скоростей разных частиц в фиксированный момент времени, тогда как касательные к траектории совпадают с направлениями скорости движения фиксированной частицы в разные моменты времени.* В стационарном же случае все частицы, принадлежащие одной и той же линии тока, двигаются по одной и той же траектории.

Совпадение траекторий с линиями тока в стационарных режимах движения позволяет проинтегрировать уравнение Эйлера вдоль траекторий. Для этого отметим сначала следующее важное обстоятельство. Если несжимаемая жидкость стратифицирована, то при ее движении любая жидкая частица никогда не покидает соответствующей изопикнической поверхности. В стационарных течениях изопикнические поверхности занимают фиксированное положение в пространстве. Поэтому нормальная к такой поверхности составляющая скорости любой принадлежащей ей жидкой частицы равна нулю. Отсюда следует, что в стационарных режимах движения несжимаемой стратифицированной жидкости траектория движения любой жидкой частицы, а следовательно, и соответствующая ей линия тока целиком принадлежат поверхности постоянной плотности. Теперь нетрудно найти первый интеграл движения стационарного уравнения Эйлера вдоль линии тока. Воспользуемся для этого формой Бернулли (1.10а), которую умножим скалярно на произвольный элемент дуги $d\mathbf{l}$ линии тока

$$(\mathbf{u}\times\mathrm{rot}\mathbf{u})\cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{2}\nabla\mathbf{u}^2\right)\cdot d\mathbf{l}. \tag{9}$$

Левая часть (9) обращается в нуль, потому что $d\mathbf{l}$ совпадает по направлению с $\mathbf{u}$. Правая же часть – это полный дифференциал в направлении $d\mathbf{l}$, поскольку интегрирование ведется по кривой, целиком принадлежащей изопикнической поверхности, и ρ^{-1} можно перенести под знак градиента как постоянную величину. Поэтому вдоль траектории жидкой частицы выполняется равенство

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} = \mathrm{const}\,(\mathbf{x}_0)\,, \tag{10}$$

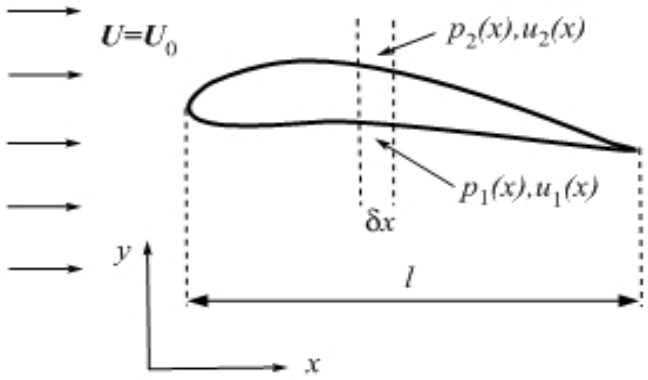


Рис. 2. Тонкое крыло в потоке несжимаемой жидкости, набегающей с постоянной скоростью.

где константа интегрирования зависит от траектории, однозначно выделяемой любой принадлежащей ей точкой $\mathbf{x}_0$.

Равенство (10) называется *уравнением Бернулли* и выполняется для произвольного стационарного течения несжимаемой расслоенной жидкости (в том числе, когда $\mathrm{rot}\mathbf{u} \neq 0$). В случае потенциального течения расслоенной жидкости ($\mathbf{u} = \nabla\varphi$) левая часть (9) обращается в нуль для произвольного элемента $d\mathbf{l}$ (не обязательно касательного к линии тока). Поэтому константу интегрирования в уравнении Бернулли следует заменить на $\mathrm{const}(\rho)$, т.е. зависящую лишь от выбора изопикнической поверхности, а не от траектории жидкой частицы. И наконец, для стационарных потенциальных течений однородной жидкости константа интегрирования универсальна для всего объема жидкости.

3. Почему самолеты летают? (*Классический пример применения интеграла Бернулли.*) Пусть тонкое крыло, профиль которого схематически изображен на рис. 2, обтекается жидкостью постоянной плотности $\rho = \rho_0$, набегающей на препятствие с постоянной скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$. И пусть, кроме того, в начальный момент циркуляция скорости

$$K = \oint_C \mathbf{u} \cdot \mathbf{dl}$$

по замкнутому жидкому контуру C, охватывающему крыло и непосредственно примыкающему к его границе, отлична от нуля. По-

скольку нормальная к поверхности крыла составляющая скорости равна нулю, то контур C, оставаясь жидким, будет сохранять упомянутые свойства неограниченно долго. В силу лагранжевой инвариантности K его значение в любой момент времени будет равно начальному, отличному от нуля[1].

Согласно интегралу Бернулли

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho_0 \left(u_2^2 - u_1^2\right) = \frac{1}{2}\rho_0 \left(u_1 + u_2\right)\left(u_2 - u_1\right),$$

где величины, помеченные индексами 1 и 2, относятся к нижней и верхней кромкам крыла соответственно. В силу тонкости крыла (отношение толщины крыла к его ширине $\ll 1$) и закона сохранения массы $\left(u_1 + u_2\right)/2 = u_0$. Поэтому

$$p_1 - p_2 = \rho_0 u_0 \left(u_2 - u_1\right),$$

а вертикальная составляющая результирующей силы, действующая на единицу длины крыла, равна

$$F = \rho_0 u_0 \int\limits_0^l \left(u_2 - u_1\right) dx,$$

где l - ширина крыла. Упомянутая циркуляция

$$K = \oint_C \mathbf{u} \cdot \mathbf{dl} = \int\limits_0^l u_1 dx + \int\limits_l^0 u_2 dx = -\int\limits_0^l \left(u_2 - u_1\right) dx$$

(за положительный принимается обход против часовой стрелки). Отсюда

$$F = -\rho_0 u_0 K, \tag{11}$$

что есть теорема Жуковского-Кутта о подъемной силе крыла. Сила будет подъемной, если $K < 0$, т.е. циркуляция происходит по часовой стрелке. В противном случае крыло прижимается к земле. В таких случаях его называют антикрылом, которое, в частности, используется в болидах "Формулы-1"для усиления сцепления с дорогой. Нужное направление циркуляции достигается углом атаки и продольным по отношению к потоку профилем крыла.

[1] В вязкой жидкости циркуляция скорости вокруг крыла создается принудительно, например пропеллером.

4. Законы сохранения импульса и энергии несжимаемой жидкости. Для идеальной несжимаемой жидкости лагранжева инвариантность величины $\theta = \theta(t, \mathbf{x})$ означает существование интегрального инварианта

$$\Theta(t) = \int\limits_V \theta d\mu, \quad \frac{d\Theta}{dt} = 0, \tag{12}$$

если жидкость заключена в ограниченном объеме V и не подвержена внешнему воздействию. В самом деле, условие лагранжевой инвариантности величины θ с учетом $\mathrm{div}\mathbf{u} = 0$ можно записать в виде

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\mathbf{u}\nabla\theta = -\mathrm{div}(\mathbf{u}\theta). \tag{13}$$

Проинтегрируем (13) по всему объему жидкости, применяя формулу Остроградского-Гаусса:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \theta d\mu \equiv \frac{d\Theta}{dt} = -\int\limits_V \mathrm{div}(\mathbf{u}\theta)\, d\mu = -\oint\limits_{\partial V} \theta\mathbf{u}\cdot d\sigma, \tag{14}$$

где ∂V – замкнутая поверхность, ограничивающая объем жидкости V, и $d\boldsymbol{\sigma}$ – ориентированный элемент площади этой поверхности. Отсюда следует утверждение (12), поскольку правая часть (14) равна нулю из-за отсутствия потока жидкости через границу ∂V $(\mathbf{u}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0)$.

Обратное, вообще говоря, неверно. Например, в условиях сделанных предположений суммарная кинетическая энергия идеальной несжимаемой жидкости должна сохраняться из-за отсутствия диссипации и других видов энергии. Но уже простые физические соображения наводят на мысль, что локально это не так, потому что движущаяся индивидуальная жидкая частица, взаимодействуя с окружающей ее средой, будет терять или приобретать энергию за счет работы реакций связи, т.е. сил гидродинамического давления. Возникает вопрос, каков вид локальных законов сохранения для интегрально инвариантных величин? В связи с этим представляет интерес вывести локальные законы сохранения импульса и энергии непосредственно из уравнений движения (1.10), (1.11) и проверить с их помощью инвариантность соответствующих им интегральных

величин. Такая процедура тем более необходима, поскольку, вообще говоря, априорно ниоткуда не следует, что уравнения Эйлера выдерживают инвариантность суммарного импульса и полной энергии.

4.1. Локальный закон сохранения импульса. Уравнения движения (1.10), (1.11) в данном случае удобнее записать в тензорных обозначениях:

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}+u_k\frac{\partial \rho}{\partial x_k}=0. \tag{16}$$

Вычислим теперь, основываясь на (15), (16), скорость изменения импульса индивидуальной жидкой частицы единичного объема

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t}=-u_iu_k\frac{\partial \rho}{\partial x_k}-\rho u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\frac{\partial p}{\partial x_i}=-u_k\left(u_i\frac{\partial \rho}{\partial x_k}+\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial p}{\partial x_i}=$$
$$=-u_k\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_k}-\frac{\partial p}{\partial x_i}=-\frac{\partial \rho u_iu_k}{\partial x_k}-\frac{\partial p}{\partial x_i} \quad \left(\text{потому что } \frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0\right).$$

Отсюда следует, что локальный закон сохранения импульса можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t}=-\frac{\partial \Gamma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{17}$$

где

$$\Gamma_{ik}=\rho u_iu_k+\delta_{ik}p \tag{18}$$

есть тензор плотности потока импульса, компоненты которого описывают поток i-й составляющей импульса жидкой частицы единичного объема в направлении k-й составляющей скорости. Это становится очевидным, если проинтегрировать (17) по произвольному замкнутому объему жидкости V и применить формулу Остроградского-Гаусса

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho u_i d\mu=-\int\limits_V\frac{\partial \Gamma_{ik}}{\partial x_k}d\mu=-\oint\limits_{\partial V}\Gamma_{ik}n_kd\sigma. \tag{19}$$

Здесь $d\mu$ – элемент объема, ∂V – замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, $n_kd\sigma$ – элемент площади поверхности, ориентированный в направлении внешней нормали n_k. (*Правило применения теоремы Остроградского-Гаусса состоит в замене* $d\mu\partial/\partial x_k\to$

$n_k d\sigma$.) Теперь равенство (19) с учетом (18) можно переписать в векторном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho\mathbf{u}d\mu = -\oint\limits_{\partial V}\left[\rho\mathbf{u}\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\right)+p\mathbf{n}\right]d\sigma. \tag{20}$$

Отсюда следует, что вектор с компонентами $\Gamma_{ik}n_k$ и равный

$$\mathbf{\Gamma} = \rho\mathbf{u}\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\right)+p\mathbf{n} \tag{21}$$

определяет поток импульса в направлении $\mathbf{n}$, т.е. через элемент поверхности единичной площади, перпендикулярный $\mathbf{n}$.

Заметим, что вектором $\mathbf{\Gamma}$ удобно пользоваться при постановке граничных условий, потому что согласно (21) величина потока импульса в направлении скорости равна $\rho\mathbf{u}^2+p$, а в нормальном ей направлении – просто p. Поэтому, в частности, на границе раздела двух несмешивающихся сред давление должно быть непрерывным, тогда как скорость может испытывать разрыв.

Пусть теперь V – весь объем жидкости. Тогда правая часть (20) обращается в нуль из-за отсутствия потока жидкости через любой элемент поверхности ∂V и равенства нулю результирующей сил давления, действующих на ∂V. Таким образом, из локального закона сохранения импульса (17), (18) следует инвариантность его интегральной величины.

4.2. **Локальный закон сохранения энергии** можно вывести аналогичным способом, вычисляя скорость изменения плотности кинетической энергии $\rho\mathbf{u}^2/2$ с помощью уравнений движений (1.10), (1.11) (сделайте это в качестве полезного упражнения). Здесь результат формулируется на основе физических соображений, которые нередко бывают полезными перед проведением формальных математических выкладок.

Пусть V- произвольный объем жидкости, ограниченный замкнутой поверхностью ∂V. Тогда скорость изменения кинетической энергии заключенной в нем жидкости складывается из потока кинетической энергии через поверхность ∂V и работы, совершаемой в единицу времени реакциями связи, т.е. силами давления над жидкостью выделенного объема. Математически это выражается равенством

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \tfrac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2 d\mu = -\oint\limits_{\partial V}\left(\tfrac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2\right)\mathbf{u}\cdot d\boldsymbol{\sigma} - \oint\limits_{\partial V} p\mathbf{u}\cdot d\sigma. \tag{22}$$

Отрицательные знаки в правой части (22) означают, что $d\boldsymbol{\sigma}$ направлен в сторону внешней к поверхности ∂V нормали.

Применяя теперь к правой части (22) формулу Остроградского-Гаусса и приравнивая подынтегральные выражения левых и правых частей, приходим к выводу, что локальный закон сохранения энергии задается равенством

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2\right) = -\mathrm{div}\left[\mathbf{u}\left(\tfrac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2 + p\right)\right]. \tag{23}$$

Отсюда следует сохранение полной кинетической энергии жидкости, в чем легко убедиться, полагая в (22) ∂V границей всего объема жидкости, на которой нормальная составляющая скорости обращается в нуль.

Упражнение

1. Выведите локальный закон сохранения энергии (23) непосредственно из уравнений движения (1.10), (1.11).

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*, М.: Наука, ГРФМЛ, 1986.

2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика*, М.:ГИТТЛ, 1955.

3. Tritton D. J. *Physical fluid dynamics*, Oxford University Press, N.Y., 1988.

Лекция 3

Спиральность, уравнения газовой динамики, инвариант Эртеля

1. Интеграл спиральности. К менее распространенным, но весьма важным для описания вихревых движений, в особенности таких как смерчи, торнадо и тайфуны, относится понятие спиральности (helicity)

$$\chi \doteq \mathbf{u} \cdot \mathbf{\Omega} \quad (\mathbf{\Omega} \doteq \mathrm{rot}\mathbf{u}) \,. \tag{1}$$

В отличие от линий тока вихревые линии, согласно теореме Кельвина, «вморожены » в жидкость и поэтому в случае нестационарных процессов с течением времени происходит изменение взаимного расположения упомянутых линий, т.е. структуры или топологии рассматриваемого течения. Локальной мерой такой структурной перестройки как раз и служит величина χ. Вместе с тем интуиция подсказывает, что если линии завихренности сцеплены или завязаны, как показано, например, на рис. 1, то суммарное число таких зацеплений или узлов не должно изменяться в процессе движения, по крайней мере в неограниченной жидкости, поскольку согласно теореме Кельвина линии завихренности нигде не зарождаются и не исчезают. В связи с этим представляет интерес вывести уравнение эволюции спиральности для выяснения вопроса о существовании интегрального топологического инварианта. Воспользуемся для этого уравнением Эйлера в форме Бернулли (1.10a), которое вместе с уравнением вихря удобно записать в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \mathbf{\Omega} - \frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \left(\tfrac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\mathbf{u} \times \mathbf{\Omega}) - \mathrm{rot}\frac{\nabla p}{\rho}. \tag{3}$$

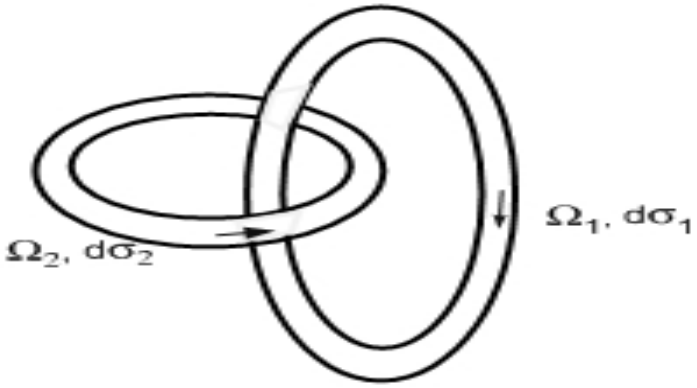


Рис. 1. Однократно сцепленные вихревые кольца с интенсивностями $\kappa_1 = \mathbf{\Omega}_1 \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}_1$ и $\kappa_2 = \mathbf{\Omega}_2 \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}_2$.

Умножая (2) на $\mathbf{\Omega}$, а (3) на $\mathbf{u}$ и складывая, в левой части получим $\partial\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{\Omega}\right)/\partial t = \partial\chi/\partial t$. Правую же часть можно записать в виде

$$-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\tfrac{1}{2}\mathbf{u}^2\right)\cdot\mathbf{\Omega}+\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)\cdot\mathbf{\Omega}-\frac{\nabla p}{\rho}\cdot\mathbf{\Omega}+$$

$$+\mathbf{u}\cdot\mathrm{rot}\left(\mathbf{u}\times\mathbf{\Omega}\right)-\left(\mathbf{u}\times\mathbf{\Omega}\right)\cdot\mathrm{rot}\mathbf{u}-\mathbf{u}\cdot\mathrm{rot}\frac{\nabla p}{\rho}, \qquad (4)$$

потому что $\left(\mathbf{u}\times\mathbf{\Omega}\right)\cdot\mathrm{rot}\mathbf{u}=\left(\mathbf{u}\times\mathbf{\Omega}\right)\cdot\mathbf{\Omega}=0$. Тогда в силу формул

$$div\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)=\mathbf{B}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{B}, \qquad (5)$$

$$\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)\times\mathbf{C}=\mathbf{B}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\right)-\mathbf{C}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right) \qquad (6)$$

($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ – произвольные векторные поля нужной гладкости) имеем

$$\mathbf{u}\cdot\mathrm{rot}\left(\mathbf{u}\times\mathbf{\Omega}\right)-\left(\mathbf{u}\times\mathbf{\Omega}\right)\cdot\mathrm{rot}\mathbf{u}=\mathrm{div}\left\{\left(\mathbf{u}\times\mathbf{\Omega}\right)\times\mathbf{u}\right\}=\mathrm{div}\left\{\mathbf{\Omega}\boldsymbol{u}^2-\mathbf{u}\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{\Omega}\right)\right\},$$

то есть

$$\mathbf{u}\cdot\mathrm{rot}\left(\mathbf{u}\times\mathbf{\Omega}\right)-\left(\mathbf{u}\times\mathbf{\Omega}\right)\cdot\mathrm{rot}\mathbf{u}=-\mathrm{div}\left\{\mathbf{u}\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{\Omega}\right)-\mathbf{\Omega}\boldsymbol{u}^2\right\}. \qquad (\mathrm{I})$$

Далее,

$$-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\tfrac{1}{2}\mathbf{u}^2\right)\cdot\mathbf{\Omega}=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\tfrac{1}{2}u^2\right)\cdot\mathbf{\Omega}-\left(\frac{p}{\rho}+\tfrac{1}{2}\mathbf{u}^2\right)\mathrm{div}\mathbf{\Omega},$$

потому что $\mathrm{div}\boldsymbol{\Omega} = 0$. Применяя формулу

$$div\,(\alpha\mathbf{A}) = \nabla\alpha\cdot\mathbf{A} + \alpha\mathrm{div}\mathbf{A} \tag{7}$$

(α – скалярное поле), получим

$$-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\tfrac{1}{2}\mathbf{u}^2\right)\cdot\boldsymbol{\Omega} = -\mathrm{div}\left\{\boldsymbol{\Omega}\left(\frac{p}{\rho}+\tfrac{1}{2}\mathbf{u}^2\right)\right\}. \tag{II}$$

Сумму оставшихся членов

$$\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)\cdot\boldsymbol{\Omega} - \frac{\nabla p}{\rho}\cdot\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{rot}\frac{\nabla p}{\rho}$$

с помощью формулы

$$\mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{A}) = \nabla\alpha\times\mathbf{A} + \alpha\mathrm{rot}\mathbf{A} \tag{8}$$

можно переписать в виде

$$-\frac{p}{\rho^2}\,\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla\rho - \mathbf{u}\left(\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\nabla p\right) - \frac{\mathbf{u}}{\rho}\mathrm{rot}\,(\nabla p) \equiv$$

$$\equiv -\frac{p}{\rho^2}\Pi - \mathbf{u}\left(\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\nabla p\right) - \mathrm{div}\left\{\mathbf{u}\times\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\right\} + \mathrm{div}\left\{\mathbf{u}\times\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\right\},$$

где $\Pi = \boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla\rho$ – уже знакомый нам потенциальный вихрь несжимаемой расслоенной жидкости. После последовательного применения формул (7) и (5) сумма оставшихся членов (4) принимает форму

$$-\frac{p}{\rho^2}\Pi - \mathrm{div}\left\{p\left(\mathbf{u}\times\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)\right\} + p\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\cdot\mathrm{rot}\mathbf{u} - \rho\mathbf{u}\cdot\mathrm{rot}\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) =$$

$$= -\frac{2p}{\rho^2}\Pi - \mathrm{div}\left\{p\left(\mathbf{u}\times\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)\right\}. \tag{III}$$

Складывая теперь правые части из (I), (II) и (III) и приравнивая результат величине $\partial\chi/\partial t$, получаем эволюционное уравнение для локальной спиральности:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} = -\mathrm{div}\left\{\mathbf{u}\chi + \boldsymbol{\Omega}\left(\frac{p}{\rho} - \tfrac{1}{2}\mathbf{u}^2\right) + \frac{p}{\rho^2}\,(\nabla\rho\times\mathbf{u})\right\} - \frac{2p}{\rho^2}\Pi. \tag{9}$$

Отсюда видно, что источником спиральности является потенциальная завихренность жидкости, в отсутствии которой, т.е. в случае однородной среды, правая часть (9) имеет дивергентный вид. Последнее означает, что суммарная спиральность

$$\mathrm{H} = \int\limits_V \chi dV, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{H}}{dt} &= -\int\limits_V \operatorname{div}\left[\mathbf{u}\chi + \mathbf{\Omega}\left(\frac{p}{\rho_0} - \tfrac{1}{2}\mathbf{u}^2\right)\right] d\mu \\ &= -\oint\limits_{\partial V}\left[\mathbf{u}\chi + \mathbf{\Omega}\left(\frac{p}{\rho_0} - \tfrac{1}{2}\mathbf{u}^2\right)\right] d\boldsymbol{\sigma}\end{aligned}$$

сохраняется при условии, что не только линии тока, но и вихревые линии касательны к поверхности ∂V, ограничивающей занятый жидкостью объем V.

Величина H, называемая инвариантом спиральности (открыт Моро (J.J. Moreau) в 1961 г. и переоткрыт Моффатом (H.K. Moffatt) в 1969 г.), характеризует степень заузленности или зацепления вихревых линий. Отметим пока без доказательства, что, например, в случае двух однократно зацепленных вихревых колец с интенсивностями κ_1 и κ_2 (рис. 1) значение $H = \pm|\kappa_1\kappa_2|$, где выбор знака зависит от того, движется ли каждое из вихревых колец в направлении завихренности своего партнера или наоборот. Сделанное утверждение будет доказано в одной из последующих лекций, в которой будет введено понятие сингулярных вихревых нитей и обсуждаться их поведение.

2. Уравнения идеальной газовой динамики или движения идеальной сжимаемой жидкости. Напомним, что несжимаемая идеальная жидкость в состоянии покоя описывается единственной физической величиной – плотностью, служащей локальной мерой инертности среды. Именно поэтому уравнения движения несжимаемой жидкости можно сформулировать в рамках строго механического подхода, причем давление в такой среде трактуется как реакция связей, исчезающая в отсутствии относительного движения.

В случае сжимаемой жидкости положение вещей принципиально меняется. Одной лишь плотности уже недостаточно для описания локального физического состояния жидкости, поскольку под

влиянием равномерного сжатия (растяжения) плотность и давление могут принимать различные значения даже в отсутствии относительного движения. Законы сохранения импульса и массы образуют незамкнутую систему уравнений, для замыкания которой из-за отсутствия теперь дополнительных независимых механических принципов необходимо привлекать иные соображения.

Учитывая сказанное выше, идеальную сжимаемую жидкость следует рассматривать как термодинамическую систему, точнее как совокупность теплоизолированных термодинамических систем – индивидуальных жидких частиц, макроскопическое состояние каждой из которых описывается двумя независимыми термодинамическими величинами, например давлением p и плотностью ρ (в отсутствии химических реакций и фазовых переходов, в противном случае в число независимых переменных необходимо включать еще химический потенциал). Это возможно, если время установления локального термодинамического равновесия много меньше характерного времени макроскопических изменений среды – это одно из фундаментальных предположений, на котором основан вывод Н.Н. Боголюбова гидродинамических уравнений из уравнения Больцмана (см., например, Уленбек, Форд, 1965). В этом случае законы равновесной термодинамики применимы локально, и для замыкания уравнений движения можно обратиться ко второму началу термодинамики, согласно которому энтропия теплоизолированной системы остается постоянной (обмен энергией между частицами происходит лишь за счет работы, совершаемой силами давления). Это означает, что энтропия индивидуальной жидкой частицы идеальной сжимаемой жидкости является лагранжевым инвариантом, и тогда уравнения движения можно записать в виде:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \doteq \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{11}$$

$$\frac{d\rho}{dt} \doteq \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\rho = -\rho \mathrm{div}\mathbf{u}, \tag{12}$$

$$\frac{ds}{dt} \doteq \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,s = 0, \tag{13}$$

$$s = s\,(\rho, p)\,. \tag{14}$$

Здесь $s = s\,(\rho, p)$ – удельная энтропия, т.е. энтропия индивидуальной жидкой частицы единичной массы, которая предполагает-

ся известной функцией ρ и p, как функция состояния равновесной термодинамической системы. Систему (11) – (14) называют также уравнениями идеальной газовой динамики.

Условие адиабатичности движения (13) иногда удобно записывать в форме локального закона сохранения массы

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{u}) \equiv \frac{d\rho s}{dt} + \rho s \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \tag{13a}$$

а уравнение Эйлера (11) – в форме Бернулли (см. (1.12) и (1.10a))

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left(\tfrac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right). \tag{11a}$$

Вообще полезно помнить, что величина $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$ – газодинамический лагранжев инвариант тогда и только тогда, когда уравнение для величины $\Phi = \rho\varphi$ записывается в форме локального закона сохранения массы.

3. Изэнтропическое движение сжимаемой жидкости. К важным частным случаям движения сжимаемой жидкости относится изэнтропическое течение, в котором, по определению, во всех точках жидкости энтропия принимает одинаковое значение. Такой процесс физически возможен, потому что если в начальный момент времени во всех точках жидкости энтропия имела одинаковое значение, то из-за ее лагранжевой инвариантности (13) она сохранится всюду одинаковой и неизменной в процессе всего движения. Условие постоянства энтропии

$$s(\rho, p) = \text{const} \tag{15}$$

определяет плотность ρ, а следовательно, и любую другую термодинамическую величину как функцию одного лишь давления p (напомним, что процессы, связанные с фазовыми переходами и химическими реакциями, здесь не рассматриваются). Движение, в котором плотность есть функция одного лишь давления, называется баротропным. Итак, изэнтропическое движение является баротропным. Справедливо и обратное. В самом деле, зависимость $\rho = \rho(p)$ влечет за собой зависимость $s = s(p)$ и согласно (13)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dp} \cdot \frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{ds}{dp} = 0 \Rightarrow s(p) = \text{const},$$

поскольку p по физическому смыслу не есть пассивный скаляр и, следовательно, $dp/dt \neq 0$.

Вводя теперь для функции $f(p) \equiv 1/\rho(p)$ первообразную

$$W(p) = \int f(p)\, dp = \int \frac{dp}{\rho}, \quad \frac{dW}{dp} = \frac{1}{\rho}, \tag{16}$$

правую часть уравнения Эйлера (11) можно представить в виде

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p = -\frac{dW}{dp}\nabla p = -\nabla W.$$

Поэтому для изэнтропического или баротропного движения сжимаемой жидкости уравнения газовой динамики принимают существенно более простую форму:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -\nabla W, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad W = W(p), \tag{17}$$

где W предполагается известной функцией давления p и называется удельной энтальпией или тепловой функцией единицы массы жидкости. (Напомним, что, вообще говоря, энтальпия термодинамической системы единичной массы определятся равенством $dW = Tds + \rho^{-1}dp$, которое для изэнтропического процесса совпадает с определением первообразной (16). Здесь T – абсолютная температура среды.)

Уравнения (17) называются уравнениями движения баротропной жидкости и обладают такими замечательными свойствами, что для них справедливы теорема Кельвина о сохранении циркуляции вдоль произвольного замкнутого жидкого контура и уравнение Бернулли для стационарных траекторий жидких частиц, которое в данном случае записывается в виде

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{u}^2 + W(p) = \text{const}. \tag{18}$$

(Напомним, что если течение не является потенциальным, выбор константы в (18) определяется траекторией, по которой производится интегрирование.)

Упомянутые свойства являются прямым следствием того, что правая часть первого уравнения (17) становится полным дифференциалом при умножении ее на элемент кривой интегрирования $\delta\mathbf{r}$

(см. Лекцию 2, пункт 2). В этом отношении баротропная жидкость аналогична однородной несжимаемой жидкости. Заметим, что последняя формально подходит под определение баротропной жидкости, для которой $W = p/\rho_0$, и является *единственной несжимаемой баротропной жидкостью* (почему?).

4. Теорема Кельвина и интеграл Бернулли в газовой динамике. Для неизэнтропического или, как в таких случаях говорят, бароклинного движения идеальной сжимаемой жидкости теорема Кельвина, вообще говоря, не выполняется. Однако подобно тому, как идеальная неоднородная несжимаемая жидкость расслаивается на изопикнические поверхности, идеальная сжимаемая жидкость расслаивается на непересекающиеся изэнтропические поверхности, потому что жидкая частица, принадлежащая в начальный момент какой-либо из таких поверхностей, будет оставаться на ней в процессе всего движения из-за лагранжевой инвариантности величины s. По этой же причине то же самое произойдет и с замкнутым жидким контуром, целиком принадлежащим в начальный момент поверхности постоянной энтропии. Учитывая, что движение вдоль таких поверхностей по определению является баротропным, к нему согласно предыдущему пункту уже применимы теорема Кельвина и уравнение Бернулли. Другими словами, справедливы следующие утверждения.

I. *В процессе бароклинного движения идеальной сжимаемой жидкости сохраняется циркуляция скорости по замкнутому жидкому контуру, целиком принадлежащему изэнтропической поверхности.*

II. *Для стационарных течений идеальной сжимаемой жидкости вдоль траекторий жидких частиц сохраняется величина* $B = \frac{1}{2}u^2 + W(p, s_0)$, *где* $W(p, s_0) = \int dp/\rho(p, s_0)$ *параметрически зависит от значения* $s(\rho, p) = s_0$, *определяющего поверхность, на которой находится рассматриваемая траектория.*

Применительно к инфинитезимальному замкнутому контуру C_0, целиком принадлежащему изэнтропической поверхности $s(\rho, p) = s_0$, утверждение I означает, что величина

$$\mathrm{K}_0 = \oint\limits_{C_0} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r} = \mathrm{rot}\mathbf{u}\cdot d\boldsymbol{\sigma}_0 \tag{19}$$

есть лагранжев инвариант. Здесь $d\boldsymbol{\sigma}_0$ – ориентированный элемент

площади изэнтропической поверхности, ограниченный контуром C_0. Наряду с поверхностью $s(\rho, p) = s_0$ рассмотрим инфинитезимально близкую ей изэнтропическую поверхность $s(\rho, p) = s_0 + \delta s$ и проведем через контур C_0 жидкую цилиндрическую поверхность, пересечение которой с дополнительной изэнтропической поверхностью есть также замкнутый контур (см. рис. 2.1). Торцы построенного таким способом цилиндрического элемента в процессе всего движения будут оставаться на соответствующих изэнтропических поверхностях. Тогда массу рассматриваемой жидкой частицы можно вычислить по формуле

$$\mathrm{M} = \rho h \mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_0, \tag{20}$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности s_0, совпадающая по направлению с ∇s, h – высота цилиндра. В силу инфинитезимальной близости изэнтропических поверхностей величину δs можно записать в виде

$$\delta s = \nabla s \cdot \mathbf{n} h. \tag{21}$$

Из сопоставления (20) с (21) следует, что

$$d\boldsymbol{\sigma}_0 = \frac{\mathrm{M}}{\delta s} \cdot \frac{\nabla s}{\rho}. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (19) и принимая во внимание, что δs и M не меняются в процессе движения в соответствии с определением δs и как масса объема жидкости, состоящая в любой момент времени из одних и тех же частиц, находим, что инвариантность K_0 влечет за собой инвариантность величины

$$\Pi_E = \frac{\mathrm{rot}\mathbf{u} \cdot \nabla s}{\rho}. \tag{23}$$

Она называется потенциальным вихрем для уравнений газовой динамики, или инвариантом Эртеля (H. Ertel, 1942), впервые доказавшего инвариантность Π_E непосредственно из уравнений движения (11)-(14) методами векторного анализа (см. Упражнение 2). Приведенное здесь исключительно изящное и физически прозрачное доказательство инвариантности величины Π_E и ее прямой связи с теоремой Кельвина в том же году было предложено Мораном (F. Moran, 1942), а затем, по-видимому, независимо воспроизведено

Чарни (J.G. Charney, 1948) в его знаменитой работе, посвященной динамике глобальных геофизических течений.

Упражнения

1. Почему неоднородная по плотности баротропная жидкость не может быть несжимаемой?

2. Уравнение баланса спиральности для однородной вращающейся жидкости в потенциальном поле Φ записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{u}\left(\mathrm{rot}\mathbf{u}+4\boldsymbol{\Omega}_0\right)\right]=$$

$$=-\mathrm{div}\left[\mathbf{u}((\mathrm{rot}\mathbf{u}+2\boldsymbol{\Omega}_0)\cdot\mathbf{u})+\mathrm{rot}\mathbf{u}\left(\frac{p}{\rho_0}+\Phi-\tfrac{1}{2}\mathbf{u}^2\right)+4\boldsymbol{\Omega}_0\left(\frac{p}{\rho_0}+\Phi\right)\right].$$

Покажите это, используя уравнения движения, записанные во вращающейся системе отсчета (см. Упражнение 1.3, Курганский, 1993).

Литература

1. Курганский М.В. *Введение в крупномасштабную динамику атмосферы*, С-П.: Гидрометеоиздат, 1993.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*, М.:Наука, ГРФМЛ, 1986.

3. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика*, М.:ГИТТЛ, 1955.

4. Бэтчелор Дж. *Введение в динамику жидкости*, М.: Мир, 1973.

5. Уленбек Дж., Форд Дж. *Лекции по статистической механике*, М.: Мир, 1965 (для любознательного читателя).

Лекция 4

Потенциальный вихрь Россби-Обухова. Энергия и импульс сжимаемой жидкости. Гидродинамическое приближение уравнений газовой динамики

1. Потенциальный вихрь Россби-Обухова в теории "мелкой воды". Учитывая исключительную важность для геофизической гидродинамики и динамической метеорологии введенного ранее понятия потенциального вихря, уместно наряду с (2.4) и (3.23) привести его выражение для уравнений теории «мелкой воды». Так называются уравнения, описывающие двумерное движение тонкого слоя идеальной несжимаемой жидкости постоянной плотности ρ_0 со свободной поверхностью в поле сил тяжести (см. рис. 1). Условие тонкости слоя означает, что характерный горизонтальный масштаб L течения значительно превосходит толщину слоя H. Это позволяет пренебречь вертикальными ускорениями жидких частиц по сравнению с ускорением свободного падения g и зависимостью горизонтальных компонент скорости от вертикальной координаты z. В этом случае давление p удовлетворяет квазигидростатическому соотношению

$$\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho_0 = 0, \quad p = \rho_0 g\left(H\left(x,y,t\right) - z\right), \tag{1}$$

а уравнения движения записываются в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -g\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{2}$$

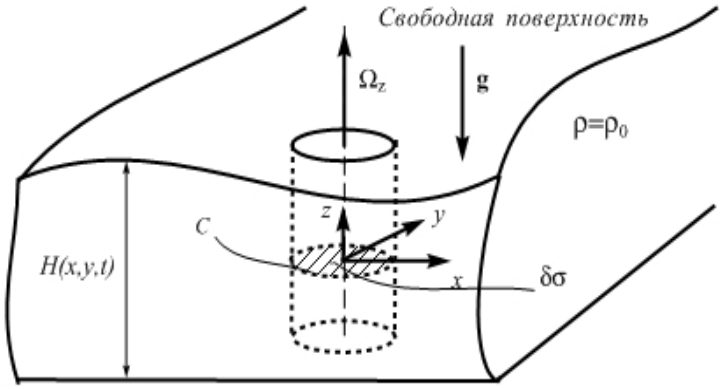


Рис. 1. Теория мелкой воды описывает двумерное движение вертикальных жидких столбиков в слое жидкости постоянной плотности $\rho = \rho_0$ со свободной поверхностью в поле силы тяжести.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -g\frac{\partial H}{\partial y}, \tag{3}$$

$$\frac{dH}{dt} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \equiv \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Здесь $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ – компоненты скорости в направлении осей x и y соответственно, а уравнение (4) получается в результате интегрирования по высоте условия трехмерной бездивергентности поля скорости $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$ с учетом того, что $w(z = 0) = 0$ (слой покоится на непроницаемой поверхности) и $w(z = H) = dH/dt$ по определению.

Уравнения (2)-(4) допускают замечательную газодинамическую трактовку, а именно: они описывают баротропное движение двумерной сжимаемой жидкости, в которой давление и плотность связаны степенным соотношением (политропный газ)

$$p = \tfrac{1}{2}\alpha g\rho^2,$$

где α – константа нужной размерности. Делая подстановку указанного соотношения в уравнение (3.11), а затем замену $\alpha\rho = H$ в уравнениях (3.11), (3.12), приходим к уравнениям теории мелкой воды.

Теперь можно поступить формально и применить теорему Кельвина к баротропному движению двумерного газа, согласно которой величина

$$K = \Omega_z d\sigma$$

есть лагранжев инвариант. Здесь $\Omega_z \doteq \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ – вертикальная компонента завихренности (другие компоненты в силу двумерности движения равны нулю), а $d\sigma$ – площадь произвольного горизонтального поперечного сечения жидкого столбика, которая ограничена инфинитезимальным замкнутым контуром (см. рис. 1), целиком принадлежащим плоскости (x, y). Поскольку $d\sigma = m/\rho_0 H$, где m – масса столбика, состоящего в процессе движения из одних и тех же частиц, остается неизменной, то из лагранжевой инвариантности K следует лагранжева инвариантность величины:

$$\Pi_{RO} = \Omega_z / H, \tag{5}$$

которая и называется *потенциальным вихрем для уравнений теории мелкой воды*. Именно в таком виде понятие потенциального вихря было введено в геофизическую гидродинамику Россби (Rossby, 1939) для океана и независимо Обуховым (1949) для атмосферы. В инвариантности этой величины легко убедиться и с помощью непосредственных вычислений (выполните упражнение 1).

Напомним (см. упражнение 1.1), что $\Omega_z = 2\omega$, где ω – угловая скорость локального вращения жидкости. Уместно в связи с этим заметить, что инвариантность Π_{RO} в теории мелкой воды эквивалентна сохранению момента количества движения жидкого цилиндра, основанием которого служит элемент $d\sigma$, а высотой – H (рис. 1). В самом деле, момент инерции цилиндра

$$I = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2\pi} m d\sigma = \frac{1}{2\pi} m \frac{V}{H} = \frac{1}{2\pi} \frac{m^2}{\rho_0} \frac{1}{H},$$

где r – радиус цилиндра, а V – его объем. Тогда момент его количества движения

$$M = I\omega = \frac{1}{4\pi} \frac{m^2}{\rho_0} \frac{\Omega_z}{H}. \tag{6}$$

Отсюда следует, что выделенный цилиндрический элемент ведет себя подобно балерине на сцене или фигуристке на льду, ко-

торые, вытягиваясь, т.е. выпрямляясь во весь рост и поднимая руки над головой, ускоряют вращение и, наоборот, "сплющиваясь т.е. приседая и расставляя руки в стороны, замедляют его.

Теорема о сохранении потенциального вихря дает определенное представление и о поведении неоднородной жидкости, будь то газ или несжимаемая неоднородная жидкость, которая расслаивается на непересекающиеся изэнтропические или изопикнические поверхности, пересекаемые вихревыми трубками, причем области сгущения упомянутых поверхностей характеризуются пониженной завихренностью, и наоборот. В результате происходит чередование областей повышенной и пониженной локальной закрученности жидкости. Области повышенной завихренности могут быть причиной возникновения турбулентности. Не исключено поэтому, что наблюдаемые в атмосфере и океане хаотически расположенные на разных высотах или глубинах турбулентные пятна формируются под влиянием нерегулярной расслоенности сжимаемой или неоднородной несжимаемой жидкости.

2. Законы сохранения и потоки энергии и импульса в сжимаемой жидкости. Принципиальное отличие газа от несжимаемой жидкости состоит в том, что любая газовая частица как термодинамический объект, наряду с кинетической энергией ее макроскопического движения, обладает внутренней энергией, которая служит мерой суммарной кинетической энергии составляющих эту частицу молекул. На принципиальную возможность преобразования в процессе движения частицы одного вида энергии в другой указывают следующие соображения. Первое начало термодинамики для системы с фиксированной массой записывается в виде

$$\delta\varepsilon = T\delta s - p\delta V, \tag{7}$$

где ε, T, s, p и V – внутренняя энергия, абсолютная температура, энтропия, давление и объем рассматриваемой среды.

Согласно (3.12), (3.13) формулу (7) применительно к адиабатическому движению индивидуальной газовой частицы единичной массы можно записать в виде

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = -\frac{p}{\rho}\mathrm{div}\mathbf{u}, \tag{8}$$

где $1/\rho = V$ и ε – объем и внутренняя энергия единицы массы газа.

Отсюда видно, что макроскопическое движение жидкости может быть причиной изменения ее внутренней энергии, если $\mathrm{div}\mathbf{u} \neq 0$, и наоборот, изменение внутренней энергии неминуемо порождает макроскопическое течение. Поэтому для газа уравнение локального баланса энергии следует записывать для величины

$$E = \rho\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \varepsilon\right), \tag{9}$$

которая является полной энергией единицы объема жидкости.

Вычислим теперь $\partial E/\partial t$, пользуясь уравнениями газодинамики (3.11)-(3.14). Согласно (7)

$$\delta(\rho\varepsilon) = \varepsilon\delta\rho + \rho T\delta s + \frac{p}{\rho}\delta\rho = \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\delta\rho + \rho T\delta s.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial t} = \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho T\frac{\partial s}{\partial t}.$$

Используя теперь (3.12), (3.13) для вычисления $\partial\rho/\partial t$ и $\partial s/\partial t$, получим

$$\frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial t} = -\left(\varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\mathrm{div}(\rho\mathbf{u}) - \rho T(\mathbf{u}\nabla)s. \tag{10}$$

Вновь применяя первое начало термодинамики (7) и заменяя в нем δ на $\mathbf{u}\nabla$ для исключения из (10) величины $\rho T(\mathbf{u}\nabla)s$, находим

$$\frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial t} = -\mathrm{div}\left\{\rho\mathbf{u}\left(\varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\right\} + \mathbf{u}\nabla p. \tag{11}$$

Аналогично с помощью (3.11), (3.12) вычисляется величина

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2\right) = \rho\mathbf{u}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\mathbf{u}^2\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\rho\mathbf{u}(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} - \tfrac{1}{2}\mathbf{u}^2\mathrm{div}(\rho\mathbf{u}) - (\mathbf{u}\nabla)p,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2\right) = -\mathrm{div}\left(\mathbf{u}\tfrac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2\right) - (\mathbf{u}\nabla)p.$$

Складывая последнее равенство с (11), получаем, что для сжимаемой жидкости локальный закон сохранения энергии выражается равенством

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \varepsilon\right)\right] = -\mathrm{div}\left\{\rho\mathbf{u}\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\right\}, \tag{12}$$

где $\varepsilon + p/\rho = W$ – энтальпия единицы массы жидкости, появление которой в правой части (12) объясняется тем, что силы давления совершают работу (ср. с (2.23)).

Что касается локального закона сохранения импульса, то для газа он (закон) формулируется точно так же, как для несжимаемой жидкости, т.е. формулами (2.17) и (2.18) (*почему?*). В этом нетрудно убедиться путем непосредственных вычислений, используя уравнения движения (3.11)-(3.14). (Сделайте это в качестве полезного упражнения.)

4. Скорость звука. Тот факт, что газовая среда аккумулирует два вида энергии – внутреннюю и кинетическую, и возможность их взаимного преобразования друг в друга указывают на то, что газ в отличие от несжимаемой жидкости может совершать свободные или, как в таких случаях говорят, собственные колебания, т.е. без влияния какого-либо постоянного внешнего воздействия. Упомянутые колебания можно индуцировать, создавая в начальный момент путем локального адиабатического сжатия (растяжения) область повышенной (пониженной) плотности, в которой из-за совершенной работы образуется избыток (дефицит) давления, препятствующий дальнейшему сжатию (растяжению) и создающий в свою очередь возвратную силу. В итоге области сжатия и растяжения, как круги на водной поверхности, будут распространяться по всей жидкости, возбуждая продольные (в отличие от колебаний водной поверхности) колебания жидких частиц в окрестности их первоначального расположения. Такой процесс, как известно, называется звуком, скорость распространения которого относится к фундаментальным физическим характеристикам сжимаемой жидкости. Эта характеристика позволяет, в частности, сформулировать условия, при выполнении которых сжимаемостью среды можно пренебречь, материализуя тем самым на первый взгляд весьма абстрактное понятие идеальной несжимаемой жидкости. В связи с этим уместно напомнить формулу для скорости звука.

Малые колебания сжимаемой среды, равновесное состояние которой задается постоянными величинами $\mathbf{u} = 0$, $p = p_0$, $\rho = \rho_0$ и $s(\rho_0, p_0) = s_0$, с хорошей точностью описываются линейными гидродинамическими уравнениями (нелинейными членами как величинами более высокого порядка малости по сравнению с возму-

щениями пренебрегаем):

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p', \tag{13}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \mathrm{div}\mathbf{u}', \tag{14}$$

где $\mathbf{u}'$, p' и ρ' – малые возмущения, средние значения которых равны нулю, причем

$$s\left(\rho_0 + \rho', p_0 + p'\right) = s_0, \tag{15}$$

потому что движение идеальной сжимаемой среды является адиабатическим.

Рассматривая теперь давление как функцию термодинамических величин s и ρ и принимая во внимание (15), легко понять, что p' и ρ' связаны соотношением

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s=s_0} \rho'. \tag{16}$$

Очевидно, что $(\partial p/\partial \rho)_{s=s_0} = const > 0$, потому что избыток/дефицит давления приводит к увеличению/уменьшению плотности и наоборот. Положим поэтому

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s=s_0} = c^2. \tag{17}$$

Уравнение (13) после подстановки в него (16) и (17) записывается в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\frac{c^2}{\rho_0}\nabla \rho'. \tag{18}$$

Исключая теперь из (14) и (18) $\mathrm{div}\mathbf{u}'$, получаем волновое уравнение для ρ'

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho' = 0, \tag{19}$$

где $c = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_{s=s_0}}$ и есть скорость распространения звуковых колебаний.

По сути, скорость звука характеризует степень сжимаемости среды: чем больше c, тем менее среда сжимаемая. Если еще учесть,

что величина $\sqrt{(\partial p/\partial\rho)_s}$ слабо зависит от пространственных координат и времени, поскольку, как правило, вариации энтропии малы по сравнению с ее фоновым значением $s_0 = \langle s \rangle$, то скорость звука следует рассматривать в качестве *фундаментального физического параметра сплошной среды, хотя и явно не входящего в уравнения движения.*

Формула (17) определяет скорость звука по адиабатической сжимаемости среды. Поскольку в практических приложениях для описания термодинамической системы вместо энтропии s используют абсолютную температуру T, то выражение для скорости звука удобнее переписать в терминах изотермической сжимаемости, применяя для этого известное термодинамическое соотношение:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{c_p}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T, \tag{20}$$

где c_p и c_v – удельные теплоемкости среды при постоянных давлении и объеме соответственно.

В частности, для идеального (с термодинамической точки зрения) газа, состояние которого описывается уравнением Менделеева-Клайперона

$$p = \rho R_0 T/\mu = \rho R T \tag{21}$$

(R_0 – универсальная газовая постоянная, μ – молекулярный вес и R – удельная газовая постоянная), скорость звука выражается формулой

$$c = \sqrt{\gamma R T} \quad (\gamma = c_p/c_v)\,. \tag{22}$$

Отсюда следует, что скорость звука в газе $c \sim \sqrt{T}$ и *практически не зависит от давления (γ обычно слабо зависит от T).*

5. Гидродинамическое приближение уравнений газовой динамики. С формальной термодинамической точки зрения несжимаемость среды означает, что

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \infty.$$

В самом деле, выделим в среде произвольный объем V, ограниченный замкнутой поверхностью S, и подвергнем его адиабатическому сжатию с помощью фиксированного избыточного давления δp. Чем

менее сжимаема среда, тем меньше изменение объема δV, а следовательно, тем меньше изменение плотности $\delta\rho \propto -\rho\delta V/V$. Поэтому в пределе для несжимаемой жидкости $(\delta p/\delta\rho)_s = \infty$. С физической точки зрения полагать скорость звука сколь угодно большой есть нонсенс, поскольку это означало бы существование сред, в которых возмущения (информация) распространяются мгновенно. Интуитивно ясно, что физическая трактовка несжимаемости среды должна быть связана с описанием течений, скорость которых $u \ll c$, или, как в таких случаях говорят, числа Маха которых

$$\mathrm{Ma} \doteq u/c \ll 1.$$

Действительно, для стационарных течений $(\partial/\partial t = 0)$ согласно уравнению Эйлера или Бернулли характерное изменение давления $\delta p \propto \rho u^2$. С другой стороны, из (16) следует

$$\delta\rho = \frac{1}{(\partial p/\partial\rho)_s}\delta p \sim \rho\frac{u^2}{c^2}, \tag{23}$$

то есть условие слабой сжимаемости $\delta\rho/\rho \ll 1$ эквивалентно $\mathrm{Ma}^2 \ll 1$. В этом случае для стационарного течения из равенства

$$div\rho\mathbf{u} = \rho div\mathbf{u} + (\mathbf{u}\nabla)\,\rho = 0$$

следует

$$div\mathbf{u} = -\mathbf{u}\frac{\nabla\rho}{\rho} \sim \frac{U}{L}\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{U}{L}O\left(Ma^2\right), \tag{24}$$

где U и L – характерные скорость и линейный масштаб течения.

Рассуждения остаются в силе и для нестационарных движений, если дополнительно потребовать, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial t} \leqslant \mathbf{u}\nabla, \text{ т.е. } \tau \geqslant \frac{L}{U} \gg \frac{L}{c}, \tag{24a}$$

где τ – характерное время изменения движения. Последнее означает, что время L/c, за которое звуковой сигнал пройдет расстояние L, мало по сравнению со временем τ заметного изменения движения жидкости. В этом смысле распространение сигнала происходит практически мгновенно, а *медленные существенно дозвуковые течения сжимаемой жидкости асимптотически точно описываются уравнениями несжимаемой жидкости с точностью до*

$O\left(\mathrm{Ma}^2\right)$. *Еще раз подчеркнем, что в этом и только в этом смысле следует понимать идеализацию реальной жидкости несжимаемой средой.*

Упражнения

1. Покажите путем прямых вычислений, что величина Ω_z/H является лагранжевым инвариантом для уравнений движения мелкой воды.

2. Сформулируйте локальный закон сохранения энергии для уравнений движения мелкой воды и дайте ему физическую трактовку.

Ответ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[H\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{u}^2+\tfrac{1}{2}gH\right)\right]=-\mathrm{div}\left[H\mathbf{u}\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{u}^2+gH\right)\right],\quad \mathrm{div}=\partial/\partial x+\partial/\partial y. \tag{25}$$

3. Что такое скорость звука в теории мелкой воды? Сформулируйте условия гидродинамического приближения уравнений (2)-(4), т.е. условия, когда движение тонких слоев жидкости со свободной поверхностью можно считать двумерно бездивергентным.

Ответ:

$$c=\sqrt{gH};\quad |\mathbf{u}|\ll c,\quad \tau=\frac{|\mathbf{u}|}{c}\gg L/c. \tag{26}$$

Решение. Формально, основываясь на газодинамической трактовке уравнений (2)-(4), для двумерного баротропного газа, в котором $p=\frac{1}{2}\alpha g\rho^2$ и $\alpha\rho=H$, «скорость звука» по определению равна $c=\sqrt{dp/d\rho}=\sqrt{g\alpha\rho}=\sqrt{gH}$. По сути же это – скорость гравитационных волн, обусловленных колебаниями свободной поверхности жидкости в поле сил тяжести. В самом деле, малые колебания свободной поверхности жидкости описываются линеаризованными уравнениями (2)-(4)

$$\frac{\partial\mathbf{u}'}{\partial t}=-g\nabla h,\quad \frac{\partial h}{\partial t}+H_0\mathrm{div}\mathbf{u}'=0,$$

где h – отклонение свободной поверхности от положения равновесия $H=H_0$, в котором $\mathbf{u}=0$. После исключения $\mathbf{u}'$ относительно h получается волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}-c_0^2\Delta h=0,$$

где $c_0 = \sqrt{gH_0}$.

Далее, положим $H = H_0 + h$ и запишем систему (2)-(4) в векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -g\nabla h, \tag{27}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,h = -H\mathrm{div}\mathbf{u}. \tag{28}$$

Предположим, что характерное время изменения течения $\tau \gtrsim U/L$ (U – характерная скорость, L – типичный геометрический масштаб). Это означает, что $\partial/\partial t \lesssim \mathbf{u}\nabla$, т.е. результат действия первого оператора меньше или сопоставим по порядку величины с результатом действия второго. Тогда согласно (27) и (28)

$$gh \propto U^2, \quad \mathrm{div}\mathbf{u} \propto \frac{U}{L}\cdot\frac{h}{H} = \frac{U}{L}\cdot\frac{gh}{gH} = \frac{U}{L}\cdot\frac{U^2}{c^2} = \frac{U}{L}\mathrm{Ma}^2.$$

Неравенства $\partial/\partial t \lesssim \mathbf{u}\nabla$ и $\mathrm{Ma} \ll 1$ эквивалентны условиям (26), при выполнении которых движение тонких слоев жидкости со свободной поверхностью двумерно бездивергентно с точностью до квадрата «числа Маха», определенного по скорости распространения гравитационных волн. Это число в гидродинамике принято называть числом Фруда.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*, М.: Наука, ГРФМЛ, 1986.

Часть II

Квазигеострофические приближения уравнений движения вращающихся баротропной и бароклинной жидкостей

Лекция 5

Уравнения движения вращающейся жидкости, понятие геофизического течения

1. Предварительные замечания. Прежде чем переходить к изложению основного материала, подведем некоторые итоги предшествующего материала и уточним терминологию. Предложенное изначально деление сплошных сред на несжимаемую жидкость и газ (сжимаемая жидкость) с физической точки зрения вполне оправданно, поскольку они состоят из разных физических элементов. Напомним, что элементы несжимаемой жидкости характеризуются лишь механическим свойством – инертностью, мерой которой служит плотность. Именно поэтому уравнения движения несжимаемой жидкости можно сформулировать строго в рамках механического подхода, интерпретируя давление как реакцию связей, обусловленную взаимодействием жидкой частицы с окружающей средой. Элементами же газа являются равновесные термодинамические системы, для описания которых помимо плотности необходимо привлекать еще и энтропию, вследствие чего уравнения движения сжимаемой жидкости формулируются с привлечением законов термодинамики.

С гидродинамической точки зрения уместнее и удобнее делить сплошные среды на баротропные и бароклинные, которые отличаются друг от друга прежде всего спецификой вихревой динамики. Строго говоря, указанные термины следовало бы применять не в отношении сред, а в отношении их движений, поскольку, например, течение одного и того же газа может быть изэнтропическим (баротропным) и неизэнтропическим (бароклинным). Понимая условность такой терминологии, напомним, что баротропной называется

жидкость, в которой плотность есть функция одного лишь давления. К этому же классу относится и однородная (постоянной плотности) несжимаемая жидкость – единственное исключение среди баротропных жидкостей, течение которой бездивергентно. Во всех остальных случаях баротропная жидкость сжимаемая, поскольку в противном случае, как уже упоминалось выше, давление переносилось бы как пассивная примесь, а система уравнений движения была бы переопределенной.

Главная особенность вихревой динамики баротропной жидкости состоит в том, что теорема Кельвина справедлива здесь для произвольного замкнутого жидкого контура, т.е. вихревые трубки могут иметь любую конфигурацию и занимать произвольное положение в пространстве, а сама жидкость из-за совпадения изобарических и изопикнических поверхностей не обладает собственными источниками завихренности, потому что в этом случае $\nabla\rho\times\nabla p \equiv 0$ (см. уравнение Фридмана (2.5)). Поэтому потенциальное течение баротропной жидкости может продолжаться неограниченно долго.

Отличительной чертой бароклинной жидкости, сжимаемой или несжимаемой, является ее расслоенность по изэнтропическим или изопикническим поверхностям, вдоль которых и происходит движение жидких частиц. Замкнутый жидкий контур, целиком принадлежащий изэнтропической или изопикнической поверхности в начальный момент, будет оставаться на ней в течение всего движения, что обеспечивает для такого контура справедливость теоремы Кельвина и, как следствие, лагранжеву инвариантность потенциального вихря. Это, в свою очередь, создает расслоенность по потенциальной завихренности, т.е. бароклинная жидкость имеет естественную эволюционирующую во времени трубчатую структуру, образованную из пересечений изэнтропических (изопикнических) поверхностей и поверхностей постоянной потенциальной завихренности. Масса, заключенная внутри каждой трубки, образованной пересечением пары изэнтропических (изопикнических) поверхностей с парой поверхностей постоянной потенциальной завихренности, будет сохраняться в процессе движения, потому что жидкие частицы, принадлежащие указанным поверхностям, никогда не покидают их. Заметим также, что согласно уравнению Фридмана (2.5) генератором завихренности бароклинной жидкости служит несовпадение изобарических и изопикнических поверхностей, что

влечет за собой $\nabla\rho\times\nabla p \neq 0$.

Читатель, по-видимому, уже обратил внимание на то, что при обсуждении основных принципов движения жидкости я сосредоточился главным образом на, так сказать, «генетических» свойствах ее динамики, не отягощенных влиянием «социальной среды» – внешних полей, граничных условий и пр. Основное внимание было уделено законам сохранения, что было сделано по следующим причинам. Во-первых, инварианты движения вскрывают фундаментальные свойства симметрии движения жидкости, которые указывают нам на то, что не может происходить. Нельзя, например, создать вечный двигатель или нарушать законы сохранения импульса или массы. Несмотря на очевидность сказанного, такое иногда случается при редукции гидродинамических уравнений или конструировании их дискретных аналогов. Во-вторых, при численном интегрировании невязких гидродинамических уравнений законы сохранения позволяют сформулировать важнейшие критерии точности вычислительных алгоритмов. И, наконец, в-третьих, в ряде случаев, о чем речь пойдет ниже, законы сохранения играют конструктивную роль при отыскании решений гидродинамических уравнений и формулировке фундаментальных критериев устойчивости движения жидкости.

2. Уравнения движения вращающейся жидкости. Исторически геофизическая гидродинамика ведет свое начало от динамической метеорологии – науке о земной погоде. Постепенно осознавалось, что сформулированные в этой науке законы имеют более широкое применение. Поэтому естественно сложилось так, что основными объектами исследования в геофизической гидродинамике на начальном этапе ее развития были крупномасштабные движения атмосферы, океана, внутреннего жидкого ядра Земли и их лабораторные аналоги. Впоследствии к ним присоединили движения атмосфер других планет, циркуляции на Солнце и других звездах и даже эволюцию галактик. Общим для всех элементом, определяющим образом влияющим на специфику их поведения, является вращение системы в целом. Поэтому изучение такого рода течений уместно начать с формулировки гидродинамических уравнений в естественной для рассматриваемых объектов вращающейся системе отсчета.

Переход от инерциальной к вращающейся системе отсчета лег-

ко осуществить, принимая во внимание, что производные произвольного вектора $\mathbf{A}$ по времени в указанных системах координат связаны хорошо известным соотношением:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_R + \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{A}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{\Omega}_0$ – угловая скорость вращения системы в целом, а индексом R обозначена производная по времени во вращающейся системе отсчета. Поскольку $\mathbf{u} \doteq d\mathbf{r}/dt$, то согласно (1)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}, \tag{2}$$

где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_R$ – скорости движения относительно инерциальной и вращающейся систем координат. Дифференцируя теперь равенство (2) и вновь применяя формулу (1), приходим к хорошо известному из классической механики результату:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_R}{dt} + \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{u} = \left(\frac{d\mathbf{u}_R}{dt}\right)_R + 2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{u}_R + \mathbf{\Omega}_0 \times (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}), \tag{3}$$

согласно которому "абсолютное" ускорение жидкой частицы складывается из относительного ускорения (первое слагаемое в правой части (3)), ускорения Кориолиса (второе слагаемое) и центростремительного ускорения (последнее слагаемое).

Далее, легко показать (см. Упражнение 1), что *индивидуальная производная по времени от скалярной величины инвариантна относительно инерциальной и вращающейся систем координат, т.е.*

$$\frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_R. \tag{4}$$

Делая теперь подстановки (3), (4) в (3.11)-(3.14) и опуская индекс R, уравнения движения вращающейся идеальной сжимаемой жидкости можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{u} \doteq \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} + 2\mathbf{\Omega_0} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi, \tag{5}$$

$$\frac{d\rho}{dt} \doteq \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\rho = -\rho \mathrm{div}\mathbf{u}, \tag{6}$$

$$\frac{ds}{dt} \doteq \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,s = 0, \tag{7}$$

$$s = s\left(\rho, p\right). \tag{8}$$

Здесь $\Phi = \Phi_c + \Phi_g$ – суммарный потенциал центробежных сил (после подстановки (3) в (3.11) последнее слагаемое в (3), перенесенное в правую часть (5), меняет знак и интерпретируется поэтому как центробежное ускорение) и внешнего гравитационного поля, которое с этого момента включается в рассмотрение как один из важнейших факторов, определяющих свойства геофизических течений. Потенциал центробежных сил задается равенством (см. Упражнение 2)

$$\Phi_c = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}\right)^2, \quad -\nabla\Phi_c = \left(\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}\right) \times \mathbf{\Omega}_0,$$

а величину $\mathbf{g}' = -\nabla\Phi = \mathbf{g} + \left(\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}\right) \times \mathbf{\Omega}_0$ ($\mathbf{g} = -\nabla\Phi_g$ – гравитационное ускорение) применительно к условиям на вращающихся планетах иногда называют эффективным ускорением свободного падения, которое не совпадает по направлению с вертикалью. Вспомните в связи с этим маятник Фуко (J.B.L. Foucault, Пантеон в Париже, 1851).

Строго говоря, использованное мною выражение “уравнение движения вращающейся жидкости” не совсем корректно, поскольку обе системы (3.11)-(3.14) и (5)-(8) описывают одно и то же движение, но в разных системах отсчета, что согласно известному принципу относительности формально не имеет значения. Однако с точки зрения математического описания физических явлений и их интерпретации выбор естественной системы координат принципиально важен. Классической иллюстрацией сказанному служат, с одной стороны, просуществовавшая немногим менее полторы тысячи лет система Клавдия Птолемея (II век н.э.), и с другой – система Николая Коперника (Nicolai Copernici, “О вращении небесных сфер”, Нюрнберг, 1543), опрокинувшая фундаментальные представления о мироздании и стимулировавшая построение принципиально новых физических концепций. Еще Эйнштейн отмечал, что не разрешимый с формальных позиций принципа относительности вопрос, Солнце вращается вокруг Земли или наоборот, с физической точки зрения не представляет проблемы хотя бы уже потому, что центр тяжести системы Солнце-планеты принадлежит Солнцу. Поэтому упомянутое выражение лишь подчеркивает, что принятая форма уравнений является наиболее естественной для

наблюдателя, который вращается вместе с жидкостью и знает об этом (например, мы с вами, находящиеся на земной поверхности и наблюдающие за погодой).

2. Понятие геофизического течения как гидродинамического объекта. Как это ни парадоксально на первый взгляд, в теории вращающейся жидкости, как, впрочем и в любом другом разделе гидродинамики, исходные уравнения движения жидкости, как правило, используются лишь для предварительного анализа фундаментальных свойств искомых решений, а не для непосредственного интегрирования конкретных задач даже при численном моделировании изучаемого процесса. Совокупность точных нетривиальных решений нелинейных гидродинамических уравнений (см., например, учебники Лэмба (Sir H. Lamb, "Hydrodynamics", 1932, переиздана в 1993), Милн-Томсона (L.M. Milne-Thompson, "Theoretical hydrodynamics", 1968, переиздана в 1996), Дж. Бэтчелор (G.K. Batchelor), "Введение в динамику жидкости", 1973 и др.) составляет считаное множество, и обнаружение нового точного решения до сих пор, хотя и с определенной долей скептицизма, воспринимается как серьезное научное достижение. Дело в том, что даже при постановке строгих начальных и краевых условий, обеспечивающих единственность решения исходных уравнений движения, оно (решение), как правило, содержит такое необозримое множество различных масштабов движения, что попытка детально их всех описать сродни попытке описать состояние газа с помощью траекторий всех составляющих его частиц. По сути, это означает необходимость редукции исходных гидродинамических уравнений, которую нередко удается осуществить, опираясь на фундаментальные свойства искомого класса решений, известные из данных наблюдений или результатов эксперимента. В нашем случае мы поступим еще более радикально и, основываясь не только на данных наблюдений, но и на результатах предшествующих теоретических исследований, введем понятие геофизического течения и аксиоматически сформулируем его главные свойства, что позволит нам в дальнейшем, минуя подготовительную работу, непосредственно приступить к выводу упрощенных уравнений движения, составляющих математическую основу геофизической гидродинамики. Введем сначала понятие геофизического течения применительно к баротропной атмосфере.

Относительное течение невязкой вращающейся в целом и расположенной в гравитационном поле баротропной жидкости называется геофизическим, если выполняются условия

$$\frac{\partial}{\partial t} \leq \mathbf{u}\nabla, \quad Ma \doteq \frac{U}{c} << 1,$$

$$\varepsilon \doteq \frac{U}{2\Omega_0 L} = O\left(\frac{\omega}{2\Omega_0}\right) << 1, \quad \delta \doteq \frac{{\Omega_0}^2 L}{g} << 1. \tag{9}$$

Здесь c – скорость звука, U и L – характерная скорость и типичный геометрический масштаб течения и g – гравитационное ускорение. Малость безразмерного критерия δ означает, что центробежные силы, входящие в уравнения движения в том же качестве, что и гравитационные силы, практически не влияют на поведение геофизических течений, т.е. *относительно этого параметра рассматриваемые движения практически автомодельны.*

Величина ε, равная типичному значению отношения адвективного ускорения $|(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u}|$ к ускорению Кориолиса $|2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{u}|$ или, что то же самое, относительной завихренности к удвоенной скорости общего вращения, *называется числом Россби-Кибеля и является основным малым параметром, по которому проводится разложение исходных уравнений движения.* Из малости числа Россби-Кибеля, в частности, следует, что характерный масштаб геофизического течения $L \gg U\tau/4\pi$ (τ – время одного оборота вращения системы в целом, сутки), т.е. существенно превышает типичное расстояние, которое проходит жидкая частица за время, приблизительно равное десятой части суток. Для земной атмосферы, типичная скорость ветров которой порядка 10 м/сек, это расстояние равно по порядку величине 100 км. Поэтому земные геофизические течения (извините за вынужденную формальную тавтологию) имеют характерный масштаб порядка 1000 км и более, сопоставимый с радиусом планеты.

Заметим теперь, что из определяющих поведение вращающейся жидкости внешних размерных физических параметров Ω_0, g и c (напомним (см. Лекцию 4), что к числу таких параметров, помимо явно входящих в уравнения движения, следует относить и скорость звука как меру сжимаемости среды) можно сконструировать два естественных геометрических масштаба:

$$L_c = \frac{g}{\Omega_0^2}, \quad L_0 = \frac{c}{2\Omega_0}. \tag{10}$$

Первый из них для нас неинтересен, поскольку это размер течения, в котором центробежные ускорения сопоставимы с гравитационными (подставьте L_c в выражение для δ), что противоречит условиям (9). Попутно заметим, что в земных условиях L_c достигает "астрономического" значения $\approx 10 \cdot 10^8$м $= 10^6$ км ($\Omega_0 = 2\pi/\left(24 \cdot 3600\right) c^{-1} \approx 7.3 \cdot 10^{-5} c^{-1}$).

Масштаб L_0 называется радиусом Россби-Обухова и относится к фундаментальным параметрам геофизической гидродинамики. Забегая вперед, отметим, что это – типичный размер вихрей – циклонов и антициклонов, наблюдаемых в быстровращающихся жидкостях и удовлетворяющих условиям (9), который, как правило, сопоставим с внешними размерами упомянутых геофизических объектов. Для земной атмосферы, например, $L_0 \approx 1500$ км, что по порядку величины сравнимо с радиусом Земли $a \approx 6378$ км. Суммируя сказанное, приходим к выводу, что *невязкие геофизические течения – это крупномасштабные медленно меняющиеся по времени и существенно дозвуковые движения вращающейся жидкости, характеризующиеся малыми значениями числа Россби-Кибеля.*

Понятие геофизического течения как гидродинамического объекта не следует отождествлять с общефизическими представлениями о геофизических течениях, охватывающими значительно более широкий класс движений, который включает, в частности, мезомасштабные процессы типа рэлеевской конвекции и образование кучевой облачности, практически весь спектр волновых движений, включая внутренние, поверхностные и приливные волны, рождение и распространение фронтов, а также такие опасные, но интригующие ученых, явления, как штормы, смерчи и торнадо. Общее вращение жидкости безусловно накладывает на них свою специфику, однако существовать они могут и без него, а потому относятся скорее к объектам общегидродинамическим, чем геофизическим.

Принципиально иначе обстоит дело с течениями, определяемыми условиями (9), которые составляют главный предмет изучения в геофизической гидродинамике и целесообразность выделения которых продиктована следующими соображениями. Во-первых, они являются главными погодообразующими элементами атмосферы, потому что в них сосредоточена львиная доля энергии и завихренности вращающейся жидкости. Во-вторых, выделенный класс те-

чений образует в гидродинамическом царстве своего рода государство в государстве — Ватикан, если хотите, который развивается по своим законам, обязательным для исполнения только для священнослужителей, и существует только, пока Земля вертится. И, наконец, главное, как следствие "во-вторых", выделенный класс течений управляется особыми уравнениями движения, которые удается асимптотически точно получить из исходной системы гидродинамических уравнений путем фильтрации быстрых составляющих. В отличие от (5)-(8) эти уравнения применимы для описания только геофизических течений и не допускают предельного перехода по $\Omega_0 \to 0$. Сказанное означает, что речь идет не об известных из классической гидродинамики течениях жидкости, модифицированных вращением жидкости в целом, а, скорее, о новых качествах решений гидродинамических уравнений, порождаемых этим вращением, что оправдывает введение самого понятия геофизической гидродинамики.

Упражнения

1. Попытайтесь доказать, не обращаясь к решению, что

$$\frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_R.$$

Доказательство. Соотношение между индивидуальными производными по времени от скалярной полевой характеристики в инерциальной и вращающейся системах отсчета с помощью (2) можно записать в виде:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} + \mathbf{u}\nabla\alpha = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}_R} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}_R}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} \nabla\alpha + (\mathbf{u}_R + \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r})\,\nabla\alpha$$

или

$$\frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}_R} + \mathbf{u}_R\nabla\alpha + \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}_R}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} + \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}\right]\nabla\alpha.$$

Здесь индексами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_R$ обозначены производные по времени при постоянных пространственных координатах в лабораторной и вращающейся системах координат соответственно. Но согласно (1) $(\partial \mathbf{r}_R/\partial t)_{\mathbf{r}} + \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r} = 0$.

2. Докажите, что $\mathbf{g}_c = -\nabla\Phi_c = (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}) \times \mathbf{\Omega}_0$, если $\Phi_c = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}\right)^2$.

Подсказка. Воспользуйтесь формулой

$$\nabla\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)=\mathbf{A}\times\mathrm{rot}\mathbf{B}+\mathbf{B}\times\mathrm{rot}\mathbf{A}+\left(\mathbf{A}\nabla\right)\mathbf{B}+\left(\mathbf{B}\nabla\right)\mathbf{A}, \qquad (11)$$

которую полезно однажды вывести самостоятельно.

3. Запишите условие сохранения потенциального вихря для уравнений (5)-(8).

Ответ:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{(\mathbf{\Omega}+2\mathbf{\Omega}_0)\cdot\mathrm{grad}s}{\rho}\right]=0.$$

Литература

1. Монин А.С. *Прогноз погоды как задача физики,* М.: Наука, 1970.

2. Педлоски Дж. *Геофизическая гидродинамика*, М.: Мир, 1984.

3. Salmon R. *Lectures on Geophysical Fluid Dynamics*, NY, Oxford: Oxford University Press, 1998.

Лекция 6

Что такое геофизическая гидродинамика?

1. Базис Обухова-Чарни. В этой лекции я попытаюсь описать основные черты и особенности глобальных геофизических течений, иногда весьма необычные для классического гидродинамика, которые и составляют своеобразие общей циркуляции атмосферы, и определяют подходы к ее описанию. Ограничимся в дальнейшем рассмотрением таких геофизических систем, в которых либо скорость вращения жидкости в целом совпадает по направлению с гравитационным ускорением $\mathbf{g} = -\nabla\Phi_g$, как это имеет место в лабораторных экспериментах по моделированию атмосферных и океанских течений, либо влиянием составляющих вектора $\mathbf{\Omega}_0$, ортогональных вектору $\mathbf{g}$, в силу тех или иных физических причин можно пренебречь. Последнее, например, справедливо для земной атмосферы в областях, удаленных от экватора, из-за малости вертикальных компонент скорости по сравнению с горизонтальными компонентами и вертикальных составляющих ускорения Кориолиса по сравнению с ускорением свободного падения. В этом случае вектор $\mathbf{\Omega}_0$ в уравнениях движения заменяется на $\mathbf{k}\Omega_0 \sin\varphi$ ($\mathbf{k}$ – единичный вектор в направлении, противоположном $\mathbf{g}$, а φ – широта точки наблюдения, см. рис. 1), т.е. по существу речь идет о так называемом *бета-эффекте – дифференциальном вращении жидкости, угловая скорость которого зависит от пространственных координат.*

В таких условиях своеобразие крупномасштабной динамики идеальной вращающейся жидкости состоит в том, что она (динамика) практически полностью определяется всего четырьмя фундаментальными свойствами, на что впервые обратили внимание применительно к атмосферным движениям синоптического мас-

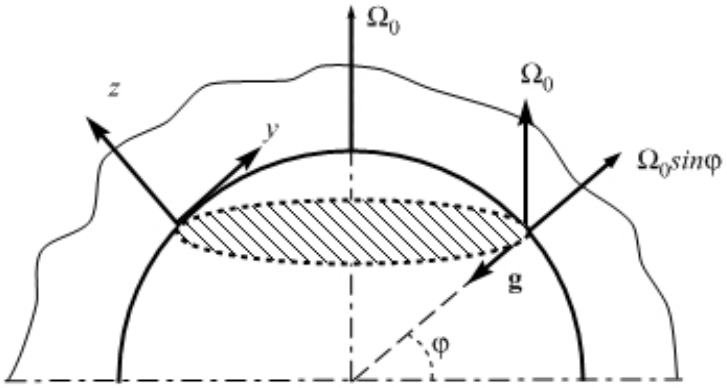


Рис. 1. Схематическое изображение меридионального сечения Северного полушария Земли. Координаты x, y и z отсчитываются соответственно на восток, север и вверх. φ - широта. Горизонтальная компонента Ω_{0y} в выражении для силы Кориолиса не учитывается.

штаба выдающиеся метеорологи А.М. Обухов и Дж. Чарни (J.G. Charney). Свойства эти следующие.

(I) *Геофизические течения являются квазигидростатическими, причем соотношение гидростатики выполняется для них с точностью* $o(\varepsilon)$:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho = o(\varepsilon). \tag{1}$$

Здесь z – вертикальная координата, отсчитываемая в направлении, противоположном вектору гравитационного ускорения.

(II) *Течения находятся в так называемом квазигеострофическом равновесии, т.е. сила Кориолиса с точностью до членов порядка* ε *уравновешивается горизонтальным 2D-градиентом давления* (напомним, вертикальной компонентой силы Кориолиса мы пренебрегаем):

$$2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + O(\varepsilon) \quad \left(\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{2}$$

где $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ – горизонтальный ветер

(III) *Сохраняют потенциальный вихрь индивидуальной жидкой частицы, который применительно к вращающейся системе*

отсчета записывается в виде:

$$\Pi = \frac{(\mathbf{\Omega} + 2\mathbf{\Omega}_0) \cdot \mathrm{grad}\Theta}{\rho} \quad \left(\mathbf{\Omega} \doteq \mathrm{rot}\mathbf{u},\ \mathrm{grad} = \nabla + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},\ \frac{d\Pi}{dt} = 0\right), \tag{3}$$

где $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \mathbf{k}w = \mathbf{v} + \mathbf{k}w$, Θ – потенциальная температура, играющая роль удельной энтропии (см. ниже).

(IV) *Сохраняют потенциальную температуру индивидуальной жидкой частицы*

$$\Theta \doteq T\left(\frac{p_0}{p}\right)^k, \quad k = \frac{R}{c_p}, \quad \frac{d\Theta}{dt} = 0. \tag{4}$$

Здесь p, ρ и T – соответственно давление, плотность и абсолютная температура жидкой частицы, R – газовая постоянная, входящая в уравнение состояния $p = \rho RT$ (уравнение Менделеева-Клайперона), c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении. Термодинамическую характеристику Θ индивидуальной жидкой частицы по многим причинам предпочитают использовать в геофизической гидродинамике вместо удельной энтропии s, связанной с Θ однозначным (с точностью до аддитивной константы) соотношением $s = c_p \ln\Theta$. Согласно формуле (4) *значение* Θ *совпадает с температурой, которую имела бы жидкая частица при ее адиабатическом сжатии до значения "приземного" давления* $p = p_0$ *(отсюда название потенциальная температура).*

Условия (1), (2), переписанные в виде единого векторного равенства

$$\mathbf{G} \doteq 2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{u} + \rho^{-1} grad\, p - \mathbf{g} = O(\varepsilon), \tag{5}$$

можно трактовать, применяя физическую терминологию, как адиабатическую инвариантность – "приближенную сохраняемость" нулевого значения вектора **G.** Напомним, что *в физике адиабатическим инвариантом называется величина* $I(t)$*, для которой разность* $I(t) - I(0)$ *остается малой при всех рассматриваемых* t*. В гидродинамике же под адиабатическими инвариантами, каковыми являются, в частности, потенциальный вихрь и потенциальная температура, подразумевают первые интегралы уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости, т.е. величины, сохраняющиеся в отсутствии диссипации и внешних источников энергии.* В связи с этим уместно подчеркнуть, что хотя свойства

(III), (IV) выполняются для любого течения идеальной сжимаемой жидкости, именно для геофизических течений потенциальный вихрь и потенциальная температура вместе с приближенной инвариантностью нулевого значения вектора $\mathbf{G}$ приобретают особое значение как исчерпывающие характеристики движения. Неслучайно поэтому за последние годы осуществлены успешные попытки диагностировать атмосферные процессы синоптического масштаба в терминах упомянутых фундаментальных адиабатических инвариантов (см., например, Курганский, 1993). Выражаясь фигурально, *свойства* (I)-(IV) *образуют своеобразный "4-мерный базис", на который натянуто все пространство геофизических течений и который можно использовать в качестве стартовой площадки для изучения их структуры и редукции исходных 3D уравнений.* Поэтому мы не будем математически строго останавливаться на таких тонких вопросах теории вращающейся жидкости, как: почему система находится в окрестности геострофического равновесия, как происходит адаптация к нему гидродинамических полей, какова роль малых масштабов и различных волновых процессов, не удовлетворяющих условиям (I)-(IV), и пр. Эти, а при необходимости и другие сопутствующие проблемы будут затронуты лишь на уровне простых иллюстраций, аналогий и физического толкования, способствующих пониманию, но не служащих доказательствами. За ними я отсылаю читателя к традиционной и широкодоступной литературе по геофизической гидродинамике, упоминаемой в библиографии к лекциям.

2. Фундаментальные свойства геофизических течений. Уже первые два репера базиса Обухова-Чарни, выражаемые равенством (5), позволяют выделить отличительные свойства геофизических течений, которые на первый взгляд противоречат классическим представлениям о поведении жидкости.

(1) В самом деле, начнем с вопроса, *куда дует ветер?* Умножая (5) векторно на $\mathbf{\Omega}_0$ с учетом коллинеарности $\mathbf{g}$ и $\mathbf{\Omega}_0$, условия квазигеострофического равновесия (2) можно переписать в виде

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2\Omega_0\rho}\mathbf{k}\times\nabla p + O(\varepsilon), \tag{6}$$

или в координатной форме

$$u = -\frac{1}{2\Omega_0\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + O(\varepsilon), \quad v = \frac{1}{2\Omega_0\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + O(\varepsilon). \tag{6a}$$

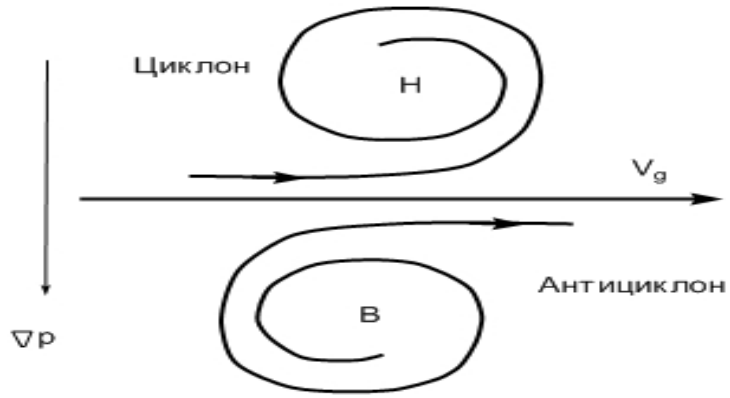


Рис. 2. Геострофический ветер вопреки здравому смыслу дует не поперек, а вдоль изобар. и - центры низкого и высокого давления.

Строгое соотношение

$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{2\Omega_0 \rho} \mathbf{k} \times \nabla p \tag{7}$$

называется *геострофическим ветром.* Отсюда следует, что ветер дует, на первый взгляд, вопреки здравому смыслу (рис. 2) не в направлении дефицита давления, т.е. не поперек, а вдоль изобар. *Если встать спиной к ветру, то слева от Вас будет область пониженного давления, а справа – повышенного.* (На практике это правило следует применять, ориентируясь по движению облаков, поскольку, как мы увидим ниже, в окрестности земной поверхности из-за влияния приземного трения направление ветра существенно отличается от геострофического.) Воздушные массы земной атмосферы в окрестности центра пониженного (повышенного) давления вращаются вокруг этого центра по сходящимся к нему (расходящимся от него) спиралям, образуя крупномасштабный вихрь – циклон (антициклон).

(2) *Критерий несжимаемости вращающейся жидкости.* В Лекции 4 с помощью формулы

$$\delta\rho = \frac{1}{(\partial p/\partial \rho)_s} \delta p = \frac{\delta p}{c^2} \tag{8}$$

было показано, что критерий слабой сжимаемости $\delta\rho/\rho \ll 1$ выполняется для существенно дозвуковых течений, при этом относительно медленно эволюционирующие течения ($\partial/\partial t \leqslant \mathbf{u}\nabla$) бездивергентны с точностью квадрата числа Маха. Иначе обстоит дело во вращающейся в целом жидкости. Согласно (2) или (5) вариации давления, вызванные относительным движением жидкости, $\delta p \sim 2\Omega_0 UL\rho$, где U и L – характерные скорость ветра и горизонтальный масштаб его изменения (вариациями давления за счет вертикальных течений можно смело пренебречь в силу высокой точности выполнения гидростатического соотношения (1)). Тогда, делая подстановку этой оценки в (8), имеем

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{2\Omega_0 UL}{c^2} = \frac{2\Omega_0 L}{c}\frac{U}{c} = \frac{L}{c/2\Omega_0}Ma = \frac{L}{L_0}Ma,$$

где $L_0 = c/2\Omega_0$ – введенный ранее масштаб Россби-Обухова. Отсюда следует (см. Лекцию 4), что для геофизических течений 3D-дивергенция, т.е.

$$\mathrm{Div}\mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{U}{L}O\left(\frac{L}{L_0}Ma\right). \tag{9}$$

Поскольку, как уже упоминалось, характерный линейный масштаб геофизических течений порядка L_0, то согласно (9) *вращающаяся жидкость на порядок менее несжимаемая по сравнению с невращающейся жидкостью.*

(3) *Квазидвумерность геофизических течений.* Для баротропной атмосферы формулу (6) можно переписать в виде

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2\Omega_0}\mathbf{k}\times\nabla W + O(\varepsilon), \quad W(p) = \int\frac{dp}{\rho(p)}, \tag{10}$$

где $W(p)$ – первообразная функции $f(p) = \rho^{-1}(p)$ (см. Лекцию 3). Тогда согласно формуле $\mathrm{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\mathrm{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathrm{rot}\mathbf{B}$ (или просто продифференцируйте первое уравнение (6) по x, а второе – по y и сложите)

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = O(\varepsilon). \tag{11}$$

Сопоставляя (11) с (9), находим, что $\partial w/\partial z = O(\varepsilon)$ и, поскольку на нижней твердой границе атмосферы $w(z=0) = 0$,

$$w(x,y,z) = O(\varepsilon). \tag{12}$$

Подействуем операцией rot на (5). Применяя формулу

$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(\mathbf{B}\nabla)\,\mathbf{A}-(\mathbf{A}\nabla)\,\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathrm{div}\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathrm{div}\mathbf{A}$$

с учетом $\mathbf{\Omega}_0=(0,0,\Omega_0)$, имеем

$$-2\Omega_0\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}+2\mathbf{\Omega}_0\mathrm{Div}\mathbf{u}=O\,(\varepsilon)\,.$$

Отсюда с учетом (9)

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}=O\,(\varepsilon)\Longrightarrow\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}=O\,(\varepsilon)\,,\ \frac{\partial w}{\partial z}=O\,(\varepsilon)\,, \tag{13}$$

поскольку, как правило, $Ma\ll\varepsilon$ (например, для атмосферы $Ma\approx 1/30$, а $\varepsilon\approx 0.1$)[1]. Утверждения (12) и (13) иногда называют *теоремой Праудмена-Тейлора, согласно которой общее вращение подавляет вертикальную скорость баротропных геофизических течений и зависимость их горизонтальной составляющей скорости от вертикальной координаты.* В одной из последующих лекций будет показано, что утверждение (12) при определенных условиях справедливо и для бароклинных геофизических течений. Другими словами, *геофизические течения являются квазидвумерными.*

(4) *Термический ветер.* Для бароклинных геофизических течений применение операции rot к (5) дает

$$-2\Omega_0\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}+2\mathbf{\Omega}_0\mathrm{Div}\mathbf{u}+\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p\right)=O\,(\varepsilon)\,,$$

или с учетом (9) и $\mathrm{rot}(\varphi\mathbf{A})=(\mathrm{grad}\varphi\times\mathbf{A})+\varphi\mathrm{rot}\mathbf{A}$

$$2\Omega_0\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}+\frac{1}{\rho^2}\,(\mathrm{grad}\rho\times\mathrm{grad}p)=O\,(\varepsilon)\,.$$

Учитывая теперь, что из-за квазидвумерности характерный вертикальный масштаб геофизического течения много меньше горизонтального, то согласно (1), по крайней мере, $\mathrm{grad}p=\mathbf{g}\rho+O\,(\varepsilon)$ и последнюю формулу можно записать в виде

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}=-\frac{1}{2\Omega_0\rho}\,(\mathrm{grad}\rho\times\mathbf{g})+O\,(\varepsilon)\equiv-\frac{1}{2\Omega_0}\,(\mathrm{grad}\ln\rho\times\mathbf{g})+O\,(\varepsilon)\,, \tag{14}$$

[1] В (11), (12) и (13) опущены соответствующие размерные множители, что нередко делается и далее, если это не вызывает недоразумений.

или в координатной форме

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{2\Omega_0 \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + O(\varepsilon) = \frac{g}{2\Omega_0}\frac{\partial \ln \rho}{\partial y} + O(\varepsilon),$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{g}{2\Omega_0 \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + O(\varepsilon) = -\frac{g}{2\Omega_0}\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} + O(\varepsilon). \qquad (14a)$$

В лабораторных экспериментах по моделированию бароклинных геофизический течений обычно используют жидкость Обербека-Буссинеска, в которой распределения плотности и температуры задаются равенствами $\rho = \rho_0 + \rho'(x, y, z, t)$ и $T = T_0 + T'(x, y, z, t)$, где ρ_0 и T_0 – не зависящие от координат и времени средние значения плотности и температуры, а отклонения связаны соотношением

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = -\frac{T'}{T_0}. \qquad (15)$$

Тогда (14) в координатной форме записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g}{2\Omega_0 T_0}\frac{\partial T}{\partial y} + O(\varepsilon), \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{g}{2\Omega_0 T_0}\frac{\partial T}{\partial x} + O(\varepsilon). \qquad (16)$$

Штрих опущен, поскольку T_0 не зависит от координат. Формулы (16) применяются для океана. В дальнейшем будет показано, что для бароклинной атмосферы формулы (16) заменяются следующими:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g}{2\Omega_0 \Theta_S}\frac{\partial \Theta}{\partial y} + O(\varepsilon), \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{g}{2\Omega_0 \Theta_S}\frac{\partial \Theta}{\partial x} + O(\varepsilon), \qquad (17)$$

где $\Theta_S = \Theta_S(z)$ – вертикальное распределение потенциальной температуры так называемой стандартной атмосферы, получаемое на каждом уровне путем усреднения по горизонтальным координатам. По сути эти формулы вскрывают один из главных механизмов внешнего энергетического привода, которым питаются общие циркуляции атмосферы и океана.

Соотношения (16) и (17), называемые *термическим ветром,* показывают, что вертикальный сдвиг ветра индуцируется горизонтальным градиентом температуры, который, в свою очередь, порождается разностью температур полюс-экватор, создаваемой неоднородным солнечным разогревом атмосферы и земной поверхности.

Замечание о применяемых в дальнейшем обозначениях. Учитывая квазидвумерную специфику геофизических течений, нам предстоит неоднократно переходить от 3D к 2D описанию и наоборот. Поэтому во избежание недоразумений в дальнейшем будем придерживаться следующего соглашения для обозначения часто используемых дифференциальных операторов. Трехмерные индивидуальную производную по времени, операторы дивергенции и градиента обозначим соответственно через D/Dt, Div и grad, а их двумерные аналоги – через d/dt, div и ∇, так что в декартовой системе координат

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}, \quad \nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y};$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} + w\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \mathrm{Div}\mathbf{A} = div\mathbf{A} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad \mathrm{grad} = \nabla + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Мы будем также придерживаться соглашения, что вертикальная координата z направлена вверх, т.е. противоположно вектору силы тяжести, а горизонтальные координаты x, y вместе с z образуют правую систему отсчета, так что если ось x направлена на восток, то ось y "смотрит" на север (см. рис. 1).

3. Теория "мелкой воды" для вращающейся идеальной жидкости постоянной плотности. Выше уже упоминалось, что основным малым параметром, по которому проводится разложение исходных 3D уравнений движения для упрощения описания крупномасштабной динамики вращающейся жидкости, является число Россби-Кибеля $\varepsilon = U/2\Omega_0 L$. Нулевому приближению соответствует строго нулевое значение вектора $\mathbf{G}$, т.е. строгое гидростатическое равновесие и строгое соотношение геострофического ветра, которые записываются в виде единого равенства (ср. с (5))

$$2\left(\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{u}\right) = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p + \mathbf{g}. \tag{18}$$

На первый взгляд может показаться, что нулевое приближение, т.е. равенство (18), заменяющее уравнение Эйлера, вместе с бездивергентностью 2D поля скорости (11) и $w = 0$ описывают

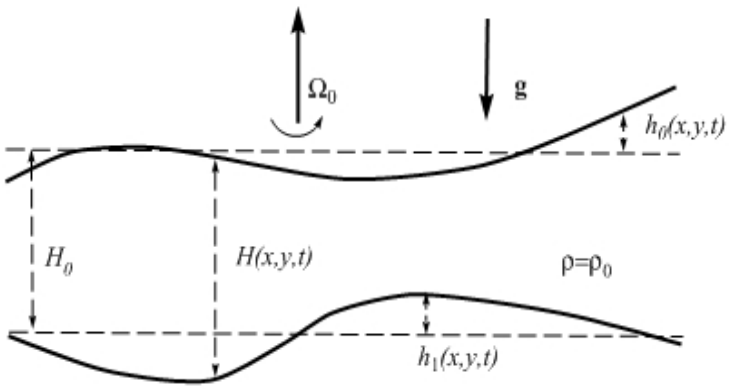


Рис. 3. Слой жидкости постоянной плотности со свободной поверхностью и неровным дном, вращающийся в поле силы тяжести с постоянной угловой скоростью.

некое стационарное климатическое состояние баротропной атмосферы, которое можно было бы взять в качестве основы для упрощения исходных уравнений движения. Это, однако, не так, потому что бездивергентность поля ветра, как упоминалось выше, непосредственно следует из (18) и, следовательно, упомянутая система не замкнута. Вектор $\mathbf{G}$ всего лишь адиабатический инвариант (по физической терминологии), который может соответствовать различным решениям гидродинамических уравнений, в том числе и различным климатическим состояниям атмосферы.

Однако базис Обухова-Чарни позволяет существенно упростить исходную постановку задачи, основанную на 3D гидродинамических уравнениях. Проиллюстрируем это на примере слоя идеальной жидкости постоянной плотности $\rho = \rho_0$ и переменной глубины со свободной поверхностью, вращающегося вокруг вертикальной оси z с постоянной угловой скоростью Ω_0 (рис. 3). Рельеф дна задается гладкой функцией горизонтальных координат $z = h_1(x, y) << H_0$.

Невырожденное приближение, используя (I), (II), можно получить следующим образом. Во-первых, на основании оценок (12),

(13) в уравнении Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + 2\mathbf{\Omega_0} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{19}$$

для горизонтальной скорости $\mathbf{v}$ мы можем пренебречь членом $w\partial\mathbf{v}/\partial z$ как величиной второго порядка малости по ε, стараясь сохранить лишь члены порядка $O(1)$ и $O(\varepsilon)$. Во-вторых, внимательный читатель наверное уже заметил, что запись (1) подразумевает более высокую точность выполнения условия квазистатики по сравнению с условием квазигеострофического равновесия (2). Это действительно так, и неслучайно поэтому условие квазистатического равновесия используют для описания даже мезомасштабных (порядка 100 км) процессов с помощью так называемых примитивных уравнений движения, которые тем и отличаются от исходных, что строгое равенство (1) используется в них вместо уравнения для вертикальной компоненты скорости. Мы поступим аналогичным образом и применительно к рассматриваемой системе запишем упомянутое условие в виде:

$$p = \rho_0 g\left(H\left(x,y,t\right) - z\right), \tag{20}$$

согласно которому гидродинамическая составляющая давления задается отклонением $h(x,y,z,t) = H(x,y,z,t) - H_0 + h_1(x,y)$ высоты свободной поверхности от ее равновесного значения (см. рис. 3). Теперь после подстановки (20) в (19) уравнение для горизонтальной скорости течения $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ записывается в виде:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \doteq \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla\mathbf{v}) + 2\mathbf{\Omega_0} \times \mathbf{v} = -g\nabla H\left(x,y,t\right). \tag{21}$$

Уравнение неразрывности, однако, мы должны сохранить в прежней, т.е. соответствующей 3D несжимаемости среды, форме:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

поскольку согласно договоренности малые члены порядка $O(\varepsilon)$, каким является $\partial w/\partial z$, не исключаются из рассмотрения. Способ замыкания полученной системы уравнений обнаруживается из наблюдения, что правая часть (21) не зависит от z. Полагая поэтому

$u = u(x, y, t)$ и $v = v(x, y, t)$ и интегрируя последнее равенство по высоте слоя с учетом того, что $w(z = h_1) = 0$ и $w(z = H) \doteq dH/dt$, уравнение сохранения массы можно записать в виде

$$\frac{dH}{dt} + H\mathrm{div}\mathbf{v} \equiv \frac{\partial H}{\partial t} + \mathrm{div}(H\mathbf{v}) = 0. \tag{22}$$

Итак, фундаментальные свойства (I), (II) геофизических течений позволяют свести задачу об описании трехмерных движений несжимаемой жидкости к изучению двумерных движений баротропного газа с помощью уравнений (21), (22), которые называются уравнениями теории вращающейся мелкой воды (ср. с (4.2) – (4.4)). В связи с этим уместно отметить, что в отличие от классической теории мелкой воды (см. Лекцию 4) область применения мелководного приближения вращающейся жидкости не ограничена условием $H/L \ll 1$ (L – типичный горизонтальный масштаб течения), поскольку в рассматриваемом случае двумерность движения есть следствие вращения, а не тонкости слоя. Другими словами, уравнения (21), (22) "работают" и в глубокой воде, что особенно важно для лабораторного моделирования геофизических течений. Оговориться следует относительно атмосферы Земли и других вращающихся планет. Для сферических слоев упомянутое ограничение все-таки весьма существенно из-за малости параметра Кориолиса $f = 2\Omega_0 \sin\varphi$ в окрестности экватора.

Упражнения

1. Запишите условие сохранения потенциального вихря для уравнений (21) – (22)).

Ответ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega_z + 2\Omega_0}{H}\right) = 0, \ \left(\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{23}$$

2. Почему в циклоне ветер закручивается по спирали, а в антициклоне – раскручивается?

3. Пользуясь формулами термического ветра, объясните, почему погода преимущественно приходит с запада?

Литература

1. Монин А.С. *Прогноз погоды как задача физики,* М.: Наука, 1970.

2. Педлоски Дж. *Геофизическая гидродинамика*, М.: Мир, 1984.

3. Гилл А. *Динамика атмосферы и океана*, М.: Мир, 1986

4. Salmon R. *Lectures on Geophysical Flud Dynamics*, NY, Oxford, Oxford University Press, 1998.

Лекция 7

Уравнения Обухова-Чарни, волны Россби

Уравнения вращающейся мелкой воды (6.21), (6.22) не следует, однако, рассматривать в качестве законченного следующего шага в разложении исходных уравнений по параметру ε относительно нулевого приближения (6.18). В действительности они превышают требуемую точность $O\left(\varepsilon^2\right)$ хотя бы уже потому, что описывают распространение длинных гравитационно-гироскопических волн, для которых нарушается условие малости чисел Маха и Россби-Кибеля. Для земной атмосферы, например, групповая скорость их распространения практически совпадает со скоростью звука, что соответствует $\varepsilon \approx 1$ уже при длине волны в полторы тысячи километров (см. ниже, п.4). Поэтому в соответствии с разделом 6.1 для дальнейшей редукции мы должны обратиться к свойству (III) геофизических течений, т.е. уравнению сохранения потенциального вихря, выделяющему вихревую составляющую движения. Это позволит нам избавиться от "лишних" быстрых, не обладающих потенциальной завихренностью, течений типа гравитационно-гироскопических волн и сосредоточиться на медленных геофизических течениях, которые по самой своей природе являются вихревыми (более предметно этот вопрос обсуждается в п. 4)

1. Квазигеострофическое приближение уравнения сохранения потенциального вихря. Для вращающейся мелкой воды уравнение сохранения потенциального вихря записывается в виде (см.(6.23)):

$$\frac{d\Pi}{dt} = 0, \quad \Pi = \frac{\Omega_z + f_0}{H} \quad \left(\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{1}$$

Здесь введено обозначение $f_0 = 2\Omega_0$, $H = H_0 + h\left(x, y, t\right) -$

$h_1(x,y)$ и предполагается, что в нулевом приближении орографический эффект отсутствует (другими словами, он порядка ε, поскольку в противном случае нарушались бы причинно- следственные связи), т.е. соотношения геострофического ветра для уравнений (6.21), (6.22) задаются формулами

$$u = -\frac{g}{f_0}\frac{\partial h}{\partial y} + O(\varepsilon), \quad v = \frac{g}{f_0}\frac{\partial h}{\partial x} + O(\varepsilon). \tag{2}$$

Из них получается следующая оценка для величины h:

$$\frac{h}{H_0} \propto \frac{f_0 U L}{g H_0} = \frac{U}{f_0 L}\frac{L^2}{g H_0/f_0^2} = \varepsilon\frac{L^2}{L_0^2}, \quad L_0 \doteq \frac{\sqrt{g H_0}}{f_0}, \tag{3}$$

где радиус Россби-Обухова L_0 определен по скорости распространения гравитационных волн, играющей роль скорости звука в теории мелкой воды.

Отсюда видно, что малость числа Россби-Кибеля влечет за собой такого же порядка малость отношения h/H_0, если линейный размер течения L варьируется в окрестности характерного масштаба глобальных вихревых образований (циклонов и антициклонов), о чем упоминалось выше.

Принимая во внимание, что $\Omega_z/f_0 \propto U/2\Omega_0 L = \varepsilon$, и оценку (3), первое приближение для потенциального вихря можно теперь записать в виде:

$$\frac{H_0}{f_0}\left(\frac{\Omega_z + f_0}{H}\right) = 1 + \frac{\Omega_z}{f_0} - \frac{h}{H_0} + \frac{h_1}{H_0} + O\left(\varepsilon^2\right). \tag{4}$$

Делая перенормировку, т.е. беря в качестве потенциального вихря величину $\tilde{\Omega} = H_0\Pi$ и вводя обозначение $\psi \doteq gh/f_0$, с учетом (2)-(4) получаем так называемое квазигеострофическое выражение потенциального вихря

$$\tilde{\Omega} = f_0\left(1 + \frac{h_1}{H_0}\right) + \triangle\psi - L_0^{-2}\psi + O\left(\varepsilon^2\right), \tag{5}$$

где $\triangle = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Тогда, принимая во внимание, что согласно (2)

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{2a}$$

уравнение сохранения потенциального вихря в квазигеострофическом приближении, впервые выведенное Чарни (Charney, 1948) и независимо Обуховым (1949), записывается в виде:

$$\frac{d\tilde{\Omega}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\psi - L_0^{-2}\psi\right) + [\psi, \triangle\psi] + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \qquad (6)$$

$$\beta = \frac{f_0}{H_0}\frac{\partial h_1}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{f_0}{H_0}\frac{\partial h_1}{\partial x}. \qquad (7)$$

Линейные члены в уравнении (6) с коэффициентами β и γ описывают так называемый бета-эффект, ответственный за дисперсию крупномасштабных волновых процессов. Аналогичный эффект возникает и в случае дифференциального вращения системы. Напомним, что для земной атмосферы определяющим локальным параметром вращения является удвоенная проекция угловой скорости вращения планеты на нормаль к ее поверхности, т.е. величина $f = 2\Omega_0 \sin\varphi$ (φ - широта, см. Лекцию 6), которая называется *параметром Кориолиса*. В этом случае x и y отсчитываются по долготе и широте на восток и север соответственно, а $\beta = df/dy$. Для орографического бета-эффекта параметр Кориолиса $f = f_0\,(1 + h_1/H_0)$. В любом случае квазигеострофическое приближение уравнений теории вращающейся мелкой воды можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(f + \triangle\psi - L_0^{-2}\psi\right) = 0, \qquad (8)$$

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (9)$$

Применительно к сферической земле им соответствует мелководное приближение, аналогичное (6.21), (6.22), с тем лишь отличием, что $2\boldsymbol{\Omega}_0$ заменяется на $\mathbf{k}f$.

Нужно только помнить, что в определении $\psi \doteq gh/f_0$ величину f_0 уже нельзя заменять на f, потому что бета-эффект – величина порядка (ε). Для атмосферы за f_0 обычно принимают значение f при $\varphi = 45^\circ$.

2. Обобщение на случай баротропной жидкости. Несколько более утонченный подход требуется, чтобы свести 3D уравнения движения к двумерному уравнению сохранения потенциального вихря для баротропной жидкости, в которой по опреде-

лению давление, а следовательно, и другие термодинамические характеристики зависят только от плотности. "Фокус" состоит в том, что в такой системе поверхности постоянных давления, плотности и температуры совпадают. *Именно по этой причине для упрощения уравнений движения нам вновь не требуется обращаться к четвертому "реперу" базиса Обухова-Чарни – уравнению сохранения потенциальной температуры* (6.4). Усреднением по вертикали задачу удается свести к описанию управляемого уравнениями (8), (9) двумерного движения вдоль некоторой эффективной поверхности, которой можно приписать фиксированные значения плотности, давления и температуры. В этом случае при вычислении параметра $L_0 = \sqrt{gH_0}/f_0$, входящего в уравнение Обухова-Чарни, в качестве эффективной толщины слоя берут так называемую высоту однородной атмосферы $H_0 = p_0/g\rho_0$, где p_0 и ρ_0 – стандартные (отвечающие статическому состоянию атмосферы) "приземные" значения давления и плотности. Соответствующая этой высоте скорость распространения гравитационных волн $c_g = \sqrt{gH_0}$ с точностью до численного множителя порядка единицы совпадает со скоростью звука $c_s = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ (γ – отношение теплоемкостей, см. Лекцию 6), которая и должна была изначально участвовать в определении масштаба L_0. Для земной атмосферы, например, $p_0 \approx 1$ атм., $\rho_0 \approx 1,3$ кг/м^3 и эффективная высота ее баротропной модели $H_0 \approx 8$ км, а скорость звука $c_s \approx 280$ м/с.

Подробный вывод уравнения Обухова-Чарни движения баротропной атмосферы можно найти в любом из учебников, цитируемых в библиографии к лекциям. Однако я рекомендую читателю при случае обратиться к первоисточникам (Charney, 1948) и (Обухов, 1949), знакомство с которыми не только полезно, но и доставит эстетическое удовольствие проследить и сравнить ход рассуждений двух классиков.

Для бароклинной жидкости, в которой термодинамические величины связаны лишь соотношением Менделеева-Клайперона ($p = \rho RT$), упомянутая процедура невозможна. В противном случае это означало бы потерю так называемой доступной потенциальной энергии жидкости (т.е. той части внутренней энергии, аккумулированной в жидкости за счет неравномерного распределения температур, которая способна преобразовываться в кинетическую энергию крупномасштабных течений), локальной мерой которой

как раз и служит угол между изобарами и изотермами. Проблема описания бароклинных геофизических течений обсуждается в Лекции 9.

3. Фундаментальные инварианты движения. Одним из критериев корректности редукции гидродинамических уравнений служит, как уже упоминалось выше, существование первых интегралов движения, отвечающих фундаментальным законам сохранения. Нетрудно показать (см. комментарий к Упражнению 1), что уравнение Обухова-Чарни удовлетворяет такому критерию, т.е. имеет следующие интегральные инварианты движения:

$$\frac{1}{2}\iint \left[(\nabla\psi)^2 + L_0^{-2}\psi^2\right] dxdy = const, \tag{10}$$

который соответствует закону сохранения энергии, причем первое слагаемое подынтегрального выражения (10) – это плотность кинетической энергии жидкости, а второе слагаемое – плотность ее потенциальной энергии;

$$\iint \left(\triangle\psi - L_0^{-2}\psi\right) dxdy = const, \tag{11}$$

означающий неизменность суммарной потенциальной завихренности жидкости;

$$\iint \psi dxdy = const, \tag{12}$$

выражающий закон сохранения массы;

$$\iint \left(\mathbf{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) dxdy = \mathbf{const}, \tag{13}$$

соответствующий сохранению суммарного импульса среды.

4. Волны Россби. Соотношения (6.1) и (6.2), использованные при выводе уравнения Обухова-Чарни, служат своеобразным фильтром, который вылавливает быстрые звуковые и гравитационные волны, практически не влияющие на развитие глобальных процессов, но существенно затрудняющие "охоту на крупного зверя". Чтобы явно ощутить это, рассмотрим задачу о малых колебаниях вращающейся жидкости в мелководном приближении. В полной постановке эта задача сводится к решению приливного уравнения Лапласа, детальное исследование которого можно найти, например, в книге Л.А. Дикого (Дикий, 1969).

Линеаризованные относительно состояния покоя (во вращающейся системе отсчета) уравнения (6.21), (6.22) теории мелкой воды записываются в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + f_0 \left(\mathbf{k} \times \mathbf{v}\right) = -g\nabla h, \tag{14}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H_0 \mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \tag{15}$$

где ради простоты параметр Кориолиса предполагается постоянным, равным f_0, а глубина жидкости $H\left(x,y,t\right) = H_0 + h\left(x,y,t\right)$.

Вместо (14), (15) удобнее рассматривать систему уравнений относительно $\Omega_z = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ и h:

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t} = 0, \quad \tilde{\Omega} \doteq \Omega_z - f_0 \frac{h}{H_0}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + H_0 f_0 \Omega_z = g H_0 \triangle h. \tag{17}$$

Используя известную вам формулу для $\mathrm{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, уравнение (16) легко получить, исключая $\mathrm{div}\mathbf{v}$ из (15) и уравнения вихря, найденного путем применения оператора rot_z к (14). Для вывода (17) подействуйте на (14) оператором div, а уравнение (15) продифференцируйте по времени и вновь исключите $\mathrm{div}\mathbf{v}$.

По существу, $\tilde{\Omega}$ можно трактовать как потенциальный вихрь (ср. с формулами (4), (5)) линейной задачи (14), (15), который в рассматриваемом случае становится интегральным инвариантом. Из (16), (17) немедленно следует существование двух типов решений линейной задачи:

а) Движения, для которых потенциальный вихрь $\tilde{\Omega} = 0$, т.е. $\Omega_z = f_0 h/H_0$. Это дает телеграфное уравнение для h:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + f_0^2 h = c_g^2 \triangle h, \quad c_g = \sqrt{g H_0}, \tag{18}$$

описывающее распространение во вращающейся среде быстрых гравитационно-гироскопических волн с дисперсионным соотношением (сделайте в (18) подстановку $h \propto \exp\left[i\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t\right)\right]$, $\mathbf{k} = \left(k_x, k_y\right)$, $\mathbf{r} = \left(x,y\right)$, i – мнимая единица):

$$\omega^2 = f^2 + k^2 c_g^2, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2. \tag{19}$$

Их групповая скорость

$$C \doteq \frac{d\omega}{dk} = \frac{c_g}{\sqrt{1+(f/kc_g)^2}} \tag{20}$$

в земных условиях уже при длине волны $L = 2\pi/k = 1500$ км практически совпадает с $c_g \approx 280$ м/с.

Заметим, что в рамках линейной задачи волновые движения Ω, $h_0 \propto \exp(-i\omega t)$ возможны только при $\tilde{\Omega} \equiv 0$, что следует из подстановки $\Omega \propto \exp(-i\omega t)$ в (16), которая дает $i\omega\tilde{\Omega} \equiv 0$.

б) Движения, у которых $\tilde{\Omega} \neq 0$, т.е. в силу (16) стационарные решения. Их поле скорости удовлетворяет соотношению геострофического ветра и определяется из уравнений

$$\Delta\psi - L_0^{-2}\psi = \tilde{\Omega}_0(x,y), \tag{21}$$

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{22}$$

где $\psi = gh/f_0$ и $\tilde{\Omega}_0(x,y)$ – начальное поле потенциального вихря.

В нелинейной постановке задачи случаю б) соответствует уравнение Обухова-Чарни (6) с нулевым бета-эффектом ($\beta = \gamma = 0$). Если предположить бета-эффект отличным от нуля, полагая, например, $\gamma = 0$ и $\beta = const > 0$ (этот случай называется приближением бета-плоскости, которое получается из (8) при $f = f_0 + \beta y$), то непосредственной подстановкой в (6) легко убедиться, что функции

$$\psi_{kl} = A\exp\{i(kx + ly - \omega t)\}, \tag{23}$$

(A – произвольная константа, k и l – продольное и поперечное волновые числа соответственно) *являются точными частными решениями уравнения Обухова-Чарни, описывающими диспергирующие волны, распространяющиеся на запад (т.е. в направлении, противоположном вращению жидкости в целом) с фазовой скоростью*

$$c_R = \frac{\omega}{k} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2 + L_0^{-2}}. \tag{24}$$

Волновые решения с таким дисперсионным соотношением называют волнами Россби (Rossby, 1939), а иногда, применительно к сферической Земле, волнами Россби-Гаурвица (B. Haurwits), в этом

случае они выражаются через сферические функции, см. Комментарий к Упражнению 2. Для оценки величины их фазовой скорости уместно напомнить, что бета-эффект по определению имеет порядок ε, т.е. $L/R = O(\varepsilon)$, где L – характерный размер течения и R – характерный линейный масштаб, на котором происходит заметное изменение параметра Кориолиса f. Поэтому

$$|c_R| = \frac{f}{R}\frac{L_0^2 L^2}{L^2 + L_0^2} \propto \frac{1}{2} f \frac{L_0^2}{R} = \frac{1}{2} f \frac{\sqrt{gH_o}}{f}\frac{L_0}{R} = \frac{1}{2} c_g \frac{L_0}{R} = c_g O(\varepsilon), \quad (25)$$

поскольку $L = O(L_0)$. Отсюда следует, что стационарным решениям линейной задачи с отличным от нуля $\tilde{\Omega}$ в нелинейном случае соответствуют медленные процессы, скорость распространения которых много меньше скорости распространения гравитационных волн, не описываемых уравнением (6).

При изучении взаимодействия волн Россби (см., например, Longuet-Higgins, Gill, 1967) их удобно делить на "короткие" планетарные волны, для которых $L < L_0$ $\left(L^{-1} \doteq \sqrt{k^2 + l^2}\right)$ и "длинные" планетарные волны ($L > L_0$). Согласно (10) плотности кинетической и потенциальной энергий волны Россби (23) равны соответственно $A^2/4L^2$ и $A^2/4L_0^2$. Поэтому в коротких планетарных волнах преобладает кинетическая энергия, тогда как в длинных волнах энергия сосредоточена в основном в потенциальной составляющей, мерой которой служит отклонение свободной поверхности жидкости от равновесного уровня.

Волны Россби, или планетарные волны, как нередко их называют, – это типичные представители геофизических течений, не имеющие аналогов в не вращающейся жидкости. Они составляют важный элемент общей циркуляции океана и атмосферы, оказывающий существенное влияние на характеристики макротурбулентности и неустойчивости глобальных движений. Уместно упомянуть в связи с этим о так называемых солитонах Россби, принадлежащих семейству волн Россби, но не охватываемых уравнением Обухова-Чарни, поскольку их типичный размер превосходит L_0 по порядку величины. Их роль важна, по-видимому, в процессах циклогенеза в атмосферах больших планет, радиус которых заметно превышает масштаб Россби-Обухова. Этому вопросу посвящена статья М.В. Незлина (1986), в которой, в частности, подробно излагаются методы и результаты лабораторного моделирования таких вихревых

образований и приводятся сопоставление с натурными наблюдениями.

Естественным "водоразделом" между солитонами Россби и рассматриваемыми здесь волнами и вихревыми структурами служит, как уже было отмечено, масштаб L_0. Дело в том, что когда масштаб течения превосходит L_0 по порядку величины, оценка (3) становится несправедливой. (Вспомните отмеченную выше тенденцию: чем длиннее волна Россби, тем больше отклонение h_0 свободной поверхности от равновесного уровня.) Это приводит к необходимости учитывать в (4) следующие члены разложения, что в свою очередь приводит к появлению в приближенном уравнении сохранения потенциального вихря, обобщающем уравнение Обухова-Чарни, дополнительного нелинейного члена, связанного с более строгим учетом "горизонтальной сжимаемости" за счет изменения высоты свободной поверхности. Эта нелинейность способна скомпенсировать диспергирующее влияние бета-эффекта на волновой пакет. В результате в жидкости могут сформироваться уединенные антициклонические вихри – солитоны Россби (в циклонических вихрях компенсация дисперсии нелинейностью невозможна, вследствие чего возникает наблюдаемая на таких масштабах циклон-антициклонная асимметрия).

С точки зрения рассматриваемых ниже проблем это ограничение области применимости уравнений динамической метеорологии непринципиально, зато позволяет избежать дополнительных технических трудностей.

Упражнения

1. Докажите, что выражения, задаваемые левыми частями равенств (10-(13), действительно являются инвариантами уравнения Обухова-Чарни, полагая в (6) ради простоты $\beta = const \neq 0$, $\gamma = 0$ (приближение бета-плоскости, широко применяемое в динамической метеорологии).

Наводящие соображения. Выбирая в качестве единиц длины и времени соответственно L_0 и $(\beta L_0)^{-1}$, покажите, что в указанных предположениях уравнение (6) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\psi - \psi\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\Delta\psi - \psi\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\Delta\psi\right), \qquad (26)$$

где правая часть (26) имеет дивергентную форму. Проинтегрируй-

те теперь (26) по некоторой конечной области S, занятой жидкостью, и примените к правой части формулу Остроградского-Гаусса

$$\iint\limits_S \mathrm{div}\mathbf{A}dxdy = \int\limits_{\partial S} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dl$$

($\mathbf{n}$ – внешняя единичная нормаль к границе ∂S), а затем устремите S к бесконечности с учетом регулярного поведения функции ψ. В результате Вы получите инвариантность суммарной потенциальной завихренности (левая часть (11)).

Уравнение (26) можно переписать в другом виде:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\triangle\psi + \psi\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\triangle\psi\right), \qquad (26a)$$

где правая часть снова имеет дивергентную форму. Далее по той же схеме следует доказательство формулы (12).

После дифференцирования (26a) по x или по y правая часть сохраняет дивергентную форму. Отсюда следует инвариантность суммарного импульса (13).

И наконец, покажите, что результат умножения (26) на ψ можно представить в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \psi^2\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} - \psi\frac{\partial\psi}{\partial y}\triangle\psi + \frac{1}{2}\psi^2\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t} + \psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\triangle\psi\right). \qquad (27)$$

Далее очевидным образом следует доказательство формулы (10).

2. Покажите, что планетарные волны на сферической поверхности в двумерной несжимаемой среде ($L_0^{-1} = 0$) распространяются на запад с угловой скоростью

$$\omega_R = \frac{2\Omega_0}{n\,(n+1)}, \qquad (28)$$

где n – произвольное положительное целое число (см. Лонге-Хиггинс, Гилл (1970) и нижеследующий *Комментарий*).

Комментарий к Упражнению 2. На сферической поверхности радиуса $a = 1$ (в данном случае длину удобно измерять радиусом

сферы) в сферических координатах уравнение Обухова-Чарни записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\psi - L_{0S}^{-1}\psi\right) + \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\triangle\psi}{\partial\lambda} - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\triangle\psi}{\partial\theta}\right) + 2\Omega_0\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = 0, \quad (29)$$

$$v_\theta = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, \quad v_\lambda = \frac{\partial\psi}{\partial\theta}. \quad (30)$$

Здесь $\theta = \frac{1}{2}\pi - \varphi$ – дополнение к широте φ и λ – долгота, L_{0S} – параметр Россби-Обухова, измеренный радиусом сферы,

$$\triangle\psi = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}.$$

Напомним, что для течений на сфере параметр Кориолиса $f = 2\Omega_0\cos\theta$, а локальные декартовы координаты в окрестности точки наблюдения связаны со сферическими координатами соотношениями $dx = a\sin\theta$, $dy = -ad\vartheta$. Поэтому линейный член $\beta\partial\psi/\partial x$ в уравнении Обухова-Чарни сохраняет знак и заменяется на $2\Omega_0\partial\psi/\partial\lambda$.

Если величина L_{0S} по порядку величины меньше или равна единице (эффект двумерной сжимаемости среды не мал, как в земной атмосфере, например), планетарные волны приближенно описываются сфероидальными волновыми функциями (см. литературу, цитируемую в Longuet-Higgins, Gill, 1967). В противном случае (в океане, например) в уравнении Обухова-Чарни величиной $L_{0S}^{-2}\psi$ можно пренебречь по сравнению с $\Delta\psi$. Тогда *сферическим аналогом плоской волны Россби является сферическая гармоника*

$$\psi = AY_n^m(\theta,\lambda) = AP_n^m(\cos\theta)\cos(m\lambda + \omega t), \quad (31)$$

где m и n – целые числа, связанные с волновыми числами соотношениями $m = ak\sin\theta$, $n = a\sqrt{k^2+l^2}$, откуда, в частности, следует, что m – это число длин волн, укладывающихся на широтном круге; $P_n^m(z)$ – присоединенная функция Лежандра первого рода степени n порядка m.

Покажите, что при $\omega = \omega_R$ (формула (28)) *функция (31) удовлетворяет линейному уравнению*

$$\frac{\partial\triangle\psi}{\partial t} + 2\Omega_0\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = 0. \quad (32)$$

Точное решение нелинейного уравнения (29) при $L_{0S}^{-1} = 0$, описывающее распространение волны на запад, выражается через сферическую функцию степени n

$$\psi(\theta, \lambda, t) = Y_n(\theta, \lambda + \omega t), \tag{33}$$

$$Y_n(\theta, \lambda) = A_0 P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} A_n^m P_n^m(\cos\theta) \cos(m\lambda + \lambda_n^m), \tag{34}$$

где A_0, A_n^m, λ_n^m – константы.

Покажите, что *функция* (33) *является точным решением нелинейного уравнения вихря только при* $\omega = \omega_R$.

Подсказка. Сферическая функция (34) есть собственная функция оператора Лапласа, т.е. $\Delta Y_n = -n(n+1) Y_n$.

Литература

1. Монин А.С. *Прогноз погоды как задача физики,* М.: Наука, 1970.

2. Педлоски Дж. *Геофизическая гидродинамика*, М.: Мир, 1984.

3. Гилл А. *Динамика атмосферы и океана*, М.: Мир, 1986

4. Salmon R. *Lectures on Geophysical Fluid Dynamics*, NY, Oxford, Oxford University Press, 1998.

5. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика*, М.: ГИТТЛ, 1955.

Для любознательного читателя:

5. Charney J.G. *On the scale of atmospheric motion*, Geophys. Publ. V.17, N 2, 1948.

6. Обухов А.М. *К вопросу о геострофическом ветре,* в кн.: Обухов А.М. *Турбулентность и динамика атмосферы*, Л.: Гидрометеоиздат, 1988.

7. Дикий Л.А. *Теория колебаний земной атмосферы*, Л.: Гидрометеоиздат, 1969.

8. Лонге-Хиггинс М.С., Гилл А.Э. *Резонансное взаимодействие планетарных волн*, в сб.: *Нелинейная теория распространения волн* под ред. Баренблатта Г.И. М.:Мир 1970.

9. Незлин М.В. *Солитоны Россби*, УФН, Т. 150, 1, 1986.

Лекция 8

Резонансное взаимодействие волн Россби, сингулярные вихри Гельмгольца и Обухова, уравнения Кирхгоффа

1. Групповая скорость волн Россби. Из теории волновых процессов известно, что энергия волн любой природы распространяется не с фазовой, а с групповой скоростью

$$\mathbf{C}_{gr} = \nabla_{\mathbf{k}}\omega, \quad \omega = \omega(\mathbf{k}), \tag{1}$$

где $\omega(\mathbf{k})$ – дисперсионное соотношение для волн рассматриваемой природы, а $\nabla_{\mathbf{k}}$ – операция градиента в k-пространстве – пространстве волновых чисел. Волны, фазовая скорость которых не совпадает с групповой, называются дисперсионными. Таковыми являются, например, гравитационно-гироскопические волны с дисперсионным соотношением (7.20), согласно которому они изотропно распространяются в пространстве.

Иначе обстоит дело с планетарными волнами, потому что из дисперсионного соотношения

$$c_R = \frac{\omega}{k} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2 + L_0^{-2}} \tag{2}$$

следует, что

$$C_{RX} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = c_R\left(1 - \frac{2k^2}{k^2 + l^2 + L_0^{-2}}\right), \tag{3}$$

$$C_{RY} = \frac{\partial\omega}{\partial l} = -c_R\frac{2kl}{k^2 + l^2 + L_0^{-2}}, \tag{4}$$

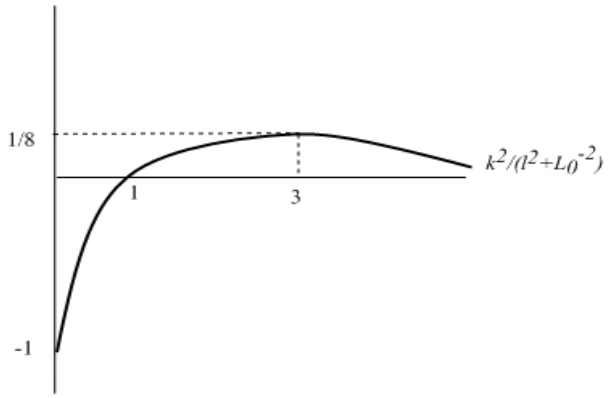


Рис. 1. Групповая скорость волн Россби в зональном направлении.

где C_{RX} и C_{RY} - компоненты групповой скорости $\mathbf{C}_R$.

Таким образом, в отличие о фазовой скорости, направленной всегда на запад, групповая скорость имеет обе компоненты, отличные от нуля, причем ее меридиональная составляющая всегда направлена на север, тогда как зональная составляющая меняет знак при $k^2/\left(l^2+L_0^{-2}\right)=1$ (рис. 1). Важно подчеркнуть, что в отличие от энергии, которая может распространяться волнами Россби как в западном, так и в восточном направлении, завихренность

$$\triangle\psi \sim \exp\left\{i\left(kx+ly-\omega t\right)\right\}$$

переносится ими только на запад. т.е. в направлении, противоположном общему вращению.

2. Резонансное взаимодействие планетарных волн. Важным элементом общей циркуляции атмосферы является резонансное взаимодействие планетарных волн, которое состоит в следующем. Запишем уравнение Обухова-Чарни на бета-плоскости в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\psi-L_0^{-2}\psi\right)+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=[\triangle\psi,\psi] \tag{5}$$

и пусть в начальный момент течение описывается двумя волнами Россби

$$\psi_1 = a_1 \exp\left\{i\left(\mathbf{k}_1\mathbf{x} - \omega_1 t\right)\right\}, \quad \psi_2 = a_2 \exp\left\{i\left(\mathbf{k}_2\mathbf{x} - \omega_2 t\right)\right\},$$

где $\mathbf{k}_1 = k_1\mathbf{i} + l_1\mathbf{j}$, $\mathbf{k}_2 = k_2\mathbf{i} + l_2\mathbf{j}$ и каждая пара $(\mathbf{k}_i,\omega_i)$ $(i = 1, 2)$ удовлетворяет соотношению (2).

Поскольку каждая из волн обращает якобиан в нуль, то правая часть (5) пропорциональна величине $a_1 a_2 \exp\left\{i\left[\left(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2\right)\mathbf{x} - \left(\omega_1 + \omega_2\right)t\right]\right\}$, и ее можно рассматривать в качестве периодической вынуждающей силы, действующей на линейную систему. Отклик на эту силу будет мал до тех пор, пока нет резонанса, т.е. пока волновой вектор и частота вынуждающей силы не совпадут с волновым вектором $\mathbf{k}_3$ и частотой ω_3 какой-либо собственной волны линейного оператора левой части уравнения (5). Таким образом, *условия резонансного взаимодействия трех волн выражаются равенствами*

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad \omega_3 = \omega_1 + \omega_2,$$

причем каждая пара $(\mathbf{k}_i,\omega_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ *удовлетворяет соотношению* (2). Учитывая , что нас интересует лишь вещественная часть $\exp\left\{i\left(\mathbf{kx} - \omega t\right)\right\}$, которая есть четная функция $\mathbf{k}$ и ω, условия резонансного взаимодействия можно переписать в виде

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0, \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0. \tag{6}$$

Для отыскания уравнений резонансного взаимодействия трех волн, следуя Лонге-Хиггинсу и Гиллу (M.S. Longuet-Higgins, A.E. Gill, 1970), поступим следующим образом. Выбирая единицы измерения длины и времени так, чтобы обе величины L_0^{-2} и β были равны единице, запишем уравнение (5) в безразмерной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\psi - \psi\right) + \frac{\partial\psi}{\partial x} = \left[\triangle\psi, \psi\right], \tag{7}$$

не вводя новых обозначений для безразмерных переменных. Решение уравнения (7) будем искать в виде

$$\psi = a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos\theta_2 + a_3 \cos\theta_3, \tag{8}$$

где a_n $(n = 1, 2, 3)$ – медленно меняющиеся функции времени, или функции медленного времени, а

$$\theta_n = k_n x + l_n y - \omega_n t \ + \varphi_n \ \ (n = 1, 2, 3)\,, \tag{9}$$

причем безразмерные волновые числа и частоты удовлетворяют дисперсионным соотношениям

$$\omega_n \left(k_n^2 + l_n^2 + 1\right) + k_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3) \tag{10}$$

и условиям резонанса

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0, \quad l_1 + l_2 + l_3 = 0, \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0, \tag{11}$$

а начальные фазы связаны соотношением

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0. \tag{12}$$

Подстановка (8) в (7) дает

$$\begin{aligned}\left(\varkappa_1^2 + 1\right) \dot{a_1} \cos\theta_1 + \left(\varkappa_2^2 + 1\right) \dot{a_2} \cos\theta_2 + \left(\varkappa_3^2 + 1\right) \dot{a_3} \cos\theta_3 = \\ = C_1 a_2 a_3 \left[\cos\left(\theta_2 + \theta_3\right) - \cos\left(\theta_2 - \theta_3\right)\right] + \\ + C_2 a_3 a_1 \left[\cos\left(\theta_3 + \theta_1\right) - \cos\left(\theta_3 - \theta_1\right)\right] + \\ + C_3 a_1 a_2 \left[\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) - \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right],\end{aligned} \tag{13}$$

где $\varkappa_n^2 = k_n^2 + l_n^2$ $(n = 1, 2, 3)$, коэффициент взаимодействия

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(\varkappa_2^2 - \varkappa_3^2\right)\left(\mathbf{z} \cdot \mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3\right), \tag{14}$$

$\mathbf{z}$ – единичный вертикальный орт, а остальные коэффициенты получаются круговой перестановкой индексов. С учетом условий резонанса (11)

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3 = \mathbf{z} \cdot \mathbf{k}_3 \times \mathbf{k}_1 = \mathbf{z} \cdot \mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2 = 2\Gamma.$$

Тогда в силу (12) три члена в левой части (13) уравниваются тремя членами в правой части при условии, что

$$\left(1 + \varkappa_1^2\right) \dot{a_1} = \Gamma \left(\varkappa_2^2 - \varkappa_3^2\right) a_2 a_3,$$

$$\left(1+\varkappa_2^2\right)\dot{a}_2 = \Gamma\left(\varkappa_3^2-\varkappa_1^2\right)a_3a_1, \tag{15}$$

$$\left(1+\varkappa_3^2\right)\dot{a}_3 = \Gamma\left(\varkappa_1^2-\varkappa_2^2\right)a_1a_2.$$

Остальные члены в правой части (13) генерируют нерезонансные колебания, а потому можно ожидать, что отклик на них будет мал. Сопоставление амплитуд нерезонансных волн, генерируемых правой частью (13), с амплитудами резонансных волн показывает (выполните Упражнение 4) , что это действительно так, если нелинейность слабая, т.е.

$$\varkappa^2 a \ll \omega \tag{16}$$

($\varkappa$, a и ω – характерные значения волнового числа, амплитуды и частоты волн, участвующих в резонансном взаимодействии). В этом случае нелинейные члены в (7) малы по сравнению с линейными и уравнения (15) можно рассматривать как результат разложения по малому параметру $\varepsilon = \varkappa^2 a/\omega$, который называется показателем взаимодействия. Малость его означает, что $\varkappa a \ll \omega/\varkappa$, т.е. малость скорости жидкой частицы по сравнению с фазовой скоростью волны Россби. Другая, эквивалентная, трактовка полученного приближения состоит в том, что его можно рассматривать и как результат усреднения уравнения (13) по "быстрому" времени в предположении, что амплитуды волн есть функции медленного времени.

Система (15) с точностью до замены времени $t \longrightarrow \tau = \Gamma t$ совпадает с уравнениями Эйлера движения классического гироскопа, тензор моментов инерции которого задается диагональной матрицей (см. Ландау, Лифщиц, *Механика*, 1973)

$$I = \begin{pmatrix} 1+\varkappa_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varkappa_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varkappa_3^2 \end{pmatrix},$$

а роль его угловых скоростей вращения и кинетических моментов играют a_i $(i=1,2,3)$ и $I_i = \left(1+\varkappa_i^2\right)a_i$ $(i=1,2,3)$ соответственно.

Уравнения Эйлера, как известно, обладают двумя квадратичными инвариантами

$$E = \frac{1}{2}\left[\left(1+\varkappa_1^2\right)a_1^2 + \left(1+\varkappa_2^2\right)a_2^2 + \left(1+\varkappa_3^2\right)a_3^2\right], \tag{18}$$

$$\Pi^2 = \left(1+\varkappa_1^2\right)^2 a_1^2 + \left(1+\varkappa_2^2\right)^2 a_2^2 + \left(1+\varkappa_3^2\right)^2 a_3^2, \qquad (19)$$

соответствующими кинетической энергии гироскопа и квадрату его кинетического момента. В нашем же случае (18) отвечает полной, т.е. кинетической и потенциальной, энергии

$$\frac{1}{2}\iint \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \psi^2\right] dxdy, \qquad (20)$$

а (19) – суммарному квадрату потенциальной завихренности

$$\iint (\triangle\psi - \psi)^2\, dxdy \qquad (21)$$

течения, управляемого уравнением (7). (*Почему суммарный квадрат завихренности есть инвариант?*)

3. Сингулярные вихрь Гельмгольца и геострофический вихрь Обухова. В классической гидродинамике строго двумерные вихревые течения несжимаемой жидкости описываются функцией тока ψ, в терминах которой уравнение вихря записывается в виде (ср. с (5))

$$\frac{\partial\triangle\psi}{\partial t} + [\psi, \triangle\psi] = 0. \qquad (22)$$

Компоненты скорости в этом случае выражаются равенствами

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y},\ v = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad (23)$$

автоматически обеспечивающими бездивергентность поля скорости, завихренность которого $\Omega = \mathrm{rot}_z\mathbf{v} = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y = \triangle\psi$. Поэтому по известному полю завихренности поле скорости двумерного течения восстанавливается путем решения уравнения Пуассона

$$\triangle\psi = \Omega(x, y, t), \qquad (24)$$

функция Грина которого для неограниченной области интегрирования и регулярных на бесконечности граничных условий задается в виде:

$$\psi_H = \kappa \ln r, \quad \triangle\psi_H = 2\pi\kappa\delta(\mathbf{r}). \qquad (25)$$

Здесь $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ – радиус-вектор точки наблюдения в плоскости движения, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\delta(\mathbf{r})$ – двумерная дельта-функция Дирака.

Другими словами, функция Грина (25) описывает двумерное течение жидкости, индуцированное сингулярной вихревой трубкой интенсивности $2\pi\kappa$, завихренность которой сосредоточена на прямой линии бесконечной протяженности, ортогональной плоскости движения и проходящей через начало координат. Указанную функцию Грина называют *сингулярным вихрем Гельмгольца*, который впервые ввел это понятие в гидродинамику.

Сингулярную вихревую трубку иногда называют вихревой нитью, которую, учитывая двумерный характер движения, можно отождествить с точкой на плоскости и приписать этой точке характеристику κ. Величина κ называется напряженностью сингулярного вихря и определяется следующим образом. Для инфинитезимальной вихревой трубки $\kappa = \Omega\pi a^2/2\pi = \frac{1}{2}\Omega a^2$, где a – радиус трубки, а $\Omega\pi a^2$ – ее интенсивность, которая по теореме Кельвина есть инвариант движения. Устремляя теперь a к нулю и Ω к бесконечности так, чтобы произведение Ωa^2 оставалось неизменным, получаем напряженность вихревой нити. При наличии в жидкости N таких вихревых нитей каждая из них движется вместе с жидкостью со скоростью, которую индуцируют в точке ее расположения остальные $N-1$ сингулярных вихрей. Принимая во внимание, что указанная скорость равна векторной сумме скоростей, наведенных $N-1$ вихрями в рассматриваемой точке, нетрудно вывести уравнения движения N-вихревой системы. В самом деле, рассмотрим вначале два сингулярных вихря с напряженностями κ_1 и κ_2, которые расположены в точках $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(t) = x_1(t)\,\mathbf{i} + y_1(t)\,\mathbf{j}$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2(t) = x_2(t)\,\mathbf{i} + y_2(t)\,\mathbf{j}$ и индуцируют поля скорости, описываемые функциями тока $\psi_1 = \kappa_1 \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ и $\psi_2 = \kappa_2 \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|$ соответственно. Прямым вычислением нетрудно проверить, что движение первого вихря в поле скорости второго вихря описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} u_1 \doteq \dot{x_1}(t) &= -\frac{\partial\psi_2}{\partial y}(\mathbf{r} = \mathbf{r}_1) = -\kappa_2 \frac{\partial \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}{\partial y}(\mathbf{r} = \mathbf{r}_1) \\ &= -\frac{1}{\kappa_1}\left(\kappa_1\kappa_2 \frac{\partial \ln|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{\partial y_1}\right), \\ v_1 \doteq \dot{y_1}(t) &= \frac{\partial\psi_2}{\partial x}(\mathbf{r} = \mathbf{r}_1) = \kappa_2 \frac{\partial \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}{\partial x}(\mathbf{r} = \mathbf{r}_1) \\ &= \frac{1}{\kappa_1}\left(\kappa_1\kappa_2 \frac{\partial \ln|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{\partial x_1}\right). \end{aligned}$$

Аналогично

$$u_2 \doteq \dot{x_2}(t) = -\frac{1}{\kappa_2}\left(\kappa_1\kappa_2\frac{\partial \ln|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}{\partial y_2}\right),$$

$$v_2 \doteq \dot{y_2}(t) = \frac{1}{\kappa_2}\left(\kappa_1\kappa_2\frac{\partial \ln|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}{\partial x_2}\right).$$

В терминах функции

$$\Psi = \kappa_1\kappa_2 \ln|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|$$

эти уравнения записываются в гамильтоновом виде

$$\dot{x_i} = -\frac{1}{\kappa_i}\frac{\partial\Psi}{\partial y_i}, \quad \dot{y_i} = \frac{1}{\kappa_i}\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}, \tag{26}$$

где $i = 1, 2$.

Теперь легко сообразить, что в случае N вихрей функция Гамильтона имеет вид

$$\Psi = \sum_{i\neq j}\kappa_i\kappa_j \ln|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|, \tag{27}$$

причем в уравнениях (26) их движения и в выражении (27) индексы i и j принимают значения от 1 до N.

Система (26), (27) называется *уравнениями Кирхгоффа* (G.R. Kirchhoff, 1824-1887) *движения N сингулярных вихрей.* Уместно отметить, что сам Кирхгофф записал уравнения в терминах комплексных величин, введя комплексные координаты $z_n = x_n + iy_n$ (i – мнимая единица) и комплексный гамильтониан

$$H_K = i\sum_{m\neq n}\kappa_m\kappa_n \ln(z_n - z_m) \quad (\Psi = \operatorname{Im} H_K). \tag{28}$$

Тогда уравнения движения принимают вид

$$\dot{z^*} = \dot{x_n} - \dot{y_n} = \frac{1}{\kappa_n}\frac{\partial H_K}{\partial z_n}, \tag{26a}$$

где звездочкой обозначено комплексное сопряжение.

Легко видеть, что в силу уравнений Кирхгоффа выполняются следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{N}\kappa_i\dot{x_i} = 0, \ \sum_{i=1}^{N}\kappa_i\dot{y_i} = 0, \ \frac{d\Psi}{dt} = 0, \tag{29}$$

т.е. "центр тяжести" – центр завихренности системы

$$\mathbf{r}_0 = \sum_{i=1}^{N} \kappa_i \mathbf{r}_i / \sum_{i=1}^{N} \kappa_i \tag{30}$$

при ее движении остается на месте, а гамильтониан Ψ есть первый интеграл движения.

Интерес представляет уже система из двух вихрей (рис. 2), которая, как мы увидим ниже, имеет и геофизическое применение. В частности, вихревая пара ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, т.е. напряженности вихрей одинаковы по знаку и величине) вращается вокруг своего центра завихренности с постоянной угловой скоростью (рис. 2а)

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{2\kappa}{L^2}\mathbf{z}, \tag{31}$$

где L – неизменное (*почему?*) в процессе движения расстояние между вихрями, а $\mathbf{z}$ – единичный вектор в направлении оси z. Отсюда видно, что пара циклонов, завихренность которых положительная, вращается против часовой стрелки, а пара антициклонов – по часовой стрелке.

Вихревой диполь ($\kappa_1 = \kappa = -\kappa_2$, т.е. напряженности вихрей одинаковы по модулю, но противоположны по знакам) движется поступательно с постоянной скоростью

$$\mathbf{V} = \frac{\kappa}{L^2}\mathbf{L} \times \mathbf{z}, \tag{32}$$

где $\mathbf{L} = \mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-$ (рис. 2б)

В геофизической гидродинамике двумерное поле геострофического ветра восстанавливается не по завихренности, а по полю потенциальной завихренности, которая в квазигеострофическом приближении за вычетом параметра Кориолиса равна $\widetilde{\Omega} = \triangle\psi - L_0^{-2}\psi$. *Поэтому геострофический сингулярный вихрь,* впервые введенный Обуховым*, определяется как функция Грина для уравнения*

$$\triangle\psi - L_0^{-2}\psi = \widetilde{\Omega}\,(x, y, t) \tag{33}$$

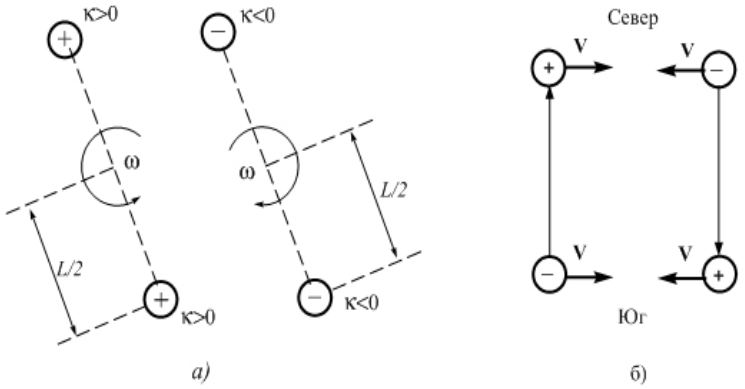


Рис. 2. Системы двух вихрей: а) пара сингулярных вихрей одинаковой интенсивности вращаются относительно центра с угловой скоростью $\omega = 2\kappa/L^2$; б) диполь, состоящий из циклона и антициклона, движется со скоростью $V = \kappa/L$ в зональном направлении.

с регулярными на бесконечности граничными условиями. Такое фундаментальное решение имеет вид

$$\psi_O = -\kappa K_0\left(r/L_0\right), \quad \triangle\psi_O - L_0^{-2}\psi_O = 2\pi\kappa\delta\left(\mathbf{r}\right). \tag{34}$$

Здесь $K_0\left(x\right)$ – функция Макдональда, которая при малых и больших значениях аргумента выражается следующими асимптотическими формулами:

$$K_0\left(r/L_0\right) \approx -\ln\left(r/L_0\right), \text{ при } r/L_0 \ll 1, \tag{35}$$

$$K_0\left(r/L_0\right) \approx -\frac{1}{2}\frac{\kappa}{\sqrt{2\pi r/L_0}}\exp\left(-\frac{r}{L_0}\right). \tag{36}$$

Движение N сингулярных геострофических вихрей, как нетрудно сообразить, также управляется уравнениями Кирхгоффа (26) (или (26a)) с той лишь разницей, что в выражении для гамильтониана (27) (или (28)) логарифмическая функция заменяется на функцию Макдональда, например

$$\Psi = \sum_{i\neq j}\kappa_i\kappa_j K_0\left(\frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{L_0}\right). \tag{37}$$

Принципиальное отличие геострофических вихревых нитей от вихрей Гельмгольца состоит в том, что первые – экранированы, т.е. согласно (36) имеют конечный радиус влияния L_0, за пределами круга которого они практически не взаимодействуют. Это накладывает определенную специфику на движение таких вихрей. Например, если в начальный момент времени совокупность вихрей можно разделить на кластеры, отдаленные друг от друга расстояниями, существенно превышающими L_0, то в пределах применимости невязких гидродинамических уравнений каждый такой кластер будет эволюционировать практически автономно. С другой стороны, на малых расстояниях геострофические сингулярные вихри практически не отличаются от вихрей Гельмгольца (см. (35)). Рассмотрим в связи с этим поведение геофизического вихревого диполя – циклон-антициклон. В Северном полушарии циклоническая циркуляция – вращение вокруг зоны пониженного давления — совпадает по направлению с вращением Земли и, следовательно, положительна. Завихренность антициклона – отрицательна. Представим себе, что такой диполь находится в зональном атмосферном течении, который направлен с запада на восток (помните, согласно метеорологическим сводкам погода, как правило, приходит с запада?). В характерной ситуации, когда циклон находится севернее антициклона, диполь согласно формуле (32) движется на восток, опережая зональный перенос. В противном случае – явление редкое – диполь движется против течения. При определенных условиях скорости зонального течения и перемещения диполя могут оказаться близкими по величине и противоположны по направлению. Тогда для наблюдателя, находящегося на земной поверхности, вихревой диполь почти неподвижен, а метеослужба длительное время не меняет краткосрочную сводку погоды. Это явление называется *блокингом,* с которым связывают установление в отдельных районах земного шара длительных засух летом и устойчивых морозов зимой (антициклон сопровождается ясной погодой). Не случайно поэтому, несмотря на всю условность применения теории геострофического вихревого диполя к описанию реальных атмосферных процессов, появление на синоптической карте пары циклон на юге – антициклон на севере служит для синоптика одним из предвестников длительной ясной погоды.

Вообще следует отметить, что теория сингулярных вихрей уже

более века привлекает внимание специалистов, включая таких выдающихся гидродинамиков как наш соотечественник Н.Е. Жуковский, Карман и др. Это связано, во-первых, с чистотой исходной постановки проблемы, строгостью и изяществом математических подходов, применяемых для решения конкретных задач, а во-вторых, со способностью такой теории объяснить ряд важных гидродинамических явлений, например поведение вихревых структур в следах за телами, обтекаемыми жидкостью (дорожка Кармана, срыв завихренности с кромки крыла, вихревой след за круглым цилиндром и т.п.) и особенности двумерной турбулентности, симулируемой большим числом сингулярных вихрей. В геофизической гидродинамике, в частности, на основе такого подхода делались попытки описать траектории торнадо и даже тропических циклонов. Достаточно полное представление о достигнутых в этой области результатах читатель может получить, ознакомившись с обзором (Aref et al., 1988). (см. Литературу).

Упражнения.

1. Какова фазовая скорость волны Россби, эволюционирующей на бета-плоскости при наличии зонального потока $\mathbf{u} = (U_0, 0)$, $U_0 = const$, и при каких значениях U_0 волна Россби неподвижна относительно Земли или распространяется на восток, если положить характерные масштаб изменения параметра Кориолиса и длину волны Россби равными $(5 \div 10) \cdot 10^3$ км и $3 \cdot 10^3$ км соответственно?

Ответ:

$$c_R = U_0 - \frac{\beta + U_0 L_0^{-2}}{k^2 + l^2 + L_0^{-2}},\ U_0 \geqslant 5 - 10\text{м/с}.$$

Подсказка: ищите решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\psi - L_0^{-2}\psi\right) + [\psi, \triangle\psi] + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$$

в виде

$$\psi = \Psi_0 + \varphi\,(x, y, t)\,,$$

где $\Psi_0 = -U_0 y$, $\varphi = A\exp\{i\,(kx + ly - \omega t)\}$.

2. Вычислите максимум и минимум зональной групповой скорости и значения k^2, при которых они достигаются.

Ответ:

$$\min C_{RX} = -\frac{\beta}{l^2 + L_0^{-2}} = c_R\,(k=0)\,,\ \text{при } k=0,$$

$$\max C_{RY} = \frac{\beta}{8\left(l^2 + L_0^{-2}\right)} = -\frac{1}{8}c_R\,(k=0)\,,\ \text{при } \frac{k^2}{l^2 + L_0^{-2}} = 3.$$

3. Слагаемое в правой части (13), пропорциональное $\cos(\theta_1 - \theta_3)$, индуцирует нерезонансную волну $a_1' \sin(\theta_1 - \theta_3)$. Покажите прямым вычислением, что

$$a_1' = \frac{C_1}{(k_2 - k_3) - (1 - \varkappa'^2)(\omega_2 - \omega_3)} a_2 a_3,$$

где $\varkappa' = |\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3|$, а C_1 задается формулой (14). На основе этой формулы убедитесь в том, что при выполнения условия (16) отношение $a_1'/a \ll 1$ как для коротких ($\varkappa \gg 1$) так и для длинных ($\varkappa \ll 1$) планетарных волн.

4. Используя теорему Эйлера о неустойчивости вращения твердого тела вокруг средней главной оси тензора инерции, сформулируйте условия, при которых волна Россби с амплитудой a_1 и волновым числом $\mathbf{k}_1$ распадается на две резонансные ей.

Ответ: $\varkappa_3 \gtrless \varkappa_1 \gtrless \varkappa_2$.

5. Опишите поведение двух вихрей с одинаковыми и "разноименными"интенсивностями, используя уравнения Кирхгоффа и их интегралы движения. Докажите формулы (31) и (32). Как изменится решения, если $|\kappa_1| \neq |\kappa_2|$? Что можно сказать о поведении N сингулярных вихрей одинаковой интенсивности, расположенных в начальный момент на вершинах правильного многогранника? (Стартуйте с трех вихрей.) Эта задача имеет практическое применение. Известно, что в природе и лабораторных экспериментах встречаются правильные вихревые образования с центрами завихренности, расположенными на окружности. Однако число вихрей больше семи практически не наблюдается. Это не случайно, поскольку доказано, что при $N > 7$ структура неустойчива.

6. Попробуйте, используя понятие сингулярного вихря, вычислить спиральность двух однократно сцепленных инфинитезимальных замкнутых вихревых трубок-нитей (см. рис. 3).

Ответ: В этом случае спиральность $H = \iiint \mathbf{u} \cdot rot\mathbf{u} d\mu = 2\Gamma_1\Gamma_2$, где $d\mu$ – элемент объема, $\Gamma_i = 2\pi\kappa_i$ $(i = 1, 2)$ – интенсивности нитей.

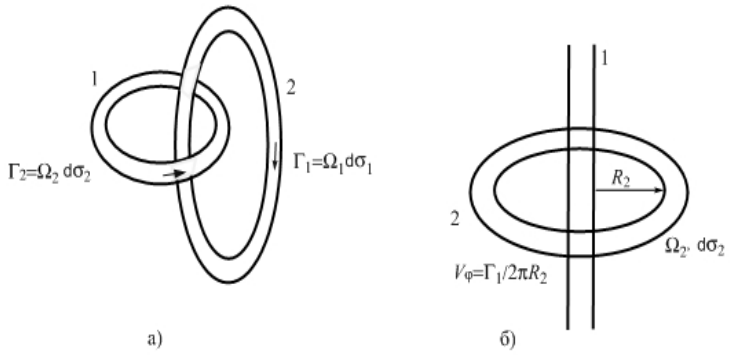


Рис. 3. Иллюстрация к вычислению спиральности двух однократно зацепленных вихревых нитей.

Решение. Спиральность, характеризующая заузленность, или степень зацепления линий завихренности, не должна меняться при гладкой деформации вихревых нитей. С помощью расширения и сжатия деформируем конфигурацию, изображенную на рис. 3а, таким образом, чтобы первая нить стала прямолинейной, т.е. замыкалась на бесконечности, а вторая окружала первую по окружности радиуса $r{=}R_2$, лежащей в плоскости, ортогональной линии 1 (рис.3б). Согласно (25) линия 1 создает в пространстве азимутальное поле скорости

$$v_\varphi = \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{\kappa_1}{r} = \frac{\Gamma_1}{2\pi r},$$

параллельное указанной плоскости. Завихренность вне нитей равна нулю, а $\Gamma_2 \doteq rot\mathbf{u}{\cdot}\delta\boldsymbol{\sigma}_2$, где $\delta\boldsymbol{\sigma}_2$ – площадь ориентированного поперечного сечения нити 2. Поэтому вклад конфигурации, изображенной на рис. 3 б, в интеграл H равен

$$\frac{\Gamma_1}{2\pi R_2} \cdot 2\pi\Gamma_2 R_2 = \Gamma_1\Gamma_2.$$

Но точно такой же вклад даст и конфигурация, в которой вихри обмениваются местами, ч.т.д.

Литература

1. Педлоски Дж. *Геофизическая гидродинамика*, М.: Мир, 1984.

2. Гилл А. *Динамика атмосферы и океана*, М.: Мир, 1986.

3. Salmon R. *Lectures on Geophysical Flud Dynamics*, NY, Oxford, Oxford University Press, 1998.

4. Лонге-Хиггинс М.С., Гилл А.Э. *Резонансное взаимодейсвие планетарных волн*, в сб.: *Нелинейная теория распространения волн* под ред. Баренблатта Г.И. М.: Мир 1970.

5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика*, М.: Наука, 1973.

6. Курганский М.В. *Введение в крупномасштабную динамику атмосферы*, С-П.: Гидрометеоиздат, 1993.

7. Milne-Thomson L.M. Theoretical hydrodynamics, NY, DOWER PUBLICATION,INC., 1996.

8. Aref H. et al. *Point vortex dynamics: recent results and open problems*, Fluid Dynamics R., V.3, P. 63, 1988.

Лекция 9

Уравнения квазигеострофического бароклинного движения

1.Равновесное состояние вращающейся бароклинной среды. В движущейся бароклинной среде, как уже упоминалось выше, изобарические и изопикнические поверхности, как правило, не совпадают. Напомню, что в случае несжимаемой бароклинной жидкости плотность и давление – величины независимые, а плотность бароклинного газа зависит не только от давления, но и еще от одной термодинамической величины, например от потенциальной температуры Θ, т.е. $\rho = \rho(p, \Theta)$. (Еще раз подчеркиваю, что ради простоты возможность фазовых переходов в среде здесь не рассматривается, поэтому независимыми являются лишь две термодинамические величины.) Обозначим индексом S равновесные распределения термодинамических величин, описывающие состояние среды в отсутствии относительных движений, и воспользуемся ими в качестве фоновых характеристик среды, отклонение от которых вызывается ее движением.

Уместно отметить, что выбор фонового состояния среды – это весьма деликатный вопрос, который, строго говоря, должен решаться в зависимости от пространственно-временных масштабов изучаемых процессов с учетом влияния движений, исключаемых из рассмотрения. Последнее замечание важно, в частности, для сопоставления конкретных расчетов с данными наблюдений. На данном этапе достаточно сформулировать типичные для атмосферы и океана Земли ограничения, накладываемые на выбранные выше фоновые характеристики, которые состоят в следующем.

1. *Равновесные значения термодинамических величин зави-*

сят только от высоты z и строго удовлетворяют уравнению Менделеева-Клайперона

$$p_S = R\rho_S T_S \tag{1}$$

и гидростатическому соотношению

$$\frac{dp_S}{dz} + g\rho_S = 0. \tag{2}$$

2. *Фоновое состояние среды соответствует статически устойчивому вертикальному распределению равновесной потенциальной температуры*

$$\Theta_S = T_S \left(\frac{p_0}{p_S}\right)^{R/c_p} \tag{3}$$

для газа, т.е.

$$\frac{d\Theta_S}{dz} > 0, \tag{4а}$$

и плотности для жидкости

$$\frac{d\rho_S}{dz} < 0. \tag{4б}$$

3. *Безразмерный параметр*

$$\eta \doteq \frac{N^2 H_0}{g} \ll 1. \tag{5}$$

Здесь g – ускорение свободного падения, H_0 – характерная глубина среды, а N – частота Вяйселя-Брента ($Väisälä - Brunt$), задаваемая формулами:

для бароклинного газа (атмосфера) $N = \left(\dfrac{g}{\Theta_S}\dfrac{d\Theta_S}{dz}\right)^{1/2}$, (6а)

для расслоенной жидкости (океан) $N = \left(-\dfrac{g}{\rho_S}\dfrac{d\rho_S}{dz}\right)^{1/2}$. (6б)

Физический смысл величины N состоит в том, что это частота малых колебаний жидкой частицы около положения равновесия в статически устойчивой среде. В самом деле, пусть, например, атмосфера пребывает в состоянии статического равновесия, описываемого распределениями плотности $\rho = \rho_S(z)$ и давления $p = p_S(z)$.



Рис. 1. Жидкая частица массы δm адиабатически смещается с уровня $z = z_0$ на ифинитезимально близкий уровень $z = z_0 + \delta z$. Ее потенциальная температура на этом уровне $\Theta(z_0 + \delta z) = \Theta_S(z_0) \neq \Theta_S(z_0 + \delta z)$

Выделим на произвольном уровне $z = z_0$ жидкую частицу массы δm и плотности $\rho_S(z_0)$, находящуюся под давлением $p_S(z_0)$, и сместим эту частицу *адиабатически* (любое *смещение* идеальной сжимаемой жидкости происходит адиабатически по определению) до уровня $z = z_0 + \delta z$ (рис. 1). Пусть $\rho(z_0 + \delta z)$ – плотность смещенной жидкой частицы на новом уровне. Тогда объем, вытесненный этой частицей, равен $\delta m/\rho(z_0 + \delta z)$, а вытесненная масса – $\rho_S(z_0 + \delta z)\,\delta m/\rho(z_0 + \delta z)$. Следовательно, результирующая сил тяжести и Архимеда равна

$$\delta m\ddot{\delta z} = -g\delta m + \frac{\rho_S(z_0 + \delta z)}{\rho(z_0 + \delta z)} g\delta m.$$

Отсюда после разложения $\rho_S(z)$ и $\rho(z)$ в окрестности $z = z_0$, с учетом того что $\rho(z_0) = \rho_S(z_0)$ по определению, полученное равенство с точность до членов $O(\delta z^2)$ можно записать в виде

$$\ddot{\delta z} = -g\left[\frac{1}{\rho(z_0)}\frac{d\rho}{dz}(z_0)\,\delta z - \frac{1}{\rho_S(z_0)}\frac{d\rho_S}{dz}(z_0)\,\delta z\right]. \qquad (7)$$

Вычислим теперь $d\rho/dz$ с учетом того, что плотность $\rho(z)$ выделенной частицы меняется лишь под влиянием изменения давления.

Формулу

$$\Theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_p} \tag{8}$$

с помощью соотношения Менделеева-Клайперона $p = R\rho T$ можно переписать в терминах ρ и p ($c_v = c_p - R$ – удельная теплоемкость при постоянном объеме):

$$\Theta = \frac{p_0}{R\rho}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{c_v/c_p}. \tag{9}$$

Тогда

$$\rho(z) = \frac{p_0}{R\Theta(z_0)}\left(\frac{p(z)}{p_0}\right)^{c_v/c_p}.$$

Дифференцируя это равенство по z, с учетом (8) получим

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{c_v}{c_p}\frac{1}{R\Theta(z_0)}\left(\frac{p_0}{p(z)}\right)^{R/c_p}\frac{dp}{dz} = \frac{c_v}{c_p}\frac{1}{RT(z)}\frac{\Theta(z)}{\Theta(z_0)}\frac{dp}{dz}.$$

Полагая $z = z_0$ и вновь используя формулу Менделеева-Клайперона, имеем

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{c_v}{c_p}\frac{\rho_S}{p_S}\frac{dp_S}{dz} \text{ в точке } z = z_0,$$

и уравнение (7) записывается в виде

$$\ddot{\delta z} = -g\left[\frac{c_v}{c_p}\frac{1}{p_S}\frac{dp_S}{dz} - \frac{1}{\rho_S}\frac{d\rho_S}{dz}\right]_{\text{при } z=z_0}\delta z.$$

Но согласно (9) выражение , стоящее в квадратных скобках, есть производная по z от $\ln\Theta_S = -\ln\rho_S + (c_v/c_p)\ln p_S + const$. Поэтому уравнение движения выделенной частицы записывается в виде

$$\ddot{\delta z} + \frac{g}{\Theta_S}\frac{d\Theta_S}{dz}\delta z = 0. \tag{10}$$

Отсюда следует, что при

$$N^2 = \frac{g}{\Theta_S}\frac{d\Theta_S}{dz} > 0$$

равновесное состояние атмосферы устойчиво, а частица совершает гармонические колебания с частотой (6).

Уместно отметить также, что из равенств (1)-(3) следует соотношение

$$\frac{d\Theta_S}{dz} = \frac{\Theta_S}{T_S}\left(\frac{dT_S}{dz} + \frac{g}{c_p}\right), \tag{11}$$

согласно которому среда сохраняет статическую устойчивость даже при $dT_S/dz < 0$, если

$$-\frac{dT_S}{dz} < \frac{g}{c_p}. \tag{12}$$

Величина $\gamma_a \doteq g/c_p$ – называется *сухоадиабатическим градиентом температуры*, который для земной атмосферы, например, принимает значение -10 град/км ($c_p = 0.24$ кал/г·град, 1 кал $\approx 4.2 \cdot 10^7$ эрг), тогда как реальное падение абсолютной температуры с высотой в тропосфере составляет приблизительно 6 град/км.

Малость параметра η становится очевидной, если заметить, что величину $g' = N^2 H_0$ можно трактовать как эффективное ускорение свободного падения жидкой частицы под влиянием результирующей архимедовых и гравитационных сил. Для земной атмосферы, например, $\eta = O(0.1)$, тогда как для океана $\eta = O(10^{-3})$. Такое различие объясняется тем, что расслоенность океанской среды вызвана не ее сжимаемостью, а плотностной стратификацией из-за неоднородной солености воды.

2. Квазигеострофическое приближение уравнений движения бароклинной жидкости. В отношении бароклинных геофизических течений, помимо малости параметров Россби-Кибеля и η

$$\varepsilon \doteq \frac{U}{f_0 L} \ll 1 \text{ и } \eta \doteq \frac{N^2 H_0}{g} = O(\varepsilon), \tag{13}$$

дополнительно будем предполагать, что параметр

$$\xi \doteq \frac{f_0^2 L^2}{g H_0} = O(\varepsilon). \tag{14}$$

Вообще говоря, параметры ε, ξ и η независимы, а сделанные ограничения характерны, например, для земной атмосферы. Можно использовать и другие ограничения, не изменяя структурных

свойств конечного результата. Именно так обстоит дело для океана, в котором $\eta = o(\varepsilon)$ (см. оценки для η, приведенные выше). Кроме того, проделанный ниже анализ легко модифицировать или обобщить в случае других менее жестких, чем (13), (14), условий, если при этом упомянутые параметры остаются малыми.

Малость параметра ξ означает, что линейная скорость, индуцированная абсолютной завихренностью среды f_0, также является заметно "дозвуковой", т.е. по крайней мере на половину порядка меньше, чем скорость распространения длинных гравитационных или внутренних волн. По существу это – условие слабой 3D-сжимаемости вращающегося бароклинного газа.

До сих пор для вывода упрощенных "невязких" уравнений движения мы использовали укороченный базис Обухова-Чарни, игнорируя уравнение сохранения потенциальной температуры. Для бароклинной жидкости в силу обсуждавшихся причин обе сохраняющиеся величины Π и Θ должны быть приняты во внимание, лагранжева инвариантность которых в точной формулировке записывается в виде

$$\frac{D\Pi}{Dt} = \frac{D}{Dt}\frac{(\mathbf{\Omega} + 2\mathbf{\Omega}_0)\cdot \mathrm{grad}\Theta}{\rho} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{D\Theta}{Dt} = 0 \quad \left(\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} + w\frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{16}$$

Неравновесные термодинамические переменные движущейся среды удобно представить в виде:

$$p = p_S(z) + p'(x,y,z,t), \ \rho = \rho_S(z) + \rho'(x,y,z,t),$$
$$\Theta = \Theta_S(z) + \theta(x,y,z,t), \quad T = T_S(z) + \vartheta(x,y,z,t),$$

где вторые слагаемые в правой части каждого равенства описывают *малые отклонения* соответствующей величины от ее равновесного значения. Оценим порядок их малости.

Согласно уравнению геострофического ветра (6.6) и соотношениям гидростатики (6.1) и (2) $[p'] = f_0 L[\rho_S]U$ и $[p_S] = [\rho_S]gH_0$, где квадратные скобки означают характерные значения заключенных в них величин. Отсюда в силу условия (14)

$$\frac{p'}{p_S} \sim \frac{f_0 LU}{gH_0} = \frac{U}{f_0 L}\cdot\frac{f_0^2 L^2}{gH_0} = O(\varepsilon\xi) = O\left(\varepsilon^2\right). \tag{17}$$

По соглашению (6.1) соотношение гидростатики приближенно выполняется и для величины $p = p_S + p'$. Поэтому $[p'] = [\rho']\, gH_0$ и

$$\frac{\rho'}{\rho_S} = O\left(\frac{p'}{p_S}\right) = O\left(\varepsilon^2\right). \tag{18}$$

С помощью уравнения состояния (1) и формулы для потенциальной температуры (9), также справедливых для равновесных и неравновесных величин, легко показать, что относительные отклонения ϑ/T_S и θ/Θ_S связаны с p'/p_S и ρ'/ρ_S следующими приближенными соотношениями

$$\frac{\vartheta}{T_S} \approx \frac{p'}{p_S} - \frac{\rho'}{\rho_S}, \quad \frac{\theta}{\Theta_S} \approx \frac{c_v}{c_p}\frac{p'}{p_S} - \frac{\rho'}{\rho_S}. \tag{19}$$

Следовательно, согласно (18)

$$\frac{\vartheta}{T_S} = O\left(\varepsilon^2\right), \quad \frac{\theta}{\Theta_S} = O\left(\varepsilon^2\right). \tag{20}$$

Делая разложение по малому параметру ε с учетом выполненных оценок и оценки $w/U = O(\varepsilon)\, H_0/L$ (теорема Праудмена-Тейлора) и ограничиваясь только членами $O(1)$ и $O(\varepsilon)$, законы сохранения (15) и (16) можно представить в виде

$$\frac{1}{\rho_S}\frac{d\Theta_S}{dz}\frac{d}{dt}\left(\Omega_z + f + \frac{f}{d\Theta_S/dz}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) + w\frac{d}{dz}\left(\frac{f}{\rho_S}\frac{d\Theta_S}{dz}\right) = O\left(\varepsilon^2\right), \tag{21}$$

$$\frac{d\theta}{dt} + w\frac{d\Theta_S}{dz} = O\left(\varepsilon^2\right). \tag{22}$$

Здесь $\Omega_z = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$.

Учитывая квадратичный порядок малости величины θ/Θ_S, на первый взгляд может показаться, что последним слагаемым из находящихся под действием оператора d/dt в левой части равенства (21) можно пренебречь. Принимая во внимание второе условие (13), с помощью тождественных преобразований нетрудно, однако, показать, что

$$\frac{1}{d\Theta_S/dz}\frac{\partial\theta}{\partial z} = O\left(\frac{g}{N^2 H_0}\frac{\theta}{\Theta_S}\right) = \frac{O\left(\varepsilon^2\right)}{O\left(\eta\right)} = O\left(\varepsilon\right).$$

Исключая w из (21), (22) и используя легко проверяемое тождество

$$\frac{f}{d\Theta_S/dz}\frac{\partial\theta}{\partial z}-\frac{\rho_S\theta}{(d\Theta_S/dz)^2}\frac{d}{dz}\left[\left(\frac{f}{\rho_S}\frac{d\Theta_S}{dz}\right)\right]\equiv\frac{g}{f\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f^2\rho_S}{N^2}\frac{\theta}{\Theta_S}\right), \tag{23}$$

уравнение сохранения потенциального вихря с точностью до членов $O\left(\varepsilon^2\right)$ можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left[\Omega_z+f+\frac{g}{f\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f^2\rho_S}{N^2}\frac{\theta}{\Theta_S}\right)\right]=0\quad\left(\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{24}$$

Чтобы сформулировать его в терминах одной неизвестной функции, необходимо иметь связь θ с гидродинамической составляющей давления $p'=p'(x,y,z,t)$, задающей геострофическое поле скорости через соотношение (6.7). Воспользуемся с этой целью второй формулой (19), которая с помощью гидростатических соотношений (2) и (6.1) преобразуется к виду

$$\frac{\theta}{\Theta_S}=\frac{1}{g\rho_S}\frac{\partial p'}{\partial z}+\left(\frac{c_v}{c_p}\frac{1}{p_S}\frac{dp_S}{dz}\right)\frac{p'}{g\rho_S}. \tag{25}$$

Для сопоставления слагаемых в правой части (25) найденную связь удобнее сформулировать в терминах N, которая в теории движения стратифицированных жидкостей служит основной мерой расслоенности среды. С помощью уравнения состояния (1) формулу (3) для потенциальной температуры можно переписать в терминах ρ_S и p_S:

$$\Theta_S=\frac{p_0}{R\rho_S}\left(\frac{p_S}{p_0}\right)^{c_v/c_p}, \tag{26}$$

логарифмическая производная которой дает равенство

$$\frac{c_v}{c_p}\frac{1}{p_S}\frac{dp_S}{dz}=\frac{1}{\Theta_S}\frac{d\Theta_S}{dz}+\frac{1}{\rho_S}\frac{d\rho_S}{dz}, \tag{27}$$

После подстановки (27) в (25) искомая связь принимает форму

$$\frac{\theta}{\Theta_S}=\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p'}{\rho_S}\right)-\frac{N^2}{g^2}\frac{p'}{\rho_S},$$

позволяющую с помощью (13) сопоставить слагаемые в правой части последнего равенства:

$$\frac{N^2}{g^2}\frac{p'}{\rho_S} = \frac{N^2 H_0}{g} O\left(\frac{1}{gH_0}\frac{p'}{\rho_S}\right) = \eta O\left(\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p'}{\rho_S}\right)\right) \lesssim \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p'}{\rho_S}\right) O(\varepsilon).$$

В итоге искомая связь между θ и p' с нужной степенью точности задается формулой

$$\frac{\theta}{\Theta_S} = \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p'}{\rho_S}\right). \tag{28}$$

Последняя формула вместе с соотношениями геострофического ветра (6.6a), которые в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$u = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p'}{\rho_S}\right), \quad v = \frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p'}{\rho_S}\right), \tag{29}$$

позволяет замкнуть уравнение (24): в терминах геострофической функции тока

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{p'}{f_0 \rho_S} \tag{30}$$

квазигеострофическое уравнение потенциального вихря записывается в виде

$$\frac{d}{dt}\left[\triangle\psi + f + \frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2 \rho_S}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right] = 0 \quad \left(\triangle\psi = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \tag{31}$$

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{32}$$

Нетрудно показать (сделайте это в качестве полезного упражнения), что для океана, в котором в отличие от атмосферы $\eta << \varepsilon$, а роль Θ играет ρ, квазигеострофическое уравнение вихря имеет аналогичный вид. Нужно лишь N вычислять по формуле (6б).

Уместно отметить, что знание бароклинной функции тока $\psi = \psi(x, y, z, t)$ позволяет восстанавливать и вертикальную составляющую скорости течения. В самом деле, исключая из (28), (30) пульсацию давления p', получим соотношение

$$\frac{\theta}{\Theta_S} = \frac{f_0}{g}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{33}$$

после подстановки которого в (22) вертикальную скорость можно записать в виде

$$w = \frac{f_0}{N^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right). \tag{34}$$

Замечание. *Важно подчеркнуть, что в отличие от* (32) *формула* (34) *справедлива лишь для адиабатических процессов, т.е. в отсутствии теплопроводности и внешних источников тепла. В противном случае правая часть* (22) *будет отлична от нуля, и, обозначая ее через* Q *, вместо* (34) *получим формулу*

$$w = \frac{f_0}{N^2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \frac{g}{f_0}\frac{Q}{\Theta_S}\right]. \tag{35}$$

Таким образом геофизические течения бароклинной жидкости в квазигеострофическом приближении также описываются в терминах функции тока, хотя в этом случае она явно зависит от вертикальной координаты z. Последнее связано с наличием в бароклинной жидкости так называемой доступной потенциальной энергии, обусловленной неоднородным по горизонтали распределением сил плавучести или, что практически одно и то же, потенциальной температуры. Подробнее об этом мы поговорим несколько позже. Пока же отметим, что влияние горизонтальной неоднородности в распределении потенциальных температур на динамику геофизических течений непосредственно видно из *соотношений термического ветра*

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g}{f_0\Theta_S}\frac{\partial\theta}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{g}{f_0\Theta_S}\frac{\partial\theta}{\partial x}, \tag{36}$$

которые легко получаются из (28), (29) путем исключения давления. Соотношения термического ветра можно записать в виде единого векторного равенства (ср. с (6.16) и (6.17)):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \frac{g}{f_0\Theta_S}\mathbf{k}\times\nabla\Theta, \tag{37}$$

где $\mathbf{k}$ – единичный вертикальный орт, а отклонение θ заменено на Θ, поскольку равновесные величины зависят только от вертикальной координаты.

Согласно (37) горизонтальный градиент потенциальной температуры вызывает систематический вертикальный сдвиг ветра. Напомню (см. Лекцию 6), что применительно к земной атмосфере это

означает, что разность температур между полюсом и экватором есть одна из главных причин неустойчивости движений синоптического масштаба (вертикальный сдвиг скорости порождает вихреобразование). Поэтому в геофизической гидродинамике неустойчивость и циклогенез, индуцированные вертикальным сдвигом ветра, относят к бароклинным процессам, подчеркивая тем самым их конвективное происхождение, в отличие от баротропного вихреобразования, вызванного чисто гидродинамической неустойчивостью горизонтальных сдвиговых течений.

Упражнения

1. Сформулируйте условия устойчивости статического равновесия стратифицированной несжимаемой жидкости в поле сил тяжести и покажите, что в устойчиво стратифицированной среде жидкая частица, слегка отклоненная от положения равновесия, будет совершать гармонические колебания с частотой Вяйселя-Брента N, задаваемой формулой (6б).

2. Выведите квазигеострофическое уравнение потенциального вихря для океана, предполагая параметры ε, η и ξ малыми, но независимыми.

Литература

1. Педлоски Дж. *Геофизическая гидродинамика*, М.: Мир, 1984.

2. Гилл А. *Динамика атмосферы и океана*, М.: Мир, 1986

3. Salmon R. *Lectures on Geophysical Fluid Dynamics*, NY, Oxford, Oxford University Press, 1998.

Лекция 10

Энергетический баланс, доступная потенциальная энергия и волны Россби в бароклинной атмосфере

1. Закон сохранения энергии и понятие доступной потенциальной энергии. Для сопоставления баротропных и бароклинных течений уместно напомнить формулировку локального закона сохранения энергии (7.27) для уравнения Обухова-Чарни, который в приближении бета-плоскости ($f = f_0 + \beta y,\ \beta = const$) и в терминах размерных величин можно представить в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\left(\nabla\psi\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\psi^2}{L_0^2}\right] = -\mathrm{div}\mathbf{S}_{bt}\left(x,y,t\right) \quad \left(\psi = \psi\left(x,y,t\right) \doteq \frac{gh}{f_0}\right), \tag{1}$$

$$\mathbf{S}_{bt} = \mathbf{i}\left(-\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} - \frac{1}{2}\beta\psi^2 + \psi\frac{\partial\psi}{\partial y}\widetilde{\Omega}_{bt}\right) + \mathbf{j}\left(-\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t} - \psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\widetilde{\Omega}_{bt}\right), \tag{2}$$

где $\tilde{\Omega}_{bt}\doteq\Delta\psi - L_0^{-2}\psi$ – относительный (без учета вращения жидкости в целом) квазигеострофический потенциальный вихрь для баротропных течений.

Читателю, выполнившему Упражнение 7.1, нетрудно будет показать, что для бароклинных течений на бета-плоскости, управляемых уравнениями (9.31), (9.32), локальный закон сохранения энергии формулируется в виде (умножьте (9.31) на $-\rho_S\psi$ и перегруппируйте члены):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho_S\left(\nabla\psi\right)^2 + \frac{1}{2}\rho_S\frac{f_0^2}{N^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right] = -\mathrm{div}\mathbf{S}_{bc}\left(x,y,t\right) \tag{3}$$

$$\mathbf{S}_{bc} = \mathbf{i}\left(-\rho_S\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} - \frac{1}{2}\rho_S\beta\psi^2 + \rho_S\psi\frac{\partial\psi}{\partial y}\widetilde{\Omega}_{bc}\right)$$

$$+\mathbf{j}\left(-\rho_S\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t} - \rho_S\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\widetilde{\Omega}_{bc}\right) + \mathbf{k}\left(-\rho_S\frac{f_0^2}{N^2}\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial t}\right). \qquad (4)$$

Здесь

$$\psi = \psi(x, y, z, t) \doteq \frac{p'}{f_0\rho_S},$$

и

$$\widetilde{\Omega}_{bc} = \triangle\psi + \frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_S\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$

– относительный квазигеострофический потенциальный вихрь бароклинного течения.

Если через границы области, занятой бароклинной жидкостью, отсутствует поток массы, т.е. нормальная составляющая скорости на них обращается в нуль, то можно показать (см. Лекцию 11), что из (3), (4) следует инвариантность суммарной энергии

$$E_{bc} \doteq \iiint\limits_V \left[\frac{1}{2}\rho_S(\nabla\psi)^2 + \frac{1}{2}\rho_S\frac{f_0^2}{N^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]\delta\mu \quad \left(\frac{dE_{bc}}{dt} = 0\right), \qquad (5)$$

где $\delta\mu = dxdydz$ – элемент объема жидкой частицы, а V – объем всей жидкости.

Выражение для суммарной энергии можно переписать в терминах скорости и термодинамических характеристик жидкости, используя для этого (9.32)-(9.33). Тогда

$$E_{bc} \doteq \iiint\limits_V \left[\frac{1}{2}\rho_S(\nabla\psi)^2 + \frac{1}{2}\rho_S\frac{g^2}{N^2}\frac{\theta^2}{\Theta_S^2}\right]\delta\mu. \qquad (5a)$$

Физический смысл второго слагаемого в правой части (5а) легко понять, если вспомнить, что речь идет о движениях, под влиянием которых термодинамические характеристики жидких частиц, а следовательно, и их вертикальные координаты испытывают лишь слабые отклонения от своих равновесных значений. Напомним (см. Лекцию 9), что результирующая гравитационной и архимедовой сил, которая действует на жидкую частицу единичного

объема, отклонившуюся по вертикали от своего статического положения равновесия на инфинитезимальное расстояние δz, равна $F = -\rho_S N^2 \delta z$. Поэтому соответствующая этой силе потенциальная энергия (относительно положения равновесия)

$$\delta P_{bc} = \frac{1}{2}\rho_S N^2 (\delta z)^2 . \tag{6}$$

Потенциальная температура смещенной жидкой частицы отличается от равновесной потенциальной температуры в точке, соответствующей ее новому положению, на величину $\theta = (d\Theta_S/dz)\,\delta z$. Выражая теперь δz через θ и подставляя в (6) с учетом (9.6a), находим, что второе слагаемое подынтегрального выражения в правой части (5a) (а следовательно, и (5)) совпадает с *потенциальной энергией жидкой частицы единичного объема относительно ее статического положения равновесия,* т.е.

$$\delta P_{bc} = \frac{1}{2}\rho_S \frac{g^2}{N^2}\frac{\theta^2}{\Theta_S^2} = \frac{1}{2}\rho_S \frac{f_0^2}{N^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 . \tag{7}$$

Величина

$$P_{bc} \doteq APE_{bc} = \iiint\limits_V \frac{1}{2}\rho_S \frac{g^2}{N^2}\frac{\theta^2}{\Theta_S^2}\delta\mu = \iiint\limits_V \frac{1}{2}\rho_S \frac{f_0^2}{N^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 \delta\mu, \tag{8}$$

равная потенциальной энергии всей жидкости за вычетом потенциальной энергии, соответствующей ее равновесному состоянию, называется доступной потенциальной энергией (AVAILABLE POTENTIAL ENERGY) – понятие, впервые введенное выдающимся американским метеорологом Э. Лоренцом (E. Lorenz, 1955). Смысл его состоит в том, что именно эта доля потенциальной энергии может быть преобразована в кинетическую энергию геофизических движений, тогда как потенциальная энергия, соответствующая равновесному состоянию жидкости, оказывается недоступной для генерации движений изучаемого масштаба и поэтому исключается из рассмотрения.

С точки зрения введенного понятия весьма поучительно сопоставить энергетические инварианты для уравнений теории мелкой воды (6.21), (6.22) и их квазигеострофического приближения, т.е.

уравнения Обухова-Чарни (7.8). Согласно локальным законам сохранения энергии (4.25) (см. Упражнение 4.2, принимая во внимание, что силы Кориолиса не совершают работы) и (1), соответствующие им интегральные энергетические инварианты можно представить в виде:

$$E_{sw} = \iint\limits_D \rho_0 \left(\frac{1}{2} H \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} g H^2 \right) \delta\sigma \quad (sw - \text{shallow water}), \tag{9}$$

$$E_{bt} = \iint\limits_D \rho_0 \left[\frac{1}{2} (\nabla\psi)^2 + \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{L_0^2} \right] \delta\sigma = \iint\limits_D \rho_0 \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right) \delta\sigma, \tag{10}$$

где $H = H(x, y, t)$ – текущая высота свободной поверхности жидкости, H_0 – равновесная толщина слоя "мелкой воды", $h = H(x, y, t) - H_0$, $\delta\sigma = dxdy$ – элемент площади двумерной области интегрирования D и ρ_0 – постоянная плотность жидкости.

Величина

$$P_{bt} = \frac{1}{2} \iint\limits_D \rho_0 g h^2 \delta\sigma = \frac{1}{2} \iint\limits_D \rho_0 g (H - H_0)^2 \delta\sigma, \tag{11}$$

равная

$$\frac{1}{2} \iint\limits_D \rho_0 g H^2 \delta\sigma - \frac{1}{2} \iint\limits_D \rho_0 g H_0^2 \delta\sigma$$

(интеграл от линейного по h члену обращается нуль в силу сохранения массы (7.12)), по данному выше определению *есть доступная потенциальная энергия баротропных геофизических течений.* Ее доля от полной потенциальной энергии слоя, измеряемая отношением $\langle h^2 \rangle / \langle H^2 \rangle$ ($\langle \ldots \rangle$ – среднее по объему жидкости), согласно (7.3) равна по порядку величины $\varepsilon^2 \left(L^2 / L_0^2 \right)^2$. Применительно к земной атмосфере, например, это значение порядка 10^{-2}. Аналогичная оценка справедлива и в отношении бароклинной составляющей доступной потенциальной энергии, что характеризует эффективность атмосферной тепловой машины, т.е., по существу, совпадает с оценкой ее КПД, равного нескольким процентам.

Проделанный анализ позволяет ответить на вопрос, который естественно возникает при сопоставлении баротропной и бароклинной квазигеострофических моделей геофизических течений. Речь идет о том, что результат предельного перехода в уравнении (9.31)

при $N \to 0$, соответствующего переходу от описания движения стратифицированной жидкости к описанию движения однородной жидкости, *не совпадает* с уравнением Обухова-Чарни (7.8). Это легко показать, не прибегая к формальным математическим выкладкам, путем следующего рассуждения. Предположим противное, т.е. в пределе $N = 0$ уравнение (9.31) совпадает с (7.8). Это означало бы, что при $N \to 0$ величина

$$\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2\rho_S}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) \longrightarrow -L_0^{-2}\psi.$$

Но тогда, согласно (1), которое есть следствие (7.8), при $N \to 0$ доступная потенциальная энергия индивидуальной жидкой частицы единичного объема (см.(3), (7))

$$\delta P_{bc} = \frac{1}{2}\rho_S\frac{f_0^2}{N^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}\rho_0\frac{\psi^2}{L_0^2}.$$

В действительности же согласно (6) $\delta P_{bc} \longrightarrow 0$ при $N \longrightarrow 0$. А это означает, что при выводе (9.31) в отличие от (7.8) не учитывалась баротропная компонента доступной потенциальной энергии, обусловленной изменениями высоты свободной поверхности жидкости. Указанный недостаток можно исправить, формулируя бароклинную модель, например, в так называемых $p-$координатах, в которых, основываясь на квазигидростатическом соотношении, в качестве вертикальной координаты вместо z используется давление p. Такой подход, его достоинства и недостатки обсуждаются в следующей лекции.

Отметим еще один важный вывод, который следует из сопоставления энергетических соотношений. Отношение доступной потенциальной энергии к кинетической имеет порядок L^2/L_0^2 для баротропных течений и L^2/L_R^2 для бароклинных течений, где величина размерности длины

$$L_R \doteq \frac{NH_0}{f} = \frac{\sqrt{g'H_0}}{f} \quad \left(g' = N^2H_0\right) \tag{12}$$

называется *внутренним радиусом деформации Россби*. В теории устойчивости бароклинных течений этот фундаментальный параметр играет такую же важную роль, какую $L_0 = \sqrt{gH_0}$ – в теории

устойчивости баротропных движений. В частности, L_R – это типичный размер циклонов и антициклонов, порождаемых неустойчивостью вертикального сдвига ветра, т.е., согласно соотношению термического ветра (9.37), неустойчивостью неоднородного горизонтального распределения архимедовых сил, причем при $L = L_R$ кинетическая и потенциальная энергии вихря имеют одинаковый порядок величин. Для земной атмосферы и океана L_R и L_0 – величины одного порядка, равного соответственно 1000 км и 100 км, хотя квадрат их отношения с некоторой натяжкой полагают равным 0.1. С этим обстоятельством связана одна из основных трудностей построения аналитической теории общей циркуляции атмосферы и океана.

2. Бароклинные волны Россби. Бароклинность среды сказывается и на поведении планетарных волн. Характерный масштаб изменения фоновой плотности, задаваемый формулой

$$D^{-1} = -\frac{1}{\rho_S}\frac{d\rho_S}{dz} \tag{13}$$

для океана и изотермической атмосферы, можно положить постоянной величиной. Согласно (9.6б) это относится и к частоте Вяйселя-Брента в океане, но в существенно меньшей степени в атмосфере, причем для океана отношение $H_0/D \ll 1$ из-за существенной малости параметра η, тогда как в атмосфере это отношение порядка единицы. Полагая в обоих случаях в качестве приемлемого приближения величины N и D постоянными, уравнение (9.31) применительно к бета-плоскости ($f = f_0 + \beta y$) можно записать в форме

$$\frac{d}{dt}\left(\triangle\psi + \frac{f_0^2}{N^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \beta\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0. \tag{14}$$

Собственная функция оператора $\partial^2/\partial z^2 - D^{-1}\partial/z$, отвечающая волнообразному вдоль оси z возмущению с узлами, которые расположены друг от друга на расстояниях, кратных величине H_0/m (m – произвольное кратное числу π), имеет вид

$$\psi_m = \exp\left(\frac{z}{2D}\right)\Psi\left(x, y, t\right)\exp\left(\frac{imz}{H_0}\right), \tag{15}$$

где $\Psi\left(x, y, t\right)$ – пока произвольная функция горизонтальных координат и времени. Соответствующее функции (15) собственное зна-

чение равно

$$\lambda_m = -\left(\frac{1}{4D^2} + \frac{m^2}{H_0^2}\right), \tag{16}$$

т.е. ψ_m удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial z^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial \psi_m}{\partial z} = -\left(\frac{1}{4D^2} + \frac{m^2}{H_0^2}\right)\psi_m. \tag{17}$$

Делая теперь подстановку (17) и (15) в (14), для отыскания функции $\Psi(x, y, t)$ получаем уравнение Обухова-Чарни

$$\frac{d}{dt}\left[\triangle\Psi - \left(\frac{H_0^2}{4D^2} + m^2\right)\frac{\Psi}{L_R^2}\right] + \beta\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \tag{18}$$

в котором с точностью до положительной мультипликативной константы роль L_0 играет внутренний радиус деформации Россби $L_R = NH_0/f_0$. Следовательно, *семейство точных частных решений уравнения* (14)*, описывающее бароклинные моды гироскопических волн планетарного масштаба в слое стратифицированной жидкости толщиной* H_0*, описывается функциями*

$$\psi_{klm} = A\exp\left(\frac{z}{2D}\right)\exp\left\{i\left(kx + ly + \frac{mz}{H_0} - \sigma t\right)\right\}, \tag{19}$$

где A – произвольная константа, а

$$\sigma = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2 + \left(m^2 + H_0^2/4D^2\right)L_R^{-2}}. \tag{20}$$

Отсюда, в частности, следует, что при $H_0/D \ll 1$ (например, в океане) и $m = 0$ решения (19), (20) вырождаются в семейство баротропных мод, потому что согласно (9.34) вертикальная скорость практически обращается в нуль и, как следствие, равновесные изопикнические поверхности остаются не возмущенными из-за отсутствия сил плавучести. В связи с этим уместно уберечь читателя от заблуждения, которое может сложиться из энергетического анализа, что бароклинная модель (9.31), (9.32) не описывает баротропные эффекты. В действительности указанная модель не учитывает лишь баротропную составляющую доступной потенциальной энергии, участвующую в энергетическом балансе, а не взаимный обмен

кинетической энергией между различными баротропными модами, который является главным элементом механизма баротропной неустойчивости геофизических течений.

Упражнения

1. Выведите локальный закон сохранения энергии (3), (4) для бароклинной атмосферы, опираясь на опыт, полученный при выводе такого закона для баротропной среды.

2. Попытайтесь доказать инвариантность энергии (5), используя условия непроницаемости жидкости на границе области интегрирования и сохранения циркуляции скорости по любому горизонтальному замкнутому контуру, целиком принадлежащему боковой вертикальной границе. Пусть область интегрирования – цилиндр с вертикально ориентированной осью.

3. Пользуясь дисперсионным соотношением (20), вычислите групповую скорость бароклинной волны Россби и покажите, что *энергия и фаза волны распространяются по высоте в противоположные стороны.*

Литература

1. Лоренц Э.Н. *Природа и теория общей циркуляции атмосферы*, Л.: Гидрометеоиздат, 1970.

2. Педлоски Дж. *Геофизическая гидродинамика*, М.: Мир, 1984.

3. Гилл А. *Динамика атмосферы и океана*, М.: Мир, 1986

4. Salmon R. *Lectures on Geophysical Fluid Dynamics*, NY, Oxford, Oxford University Press, 1998.

5. Курганский М.В. *Введение в крупномасштабную динамику атмосферы*, С-П.: Гидрометеоиздат, 1993.

Лекция 11

Три важных замечания об описании бароклинных геофизических течений

1. О p-координатах. Используя квазигидростатическое соотношение, движение атмосферы можно описывать в координатах, в которых за независимую вертикальную координату принимается давление , а высота $z = z(x, y, p, t)$ изобарической поверхности $p = const$ становится зависимой переменной. Не вдаваясь в детали формальных вычислений (см. Томпсон, 1962), запишем уравнения вращающейся сжимаемой бароклинной жидкости в новых независимых переменных $x,\ y,\ p,\ t$:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + w^* \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p} + \mathbf{k} \times f\mathbf{v} = g\nabla_p z, \tag{1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{g\rho}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{d\Theta}{dt} + w^* \frac{\partial \Theta}{\partial p} = 0, \tag{4}$$

которые замыкаются соотношением (9.9)

$$\Theta = \frac{p_0}{R\rho}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{c_v/c_p}. \tag{5}$$

Здесь $w^* = dp/dt$ играет роль вертикальной скорости, $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$, $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y$, $\nabla_p = \mathbf{i}\partial/\partial x + \mathbf{j}\partial/\partial y$, а все частные

производные по горизонтальным координатам и времени берутся при постоянном давлении p.

Отсюда видно, что преимущество p-координат состоит в том, что уравнение (1) для горизонтальной скорости и уравнение неразрывности (3) записываются так, как если бы атмосфера была несжимаемой. Геострофический ветер в p-координатах выражается формулой

$$\mathbf{v} = \frac{g}{f_0}\mathbf{k} \times \nabla_p z, \tag{6}$$

или в координатной форме

$$u = -\frac{g}{f_0}\frac{\partial z}{\partial y},\ v = \frac{g}{f_0}\frac{\partial z}{\partial x}, \tag{6a}$$

а квазигеострофическое уравнение сохранения потенциального вихря записывается в виде

$$\frac{d}{dt}\left[\triangle\psi + f + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p^2}{L_R^2}\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\right] = 0. \tag{7}$$

Здесь $\psi = gz/f_0$, L_R – внутренний радиус деформации Россби, определенный ранее формулой (10.12), и согласно (6)

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y},\ v = \frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{8}$$

Уместно заметить, что упрощения уравнений движения достигаются не безвозмездно: запрятанные в замене переменных трудности возникают при постановке граничных условий, поскольку, например, земная поверхность, на которой вертикальная скорость

$$w = \frac{dz}{dt} + w^*\frac{\partial z}{\partial p} \tag{9}$$

обращается в нуль, не является изобарической. Поэтому строгие граничные условия заменяются на приближенные, которые ставятся на "краевых"изобарических поверхностях $p = p_0$ и $p = 0$, имитирующих нижнюю и верхнюю горизонтальные границы атмосферы соответственно. Можно показать (см., например, Курганский, 1993), что применительно к квазигеострофическому приближению

(7), (8) обращение в нуль w^* на верхней и w на нижней горизонтальных границах атмосферы приближенно выражается равенствами

$$\frac{d}{dt}\left(p^2\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) \longrightarrow 0 \text{ при } p \longrightarrow 0, \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}\left(p\frac{\partial\psi}{\partial p} + \alpha^2\psi\right) = 0 \text{ при } p = p_0. \tag{11}$$

Здесь α^2 – так называемый *параметр бароклинности*, задаваемый равенством

$$\alpha^2 = \frac{R\,(-\gamma_a + \gamma_S)}{g}\frac{T_S}{T_{0S}}, \tag{12}$$

где $\gamma_a = -g/c_p$ – определенный ранее сухоадиабатический градиент температуры, γ_S, и T_S – фоновые или равновесные градиент температуры и температура, соответствующие уровню рассматриваемой изобарической поверхности, а T_{0S} – средняя по земной поверхности приземная температура.

На боковых вертикальных границах ∂D области интегрирования D обычно ставят условия непротекания, т.е. обращения в нуль нормальной к границе горизонтальной скорости:

$$v_n = -\frac{\partial\psi}{\partial l} = 0 \text{ на } \partial D \tag{13}$$

и сохранения циркуляции

$$\Gamma_p \doteq \oint\limits_{C_p} v_l \delta l = \oint\limits_{C_p} \frac{\partial\psi}{\partial n}\delta l, \ \left(\frac{d\Gamma}{dt} = 0\right) \tag{14}$$

для каждого барического уровня, т.е. по каждому замкнутому контуру C_p, образованному пересечением боковой границы ∂D с изобарой $p = const$. Здесь $\partial/\partial l$ и $\partial/\partial n$ означают дифференцирование в направлениях горизонтальной касательной и нормали к ∂D соответственно (ср. с (8)).

При соблюдении условий (10), (11) и (13), (14) инвариант энергии, которым обладает система (7), (8), записывается в виде:

$$E_{bc} = \frac{1}{2}\iiint\limits_D \left[(\nabla\psi)^2 + L_R^{-2}\left(p\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2\right] dxdydp + \frac{1}{2}\iint\limits_S \frac{\alpha^2}{L_R^2}p_0\psi^2 dxdy, \tag{15}$$

где S – двумерная область на изобарической поверхности $p = p_0$, ограниченная контуром C_{p_0}.

Отсюда видно, что в p-координатах интеграл энергии включает в себя как бароклинную, так и баротропную компоненты доступной потенциальной энергии, причем последняя описывается двукратным интегралом в формуле (15). Сопоставим его с выражением (10.10) для доступной потенциальной энергии баротропной атмосферы. Выражение (12) для параметра бароклинности α^2 с помощью уже известных нам формул

$$\frac{d\Theta_S}{dz} = \frac{\Theta_S}{T_S}\left(-\gamma_a + \gamma_S\right),\ L_R^2 = \frac{N^2 H_0^2}{f_0^2},\ L_0^2 = \frac{gH_0}{f_0^2},$$
$$N^2 = \frac{g}{\Theta_S}\frac{d\Theta_S}{dz},\quad p_S = \rho_S R T_S$$

(напомню: H_0 – высота однородной атмосферы, т.е. такой же массы, как рассматриваемая бароклинная атмосфера) можно переписать в виде

$$\alpha^2 = k\frac{L_R^2}{L_0^2} \quad \left(k = \frac{p_S}{g\rho_S H_0}\frac{T_S}{T_{0S}} = O\left(1\right)\right). \tag{16}$$

Коэффициент k можно рассматривать как подгоночный параметр, значение которого, равное единице, обеспечивает строгую согласованность (10.10) с двукратным интегралом в формуле (15). Поэтому *параметр бароклинности разумно трактовать как квадрат отношения внутреннего радиуса деформации Россби к масштабу Россби-Обухова баротропной атмосферы*, что удобно и для запоминания.

Таким образом, хотя предельный переход в уравнении (7) при $N \longrightarrow 0$ не очевиден, интеграл энергии показывает, что оно (уравнение) в отличие от (9.31) при корректной аппроксимации граничных условий действительно описывает энергетический цикл с участием обоих видов доступной потенциальной энергии. Собственно именно по этой причине я остановился на p-координатах, которыми в дальнейшем мы пользоваться не будем, чтобы не усложнять анализ корректировкой граничных условий и сравнение результатов теории гидродинамической устойчивости классических и геофизических течений, тем более что свойства первых в ряде случаев легко переносятся на последние.

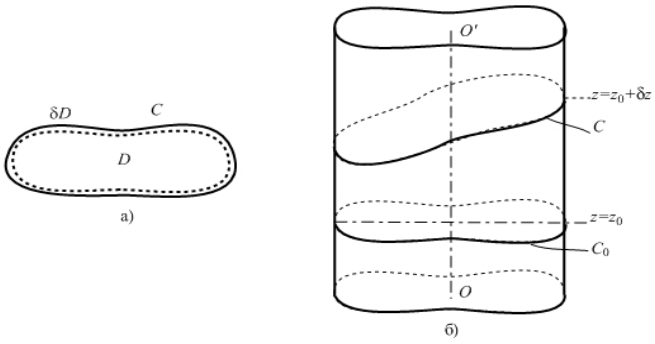


Рис. 1. а) Жидкий контур C, примыкающий к границе δD двумерной области интегрирования D в начальный момент, будет всегда оставаться таковым из-за условий непроницаемости. б) Трехмерная область интегрирования:C_0 - контур, образованный пересечением горизонтальной поверхности $z = z_0$ с боковой поверхностью цилиндра, C - контур, образованный изэнтропической поверхностью и боковой поверхностью цилиндра.

2. Об одном граничном условии. При интегрировании строго двумерных гидродинамических уравнений на конечной области D (рис. 1а) в качестве одного из краевых условий используют сохранение циркуляции скорости по границе ∂D:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \quad \Gamma \doteq \oint\limits_{\partial D = C} \mathbf{v}\delta\mathbf{l}. \tag{17}$$

Это условие – строгое, поскольку жидкий контур C, непосредственно примыкающий каждой своей точкой к ∂D в начальный момент, будет оставаться таковым в любой момент времени из-за обращения в нуль нормальной к границе составляющей скорости. По теореме Кельвина Γ сохраняется, потому что C – жидкий контур.

Область интегрирования V бароклинных геофизических течений является трехмерной; например, она изображена на рис. 1б в

виде вертикального цилиндра с горизонтальными твердыми торцами и твердой боковой поверхностью ∂V_S. Жидкий контур C, непосредственно примыкающий к ней в начальный момент, в силу упомянутой причины будет также оставаться на ∂V, следовательно, к нему также применима теорема Кельвина. Однако в этом случае условие (17) неконструктивно, поскольку C не остается на месте и занимает неизвестное нам положение на поверхности ∂V. Положение спасает квазидвумерность бароклинных геофизических течений, удовлетворяющих условиям (9.13), (9.14). Оказывается, что в этом случае циркуляция

$$\Gamma_0 \doteq \oint\limits_{C_0} \mathbf{v}\delta\mathbf{l}_0 \tag{18}$$

по любому контуру C_0, образованному пересечением горизонтальной плоскости $z = z_0$ с боковой поверхностью ∂V_S цилиндра, сохраняется с точностью $O(\varepsilon)$.

В самом деле, рассмотрим изэнтропическую поверхность $\Theta(x, y, z, t) = \Theta_S(z_0)$, где $z = z_0$ – уровень, на котором расположен контур C_0. Циркуляция по контуру C, образованному пересечением этой поверхности с ∂V сохраняется строго. Равенство $\Theta(x, y, z, t) = \Theta_S(z_0)$ можно переписать в виде

$$\theta(x, y, z, t) = \Theta_S(z_0) - \Theta_S(z), \tag{19}$$

где $\theta(x, y, z, t) = \Theta(x, y, z, t) - \Theta_S(z)$ – отклонение потенциальной температуры от ее равновесного значения на уровне z, индуцированное движением жидкости. Раскладывая (19) в ряд по степеням $\delta z = z - z_0$ и принимая во внимание (9.20), получаем следующую оценку вертикальных расстояний, на которых находятся точки контура C от соответствующих точек контура C_0:

$$\delta z = O\left[\left(\frac{1}{\Theta_S}\frac{d\Theta_S}{dz}\right)^{-1}_{z=z_0}\frac{\theta(x, y, z_0, t)}{\Theta_S(z_0)}\right] = \frac{g}{N^2}O\left(\varepsilon^2\right). \tag{20}$$

Эту формулу с учетом (9.13) удобно переписать в виде

$$\delta z = H_0\frac{g}{N^2H_0}O\left(\varepsilon^2\right) = H_0\frac{O(\varepsilon^2)}{\eta} = H_0O(\varepsilon). \tag{21}$$

Тогда угол φ между элементами $\delta\mathbf{l}$ и $\delta\mathbf{l}_0$ контуров C и C_0 оценивается равенством

$$\varphi = O\left(\frac{\delta z}{L}\right) = \frac{H_0}{L} O\left(\varepsilon\right), \tag{22}$$

где L – характерный горизонтальный масштаб бароклинного течения. Следовательно,

$$\delta l = \frac{\delta l_0}{\cos\varphi} = \delta l_0 \left(1 + \frac{H_0^2}{L^2} O\left(\varepsilon^2\right)\right). \tag{23}$$

Далее, $\mathbf{v}\left(z\right) = \mathbf{v}\left(z_0 + \delta z\right) = \mathbf{v}\left(z_0\right) + \left(\partial\mathbf{v}/\partial z\right)_{z=z_0} \delta z + O\left[\left(\delta z\right)^2\right]$, и согласно соотношениям термического ветра (9.36)

$$\left|\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}\right| = O\left(\frac{g}{f_0 L}\frac{\theta}{\Theta_S}\right) = \frac{g}{f_0 L} O\left(\varepsilon^2\right).$$

Поэтому с учетом (9.13), (9.14)

$$\left|\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}\delta z\right| = \frac{gH_0}{f_0 L} O\left(\varepsilon^3\right) = \frac{gH_0}{f_0^2 L^2}\frac{f_0 L}{U} UO\left(\varepsilon^3\right) = \xi^{-1}\varepsilon^{-1} UO\left(\varepsilon^3\right) = UO\left(\varepsilon\right).$$

В результате получаем оценку $\mathbf{v}\left(z\right) = \mathbf{v}\left(z_0 + \delta z\right) = \mathbf{v}\left(z_0\right) + UO\left(\varepsilon\right)$, подстановка которой в $\Gamma = \oint\limits_C \mathbf{v}\delta\mathbf{l}$ дает

$$\Gamma = \Gamma_0\left(1 + O\left(\varepsilon\right)\right),$$

ч.т.д.

Именно это обстоятельство позволяет использовать в качестве одного из граничных условий сохранение Γ_0 при интегрировании квазигеострофических уравнений бароклинных движений в океане, поскольку в этом случае скорости течений определяются с такой же точностью.

Заметим, что для баротропных геофизических течений инвариантность Γ_0 выполняется строго, поскольку в этом случае вертикальный сдвиг скорости отсутствует и жидкие частицы движутся вдоль горизонтальных поверхностей. *Убедитесь в этом непосредственно*, интегрируя уравнения мелкой воды, записанные в форме Громеки-Лэмба, вдоль горизонтального замкнутого контура, целиком принадлежащего границе области, занятой жидкостью.

3. О вычислении интегральных инвариантов. В третьей части этого курса мы будем использовать интегральные инварианты для исследования устойчивости геофизических течений. В связи с этим рассмотрим один поучительный пример их вычислений и покажем, как *из локального закона сохранения энергии* (10.3), (10.4) *для бароклинных течений следует инвариантность суммарной энергии* (10.5) , *при условии что на границах области, занятой жидкостью, нормальная составляющая скорости обращается в нуль*. В качестве области интегрирования V возьмем цилиндрический кольцевой сосуд с плоскими горизонтальными торцами, расположенными на фиксированных высотах $z = z_1,\ \ z_2$. (Это наиболее типичная область интегрирования, которая используется для изучения устойчивости зональных атмосферных течений и их лабораторных аналогов. Для наглядности рассуждений используйте рис. 1б, мысленно изображая внутренний цилиндр, ось которого совпадает с $OO\prime$.)

Условия обращения нормальной составляющей скорости в нуль на боковых стенках кольцевого канала и сохранения циркуляции Γ_0 с помощью соотношения геострофического ветра $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla\psi$ можно записать в терминах функции тока:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \implies \mathbf{n} \times \nabla\psi = 0 \text{ на } \partial V_S, \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}\oint\limits_C \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{l} = 0 \implies \frac{d}{dt}\oint\limits_{C_0} \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{l} = 0. \tag{25}$$

Здесь через ∂V_S обозначена боковая граница области интегрирования, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}$ – соответственно единичная нормаль к ∂V_S и вертикальный орт, а интегрирование проводится по горизонтальным замкнутым контурам C_0, целиком принадлежащим боковой границе.

Проинтегрируем (10.3) с учетом (10.4) по объему V и для преобразования правой части (10.3) воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса

$$-\iiint\limits_V Div\mathbf{S}_{bc}\delta\mu = -\iint\limits_{\partial V_S} \mathbf{S}_{bc} \cdot \delta\,\boldsymbol{\sigma} =$$

$$\iint\limits_{\partial V_S} \rho_S\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t}dxdz + \iint\limits_{\partial V_S} \rho_S\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\widetilde{\Omega}_{bc}dxdz + \iint\limits_{\partial V_H} \frac{f_0^2}{N^2}\rho_S\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial t}dxdy. \tag{26}$$

Здесь ∂V_H – горизонтальная граница области интегрирования, x, y, z – локальные декартовы координаты, направленные соответственно азимутально, по радиусу и вертикально.

Второе слагаемое (26) равно нулю в силу граничного условия (24). По той же причине функция ψ на боковой границе ∂V_S не зависит от x ($\partial\psi/\partial x = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0$ на ∂V_S). Поэтому для первого слагаемого (26) интеграл по азимутальной координате можно записать в виде

$$\oint \rho_S \psi \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial y} dx = \rho_S \psi \frac{\partial}{\partial t}\oint \frac{\partial \psi}{\partial y} dx = \rho_S \psi \frac{d}{dt}\oint \mathbf{n}\cdot\nabla\psi dl = 0,$$

причем последнее равенство обеспечивается краевым условием (25).

С помощью соотношения (9.33) последнее слагаемое в правой части (26) можно записать в виде:

$$\iint\limits_{\partial V_H} \frac{f_0^2}{N^2}\rho_S \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} dxdy = \left(d\Theta_S/dz\right)^{-1} f_0 \rho_S \iint\limits_{\partial V_H} \psi \frac{\partial \theta}{\partial t} dxdy. \qquad (27)$$

Обратимся теперь к уравнению (9.22), умножив которое на ψ, после несложных тождественных преобразований с учетом бездивергентности геострофического ветра получим

$$\psi \frac{\partial \theta}{\partial t} = -div\left(\psi\theta\mathbf{v}\right) - \psi w \frac{d\Theta_S}{dz}.$$

Делаем подстановку последнего равенства в подынтегральное выражение правой части (27) и вновь применяем формулу Остроградского-Гаусса:

$$\iint\limits_{\partial V_H} \psi \frac{\partial \theta}{\partial t} dxdy = -\oint \psi\theta\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} dl - \frac{d\Theta_S}{dz}\iint\limits_{\partial V_H} \psi w dxdy.$$

Правая часть этого равенства равна нулю из-за обращения в нуль нормальной компоненты скорости на ∂V, что и доказывает в конечном итоге инвариантность полной энергии, задаваемой формулой (10.5). Полезно, однако, иметь в виду, что в случае, когда на горизонтальных границах вертикальная скорость отлична от нуля, последнее слагаемое в правой части (26) можно представить в виде

$$\iint\limits_{\partial V_H} \frac{f_0^2}{N^2}\rho_S \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} dxdy = -f_0 \rho_S \iint\limits_{\partial V_H} \psi w dxdy = -\iint\limits_{\partial V_H} p' w dxdy. \qquad (28)$$

Отсюда видно, что оно описывает работу, которую совершают силы давления на торцах кольцевого канала. В случае вязкой жидкости именно такой механизм потери энергии, как мы увидим ниже, обеспечивает эффективное торможение атмосферы о земную поверхность из-за образовании в ее окрестности экмановских пограничных слоев. На этом механизме торможения мы подробно остановимся при изучении вязких геофизических течений.

Упражнение

1. Покажите, что в предположениях пункта 3 *интегральная потенциальная завихренность есть первый интеграл движения системы* (9.31), (9.32), *т.е.*

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_V \left[\triangle\psi + f + \frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2\rho_S}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right] dxdydz = 0. \qquad (29)$$

Подсказка. Используя (9.31), запишите частную производную по времени от подынтегрального выражения (29) в дивергентном виде и проинтегрируйте полученное равенство по всему объему с учетом краевых условий (24) и (25).

Литература

1. Томпсон Ф. *Анализ и предсказание погоды численными методами*, М.: ИИЛ, 1962.

2. Курганский М.В. *Введение в крупномасштабную динамику атмосферы*, С-П.: Гидрометеоиздат, 1993.

3. Педлоски Дж. *Геофизическая гидродинамика*, М.: Мир, 1984.

Часть III

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ЦИКЛОГЕНЕЗ

Лекция 12

Механические прообразы уравнений движения баротропной жидкости и их фундаментальных инвариантов

В Части 1 сформулированы основные принципы и законы движения идеальных несжимаемой и сжимаемой жидкостей, на основании которых в Части 2 выведены уравнения и краевые условия для описания глобальных баротропных и бароклинных геофизических течений. В Части 3 мы воспользуемся ими для выяснения конкретных механизмов, ответственных за циклогенез, т.е. рождение циклонов и антициклонов – основных погодообразующих элементов. Начнем эту часть с формулировки механических прообразов уравнений движения баротропной и бароклинной жидкости и их фундаментальных инвариантов. Они помогут нам в дальнейшем понять нелинейные механизмы гидродинамической неустойчивости и качественно описать характерные свойства и энергетику основных режимов общей циркуляции атмосферы, не прибегая к весьма трудоемкому численному интегрированию гидродинамических уравнений.

1. Предварительные замечания. В 1879 году известный английский гидродинамик Гринхилл (A.G. Greenhill) сделал наблюдение, теоретическое значение которого было осознано почти столетием позже. Речь идет о том, что уравнения Эйлера движения твердого тела с неподвижной точкой строго описывают течение идеальной однородной несжимаемой жидкости (уравнения движения которой, кстати, тоже носят имя Эйлера) внутри разноосного эллипсоида в классе пространственно линейных полей скорости. Оставим в стороне прикладное значение этого открытия, которое

использовалось, в частности, такими классиками науки как Н.Е. Жуковский, Хаф (S.S. Hough) и Пуанкаре (H. Poincaré) для изучения движений твердых тел с полостями, заполненными жидкостью (см. Моисеев, Румянцев, 1965). Для нас важным является другое обстоятельство, а именно: результат Гринхилла наводит на мысль, что механические и гидродинамические уравнения Эйлера обладают общими фундаментальными свойствами симметрии, которые должны сказаться на общности характеристик их решений. Решающий шаг в этом направлении сделал В.И. Арнольд, который сформулировал теоретико-групповое понятие твердого тела с конфигурационным пространством (пространство обобщенных координат) – произвольной группой Ли. Такая конструкция, названная Арнольдом обобщенным твердым телом (ОТТ), включает в себя механические и гидродинамические уравнения Эйлера как частные случаи, которые получаются, если в качестве конфигурационных пространств взять соответственно $SO(3)$ – группу собственных вращений трехмерного эвклидова пространства и $SDiffD$ – группу гладких отображений ограниченной области D трехмерного эвклидова пространства в себя, сохраняющих элемент объема. Таким образом, уравнения Эйлера движения классического гироскопа можно рассматривать в качестве механических прообразов уравнений Эйлера движения идеальной несжимаемой жидкости. Кроме того, Арнольд обнаружил, что механическими аналогами циркуляционной теоремы Кельвина и теоремы Рэлея (о ней пойдет речь в одной из следующих лекций) об устойчивости течения идеальной жидкости, профиль скорости которого не имеет точек перегиба, являются соответственно закон сохранения момента количества движения и теоремы Эйлера об устойчивости вращений гироскопа вокруг малой и большой осей его тензора инерции.

Следующий шаг был сделан автором этих лекций, который обобщил конструкцию Арнольда на случаи движения ОТТ во внешних силовых полях, обладающих скалярным или векторным потенциалом. В итоге были введены теоретико-групповые понятия обобщенного тяжелого волчка (ОТВ) и обобщенной магнитогидродинамической системы (ОМГДС), включающие в себя уравнения Эйлера-Пуассона движения тяжелого волчка и уравнения Обербека-Буссинеска движения несжимаемой расслоенной жидкости в поле сил тяжести и соответственно уравнения движения иде-

ального твердого проводника в магнитном поле и уравнения магнитной гидродинамики. На этой основе были найдены механические прообразы других известных фундаментальных гидродинамических инвариантов, таких как потенциальный вихрь и МГД-инварианты Вольтьера. Часть этих результатов, относящиеся к однородной и расслоенной несжимаемым жидкостям, иллюстрируется здесь (строгое доказательство возможно лишь на основе теоретико-группового подхода) элементарным образом на основе гидродинамических трактовок механических уравнений Эйлера и Эйлера-Пуассона. Это поможет нам в дальнейшем понять нелинейные механизмы баротропной и бароклинной неустойчивостей, не прибегая к утомительному численному интегрированию гидродинамических уравнений, и даже сконструировать игрушечную модель общей циркуляции атмосферы, воспроизводящую фундаментальные свойства глобальных движений реальной атмосферы.

2. Гидродинамическая трактовка уравнений Эйлера движения классического гироскопа и их инвариантов. Рассмотрим движение идеальной однородной несжимаемой жидкости внутри разноосного эллипсоида

$$S \equiv \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 = 0,$$

предполагая, что оси системы отсчета совпадают по направлению с его главными осями, а начало находится в его центре. Вообще говоря, такое движение описывается уравнениями Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p, \quad div\mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

или уравнением Гельмгольца

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} = \{\mathbf{\Omega}, \mathbf{u}\}, \tag{2}$$

если речь идет о строго вихревых бездивергентных течениях, с условиями непроницаемости границы

$$(\mathbf{u}\nabla)\,S = 0 \text{ при } S = 0. \tag{3}$$

Здесь плотность $\rho_0 = const$, $\mathbf{\Omega} = rot\mathbf{u}$, $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} = (\mathbf{A}\nabla)\,\mathbf{B} - (\mathbf{B}\nabla)\,\mathbf{A}$ – скобки Пуассона векторных полей $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

Бездивергентные векторные поля

$$\mathbf{W}_1 = -\frac{a_2}{a_3}x_3\mathbf{j} + \frac{a_3}{a_2}x_2\mathbf{k},$$

$$\mathbf{W}_2 = -\frac{a_3}{a_1}x_1\mathbf{k} + \frac{a_1}{a_3}x_3\mathbf{i}, \tag{4}$$

$$\mathbf{W}_3 = -\frac{a_1}{a_2}x_2\mathbf{i} + \frac{a_2}{a_1}x_1\mathbf{j}$$

($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орты в направлении координатных осей) являются точными частными стационарными решениями уравнений (1), (2), удовлетворяющими краевым условиям (3), и описывают жидкие "эллиптические" вращения вокруг соответствующих главных осей эллипсоида. Как элементы пространства векторных полей, в котором метрика задается скалярным произведением

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \iiint\limits_D \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dxdydz$$

(знак $\cdot$ означает обычное локальное скалярное произведение, D – объем, ограниченный эллипсоидом), они удовлетворяют условиям ортогональности, т.е.

$$\langle \mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j \rangle = 0 \text{ при } i \neq j. \tag{5}$$

Поэтому в пространстве линейных бездивергентных векторных полей, касательных границе области D, совокупность $\mathbf{W}_k\,(k = 1, 2, 3)$ можно рассматривать в качестве ортогонального базиса и искать общее нестационарное решение гидродинамических уравнений в таком пространстве в виде

$$\mathbf{u}\,(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^{3} \omega_k\,(t)\,\mathbf{W}_k\,(\mathbf{r})\,. \tag{6}$$

Зависящие только от времени коэффициенты $\omega_k\,(t)$ $(k = 1, 2, 3)$, называемые параметрами Пуанкаре, выражаются через компоненты завихренности $\mathbf{\Omega}$ согласно формулам:

$$\omega_k = \frac{a_1 a_2 a_3}{a_k I_k}\Omega_k \quad (k = 1, 2, 3)\,. \tag{7}$$

Здесь $I_k = \sum_{s=1}^{3} a_s^2 - a_k^2 \quad (k = 1, 2, 3)$ – ненулевые элементы диагональной матрицы I (см. (9)).

Делая теперь подстановку (6) в первое уравнение (1), умножая его поочередно на каждый из базисных векторов $\mathbf{W}_k$ и интегрируя по объему D с учетом условий ортогональности (5) и граничных условий (3), получим следующую систему уравнений для компонент вектора $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega_1} &= (I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3, \\ I_2\dot{\omega_2} &= (I_1 - I_3)\,\omega_3\omega_1, \\ I_3\dot{\omega_3} &= (I_2 - I_1)\,\omega_1\omega_2. \end{aligned} \tag{8}$$

В векторной форме ее можно переписать в виде:

$$\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}, \mathbf{m} = I\boldsymbol{\omega}. \tag{8a}$$

Здесь I – упомянутая диагональная матрица, компоненты которой выражаются через главные полуоси эллипсоида:

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2^2 + a_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3^2 + a_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^2 + a_2^2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Уравнения (8) или (8а) с точностью до формальной замены $\boldsymbol{\omega} \to -\boldsymbol{\omega}$ совпадают с уравнениями Эйлера движения классического гироскопа и, следовательно, обладают двумя квадратичными положительными первыми интегралами движения:

$$E_M = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{m_1^2}{I_1} + \frac{m_2^2}{I_2} + \frac{m_3^2}{I_3}\right), \tag{10}$$

$$m^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 \equiv m_1^2 + m_2^2 + m_3^2. \tag{11}$$

В свете новой (гидродинамической) трактовки механических уравнений Эйлера интересно, а главное, как мы увидим ниже, практически важно понять не очевидный физический смысл упомянутой замены и гидродинамическое происхождение инварианта (11). Очевидно лишь происхождение первого инварианта: делая

подстановку (6) в выражение для кинетической энергии жидкости, заключенной внутри эллипсоида, получим

$$E = \frac{1}{2}\rho_0 \iiint\limits_D u^2 dxdydz = \frac{1}{5}\mu E_M, \quad \mu = \frac{4}{3}\rho_0 \pi a_1 a_2 a_3.$$

Другими словами, инвариантность E_M, как и в случае механического волчка, означает сохранение кинетической энергии жидкого волчка. О гидродинамическом же происхождении второго инварианта до недавнего времени в литературе не упоминалось. Оно, по-видимому, приписывалось конечномерной редукции исходных уравнений движения. Но это не так, и вопрос непосредственно связан с упомянутой заменой. Дать строгое объяснение необходимости такой замены можно лишь на основе теоретико-группового подхода. Здесь я отмечу лишь, что оно основано на следующем наблюдении. Механические уравнения Эйлера записаны в системе координат, неподвижной относительно тела, а гидродинамические уравнения – относительно пространства, т.е. при переходе от механической трактовки уравнений Эйлера к гидродинамической – подвижная и неподвижная системы координат обмениваются ролями. Поэтому, если какое-нибудь свойство механического волчка оказывается инвариантным относительно пространства, то для жидкого волчка оно будет инвариантно относительно жидкости. В частности, инвариантность механической величины m^2 есть следствие сохранения момента количества в пространстве, т.е. неподвижности этого вектора в пространстве. Тогда инвариантность гидродинамического m^2 должна быть следствием неподвижности некоторого векторного поля относительно жидкости. Но единственным таким векторным полем, характеризующим движение идеальной несжимаемой однородной жидкости, является завихренность, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца (2). Следствием этого является теорема Кельвина, которая в инфинитезимальной формулировке записывается в виде

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}) \equiv \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\delta\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\Omega}\frac{d\delta\boldsymbol{\sigma}}{dt} = 0 \quad \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\right), \tag{12}$$

где $\boldsymbol{\Omega}\cdot\delta\boldsymbol{\sigma} = K$ - инвариант Кельвина, а $\delta\boldsymbol{\sigma}$ - площадь элемента ориентированной поверхности, ограниченной стягиваемым замкнутым

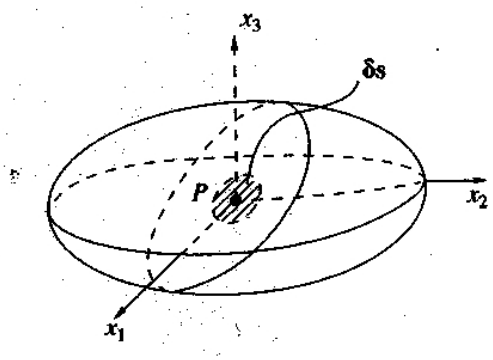


Рис. 1. Жидкий элемент плоскости P, проходящей через начало координат - центр эллипсоида, в процессе движения не меняет местоположение своего центра.

жидким контуром. Напоминаю (см. 1.25), что движение этого элемента описывается уравнением

$$\frac{d\boldsymbol{\delta\sigma}}{dt} = -\delta\boldsymbol{\sigma}\frac{\delta\mathbf{u}}{\delta\mathbf{r}} \quad \left(\left(\delta\boldsymbol{\sigma}\frac{\delta\mathbf{u}}{\delta\mathbf{r}}\right)_i = \sum_{k=1}^{3}\delta\sigma_k\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right). \tag{13}$$

Возьмем применительно к рассматриваемому течению в качестве $\delta\boldsymbol{\sigma}$ элемент плоскости P, проходящей через начало координат - центр эллипсоида, как показано на рис. 1. Поскольку мы имеем дело с течением, которое сохраняет неподвижной в пространстве жидкую частицу в начале координат, выделенный элемент, рассматриваемый как жидкая поверхность, будет лишь деформироваться и поворачиваться в пространстве, не меняя местоположения своего центра. Это означает, что $\delta\boldsymbol{\sigma} = \delta\boldsymbol{\sigma}(t)$ есть функция только времени и не зависит от пространственных координат. Тогда в результате подстановки (6) и (7) в (12) и (13) получаем

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{l}) = 0, \quad l_i = \frac{a_i}{a_1a_2a_3}\delta\sigma_i \ \ (i=1,2,3), \tag{14}$$

$$\dot{\mathbf{l}} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{l}. \tag{15}$$

Отсюда следует, что инвариант Кельвина для рассматриваемого класса течений можно записать в виде

$$K = \mathbf{m} \cdot \mathbf{l},$$

где $\mathbf{l}$ удовлетворяет уравнению Пуассона (15).

Поскольку $\mathbf{m}$ описывается уравнением ($8a$) формально тождественным уравнению (15), то заменяя в (14) $\mathbf{l}$ на $\mathbf{m}$, получаем:

Инвариант $\mathbf{m}^2$ *для гидродинамического волчка есть прямое следствие теоремы Кельвина, а ее механическим прототипом является закон сохранения момента количества движения.*

3. Механический и жидкий гироскопы в поле сил Кориолиса. С точки зрения геофизической гидродинамики особый интерес представляет влияние сил Кориолиса на движение жидкого и механического волчков. В отношении механического волчка нужно только уточнить, о какой собственно вращающейся системе координат идет речь. Поскольку уравнения Эйлера для гидродинамического волчка записываются относительно пространства, а для механического волчка – относительно тела, то и ось вращения новой системы отсчета для механического волка должна быть выбрана неподвижной относительно тела, а не относительно пространства. В противном случае уравнения механического и жидкого гироскопов окажутся не эквивалентными хотя бы уже потому, что угловая скорость общего вращения, измеренная относительно тела, будет зависеть от времени.

Итак, пусть $\mathbf{\Omega}_0$ – постоянная угловая скорость вращения новой системы координат относительно тела. Воспользуемся известной формулой преобразования производных по времени для произвольного вектора $\mathbf{A}$ относительно неподвижной и вращающейся систем отсчета (см. Ландау и Лифшиц, 1973):

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_R + \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{A}, \tag{16}$$

где индексом R обозначена производная по времени относительно вращающейся системы отсчета.

Пусть $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{m}$ – угловая скорость и кинетический момент тела относительно пространства, а $\boldsymbol{\omega}_R$ и $\mathbf{m}_R$ - угловая скорость и кинетический момент относительно новой системы отсчета, причем $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_R + \mathbf{\Omega}_0$, $\mathbf{m} = \mathbf{m}_R + \mathbf{m}_0$ ($\mathbf{m}_0 = I\mathbf{\Omega}_0$). Применяя формулу (16) с

учетом того, что $d\mathbf{m}/dt = 0$ (закон сохранения момента количества движения) имеем

$$\left(\frac{d\left(\mathbf{m}_R + \mathbf{m}_0\right)}{dt}\right)_R + \left(\boldsymbol{\omega}_R + \boldsymbol{\Omega}_0\right) \times \left(\mathbf{m}_R + \mathbf{m}_0\right) = 0. \tag{17}$$

Перейдем теперь в систему отсчета, неподвижную относительно тела, которая вращается относительно первоначально выбранной с угловой скоростью $-\boldsymbol{\Omega}_0$. Тогда, согласно (16),

$$\left(\frac{d\left(\mathbf{m}_R + \mathbf{m}_0\right)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\left(\mathbf{m}_R + \mathbf{m}_0\right)}{dt}\right)_C - \boldsymbol{\Omega}_0 \times \left(\mathbf{m}_R + \mathbf{m}_0\right),$$

где индексом C обозначена производная по времени в неподвижной относительно тела системе координат. После подстановки последней формулы в (17) с учетом, что в выбранной системе отсчета $\dot{\mathbf{m}}_0 = 0$, уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в поле сил Кориолиса записываются в виде (индексы R и C опущены):

$$\dot{\mathbf{m}} = \left(\mathbf{m} + \mathbf{m}_0\right) \times \boldsymbol{\omega},\ \mathbf{m} = I\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{m}_0 = I\boldsymbol{\Omega}_0, \tag{18}$$

где под $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{m}$ следует понимать угловую скорость тела и его кинетический момент относительно вращающейся системы координат, но измеренные относительно системы отсчета, неподвижной относительно тела.

Уравнения движения жидкого гироскопа в поле сил Кориолиса легко получить, применяя к уравнениям движения вращающейся жидкости

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p,\quad \mathrm{div}\mathbf{u} = 0 \tag{19}$$

такую же операцию, какая использовалась выше в отношении уравнений (1). В итоге получим, что на классе пространственно линейных полей скорости движение идеальной однородной несжимаемой жидкости внутри эллипсоида, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_0$, описывается уравнениями:

$$\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{m} + 2\mathbf{m}_0\right),\ \mathbf{m} = I\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{m}_0 = I\boldsymbol{\omega}_0. \tag{20}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}_0$ аффинно преобразованные завихренность $\boldsymbol{\Omega}$ и угловая скорость общего вращения $\boldsymbol{\Omega}_0$ (см (7)). Уравнения (20) с точностью до тривиальных замен $\boldsymbol{\omega} \longrightarrow -\boldsymbol{\omega}$ и $2\boldsymbol{\omega}_0 \longrightarrow -\boldsymbol{\Omega}_0$ совпадают с (18). Необходимость таких замен связана, во-первых с тем, что в эйлеровом описании гидродинамические уравнения записываются не относительно "тела" (жидкости), а относительно пространства, а во-вторых, уравнения (20) записаны в терминах завихренности, равной удвоенной угловой скорости локального вращения жидкости.

Уравнения (20) имеют два квадратичных первых интеграла движения:

$$E = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m},\ K^2 = (\mathbf{m}+2\mathbf{m}_0)^2, \tag{21}$$

которые соответствуют кинетической энергии и инварианту Кельвина. Это, в частности, означает, что уравнения (20), как и механические уравнения Эйлера, интегрируемы в квадратурах.

Упражнения. 1.

Попытайтесь изобразить фазовый портрет механического или жидкого волчка в пространстве компонент момента количества движения или его гидродинамического аналога, используя инварианты (10), (11). Найдите неподвижные точки (стационарные решения). Как ведут себя фазовые траектории в их малых окрестностях?

2. Как выражается давление внутри жидкого гироскопа через параметры Пуанкаре?

Ответ:

$$p\,(r,t) = \rho_0 \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} P_{ij}\omega_i\omega_j,$$

где

$$P_{ii} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3} x_s^2 - x_i^2,\ P_{ij} = -\frac{a_i a_j}{a_i^2 + a_j^2} x_i x_j.$$

3. Попытайтесь с помощью инвариантов (21) изобразить фазовый портрет волчка в поле сил Кориолиса в зависимости от числа $Ro = |\boldsymbol{\omega}/2\boldsymbol{\omega}_0|$ при условии, что общее вращение происходит вокруг одной из главных осей эллипсоида.

Подсказка. Траекториями являются пересечения "энергетического" эллипсоида

$$\frac{m_1^2}{2EI_1} + \frac{m_2^2}{2EI_2} + \frac{m_3^2}{2EI_3} = 1$$

с "циркуляционной" сферой радиуса K и центром в точке $-2\mathbf{m}_0$. Вообще, эту задачу следует решать с помощью компьютера, однако для малых чисел Россби результат легко сообразить. Опишите движение при малых числах Россби в аналитической форме. Что оно вам напоминает?

Литература

1. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики*, М.: Наука, 1965.

2. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. *Динамика тел с полостями, содержащими жидкость*, М.: Наука, 1965.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика*, М.: Наука, 1973.

4. Должанский Ф.В. *О механических прообразах фундаментальных гидродинамических инвариантов и медленных многообразий*, УФН, Т. 175, 12, 2005.

Лекция 13

Механические прототипы уравнений движения идеальной бароклинной жидкости в гравитационном поле и их фундаментальных инвариантов

1. Гидродинамическая трактовка уравнений Обербека-Буссинеска движения несжимаемой стратифицированной жидкости в поле сил тяжести. Упомянутые уравнения представляют для нас особый интерес в связи с широким применением их в исследованиях конвекции несжимаемой жидкости, включая конвекцию вращающейся жидкости, и механизмов бароклинной неустойчивости. В Части 1 мы уже отмечали, что в механизме бароклинной неустойчивости определяющую роль играет не сжимаемость, а расслоенность жидкости. Именно поэтому в теоретических исследованиях нет смысла усложнять задачу учетом сжимаемости, если речь не идет об около или сверхзвуковых движениях. Уравнения Обербека-Буссинеска записываются в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \frac{\rho}{\rho_0}\mathbf{g}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\rho = 0, \quad div\mathbf{u} = 0. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения, $\rho = \rho\,(\mathbf{r}, t)$ – отклонение плотности от среднего фонового значения $\rho_0 = const$, p – отклонение давления от равновесного гидростатического распределения $P_0 = P_0\,(z)$ $(dP_0/dz + g\rho_0 = 0)$. При выводе (1) пренебрегается избытком гидродинамического напора $\rho d\mathbf{u}/dt$ по сравнению с архи-

медовыми силами, а $(\rho/\rho_0)\,\mathbf{g}$ – результирующая сил гравитации и Архимеда (см. Ландау, Лифшиц, 1986):

В терминах завихренности $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{q} = \nabla\rho/\rho_0$ уравнения движения принимают вид:

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} - \{\mathbf{\Omega}, \mathbf{u}\} = -\mathbf{g} \times \mathbf{q}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{q} = -\mathbf{q}\frac{\delta \mathbf{u}}{\delta \mathbf{r}}. \tag{4}$$

Они сохраняют полную энергию жидкости

$$E = \frac{1}{2}\rho_0 \iiint\limits_D u^2 dxdydz - \iiint\limits_D \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} dxdydz \tag{5}$$

и обладают двумя лагранжевыми инвариантами – потенциальным вихрем

$$\Pi = \mathbf{\Omega} \cdot \nabla\rho \tag{6}$$

и плотностью ρ (по определению), причем (4) означает неподвижность поля градиента плотности относительно жидкости.

Эллиптическое вращение такой расслоенной жидкости внутри эллипсоида, произвольно ориентированного в пространстве, можно описать в классе пространственно линейных полей скорости (12.4), (12.6) и плотности

$$\rho\,(r,t) = \mathbf{r} \cdot \nabla\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial \rho}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial \rho}{\partial x_3}x_3, \quad \rho\,(0,t) = 0, \tag{7}$$

где $\nabla\rho = \nabla\rho\,(t)$ зависит только от времени. После подстановки (12.6) и (7) в (3), (4) получается система:

$$\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m} + g\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{l}_0, \tag{8}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}, \ \mathbf{m} = I\boldsymbol{\omega}, \tag{9}$$

где компоненты вектора $\boldsymbol{\sigma}$ – относительные разности плотностей на главных полуосях эллипсоида:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\rho_0}\left(a_1\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\mathbf{i} + a_2\frac{\partial \rho}{\partial x_2}\mathbf{j} + a_3\frac{\partial \rho}{\partial x_3}\mathbf{k}\right),$$

а $\mathbf{l}_0$ - постоянный вектор размерности длины, задаваемый ориентацией эллипсоида в пространстве,

$$\mathbf{l}_0 = a_1\cos\alpha_1\mathbf{i} + a_2\cos\alpha_2\mathbf{j} + a_3\cos\alpha_3\mathbf{k},$$

$\cos\alpha_i$ $(i = 1, 2, 3)$ – направляющие косинусы ускорения силы тяжести $\mathbf{g}$ относительно главных осей эллипсоида.

Согласно (9), $\boldsymbol{\sigma}^2 = const$. Поэтому, вводя единичный вектор $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\sigma}/\sigma$ и делая замену $\boldsymbol{\omega} \to -\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\sigma} \to -\boldsymbol{\sigma}$, систему (8), (9) можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \times \boldsymbol{\omega} + g\sigma\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{l}_0, \tag{10}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \ \mathbf{m} = I\boldsymbol{\omega}. \tag{11}$$

А это есть в точности уравнения Эйлера-Пуассона движения тяжелого волчка, записанные в системе координат, неподвижной относительно тела. В этом случае $\mathbf{m}$ и $\boldsymbol{\omega}$ – момент количества движения и угловая скорость тела, σ – масса волчка, $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор в направлении силы тяжести, а $\mathbf{l}_0$ – радиус-вектор центра инерции тела. Уравнения Эйлера- Пуассона обладают тремя первыми интегралами движения:

$$E_M = \frac{1}{2}\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} + g\sigma\mathbf{l}_0 \cdot \boldsymbol{\gamma}, \tag{12}$$

$$\Pi_M = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \ \boldsymbol{\gamma}^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_1^2. \tag{13}$$

Первый из них есть суммарная кинетическая и потенциальная энергия механической системы, второй – проекция момента количества движения в направлении гравитационного поля, которая, согласно теореме Э. Нетер, сохраняется из-за инвариантности гамильтониана (энергии) относительно поворотов вокруг вертикальной оси. Инвариантность $\boldsymbol{\gamma}^2$ есть следствие неподвижности гравитации относительно пространства.

С гидродинамической точки зрения E_M сохраняет свой энергетический смысл, тогда как Π_M есть потенциальный вихрь для рассматриваемых течений, в чем легко убедится непосредственно путем подстановок (12.7) и (7) в (6). Замечательно, однако, что инвариантность потенциального вихря тоже есть следствие теоремы Э. Нетер, поскольку в динамике несжимаемой расслоенной жидкости роль эквипотенциальных поверхностей играют не горизонтальные уровни, как в механическом случае, а поверхности постоянной плотности: любое отображение этой поверхности в себя не меняет суммарную потенциальную энергию расслоенной жидкости. Поэтому для получения гидродинамического аналога механического инварианта Π_M проектировать надо не в направлении вертикали, а

в направлении нормали к поверхности постоянной плотности, т.е. в направлении $\nabla\rho$. Таким образом, между механическим и гидродинамическим инвариантами Π_M и Π имеет место почти буквальная аналогия. Наконец, с гидродинамической точки зрения, как и следовало ожидать, инвариантность $\boldsymbol{\gamma}^2$ есть следствие неподвижности $\nabla\rho$ относительно жидкости, а не гравитации относительно пространства.

Найденные аналогии между уравнениями движения тяжелой жидкости и тяжелого волчка и их инвариантами сохраняют силу и для движений в поле сил Кориолиса при условии, что в механическом случае система отсчета вращается относительно тела, а не пространства. В этом случае механическими прообразами уравнений движения вращающейся расслоенной жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \frac{\rho}{\rho_0}\mathbf{g}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\rho = 0, \quad div\mathbf{u} = 0 \tag{15}$$

с интегральным инвариантом

$$E = \frac{1}{2}\rho_0 \iiint_D \mathbf{u}^2 dxdydz - \iiint_D \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{r}dxdydz \tag{16}$$

и лагранжевыми инвариантами

$$\Pi = (\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\Omega}_0)\cdot\nabla\rho \text{ и } \rho \tag{17}$$

служат уравнения

$$\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{m} + 2\mathbf{m}_0) + g\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{l}_0, \tag{18}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{m} = I\boldsymbol{\omega}, \mathbf{m}_0 = I\boldsymbol{\omega}_0, \tag{19}$$

которые заменой $\boldsymbol{\omega} \to -\boldsymbol{\omega}$, $2\boldsymbol{\omega}_0 \to -\boldsymbol{\omega}_0$ и $\boldsymbol{\sigma}/\sigma \to -\boldsymbol{\gamma}$ приводятся к уравнениям движения тяжелого волчка в поле сил Кориолиса

$$\dot{\mathbf{m}} = (\mathbf{m} + \mathbf{m}_0) \times \boldsymbol{\omega} + g\sigma\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{l}_0, \tag{20}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega},\ \mathbf{m} = I\boldsymbol{\omega}, \mathbf{m}_0 = I\boldsymbol{\omega}_0 \tag{21}$$

с первыми интегралами движения

$$E_M = \frac{1}{2}\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega} + g\sigma\mathbf{l}_0\cdot\boldsymbol{\gamma}, \tag{22}$$

$$\Pi_M = (\mathbf{m}+\mathbf{m}_0)\cdot\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\gamma}^2 = \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_1^2 = 1. \tag{23}$$

В дальнейшем будем придерживаться следующей терминологии. Уравнения движения классического гироскопа в поле сил Кориолиса, принимая во внимание их гидродинамическую трактовку, будем называть *баротропным волчком*, а уравнения (18), (19), учитывающие расслоенность жидкой среды, – *бароклинным волчком.*

2. Квазигеострофическое приближение бароклинного волчка. В свете найденных аналогий определенный интерес, особенно с позиций геофизической гидродинамики, представляет возможность построить механический прообраз квазигеострофических уравнений движения бароклинной атмосферы и понять его гидродинамическую трактовку. Для этого у нас есть идеальный инструмент – бароклинный волчок с его инвариантами, отражающими фундаментальные свойства симметрии уравнений вращающейся бароклинной жидкости. Предварительно заметим, что при описании конвективных процессов, какими, в частности, являются атмосферная циркуляция и ее лабораторные аналоги, уравнения Обербека-Буссинеска записываются в терминах пульсаций температуры, связанных с пульсациями плотности соотношением $T/T_0 = -\rho/\rho_0$. В этом случае в уравнениях (18), (19) величину $\boldsymbol{\sigma}$ следует заменить на

$$-\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{q} = \frac{1}{T_0}\left(a_1\frac{\partial T}{\partial x_1}\mathbf{i} + a_2\frac{\partial T}{\partial x_2}\mathbf{j} + a_3\frac{\partial T}{\partial x_3}\mathbf{k}\right),$$

в терминах которой инварианты записываются в виде:

$$E_M = \frac{1}{2}\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega} + g\mathbf{l}_0\cdot\mathbf{q}, \tag{24}$$

$$\Pi_M = (\mathbf{m}+2\mathbf{m}_0)\cdot\mathbf{q},\ \mathbf{q}^2 = q_1^2+q_2^2+q_1^2. \tag{25}$$

Для вывода искомого приближения воспользуемся в точности той же схемой, которую использовалась в Части 2 в отношении уравнений движения бароклинной атмосферы. Напомним, что подход состоял в следующем.

I. Число Россби $\varepsilon = U/f_0 L = \Omega_z/f_0$ вместе с безразмерными параметрами

$$\xi = \frac{f_0^2 L^2}{gH} = O(\varepsilon), \ \eta = \frac{N^2 H}{g} = O(\varepsilon) \tag{26}$$

предполагаются малыми, причем одинаковый порядок их малости не является необходимым, а использовался лишь для упрощения рассуждений. Здесь f_0 – осредненный параметр Кориолиса, L и H – типичные горизонтальный и вертикальный масштабы глобальных атмосферных течений, U и Ω_z – их характерные горизонтальная скорость и вертикальная завихренность, а $N^2 = -g\rho_0^{-1}\partial\rho/\partial z = gT_0^{-1}\partial T/\partial z$ – квадрат частоты Брента-Вяйселя при условии, что $\partial T/\partial z > 0$.

II. Движение предполагается квазигидростатическим и квазигеострофическим, т.е. соотношения термического ветра выполняются с точностью до $O(\varepsilon)$.

III. Искомое приближение находится путем разложения уравнений сохранения потенциального вихря и переноса температуры по параметру ε с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$.

Пусть $\mathbf{g}$ направлено в отрицательном направлении оси x_3, вокруг которой эллипсоид вращается с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}_0$. Применительно к системе (18), (19) параметры ε, L^2 и H определяются согласно формулам:

$$\varepsilon = \frac{\omega}{2\omega_0} \ \left(\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}\right), \ 2L^2 = a_1^2 + a_2^2, \ H = a_3. \tag{27}$$

Тогда

$$\xi = \frac{2\omega_0^2 (a_1^2 + a_2^2)}{g a_3} = O(\varepsilon), \tag{28}$$

$$N^2 = \frac{g}{T_0}\frac{\partial T}{\partial x_3} = \frac{g q_3}{a_3}, \ \eta = \frac{N^2 a_3}{g} = q_3 = O(\varepsilon). \tag{29}$$

Для гидродинамических уравнений (14), (15) термический ветер задается равенством

$$-(2\mathbf{\Omega}_0\nabla)\,\mathbf{u} = \frac{1}{T_0}\mathbf{g} \times \nabla T + O(\varepsilon) \tag{30}$$

или в координатной форме

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g}{2\Omega_0 T_0}\frac{\partial T}{\partial y} + O(\varepsilon), \ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{g}{2\Omega_0 T_0}\frac{\partial T}{\partial x} + O(\varepsilon). \tag{31}$$

Модельным уравнениям (18), (19) соответствует следующее векторное соотношение термического ветра

$$\boldsymbol{\omega} \times 2\mathbf{m}_0 + g\mathbf{l}_0 \times \mathbf{q} = O(\varepsilon) \tag{32}$$

или в координатной форме ($\mathbf{l}_0 = (0, 0, -a_3)$)

$$\omega_2 = -\frac{a_3 g q_2}{2I_3\omega_0} + O(\varepsilon),\ \omega_1 = -\frac{a_3 g q_1}{2I_3\omega_0} + O(\varepsilon). \tag{31a}$$

С помощью (12.4), (12.6), (31) и (31a) нетрудно показать, что $\omega_2 \propto \partial u/\partial z \propto -\partial T/\partial y$ и $\omega_1 \propto -\partial v/\partial z \propto -\partial T/\partial x$. Поэтому ω_2 и ω_1 можно рассматривать в качестве аффинно преобразованных компонент термического ветра.

Согласно (28), (29) и (31)

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} \propto \frac{\omega_1}{\omega_0} \propto O(\varepsilon) \propto \frac{q_2}{O(\varepsilon)} \propto \frac{q_1}{O(\varepsilon)}$$

Отсюда

$$q_1 \propto q_2 \propto O\left(\varepsilon^2\right). \tag{32)}$$

Запишем теперь модельные уравнения (18), (19) в координатной форме, заменив в них предварительно $\boldsymbol{\sigma}$ на $\mathbf{q}$:

$$I_1\dot{\omega_1} = (I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3 + 2I_3\omega_0\omega_2 + ga_3q_2, \tag{33}$$

$$I_2\dot{\omega_2} = (I_1 - I_3)\,\omega_1\omega_3 + 2I_3\omega_0\omega_1 + ga_3q_1, \tag{34}$$

$$\begin{aligned} I_3\dot{\omega_3} &= (I_2 - I_1)\,\omega_1\omega_2, \\ \dot{q_1} &= \omega_2 q_3 - \omega_3 q_2, \\ \dot{q_2} &= \omega_3 q_1 - \omega_1 q_3, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\dot{q_3} = \omega_1 q_2 - \omega_2 q_1. \tag{36}$$

Принимая во внимание (31a), уравнение (36) дает оценку $\dot{q_3} = o(\varepsilon^3)$. Поэтому с высокой точностью $q_3 = q_{30} = const$. Заменяя теперь в последних двух уравнениях подсистемы (35) q_3 на q_{30} и

исключая из них q_1 и q_2 с помощью $(31a)$, получим следующие уравнения для компонент термического ветра:

$$\dot{\omega_1} = -\left(\frac{ga_3 q_{30}}{2I_3\omega_0} + \omega_3\right)\omega_2,\ \dot{\omega_2} = \left(\frac{ga_3 q_{30}}{2I_3\omega_0} + \omega_3\right)\omega_1,$$

которые получились в результате редукции уравнения эволюции градиента температуры. (Вспомните, что при выводе квазигеострофических уравнений движения бароклинной атмосферы мы на аналогичном этапе редуцировали уравнение эволюции потенциальной температуры.)

Теперь остается понять, что такое квазигеострофический потенциальный вихрь? На основании сделанных выше оценок выражение для потенциального вихря

$$\Pi = (\mathbf{m} + 2\mathbf{m}_0)\cdot\mathbf{q} = I_1\omega_1 q_1 + I_2\omega_2 q_2 + I_3\omega_3 q_3 + 2I_3\omega_0 q_3$$

можно переписать в виде:

$$\Pi = I_3\left(2\omega_0 + \omega_3\right)q_{30} + O\left(\varepsilon^3\right).$$

Поэтому квазигеострофический потенциальный вихрь равен

$$\Pi_G = I_3\left(2\omega_0 + \omega_3\right)q_{30},\ \dot{\Pi}_G = 2I_3 q_{30}\dot{\omega}_3,$$

и его эволюция описывается первым уравнением (35).

Таким образом, квазигеострофическое приближение бароклинного геофизического волчка с фазовым пространством шести измерений описывается трехкомпонентной динамической системой

$$\begin{aligned} I_3\dot{\omega_3} &= \left(I_2 - I_1\right)\omega_1\omega_2, \\ \dot{\omega_1} &= -\left(\frac{ga_3 q_{30}}{2I_3\omega_0} + \omega_3\right)\omega_2, \\ \dot{\omega_2} &= \left(\frac{ga_3 q_{30}}{2I_3\omega_0} + \omega_3\right)\omega_1. \end{aligned} \tag{37}$$

Система записана в терминах определяющих характеристик глобальных геофизических течений – вертикальной завихренности, компонент термического ветра и вертикальной стратификации, причем последняя в рассматриваемом приближении является инвариантом и входит в уравнения движения в качестве заданного

параметра, как и в случае квазигеострофического приближения уравнений движения настоящей бароклинной атмосферы.

После деления каждого из уравнений (37) на ω_0^2 и введения медленного времени и новых зависимых переменных

$$\tau = \omega_0 t,\ X = \frac{\omega_1}{\omega_0},\ Y = \frac{\omega_2}{\omega_0},\ Z = S + \frac{\omega_3}{\omega_0},$$

система (37) записывается в исключительно простой форме:

$$\dot{X} = -YZ,\ \dot{Y} = ZX,\ \dot{Z} = \Gamma XY. \tag{38}$$

Здесь

$$\Gamma = \frac{I_2 - I_1}{I_3} = \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2},\ S = \frac{g a_3 q_{30}}{2 I_3 \omega_0^2},$$

причем S, принимая во внимание (27), есть не что иное, как известный в геофизической гидродинамике параметр стратификации S (см. Педлоски, 1984), связанный с параметром бароклинности $\alpha^2 = L_R^2/L_0^2$ (см. лекцию 11) соотношением

$$S = \frac{N^2 H^2}{f_0^2 L^2} = \frac{L_R^2}{L^2} = \alpha^2 \frac{L_0^2}{L^2}. \tag{39}$$

Здесь L_0 масштаб Россби-Обухова и L_R – внутренний радиус деформации Россби.

В дальнейшем, не умаляя общности, можно положить $a_1 > a_2$. Система (38) обладает двумя квадратичными первыми интегралами движения:

$$E_G = \frac{1}{2}\left(\Gamma X^2 + Z^2\right),\ \Theta_G = X^2 + Y^2, \tag{40}$$

которые при $S = 0$ (нейтральная стратификация) можно трактовать как полную энергию и энтропию (следствие неподвижности ∇T относительно жидкости). Как мы увидим ниже, $S \neq 0$ характеризует степень отклонения от квазигеострофического движения. Согласно теореме Обухова (см. Гледзер, Должанский, Обухов, 1981), система (38), обладающая двумя квадратичными положительными инвариантами, эквивалентна уравнениям Эйлера движения классического гироскопа.

Таким образом, мы получили до некоторой степени неожиданный результат:

Квазигеострофическим приближением уравнений движения тяжелого жидкого волчка в поле сил Кориолиса являются уравнения Эйлера движения твердого тела с неподвижной точкой, сформулированные в терминах определяющих характеристик глобальных геофизических течений, т.е. вертикальной завихренности и компонент термического ветра.

Упражнения.

1. Найдите неподвижные точки системы (33)-(36). Как они соотносятся с неподвижными точками системы (38)? Какие стационарные движения они описывают?

2. Изобразите фазовый портрет системы (38) в пространстве (X, Y, Z), используя инварианты (39).

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*, М.: Наука, 1986.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика*, М.: Наука, 1973.

3. Должанский Ф.В. *О механических прообразах фундаментальных гидродинамических инвариантов и медленных многообразий*, УФН, Т. 175, 12, 2005.

4. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. *Системы гидродинамического типа и их применение,* М.: Наука, 1981.

5. Педлоски Дж. *Геофизическая гидродинамика*, М.: Мир, 1984.

Лекция 14

Понятие динамической устойчивости на примере движения твердого тела с неподвижной точкой

1. Постановка вопроса. Образование вихревых движений самого различного масштаба, начиная от регулярных лабораторных течений, нерегулярного вытекания воды из водопроводного крана, турбулентных течений жидкости в промышленных установках и быстрых реках и заканчивая циркуляциями океана, планетных атмосфер, на звездах и даже формирование галактик, как правило, связано с потерей устойчивости так называемого первичного течения (primary flow), конфигурация которого задается начальными условиями в случае идеальной жидкости, либо внешними источниками энергии, поддерживающими движение вязкой жидкости.

Механизмов неустойчивости известно совсем немного. Например, глобальные течения атмосферы и океана формируются главным образом под влиянием баротропной неустойчивости (т.е. из-за наличия горизонтального сдвига скорости), бароклинной или конвективной неустойчивости, обусловленной избытком потенциальной энергии потока расслоенной жидкости, и орографической неустойчивости, спровоцированной рельефом подстилающей поверхности. Не исключено также, что определенную роль могу играть упомянутые в Части 2 резонансное взаимодействие планетарных волн и так называемая параметрическая неустойчивость, с которой, в частности, пытаются связать известный из наблюдений квазидвухлетний цикл колебаний атмосферной циркуляции.

Устойчивость решения – понятие неоднозначное. Например, устойчивость решения по Ляпунову означает, что для любого $\varepsilon > 0$

всегда найдется $\delta > 0$ такое, что если начальные условия изменить не более, чем на δ, решение в любой момент времени измениться не более, чем на ε, т.е. *это есть устойчивость по возмущениям начальных данных.* Такой подход, однако, строго можно использовать лишь на основе нередуцированных, т.е. нелинейных, гидродинамических уравнений и поэтому имеет ограниченное аналитическое применение, в особенности, когда речь идет о вязких течениях (см. Часть 4).

Основной метод исследования устойчивости основан на использовании линеаризованных относительно рассматриваемого состояния гидродинамических уравнений в предположении, что начальные возмущения упомянутого состояния инфинитезимально малы. В этом случае неустойчивость означает существование неограниченно растущих решений линейных уравнений. С течением времени растущее возмущение достигает некоторого критического значения, начиная с которого линейные уравнения перестают "работать а согласно точным уравнениям из-за влияния нелинейности система переходит в новое качественно другое состояние, или, как говорят физики, происходит фазовый переход. Рассмотрим теперь облако начальных данных в малой окрестности неустойчивого состояния. Каждое такое возмущение неизбежно достигнет того же значения, начиная с которого необходимо учитывать нелинейные члены, и система независимо от выбранных начальных условий перейдет в то же самое вторичное состояние. Однако каждая точка облака достигает упомянутого критического значения в разные времена. Поэтому, если теперь каждое из выбранных начальных возмущений устремить к нулю, то соответствующие им решения для любого момента времени также устремятся к нулю, но *неравномерно относительно всех моментов времени. Это означает, что нет устойчивости по Ляпунову. Другими словами, если доказана неустойчивость в линейном приближении, то это есть неустойчивость и в точном смысле.*

Обратное, вообще говоря, неверно. В таком случае необходимо решать задачу в нелинейной постановке. Применительно к течениям идеальной жидкости весьма эффективным является метод Ляпунова-Арнольда, основанный лишь на использовании первых интегралов движения гидродинамических уравнений, а не их решений. Чтобы на начальном этапе не обременять читателя излиш-

ними техническими сложностями, которые неизбежно возникают при решении конкретных задач гидродинамической устойчивости, затеняющими основополагающую идею, оба подхода иллюстрируются здесь на примере движения твердого тела с неподвижной точкой.

2. Линейная теория. Выбор такого примера сделан не случайно, а по следующим причинам. Во-первых, напоминаю, уравнения Эйлера движения твердого тела с неподвижной точкой имеют, по крайней мере, две гидродинамические трактовки: они описывают течение однородной несжимаемой жидкости внутри разноосного эллипсоида в классе пространственно линейных полей скорости и резонансное взаимодействие трех диспергирующих волн, например, волн Россби. Поэтому доказанные ниже теоремы Эйлера имеют также гидродинамическое применение, в чем мы убедимся еще раз при изучении глобальных атмосферных движений и течения Колмогорова. Во-вторых, теоремы Эйлера, как мы увидим, по сути являются механическим аналогом гидродинамической теоремы Рэлея об устойчивости плоского сдвигового течения однородной несжимаемой жидкости, о которой речь идет в Лекции 18.

Напоминаю, уравнения Эйлера в механической трактовке записываются относительно системы координат, вмороженной в тело, и имеют вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения, $\mathbf{M}$ – момент количества движения или, как его еще называют, кинетический момент, I – тензор моментов инерции, который в главных осях имеет диагональный вид с диагональными элементами I_1, I_2, I_3. В гидродинамической трактовке, которой мы и воспользуемся ниже, уравнения (1) записываются относительно пространства и описывают движение однородной несжимаемой жидкости внутри разноосного эллипсоида на классе пространственно линейных полей скорости. В этом случае

$$I_1 = a_2^2 + a_3^2, \quad I_2 = a_3^2 + a_1^2, \quad I_3 = a_1^2 + a_2^2,$$

где a_1, a_2, a_3 – главные полуоси эллипсоида, причем в гидродинамической трактовке $\boldsymbol{\omega}$ следует заменить на $-\boldsymbol{\omega}$ (следствие того,

что подвижная и неподвижная системы координат обмениваются ролями).

В координатной форме уравнения (1) с точностью до упомянутой замены переписываются в виде

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega_1} &= (I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3, \\ I_2\dot{\omega_2} &= (I_1 - I_3)\,\omega_1\omega_3, \\ I_3\dot{\omega_3} &= (I_2 - I_1)\,\omega_1\omega_2. \end{aligned} \tag{2}$$

На устойчивость исследуются неподвижные точки

$$\omega_i = \omega_0 = const \neq 0,\ \omega_j = \omega_k = 0 \quad (i \neq j \neq k \neq i)\,,$$

т.е. стационарные жидкие вращения вокруг главных осей эллипсоида. Пусть $\omega_i^{'}$ $(i = 1, 2, 3)$ – инфинитезимальное возмущение, например, состояния $\boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0, \omega_0)$.

Решение линеаризованных уравнения движения

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1^{'} &= (I_3 - I_2)\,\omega_0\omega_2^{'}, \\ I_2\dot{\omega}_2^{'} &= (I_1 - I_3)\,\omega_0\omega_1^{'}, \\ I_3\dot{\omega}_3^{'} &= O\left(\omega_1^{'}\omega_2^{'}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

ищем в виде гармонических колебаний

$$\omega_1^{'} = Ae^{-i\lambda t}, \quad \omega_2^{'} = Be^{-i\lambda t}.$$

Подстановка дает систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A и B:

$$\begin{aligned} iI_1\lambda A + (I_3 - I_2)\,\omega_0 B = 0, \\ (I_1 - I_3)\,\omega_0 A + iI_2\lambda B = 0, \end{aligned}$$

которая имеет отличные от нуля решения при условии, что детерминант

$$\begin{vmatrix} iI_1\lambda & (I_3-I_2)\,\omega_0 \\ (I_1-I_3)\,\omega_0 & iI_2\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Отсюда

$$\lambda^2 = \omega_0^2\,(I_3-I_1)\,(I_3-I_2)\,/I_1I_2.$$

Поскольку корни характеристического уравнения комплексно сопряжены, условия устойчивости означают, что $\operatorname{Im}\lambda = 0$. В противном случае найдется корень с положительной мнимой частью, соответствующий экспоненциально растущему решению. Поэтому *в линейном приближении* рассматриваемое решение устойчиво, если

$$\text{а) } I_3 > I_1, I_2 \text{ либо б) } I_3 < I_1, I_2$$

В терминах главных полуосей эти условия означают, что

$$\text{а) } a_3^2 < a_1^2, a_2^2, \text{ либо б) } a_3^2 > a_1^2, a_2^2,$$

т.е. *вращения вокруг короткой и длинной осей эллипсоида устойчивы.* Очевидно, что при $a_1^2 < a_3^2 < a_2^2$, либо $a_1^2 > a_3^2 > a_2^2$, т.е. $I_1 > I_3 > I_2$, либо $I_1 < I_3 < I_2$ корни $\lambda_{1,2}$ характеристического уравнения становятся чисто мнимыми. Это и означает неустойчивость жидкого вращения вокруг средней оси эллипсоида. Применительно к механическому гироскопу полученные результаты формулируются в виде теорем Эйлера.

Теорема 1. Вращения твердого тела с неподвижной точкой вокруг малой и большой осей тензора моментов инерции устойчивы.

Теорема 2. Вращения твердого тела с неподвижной точкой вокруг средней оси тензора моментов инерции неустойчиво.

Применительно к жидкому гироскопу *вращения вокруг малой, большой и средней осей тензора моментов инерции* надо заменить *на вращения вокруг малой, большой и средней осей эллипсоида* соответственно.

Замечание. Линейную систему (3) можно переписать в виде

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}' = L\,(\boldsymbol{\omega}_0)\,\boldsymbol{\omega}',$$

где $\boldsymbol{\omega}' = \left(\omega_1', \omega_2', \omega_3'\right)$, $\boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0, \omega_0)$ и

$$L(\boldsymbol{\omega}_0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{I_3-I_2}{I_1}\omega_0 & 0 \\ \frac{I_1-I_3}{I_2}\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $-i\lambda_{1,2} = \sigma_{1,2}$ есть собственные значения матрицы $L(\boldsymbol{\omega}_0)$, соответствующие собственным колебаниям (собственным векторам) $\boldsymbol{\omega}_1^{'} = (\exp(-i\lambda_1 t), 0, 0)$ и $\boldsymbol{\omega}_2^{'} = (0, \exp(-i\lambda_2 t), 0)$ в окрестности динамического равновесия системы, т.е.

$$L(\boldsymbol{\omega}_0)\,\boldsymbol{\omega}_{1,2}^{'} = \sigma_{1,2}\boldsymbol{\omega}_{1,2}^{'}.$$

Таким образом, описанная выше процедура исследования линейной устойчивости стационарных решений сводится к отысканию собственных значений и векторов линейного оператора, полученного линеаризацией нелинейных уравнений относительно положения равновесия. Это справедливо и в отношении неподвижных точек произвольной динамической системы $\dot{\mathbf{x}} = N(\mathbf{x})\,\mathbf{x}$ ($N(\mathbf{x})$ - нелинейный оператор и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$) порядка n, которая после линеаризации относительно ее неподвижной точки $\mathbf{x} = \mathbf{X}_0$ $\left(\dot{\mathbf{X}}_0 = 0\right)$ приводится к системе линейных уравнений $\dot{\mathbf{x}}^{'} = L(\mathbf{X}_0)\,\mathbf{x}^{'}$ для инфинитезимальных возмущений $\mathbf{x}^{'} = \mathbf{x} - \mathbf{X}_0$. В связи с этим уже на этом этапе уместно заметить, что в отличие от динамических систем с конечным числом степеней свободы в гидродинамике линеаризованный оператор обладает не только дискретным, но и непрерывным спектром собственных значений, который порождает алгебраическую (степенную) неустойчивость, нередко существенно затрудняющую исследование.

3. Нелинейная теория: метод Ляпунова-Арнольда. Уравнения Эйлера (1) обладают двумя положительно-определенными первыми интегралами движения - кинетической энергией и квадратом момента количества движения:

$$E = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{M} = \frac{M_1^2}{2I_1} + \frac{M_2^2}{2I_2} + \frac{M_3^2}{2I_3}, \tag{4}$$

$$M^2 = \mathbf{M}\cdot\mathbf{M} = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2. \tag{5}$$

В терминах M_i $(i = 1, 2, 3)$ уравнения Эйлера переписываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{M_1} &= \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3}\right) M_2 M_3, \\ \dot{M_2} &= \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right) M_3 M_1, \\ \dot{M_3} &= \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right) M_1 M_2. \end{aligned} \tag{3a}$$

Идея метода Ляпунова-Арнольда состоит в отыскании такой линейной комбинации инвариантов движения – функции Ляпунова F, чтобы ее первая вариация в неподвижной точке $\mathbf{M}_0 = (0, 0, M_0)$ $(M_0 = I_3\omega_0)$ обращалась бы в нуль. Тогда знакоопределенность второй вариации в этой же точке означает ее устойчивость. В самом деле, пусть $\delta F(\mathbf{M}_0) = 0$, а $\delta^2 F(\mathbf{M}_0)$ – положительно-определенная квадратичная форма от вариаций δM_i $(i = 1, 2, 3)$ (отрицательную знакоопределенность всегда можно изменить на положительную, изменив знак функции Ляпунова). Это означает, что в точке $\mathbf{M}_0$ функция Ляпунова имеет минимум, а саму вторую вариацию можно взять в качестве меры отклонения решения от стационарного состояния, положив по определению $\| \mathbf{M} - \mathbf{M}_0 \|^2_{(1)} = \delta^2 F(\mathbf{M}_0)$. В качестве второй меры можно взять величину $\| \mathbf{M} - \mathbf{M}_0 \|^2_{(2)} = F(\mathbf{M}) - F(\mathbf{M}_0) = \delta^2 F(\mathbf{M}_0) + o(\delta \mathbf{M}^2)$. В силу последнего равенства обе меры эквивалентны, т.е. существуют такие положительные константы C_1 и C_2, что

$$C_1 \| \mathbf{M} - \mathbf{M}_0 \|_{(1)} \leq \| \mathbf{M} - \mathbf{M}_0 \|_{(2)} \leq C_2 \| \mathbf{M} - \mathbf{M}_0 \|_{(1)} . \tag{6}$$

Предположим теперь, что в начальный момент отклонение $\delta\mathbf{M}$ от неподвижной точки $\mathbf{M}_0$ мало. Тогда мала будет мера $\| \mathbf{M} - \mathbf{M}_0 \|_{(1)}$, а из-за второго неравенства (6) мала мера $\| \mathbf{M} - \mathbf{M}_0 \|_{(2)}$. Но эта вторая мера есть инвариант движения, который будет сохранятся малым в любой момент времени. В силу первого неравенства (6) малой будет сохранятся и мера $\| \mathbf{M} - \mathbf{M}_0 \|_{(1)}$, положительная определенность которой влечет малость отклонения $\delta\mathbf{M}$ в любой момент времени. Проиллюстрируем сказанное конкретными вычислениями.

Функцию Ляпунова будем искать методом неопределенных множителей Лагранжа, полагая

$$F = E + \lambda M^2 = \frac{M_1^2}{2I_1} + \frac{M_2^2}{2I_2} + \frac{M_3^2}{2I_3} + \lambda(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2),$$

где λ - константа, определяемая из условия $\delta F\left(\mathbf{M}_0\right) = 0$.

Вычислим первую и вторую вариации F:

$$\delta F = \left(\frac{1}{I_1} + 2\lambda\right) M_1 \delta M_1 + \left(\frac{1}{I_2} + 2\lambda\right) M_2 \delta M_2 + \left(\frac{1}{I_3} + 2\lambda\right) M_3 \delta M_3,$$
$$\delta^2 F = \left(\frac{1}{I_1} + 2\lambda\right) (\delta M_1)^2 + \left(\frac{1}{I_2} + 2\lambda\right) (\delta M_2)^2 + \left(\frac{1}{I_3} + 2\lambda\right) (\delta M_3)^2 .$$

Из требования $\delta F\left(\mathbf{M}_0\right) = 0$ следует, что $2\lambda = -1/I_3$. Следовательно,

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right) M_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3}\right) M_2^2,$$
$$\delta^2 F = \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right) (\delta M_1)^2 + \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3}\right) (\delta M_2)^2 .$$

Тогда условия устойчивости (знакоопределенность $\delta^2 F$) означают

$$\text{а)} I_3 > I_1, I_2 \text{ либо } \text{б)} I_3 < I_1, I_2,$$

что совпадает с результатами линейной теории.

Очевидно, что при $I_1 > I_3 > I_2$, либо $I_1 < I_3 < I_2$, квадратичная форма $\delta^2 F$ не знакоопределена, что в рамках нелинейной теории означает лишь необходимое условие неустойчивости и, следовательно, доказательство неустойчивости, вообще говоря, требует дополнительного исследования. Однако в данном случае неустойчивость вращения вокруг средней оси доказана линейной теорией, что, как упоминалось выше, обеспечивает неустойчивость в точном смысле.

4. Геометрическая трактовка. В пространстве кинетических моментов M_i $(i = 1, 2, 3)$ траектории волчка образуются пересечениями "энергетических" эллипсоидов (4) с главными полуосями $2EI_i$ $(i = 1, 2, 3)$ и "циркуляционных" сфер (5) радиуса $\mid \mathbf{M} \mid$ с

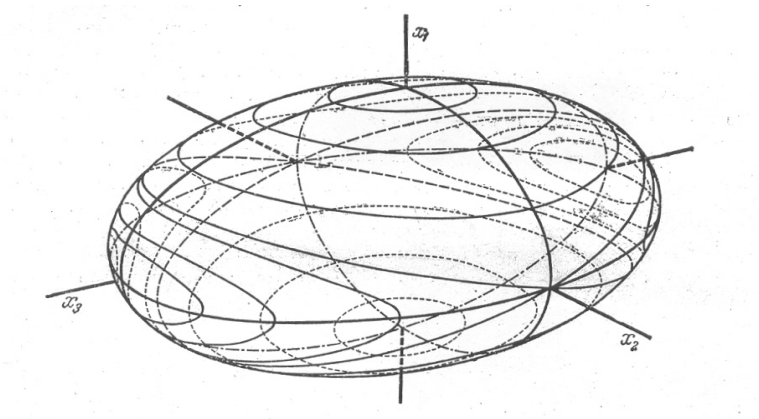


Рис. 1. Линии пересечения "энергетических" эллипсоидов и "циркуляционных" сфер.

центром в начале координат. Это проиллюстрировано на рис. 1, из которого видно, что в окрестностях неподвижных точек, принадлежащих малой и большой главным осям эллипсоида, волчок совершает малые вращательные колебания, т.е. эти неподвижные точки устойчивы и являются полюсами, тогда как неподвижная точка, принадлежащая средней оси, относится к седловой. Эта точка есть точка пересечения двух сепаратрис, вдоль одной из которых траектории притягиваются к неподвижной точке, а вдоль другой – разбегаются на далекие расстояния, чем и объясняется неустойчивость вращения вокруг средней оси. По существу фазовый портрет, представленный на рис. 1, есть геометрическое доказательство теорем Эйлера.

Упражнение 1. Пусть вращение эллипсоида происходит вокруг его главной оси x_3 с эффективной постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0, \omega_0)$, а $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \Omega)$ – стационарное решение уравнений (12.20). Методами линейной теории и Ляпунова-Арнольда попытайтесь сформулировать в терминах числа Россби $Ro = \Omega/2\omega_0$ условия устойчивости этого решения для каждой (малой, большой и средней) из главных осей эллипсоида.

Подсказка. Корни характеристического уравнения определяются из выражения

$$\lambda^2 = \left(\frac{a_1^2 - a_3^2}{I_2}\Omega + 2\frac{I_3}{I_2}\omega_0\right)\left(\frac{a_2^2 - a_3^2}{I_1}\Omega + 2\frac{I_3}{I_1}\omega_0\right).$$

Представьте результат графически в плоскости параметров (Ro, λ^2) и покажите, что силы Кориолиса оказывают двоякое влияние: дестабилизируют устойчивые решения и стабилизируют неустойчивые. Ситуация напоминает поведение маятника Капицы – обычного физического маятника, с колеблющейся точкой подвеса. При определенных условиях верхнее положение равновесия маятника становится устойчивым, а нижнее – неустойчивым. Аналогичный эффект силы Кориолиса оказывают и на глобальные геофизические течения.

Литература

1. Арнольд В.И. *Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости*, ДАН, Т. 162, 5, 1965.

Лекция 15

Постановка задачи о линейной устойчивости плоскопараллельных течений идеальных однородной и неоднородной жидкостей

1. Выбор исходной модели. На прошлой лекции на примере движения твердого тела с неподвижной точкой мы рассмотрели два метода исследования соответственно линейной и нелинейной устойчивости неподвижных точек системы, основанные на линеаризации уравнений движения и использовании первых интегралов движения. Предметом следующих нескольких лекций будет развитие и применение упомянутых методов к изучению устойчивости двумерных стационарных течений идеальной жидкости. Теорема Сквайра (*H.B. Squire*, см. Линь, 1958), согласно которой наиболее неустойчивые моды развиваются в плоскости исследуемого течения, позволяет игнорировать трехмерные возмущения и оставаться в рамках двумерной постановки задачи.

Выше уже упоминалось, что определяющую роль в формировании бароклинных глобальных атмосферных течений играет не сжимаемость жидкости, а ее расслоенность. Поэтому остановимся сначала на изучении линейной устойчивости двумерных течений несжимаемой расслоенной жидкости в поле сил тяжести без учета сил Кориолиса, результаты которого, как мы увидим ниже, легко обобщаются на глобальные бароклинные геофизические течения. Попутно, полагая плотность жидкости постоянной, получим результаты, относящиеся к баротропным течениям, которые также обобщим на глобальные геофизические течения.

Уравнения движения несжимаемой расслоенной жидкости за-

писываются в виде:

$$R\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla P + R\mathbf{g} \quad \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\right), \tag{1}$$

$$\frac{dR}{dt} = 0, \ div\mathbf{u} = 0. \tag{2}$$

Такое нетрадиционное обозначение для плотности R выбрано потому, что мы воспользуемся еще одним упрощением, полагая жидкость слабостратифицированной, т.е.

$$R(\mathbf{r}, t) = R_0 + \rho(\mathbf{r}, t),$$
$$P(\mathbf{r}, t) = P_0(z) + p(r, t),$$

где $R_0 = const$, $P_0(z)$ – гидростатическое давление, соответствующее плотности R_0:

$$\frac{dP_0(z)}{dz} + R_0 g = 0$$

и $\rho/R_0 = O(p/P_0) \ll 1$.

Делая подстановку последних трех равенств в (1), (2) и пренебрегая избытком динамического напора $\rho d\mathbf{u}/dt$ по сравнению с силами плавучести $\rho\mathbf{g}$, поскольку речь идет о конвективных течениях, для которых $\mid d\mathbf{u}/dt \mid \ll \mid \mathbf{g} \mid$, получим уравнения, носящие имя Обербека-Буссинеска (*A. Oberbeck, 1879; J. Boussinesq, 1903*):

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{R_0}\nabla p + \frac{\rho}{R_0}\mathbf{g}, \ \frac{d\rho}{dt} = 0, \ div\mathbf{u} = 0. \tag{3}$$

Такое приближение не повлияет качественно на результаты и выводы линейной теории устойчивости, но несколько упростит громоздкие формулы, которые получаются в точной постановке задачи.

2. Линеаризация уравнений движения. В вертикальной плоскости (x, z) уравнения (3) записываются в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{R_0}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{R_0}\frac{\partial p}{\partial z} - g\frac{\rho}{R_0}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Напомним, что здесь ρ и p - отклонения плотности и давления от их фоновых значений R_0 и P_0, определенных выше.

На устойчивость исследуется стационарное движение жидкости плотности $\rho = \overline{\rho}(z)$ с горизонтальной скоростью $u = U(z)$, $w = 0$. Согласно (4), давление $p = \overline{p}(z)$ в этом случае удовлетворяет гидростатическому соотношению $d\overline{p}/dz + g\overline{\rho} = 0$. Наложим на указанное состояние инфинитезимальные возмущения, полагая $u = U(z) + u'(x,z,t)$, $w = w'(x,z.t)$, $\rho = \overline{\rho}(z) + \rho'(x,z,t)$ и $p = \overline{p}(z) + p'(x,z,t)$, и линеаризируем систему (4), т.е. после подстановки указанных выражений в уравнения движения пренебрежем произведениями малых величин. Тогда линейная система уравнений движения относительно возмущений u', w' ρ' и p' принимает вид:

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)u' + \frac{dU}{dz}w' = -\frac{1}{R_0}\frac{\partial p'}{\partial x},\\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)w' = -\frac{1}{R_0}\frac{\partial p'}{\partial z} - g\frac{\rho'}{R_0},\\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho' + \frac{d\overline{\rho}}{dz}w' = 0,\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Согласно последнему уравнению системы (5), введем функцию тока ψ для возмущений скорости

$$u' = -\frac{\partial \psi}{\partial z},\ w' = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Тогда единственная отличная от нуля составляющая завихренности возмущенной компоненты движения нормальная к плоскости (x,z) равна

$$\frac{\partial w'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial z} = \triangle\psi.$$

Применяя теперь к первым двум уравнениям операцию rot, т.е. дифференцируя первое равенство по z, а второе – по x и вычитая из второго первое, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\triangle\psi-U''\psi_x=-g\frac{\rho_x'}{R_0}.$$

Для исключения ρ_x' подействуем на последнее равенство оператором $\partial/\partial t+U\partial/\partial x$ и воспользуемся третьим уравнением системы (5). В итоге получаем *основное уравнение теории линейной устойчивости плоскопараллельных течений тяжелой расслоенной жидкости, записанное в терминах одной лишь функции тока возмущений скорости:*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\triangle\psi-U''\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_x=-g\beta\psi\ \left(\beta=-\frac{1}{R_0}\frac{d\overline{\rho}}{dz}\right). \tag{6}$$

Параметр β определен так, чтобы его положительные значения соответствовали устойчивой стратификации первичного состояния, т.е. убыванию плотности с высотой.

3. Редукция краевых условий. Если движение жидкости ограничено твердой горизонтальной стенкой, то на ней $w'=\partial\psi/\partial x=0$ или $\psi=const$. Для гладких профилей скорости и плотности первичного течения на этом постановка краевой задачи заканчивается, не считая условий регулярности на бесконечности, если жидкость занимает полупространство или даже все пространство.

Сложнее обстоит дело, когда первичное течение испытывает разрыв скорости или плотности на некотором уровне $z=z_0$, разделяющим, например, две несмешивающиеся жидкости разной плотности. Наложенные на первичное течение возмущения индуцируют пульсации поверхности раздела, в уравнение которой $z=z_0+\zeta(x,t)$ теперь входит неизвестная функция $\zeta(x,t)$, вообще говоря, определяемая из решения краевой задачи. *На указанной поверхности раздела должно выполняться два условия, одно из которых кинематическое – непрерывность нормальной к разрыву составляющей скорости, равной скорости $d\zeta/dt$ самого разрыва. Другое условие динамическое – непрерывность давления, причем оба условия ставятся на поверхности, форма которой заранее неизвестна.* Из-за инфинитезимальности начальных возмущений скорости и плотности естественно предположить малость отклоне-

ния $\zeta(x,t)$ от уровня $z=z_0$. Тогда ситуацию можно сильно упростить линеаризацией условий на разрыве, разлагая их по степеням ζ и приводя к уровню $z=z_0$. В итоге условия на разрыве будут заменены приближенными условиями на уровне $z=z_0$. При этом искажения, неизбежно вносимые линеаризацией в картину движения в окрестности разрыва, слабо отразятся на области, удаленные от него. Для вертикальной скорости имеем

$$w'(x,z_0+\zeta,t)=w'(x,z_0,t)+O(\zeta),$$

причем, поскольку сама вертикальная скорость инфинитезимально мала, второе слагаемое в правой части равенства имеет следующий порядок малости. Поэтому значение w' на разрыве будем заменять ее значением на уровне $z=z_0$.

Заменять давление на разрыве $P(x,z_0+\zeta,t)=P_0(z_0+\zeta)+\overline{p}(z_0+\zeta)+p'(x,z_0+\zeta,t)$ на $P(x,z_0,t)$ было бы опрометчиво из-за потери архимедовых сил, возникающих при вторжении тяжелой жидкости в область, занятую легкой жидкостью, или наоборот. В самом деле, запишем уравнение движения границы раздела в строгой постановке задачи, т.е. не прибегая к приближению Обербека-Буссинеска (напомним, что на границе раздела $w'=d\zeta/dt$):

$$R\frac{d^2\zeta}{dt^2}=-\frac{\partial P}{\partial z}-Rg.$$

Умножим левую и правую части этого уравнения на ζ. В силу инфинитезимальности ζ его (уравнение) можно переписать в виде:

$$P(x,z_0+\zeta,t)=P(x,z_0,t)-gR\zeta-R\zeta d^2\zeta/dt^2, \qquad (7)$$

т.е. давление на уровне z_0 отличается от давления на уровне $z_0+\zeta$ на вес столба жидкости, заключенного между этими поверхностями, с единичной площадью поперечного сечения плюс динамический напор, равный произведению массы этого столба на ускорение. Следует однако подчеркнуть, что *при наличие возмущений уровень $z=z_0$ уже не есть граница раздела. В отсутствие же возмущений давление на невозмущенной границе раздела $z=z_0$ равно гидростатическому, т.е. $P(z_0)=P_0(z_0)+\overline{p}(z_0)$. Поэтому, чтобы найти связь между возмущениями давления на возмущенной границе раздела и возмущениями на уровне $z=z_0$, из обеих*

частей равенства (7) *нужно вычесть* $P(z_0)$ *и линеаризовать произведение* $gR\zeta$. В итоге получим, что для указанных возмущений давления справедлива оценка

$$p'(x, z_0+\zeta, t) = p'(x, z_0, t) - g\bar{R}(z_0)\zeta + O\left(\zeta^2\right), \tag{8}$$

$$(\bar{R}(z_0) = R_0 + \bar{\rho}(z_0)),$$

потому что последнее слагаемое в правой части (7) равно произведению величин одного порядка малости. Таким образом, *в линейной теории устойчивости динамическое условие на возмущенной границе раздела* $z = z_0 + \zeta$ *двух жидкостей заменяется условием непрерывности величины* $p'(x, z, t) - g\bar{R}(z)\zeta$ *на уровне* $z = z_0$, *а при постановки кинематических условий значение вертикальной скорости* $w'(x, z_0+\zeta, t)$ *на возмущенной границе заменяется ее значением* $w'(x, z_0, t)$ *на уровне* $z = z_0$.

Кинематическое условие означает, что частица жидкости, расположенная на разрыве, всегда будет на нем оставаться. Поэтому для нее $z = z_0 + \zeta(x, t)$. Отсюда на на разрыве $w' = dz/dt = d\zeta/dt$. Линеаризируя, получим, что по обе стороны границы раздела

$$w'^{\pm} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^{\pm}\frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta(x, t), \tag{9}$$

где индексы $+$ и $-$ относятся к верхней и нижней жидкостям соответственно. Исключая $\zeta(x, t)$ из верхнего и нижнего кинематических условий (9), получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U^{-}\frac{\partial}{\partial x}\right)w'^{+} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^{+}\frac{\partial}{\partial x}\right)w'^{-},$$

или

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U^{-}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_x^{+} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^{+}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_x^{-}. \tag{10}$$

Это и есть искомая форма кинематического условия на разрыве для линейной задачи устойчивости. В отсутствие скачка горизонтальной скорости U условие (10) означает непрерывность w' или

$$\psi_x^+ = \psi_x^-. \tag{10a}$$

Чтобы сформулировать динамическое условие в терминах ψ, применим к тождеству

$$p'^+(x, z_0, t) - g\bar{R}^+(z_0)\,\zeta = p'^-(x, z_0, t) - g\bar{R}^-(z_0)\,\zeta$$

сначала оператор $-\partial/\partial x$ и воспользуемся первым уравнением системы (5) для исключения давления. Тогда получим

$$R_0^+\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U^+\frac{\partial}{\partial x}\right)u'^+ + \frac{dU^+}{dz}w'^+ + g\bar{R}^+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]$$
$$= R_0^-\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U^-\frac{\partial}{\partial x}\right)u'^- + \frac{dU^-}{dz}w'^- + g\bar{R}^-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right].$$

Если скачок на разрыве обозначить символом $\{\}_-^+$, то последнее равенство после введения функции тока переписывается в виде

$$\left\{R_0\left[-\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_z + \frac{dU}{dz}\psi_x\right]\right\}_-^+ + \left\{g\bar{R}\right\}_-^+\frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0.$$

Теперь, чтобы исключить ζ, подействуем на это равенство оператором $\partial/\partial t + U^+\partial/x$. В итоге с учетом (9) динамическое условие на разрыве выражается в терминах одной неизвестной функции ψ:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U^+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\rho_0\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_z - \frac{dU}{dz}\psi_x\right]\right\}_-^+ - \left\{g\bar{R}\right\}_-^+\psi_{xx}^+ = 0. \tag{11}$$

Замечание. Уместно отметить, что условия (10), (11) слабее исходных из-за применение дополнительного дифференцирования. Поэтому о выполнении исходных условий следует позаботиться при восстановлении поля скорости по функции тока ψ. Кроме того, условие, эквивалентное условию (11), можно получить, применяя для исключения ζ оператор $\partial/\partial t + U^-\partial/x$, но оба они несимметричны относительно поверхности раздела. Условие (11) можно симметризировать, применяя к нему оператор $\partial/\partial t + U^-\partial/x$, но тогда оно станет еще более слабым.

Для однородных жидкостей ($R = const$, $\beta = 0$) уравнение (6) заменяется уравнением более низкого порядка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\triangle\psi - U''\psi_x = 0, \tag{12}$$

а вместо (11) на поверхности раздела предполагается непрерывность возмущений давления, т.е. $p'^{+}(x, z_0, t) = p'^{-}(x, z_0, t)$. После дифференцирования по x с учетом первого уравнения (5) это дает на разрыве

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_z - \frac{dU}{dz}\psi_x\right\}_{-}^{+} = 0. \tag{13}$$

Упражнение. Сформулируйте линейную краевую задачу устойчивости стационарного плоскопараллельного течения неоднородной жидкости на основе точных уравнений (1), (2).

Ответ. Уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2(\triangle\psi - \beta\psi_z) - \left(U'' - \beta U'\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_x = -g\beta\psi \tag{14}$$

$\left(\beta = -\frac{1}{\bar{R}}\frac{d\bar{R}}{dz}\right)$ с краевыми условиями, сформулированными выше (см. Дикий, 1976)

Литература

1. Линь Ц.Ц. *Теория гидродинамической устойчивости*, М.: ИИЛ, 1958.

2. Дикий Л.А. *Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы*, Л.: Гидрометеоиздат, 1976.

Лекция 16

Метод нормальных мод и его простейшие применения в линейной теории устойчивости плоскопараллельных течений

1. Редукция задачи методом нормальных мод. Напомним сухой остаток предыдущей лекции. Именно: краевая задача о линейной устойчивости стационарного плоскопараллельного течения тяжелой жидкости Обербека-Буссинеска задается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\triangle\psi-U''\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_x=-g\beta\psi\ \ \left(\beta=-\frac{1}{\rho_0}\frac{d\overline{\rho}}{dz}\right) \tag{1}$$

с граничными условиями

а) на горизонтальной твердой стенке

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=0\ \ (\psi=const)\,, \tag{2}$$

б) на поверхности разрыва скорости и/или плотности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U^-\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_x^+=\left(\frac{\partial}{\partial t}+U^+\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_x^-\,, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U^+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\rho_0\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_z-\frac{dU}{dz}\psi_x\right]\right\}_-^+$$

$$-\left\{g\bar{R}\right\}_{-}^{+}\psi_{xx}=0. \tag{4}$$

Здесь $\psi=\psi(x,z,t)$ – функция тока для возмущений скорости $u^{'}=-\partial\psi/\partial z$ и $w^{'}=\partial\psi/\partial x$, $U=U(z)$ – скорость первичного горизонтального течения и $\bar{R}(z)=\rho_0+\bar{\rho}(z)$ – плотность, соответствующая гидростатическому состоянию.

Коэффициенты уравнения (1) и краевых условий (2) - (4) не зависят от горизонтальной координаты x и времени t. Поэтому решение можно искать в виде нормальной моды – бегущей волны

$$\psi(x,z,t)=\psi(z)\exp\left(i\alpha\left(x-ct\right)\right), \tag{5}$$

которая является гидродинамическим аналогом гармонических колебаний механической системы. Здесь α – продольное волновое число, c – фазовая скорость волны.

После подстановки (5) в (1)-(4) с учетом отображений $\partial/\partial t\Longrightarrow -i\alpha c$, $\partial/\partial x\Longrightarrow i\alpha$, $(\partial/\partial t+U\partial/\partial x)\Longrightarrow -i\alpha\left(U-c\right)$ краевая задача для амплитуды $\psi(z)$ задается уравнением

$$(U-c)^2\left(\psi^{''}-\alpha^2\psi\right)-U^{''}(U-c)\psi=-g\beta\psi \tag{1a}$$

с граничными условиями

а) на горизонтальной твердой стенке

$$i\alpha\psi=0, \tag{2a}$$

б) на поверхности разрыва

$$(U^{-}-c)\psi^{+}=(U^{+}-c)\psi^{-}, \tag{3a}$$

$$(U^{+}-c)\left\{\rho_0\left[(U-c)\psi_z-U'\psi\right]\right\}_{-}^{+}-g\left\{\bar{R}\right\}_{-}^{+}\psi^{+}=0. \tag{4a}$$

Теперь задача ставится так. Для каждого α требуется найти значение c, при котором существует решение редуцированной краевой задачи. Вещественным c соответствует устойчивость. В противном случае течение неустойчиво, поскольку спектр собственных значений состоит из комплексно сопряженных пар (следствие отсутствия вязкости), одна из которых имеет положительную мнимую часть, что соответствует экспоненциальному росту возмущения. Возникает вопрос: исчерпывают ли найденные неустойчивые моды все множество неустойчивых возмущений? Другими словами, представимо ли любое решение исходной задачи рядом Фурье

$$\psi(x,z,t) = \sum_{k,l} A_{kl} \exp\left\{i\alpha_k (x - c_{kl}t)\right\} \psi_{kl}(z), \tag{6}$$

т.е. образуют ли собственные функции полную систему решений? В данном случае положение осложняется тем, что при $U = c$ уравнение имеет особую точку (старший член исчезает). Анализ показывает (см. Дикий, 1976), что решение имеет разрыв в точке z, в которой $U(z) = c$, и требуются дополнительные соображения, чтобы склеить куски решения по обе стороны разрыва. Но даже после того, как условия склейки определены, таких решений оказывается слишком мало. Как правило, набор собственных значений состоит из конечного числа элементов. Поэтому предположение о разложимости функции $\psi(x,z,t)$ в ряд Фурье неверно.

Дело в том, что до сих пор мы обсуждали лишь дискретную часть спектра собственных значений линейного оператора устойчивости, который, как и квантовомеханические операторы, имеет еще и непрерывный спектр. Это проще всего показать на примере уравнения Рэлея, справедливого для течений однородной жидкости ($\beta = 0$, $R = \rho_0 = const$):

$$(U - c)\left(\psi'' - \alpha^2\psi\right) - U''\psi = 0. \tag{7}$$

Обозначим через $\triangle$ оператор $d^2/dz^2 - \alpha^2$ с краевыми условиями $\psi = 0$ на концах отрезка $a \le z \le b$, на которых расположены твердые стенки. Тогда для $\varphi = \triangle^{-1}\psi$ получается уравнение

$$\left(U - U''\triangle^{-1}\right)\varphi = c\varphi$$

с нулевыми граничными условиями. В этом случае c должно быть собственным значением оператора, который представляет собой

сумму так называемого вполне непрерывного оператора $-U''\triangle^{-1}$ с оператором умножения на функцию $U(z)$. Последний обладает обладает непрерывным спектром, состоящим из всех значений $c = U(\alpha)$, принадлежащих отрезку $[U(a), U(b)]$. Им соответствуют собственные функции $\varphi_\alpha(z) = \delta(z-\alpha)$ $(\alpha \in [a,b])$, удовлетворяющие условию "ортогональности" (вспомните свойства квантовомеханических операторов, соответствующих непрерывно меняющимся физическим величинам)

$$\int \varphi_\alpha(z)\,\varphi_\beta(z)\,dz = \delta(\alpha-\beta).$$

Из теории линейных операторов известно, что добавление вполне непрерывного оператора не влияет на непрерывный спектр, а изменяет лишь дискретный спектр. Поэтому непрерывный спектр уравнения Рэлея также заполняет весь отрезок $[U(a), U(b)]$. К сожалению, в отличие от квантовомеханических операторов рэлеевский оператор не является самосопряженным, что не позволяет воспользоваться теорией спектрального разложения для представления решения в виде суммы ряда Фурье по дискретному спектру и интеграла Фурье по непрерывному спектру взамен (6).

И, тем не менее, в определенных важных случаях метод нормальных мод оказывается исчерпывающим. Дело в том, что интегрирование производится по вещественной оси переменной z. Значит особая точка возникает при вещественных c, т.е. для нейтральных колебаний. Непрерывный спектр, заполняющий отрезок $[U_{\min}, U_{\max}]$, также принадлежит вещественной оси, а, следовательно, неустойчивых колебаний не дающий. Вещественные значения дискретного спектра могут дать неустойчивость, лишь если они кратные. Тогда появляются "вековые линейно растущие со временем, возмущения, как следствие несамосопряженности оператора линейной устойчивости. Приведем без доказательства следующую теорему (Дикий 1976).

Двумерное плоскопараллельное течение однородной несжимаемой жидкости с монотонным профилем скорости при условии, что краевые значения $U(a)$ и $U(b)$ *не являются собственными значениями редуцированного оператора устойчивости, может быть неустойчивым, лишь если задача имеет невещественные собственные значения дискретного спектра или кратные.*

Не следует, однако, и обольщаться в отношении метода нормальных мод. Возвращаясь к исходной постановке задачи, мы можем обнаружить решения, не охватываемые редуцированной задачей, растущие со временем не по экспоненциальному, а по степенному закону (так называемая алгебраическая неустойчивость), что может либо изменить либо дополнить выводы, сделанные на основе редукции. Один из таких примеров рассматривается в следующей лекции.

2. Примеры.

Пример 1. Полупространства $z < 0$ и $z > 0$ заняты неподвижными несжимаемыми однородными жидкостями плотностями $R_1 = \rho_{01}$ и $R_2 = \rho_{02}$ соответственно.

В этом случае $U = 0$, $\beta = 0$ и краевая задача задается уравнением

$$c^2\left(\psi'' - \alpha^2\psi\right) = 0$$

с условиями регулярности на $\pm\infty$, а на разрыве $z = 0$

$$c\left(\psi^+ - \psi^-\right) = 0,$$
$$c^2\left(\rho_{02}\psi_z^+ - \rho_{01}\psi_z^-\right) = g\left(\rho_{02} - \rho_{01}\right)\psi^+,$$

а) $c = 0$ бесконечнократное собственное значение: в качестве $\psi(z)$ можно взять любую функцию, удовлетворяющую условию $\psi^+(0) = 0$.

б) Пусть $c \neq 0$. Тогда согласно условиям регулярности на $\pm\infty$ имеется единственная собственная функция $\psi(z)$, равная

$$\psi^+(z) = A\exp(-\alpha z) \text{ при } z > 0 \text{ и}$$
$$\psi^-(z) = B\exp(\alpha z) \text{ при } z < 0\ .$$

Из кинематического условия при $z = 0$ следует $A = B$, а согласно динамическому условию

$$c = \pm\sqrt{\frac{g}{\alpha}\frac{\rho_{01} - \rho_{02}}{\rho_{01} + \rho_{02}}}. \tag{8}$$

Таким образом, любому α соответствует два собственных значения c, отличных от нуля. Физически очевидный результат состоит

в том, что при $\rho_{01} > \rho_{02}$ (тяжелая жидкость внизу) колебания нейтральны и такое состояние устойчиво. В противном случае одно из собственных значений имеет положительную мнимую часть и развивается неустойчивость. Заметим, что неустойчивость, вызванная ростом плотности с высотой, называется *тейлоровской*.

Пример 2. Неподвижная жидкость Обербека-Буссинеска занимает слой, ограниченный твердыми горизонтальными стенками на уровнях $z = 0$ и H. Плотность жидкости распределена по линейному закону $\bar{\rho} = -\rho_0 \beta z \left(\beta = -\rho_0^{-1} d\bar{\rho}/dz\right)$. Уместно заметить, что в строгой постановке задачи (см. (15.14)) этому распределению соответствует экспоненциальное распределение $\bar{R} = \rho_0 \exp(-\beta z)$.

Краевая задача задается уравнением

$$\psi'' + \left(\frac{g\beta}{2} - \alpha^2\right)\psi = 0$$

с нулевыми граничными условиями, потому что $c = 0$ не есть собственное значение. Поэтому

$$\psi = A \exp(\lambda_1 z) + B \ \exp(\lambda_2 z),$$

где $\lambda_{1,2}$ – корни уравнения

$$\lambda^2 + \left(\frac{g\beta}{2} - \alpha^2\right) = 0.$$

Согласно граничным условиям

$$A + B = 0, \ \exp(\lambda_1 H) - \exp(\lambda_2 H) = 0 \text{ или } \exp(\lambda_1 - \lambda_2) H = 1.$$

Последнее равенство означает, что

$$(\lambda_1 - \lambda_2) H = i 2\pi N \ \ (N \text{ – любое целое число, не равное нулю}).$$

По теореме Виетта

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \ \lambda_1 \lambda_2 = \frac{g\beta}{2} - \alpha^2.$$

Отсюда

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{i\pi N}{H},\ \lambda_1\lambda_2 = \left(\frac{\pi N}{H}\right)^2 = \frac{g\beta}{c^2} - \alpha^2$$

и, следовательно,

$$c^2 = \frac{g\beta}{\left(\frac{\pi N}{H}\right)^2 + \alpha^2},$$

причем знак c^2 совпадает со знаком β.

Таким образом, имеется счетный набор собственных значений c, которые вещественны при положительных β (плотность убывает с высотой) и чисто мнимые при отрицательных β (тейлоровская неустойчивость). Нейтральные колебания при $\beta > 0$ называются ячейковыми волнами.

Пример 3. Жидкость постоянной плотности $R = \rho_0$ ($\beta = 0$) занимает все пространство и движется с постоянной скростью U_1 при $z < 0$ и постоянной скоростью $U_2 > U_1$ при $z > 0$.

Переходя в систему координат, движущуюся со средней скоростью течения, можно положить

$$U = U_0 = \frac{U_2 - U_1}{2} \text{ при } z > 0,$$
$$U = -U_0 = \frac{U_1 - U_2}{2} \text{ при } z < 0.$$

Тогда уравнение (1а) для ψ_+ и ψ_- записывается в виде:

$$(U_0 - c)^2 \left(\psi_+'' - \alpha^2\psi_+\right) = 0 \text{ при } z > 0,$$
$$(U_0 + c)^2 \left(\psi_-'' - \alpha^2\psi_-\right) = 0 \text{ при } z < 0$$

с условиями на разрыве $z = 0$

$$(U_0 + c)\,\psi_+ = -\,(U_0 - c)\,\psi_-,$$

$$(U_0 - c)\left[(U_0 - c)\,\psi_+' + (U_0 + c)\,\psi_-'\right] = 0,$$

а) $c = \pm U_0$ – бесконечнократные собственные значения, которым отвечают собственные функции соответственно:

для $c = U_0$

при $z \geqslant 0$ $\psi = \psi_+(z)$ – произвольная функция, равная нулю при $z = 0$,
при $z < 0$ $\psi = \psi_-(z) \equiv 0$;

для $c = -U_0$

при $z > 0$ $\psi = \psi_+(z) \equiv 0$,
при $z \leqslant 0$ $\psi = \psi_-(z)$- произвольная функция, равная нулю при $z = 0$.

б) При $c \neq \pm U_0$ имеем

$$\psi_+ = A\exp(-\alpha z),\ \psi_- = B\exp(\alpha z).$$

Согласно условиям на разрыве

$$\begin{aligned}(U_0 + c) + (U_0 - c) &= 0,\\ (U_0 - c) - (U_0 + c) &= 0.\end{aligned}$$

Уравнения совместны, если

$$(U_0 + c)^2 + (U_0 - c)^2 = 0.$$

Отсюда

$$c = \pm iU_0.$$

Течение неустойчиво, но не из-за неоднородного распределения плотности, а из-за сдвига скорости. Такая неустойчивость носит название *гельмгольцевой*.

Упражнения.

1. Как изменятся результаты задачи 2, если ее решать в строгой постановке (15.14)?

Ответ:

$$c^2 = \frac{g\beta}{\left(\frac{\pi N}{H}\right)^2 + \alpha^2 + \frac{\beta^2}{4}}.$$

2. Рассмотрите комбинированный случай, т.е. течение, имеющее разрыв плотности и скорости.

Литература

1. Дикий Л.А. *Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы*, Л.: Гидрометеоиздат, 1976.

Лекция 17

Задача Тейлора об устойчивости движения расслоенной жидкости с линейным профилем скорости

Эта задача заслуживает особого внимания, потому что она демонстрирует незаконченность исследования методом нормальных мод, для завершения которого приходится прибегать к нередуцированным уравнениям.

1. Решение редуцированной задачи. Жидкость плотности $\bar{R}(z) = \rho_0 + \bar{\rho}$, $\bar{\rho} = -\rho_0 \beta z)$ $\left(\beta = -\rho_0^{-1} d\bar{\rho}/dz\right)$ занимает полупространство $z > 0$, ограниченное твердой стенкой, и движется со скоростью $U = kz$. Напомним, что выбранному линейному по вертикали распределению плотности в строгой постановке задачи (см. (15.14)) соответствует экспоненциальное распределение.

Редуцированная задача задается уравнением

$$(kz - c)^2 \left(\psi'' - \alpha^2 \psi\right) + g\beta\psi = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями $\psi = 0$ при $z = 0$ и регулярности на ∞.

Сделаем замену

$$\xi = \left(z - \frac{c}{k}\right) \alpha.$$

После такой замены уравнение (1) записывается в виде:

$$\psi_{\xi\xi} + \left(\frac{g\beta}{k^2 \xi^2} - 1\right) \psi = 0$$

с граничным условием $\psi = 0$ при $\xi = -c\alpha/k$. Безразмерный параметр

$$Ri = \frac{g\beta}{k^2} = -\frac{gd\overline{\rho}/dz}{\rho_0 \left(dU/dz\right)^2}$$

называется числом Ричардсона, характеризующим степень стратификации жидкости.

Сделаем еще одну замену $\psi = \xi^{1/2} f$, а вместо Ri введем параметр $\nu^2 = 1/4 - Ri$. Тогда f удовлетворяет дифференциальному уравнению для модифицированных функций Бесселя (Абрамовиц и Стиган, 1979):

$$f_{\xi\xi} + \frac{f_\xi}{\xi} - \left(1 + \frac{\nu^2}{\xi^2}\right) f = 0.$$

Его фундаментальными решениями служат цилиндрические функции $I_\nu(\xi)$ и $K_\nu(\xi)$ индекса ν. Но лишь последняя – функция Макдональда регулярна на $+\infty$, что и требуется от функкции $\psi(\xi)$. Поэтому

$$\psi(\xi) = C\sqrt{\xi} K_\nu(\xi) \quad (C - \text{произвольная константа}).$$

Теперь внимание: $\psi(\xi) = 0$ при $\xi = -c\alpha/k$. Следовательно, для решения задачи надо найти нули ξ_n функции $\psi(\xi)$, которые и задают собственные значения $c_n = -k\xi_n/\alpha$. Функция Макдональда $K_\nu(\xi)$ в нуле имеет точку ветвления. Разрез нужно проводить по полупрямой $(-\infty, 0)$, т.е. нули надо искать на листе $|\arg\xi| < \pi$ с тем, чтобы вдоль луча, проведенного от корня вправо в бесконечность, функция $K_\nu(\xi)$ затухала. При переходе к старому аргументу этот луч превращается в полуось $[0, \infty)$.

Пусть ξ_n – один из таких корней, тогда

$$\psi_n = \sqrt{\alpha\left(z - \frac{c_n}{k}\right)} K_\nu\left(\alpha\left(z - \frac{c_n}{k}\right)\right)$$

есть собственная функция, соответствующая собственному значению $c_n = -k\xi_n/\alpha$. Рассмотрим сначала случай

$$\textbf{а)}\ Ri > \frac{1}{4},\ \nu = \left(\frac{1}{4} - Ri\right)^{\frac{1}{2}} = i\mu - \textbf{чисто мнимое}.$$

Функция Макдональда чисто мнимого индекса в области $\mid \arg \xi \mid < \pi$ имеет счетное множество нулей на действительной полуоси. Других нет. Асимтотику этих нулей в окрестности $\xi = 0$ можно искать, используя главные члены разложния по степеням ξ. Нам потребуются следующие свойства фундаментальных решений модифицированного уравнения Бесселя (см., например, Абрамовиц, Стиган 1979; Уиттекер, Ватсон, 1963):

$$K_\nu(\xi) = K_{-\nu}(\xi), \; K_\nu(\xi) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(\xi) - I_\nu(\xi)}{\sin(\nu\xi)}.$$

При $\mid \xi \mid < 1$

$$I_\nu(\xi) = \frac{(\xi/2)^\nu}{\Gamma(1+\nu)}, \; \nu \neq -1, \; -2, ...$$

Напоминаю, что $\Gamma(\nu)$ на комплексной полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > 0$ задается интегралом Эйлера

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-t} dt$$

и аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, за исключением $\nu = 0, -1, -2, ...$, в которых она имеет простые полюсы.

Отсюда при $\mid \xi \mid \ll 1$

$$K_\nu(\xi) \approx \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin(\nu\xi)}\left[\left(\frac{(\xi/2)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} - \frac{(\xi/2)^\nu}{\Gamma(1+\nu)}\right)\right].$$

Воспользуемся следующим свойством гамма-функции:

$$\Gamma(1+i\mu)\,\Gamma(1-i\mu) = \mid \Gamma(1 \pm i\mu) \mid^2 .$$

Далее – чисто формальные выкладки:

$$K_{i\mu}(\xi) \propto \frac{(\xi/2)^{-i\mu}}{\Gamma(1-i\mu)} - \frac{(\xi/2)^{i\mu}\,\Gamma(1-i\mu)}{\mid \Gamma(1-i\mu) \mid^2} =$$

$$= \exp\{-i\mu \ln(\xi/2) - \ln \mid \Gamma(1-i\mu) \mid - i \arg \Gamma(1-i\mu)\} -$$
$$\exp\{i\mu \ln(\xi/2) + \ln \mid \Gamma(1-i\mu) \mid + i \arg \Gamma(1-i\mu) - 2 \ln \mid \Gamma(1-i\mu) \mid\}.$$

Поэтому нулями функции

$$K_{i\mu}(\xi) \propto -\,|\,\Gamma(1-i\mu)\,|^{-1}\sin\left[\mu\ln(\xi/2)+\arg\Gamma(1-i\mu)\right]$$

являются корни уравнения

$$\mu\ln(\xi/2)+\arg\Gamma(1-i\mu)=-\pi n.$$

Отсюда получается счетная последовательность положительных корней

$$\xi_n = 2\exp\left\{-\left[\pi n+\arg\Gamma(1-i\mu)\right]/\mu\right\},$$

а собственные значения задачи задаются асимптотической формулой

$$c_n \sim -\frac{2k}{\alpha}\exp\left\{-\left[\pi n+\arg\Gamma(1-i\mu)\right]/\mu\right\}.$$

Они все вещественны. Следовательно, течение устойчиво, но при $Ri \longrightarrow 1/4$ $(\mu \longrightarrow 0)$ собственные значения стягиваются к нулю, что указывает на уменьшение устойчивости. Заметим, что с ростом α все c_n также стягиваются к нулю, а частоты $\alpha \cdot c$ остаются примерно постоянными. Собственные функции ψ_n заметно отличны от нуля лишь в окрестности $z=0$ порядка $1/\alpha$, т.е. с ростом α они прижимаются к твердой стенке.

б) $Ri < \dfrac{1}{4},\ \nu = \left(\dfrac{1}{4}-Ri\right)^{\frac{1}{2}}$ **– вещественно и** $< 1/2.$

В этом случае можно показать (Уиттекер и Ватсон, 1963), что функция $K_\nu(\xi)$ не имеет корней в области $|\arg\xi|<\pi$, т.е. не существует таких c, чтобы $\varphi(kz-c)$ удовлетворяло уравнению и краевым условиям задачи. Другими словами, *при* $Ri<1/4$ *задача не имеет решений в виде нормальных мод.*

2. Приближенное решение нередуцированной задачи. Уменьшение устойчивости течения Тейлора с уменьшением числа Ричардсона, трактуемого как мера устойчивости, естественно наводит на мысль, что при $Ri < 1/4$ появится неустойчивость. Так склонен был считать Прандтль. Для выяснения этого вопроса,

строго говоря, следовало бы обратиться к определению устойчивости по Ляпунову (см. Лекцию 14) и исследовать устойчивость решения задачи Коши относительно возмущений начальных данных. Это весьма сложное исследование течения Тейлора было сделано на основе решения задачи Коши методом преобразования Лапласа. Оказалось, что и при $Ri < 1/4$ течение устойчиво. Ниже мы ограничимся лишь нестрогими соображениями, говорящими в пользу этого результата. Нестрогость состоит в том, что теперь мы рассматриваем задачу на всем двумерном пространстве, отказываясь от краевого условия при $z = 0$. Далее все строго.

Поскольку метод нормальных мод не проходит, необходимо вернутся к исходному уравнению (15.6), которое для $U = kz$ записывается в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + kz\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \triangle\psi = -g\beta\psi \quad \left(\beta = -\frac{1}{\rho_0}\frac{d\bar{\rho}}{dz}\right). \tag{2}$$

Коэффициенты этого уравнения зависят от z, что не позволяет разделить переменные. Но для линейного профиля скорости эту трудность можно обойти, переходя к полулагранжевой системе координат:

$$t \to t,\ z \to z,\ x_1 = x - kzt.$$

В новых переменных уравнение (2) принимает форму, в которой коэффициенты зависят не от z, а от t:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial z} - kt\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2\right]\psi + g\beta\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} = 0.$$

Поэтому теперь можно использовать гармоническую зависимость от пространственных переменных

$$\psi(x_1, z, t) = \varphi(t)\exp(lx_1 + nx).$$

Тогда $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[l^2 + (n - lkt)^2\right]\varphi + g\beta l^2\varphi = 0.$$

Поскольку нас интересует поведение решений этого уравнения при $t \longrightarrow \infty$, константами в первом коэффициенте можно пренебречь, т.е. асимптотика решений описывается уравнением

$$t^2\varphi_{tt} + 4t\varphi_t + \left(2 + \frac{g\beta}{k^2}\right)\varphi = 0.$$

Его решение

$$\varphi(t) = C_1 t^{m_1} + C_2 t^{m_2},$$

где m_1 и m_2 корни алгебраического уравнения

$$m(m-1) + 4m + (2 + Ri) = 0.$$

Отсюда

$$m_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - Ri}.$$

При $Ri \leq 1/4$ они вещественны и отрицательны, а при $Ri > 1/4$ их вещественная часть отрицательна, т.е. во всех случаях решения затухают. В связи с полученнными результатами уместно для сравнения рассмотреть следующую задачу.

3. Об устойчивости течения однородной жидкости с линейным профилем скорости. Полагая в (2) $\beta = 0$, для решения задачи можно воспользоваться уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + kz\frac{\partial}{\partial x}\right)\triangle\psi = 0$$

с условиями регулярности при $z \longrightarrow \pm\infty$. Сохраняя гармоническую зависимость от x, т.е. $\psi(x, z, t) = \varphi(z, t)\exp(i\alpha x)$, получаем задачу Коши, задаваемую уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha kz\right)\left(\varphi_{zz} - \alpha^2\varphi\right) = 0 \tag{3}$$

с начальным условием $\varphi(z, 0) = \varphi_0(z)$ и условиями ограниченности $\varphi(z, t)$ при $z \longrightarrow \pm\infty$. После интегрирования по t имеем

$$\varphi_{zz} - \alpha^2\varphi = f(z)\exp(-i\alpha kzt),$$

где $f(z)$ определяется начальным условием

$$f(z) = (\varphi_0)_{zz} - \alpha^2\varphi_0.$$

Остается решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка с известной правой частью. Общее решение находится методом вариации произвольной постоянной:

$$\varphi(z,t) = -\int_z^\infty \frac{1}{\alpha} f(\zeta)\, sh\{\alpha(z-\zeta)\} \exp(-i\alpha k\zeta t)\, d\zeta + C_1 \exp(\alpha z)$$

$$+C_2 \exp(-\alpha z).$$

С учетом условий на $\pm\infty$ константы C_1 и $C_2 = 0$ и решение имеет вид

$$\varphi(z,t) = -\int_z^\infty \frac{1}{\alpha} f(\zeta)\, sh\{\alpha(z-\zeta)\} \exp(-i\alpha k\zeta t)\, d\zeta.$$

При естественных физических предположениях о конечности энергии начальных возмущений, например, $f(z) \neq 0$ лишь в конечной области изменения z, очевидно, что $\varphi(z,t)$ ограничено при $t \longrightarrow \infty$, поскольку

$$|\varphi(z,t)| \leq \int_z^\infty \left|\frac{1}{\alpha} f(\zeta)\right| |sh\alpha(z-\zeta)|\, d\zeta.$$

Исключительная простота решения этой задачи объясняется вырожденным видом уравнения (2). В общем случае $\left(U'' \neq 0\right)$ в уравнении появляются члены, пропорциональные φ, решать которое становится удобным методом преобразования Лапласа.

Упражнения

1. Решите задачу Тейлора для $Ri < 1/4$ в рамках строгой постановки задачи (15.14), предполагая уже не линейное, а экспоненциальное распределение плотности по высоте $\left(\bar{R} = R_0 \exp(-\beta z)\right)$, и покажите, что результат останется прежним.

Подсказка. После перехода к полулагранжевой системе координат сделайте замену $\psi = \varphi \exp(\beta z/2)$.

2. Решите задачу об устойчивости течения однородной жидкости с линейным профилем скорости в предположении, что жидкость занимает полуплоскость $z > 0$ и ограничена твердой стенкой на уровне $z = 0$.

Ответ (см. также Дикий, 1976):

$$\varphi(z,t) = -\int_z^\infty \frac{1}{\alpha} f(\zeta)\, sh\{\alpha(z-\zeta)\} \exp(-i\alpha k\zeta t)\, d\zeta$$

$$-\int_0^\infty \frac{1}{\alpha} f(\zeta)\, sh\{\alpha\zeta\} \exp\{-(i\alpha k\zeta t + \alpha z)\}\, d\zeta$$

Литература

1. Дикий Л.А. *Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы*, Л.: Гидрометеоиздат, 1976.

2. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям*, М.: Наука, ГРФМЛ, 1979.

3. Уиттекер Э.Т., Ватсон Д.Н. *Курс современного анализа. Часть II.* М: ФИЗМАТГИЗ. 1963.

Лекция 18

Применение интегральных соотношений и законов сохранения в теории гидродинамической устойчивости

1. Общие теоремы, основанные на интегральных соотношениях. Весьма полезным для отыскания на комплексной плоскости местоположения спектра собственных значений редуцированного оператора устойчивости (16.1а), (16.2а) является изучение свойств его квадратической формы – прием, хорошо известный из теории линейных операторов в гильбертовом пространстве. Начнем со строгого (в рамках линейной теории) доказательства критерия Майлса устойчивости течений стратифицированной жидкости.

Теорема 1 (Miles 1961). *Плоскопараллельное течение расслоенной жидкости, число Ричардсона которого*

$$Ri = -\frac{gd\overline{\rho}/dz}{\rho_0 \left(dU/dz\right)^2} \equiv \frac{g\beta}{\left(U'\right)^2} \text{ всюду } > \frac{1}{4},$$

устойчиво.

Напомню, что Ri – локальный критерий. Отсюда требование *всюду*. Кроме того, в строгой постановке задачи (15.14) в определении числа Ричардсона обе величины $\overline{\rho}$ и ρ_0 надо заменить на $\overline{R}$.

Доказательство. Итак, речь идет о краевой задаче, задаваемой уравнением

$$(U-c)^2\left(\psi'' - \alpha^2\psi\right) - U''(U-c)\,\psi = -g\beta\psi \quad \left(\beta = -\frac{1}{\rho_0}\frac{d\overline{\rho}}{dz}\right)$$

с условиями $\psi = 0$ на твердых стенках или регулярности на $\pm\infty$. Так как собственные значения такой краевой задачи комплексно сопряжены, нам надо доказать, что невещественных собственных значений не существует. Предположим противное, т.е. $c = c_r + ic_i$ $(c_i \neq 0)$ и сделаем замену

$$W(z) = U(z) - c,\ \psi(z) = \sqrt{W}\varphi(z).$$

Функция φ удовлетворяет уравнению

$$(W\varphi')' - \left[\frac{1}{2}U'' + \alpha^2 W + \frac{1}{W}\left(\frac{1}{4}(U')^2 - g\beta\right)\right]\varphi = 0.$$

Умножаем на φ^* (функция, комплексно сопряженная φ) и интегрируем по всему сечению потока с учетом граничных условий. $\int\limits_a^b (W\varphi')'\varphi^* dz = (W\varphi')\varphi^* \mid_{z=b} - (W\varphi')\varphi^* \mid_{z=a} - \int\limits_a^b W\varphi'\varphi^{*\prime} dz =$ $-\int\limits_a^b W \mid \varphi' \mid^2 dz$.

Тогда проинтегрированное уравнение записывается в виде:

$$\int\limits_a^b \left\{W\left(\mid \varphi' \mid^2 + \alpha^2 \mid \varphi \mid^2\right) + \frac{1}{2}U'' \mid \varphi \mid^2\right\} dz +$$

$$+\int\limits_a^b W^*\left(\frac{1}{4}(U')^2 - g\beta\right)\frac{\mid \varphi \mid^2}{\mid W \mid^2} dz = 0.$$

Его мнимая часть дает равенство $(U - c = U - c_r - ic_i,\ c_i \neq 0)$

$$c_i \int\limits_a^b \left\{\mid \varphi' \mid^2 + \alpha^2 \mid \varphi \mid^2 - \left(\frac{1}{4}(U')^2 - g\beta\right)\frac{\mid \varphi \mid^2}{\mid W \mid^2}\right\} dz = 0.$$

Но при $\left(g\beta - \frac{1}{4}(U')^2\right) > 0$, т.е. $Ri > 1/4$, такое невозможно. Теорема доказана.

Физическая интерпретация критерия Майлса (*эвристический вывод*). Загадачное на первый взгляд критическое значение числа Ричардсона, равное $1/4$, становится понятным из следующих соображений. Рассмотрим предварительно физический маятник (рис. 1а) массы m, колеблющийся в поле сил тяжести $\mathbf{g}$. Пусть l – расстояние от точки подвеса O до центра тяжести маятника, а V – его скорость в нижнем положении равновесия O'. Тогда маятник

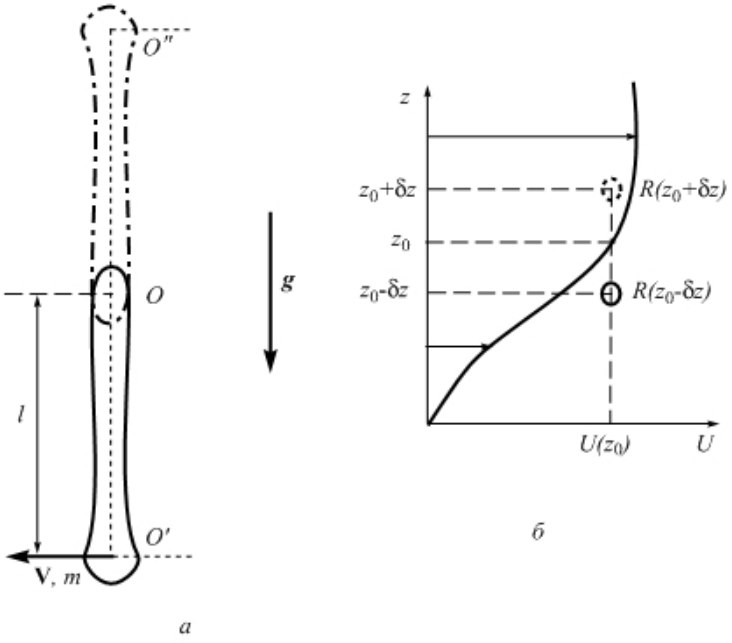


Рис. 1. а) Физический маятник совершает колебания относительно нижнего положения равновесия, если $4gl/V^2 > 1$. б) Сдвиговое течение расслоенной жидкости в поле силы тяжести. Для каждой частицы, расположенной на уровне $z = z_0 - \delta z$ в системе координат, движущейся с постоянной скоростью $V = U(z_0)$, роль l исполняет δz, роль g принадлежит $g' = N^2\delta z$, а $V = U(z_0 - \delta z) - U(z_0) = \delta U$. Течение устойчиво, если $4g'\delta z/(\delta U)^2 = 4N^2/(\delta U/\delta z)^2 \doteq 4Ri > 1$.

сохраняет колебательное движение до тех пор, пока его кинетическая энергия $E = mV^2/2$ в нижнем положении равновесия не превзойдет дефицит потенциальной энергии $\Delta\Pi = 2mgl$ нижнего положения равновесия относительно верхнего положения равновесия O'', т.е. при условии

$$\frac{2mgl}{mV^2/2} > 1 \text{ или } \frac{gl}{V^2} > \frac{1}{4}.$$

В противном случае колебания маятника преобразуются в его вращательные движения.

Пусть теперь $U = U(z)$ – профиль скорости течения жидкости с плотностной стратификацией $\bar{R} = \bar{R}(z)$ (рис. 1б). Перейдем в систему координат, движущуюся с постоянной скоростью $U(z_0)$, соответствующей некоторому произвольному уровню $z = z_0$. Тогда в такой системе координат кинетическая энергия жидкой частицы единичного объема, находящейся на уровне $z = z_0 - \delta z$, равна

$$K = \frac{1}{2}\bar{R}(z_0 - \delta z)\left[U(z_0 - \delta z) - U(z_0)\right]^2.$$

Потенциальная энергия этой частицы, перемещенной на уровень $z = z_0 + \delta z$, равна произведению результирующей гравитационных и архимедовых сил на δz, т.е.

$$\Delta\Pi = g\left[\bar{R}(z_0 - \delta z) - \bar{R}(z_0 + \delta z)\right]\delta z.$$

Поэтому условие того, что движение выделенной частицы не станет вращательным относительно частицы, расположенной на уровне $z = z_0$, т.е. в силу произвольности выбора $z = z_0$ ни одна из частиц не разрушит плотностную стратификацию жидкости из-за возникновения локальной завихренности, записывается в виде:

$$\frac{\Delta\Pi}{K} = \frac{g\left[\bar{R}(z_0 - \delta z) - \bar{R}(z_0 + \delta z)\right]\delta z}{\bar{R}(z_0 - \delta z)\left[U(z_0 - \delta z) - U(z_0)\right]^2/2} > 1.$$

Деля теперь числитель и знаменатель дроби на δz^2 и устремляя δz к нулю, получаем достаточное условие устойчивости течения расслоенной жидкости

$$-\frac{4gd\bar{R}/dz}{\bar{R}(dU/dz)^2} = \frac{4N^2}{(dU/dz)^2} \doteq 4Ri > 1, \qquad (1)$$

которое должно выполняться на любом уровне z. Напоминаю,

$$-\frac{g}{\bar{R}}\frac{d\bar{R}}{dz} = N^2$$

– квадрат частоты Брента-Вяйселя для несжимаемой стратифицированной жидкости (см. Лекцию 9).

Другими словами, $4Ri\,(z)$ *есть отношение потенциальной и кинетической энергий слоя жидкости, задаваемого инфинитезимальной окрестностью уровня* z*, вычисляемых в системе координат, которая движется относительно лабораторной системы отсчета с постоянной скоростью* $U\,(z)$. Критерий Майлса становится таким образом физически прозрачным.

Теорема 2 (Howard, 1961). *Все невещественные собственные значения рассматриваемой краевой задачи при* $\beta > 0$ *и вещественные при* $\beta = 0$ *лежат в круге, диаметр которого задается отрезком* $[U_{\min}, U_{\max}]$.

Рассмотрение удобно проводить в системе координат, движущейся со средней скоростью $U_{\text{ср}} = (U_{\min} + U_{\max})/2$. Тогда упомянутый отрезок есть $[-U_0, U_0]$, где $U_0 = (U_{\max} - U_{\min})/2$. Это преобразование равносильно подстановке в уравнение (1) $U\,(z) = U_{\text{ср}} + U_1\,(z)\,,\ c = U_{\text{ср}} + c_1$.

Предположим противное утверждению Теоремы 2 и введем замену $\psi\,(z) = (U - c)\,f\,(z)$. В силу сделанного предположения функция $(U - c)$ не обращается в нуль на отрезке интегрирования, а f удовлетворяет уравнению

$$\left[(U-c)^2 f'\right]' - \alpha^2 (U-c)^2 f = -g\beta f.$$

Умножаем на f^* и интегрируем по z. Тогда после интегрирования первого члена по частям с учетом краевых условий получаем равенство

$$\int (U-c)^2 \left\{ \mid f' \mid^2 + \alpha^2 \mid f \mid^2 \right\} dz = g \int \beta \mid f \mid^2 dz. \qquad (2)$$

Отсюда видно, что при $\beta = 0$, т.е. для однородной жидкости, c не может быть вещественным. Для невещественных значений c выделим сначала мнимую часть равенства (2):

$$c_i \int (U - c_r) \left\{ \mid f' \mid^2 + \alpha^2 \mid f \mid^2 \right\} dz = 0. \qquad (3)$$

Так как $c_i \neq 0$, это равенство возможно лишь при условии, что $-U_0 < c_r < U_0$.

Вещественная часть равенства (2) дает

$$\int \left[(U-c_r)^2 - c_i^2\right] \left\{ \mid f' \mid^2 + \alpha^2 \mid f \mid^2 \right\} dz = g \int \beta \mid f \mid^2 dz, \qquad (4)$$

Поскольку $(U-c_r)^2 - c_i^2 = \left[U^2 - (c_r^2 + c_i^2)\right] - 2c_r\,(U-c_r)$, то из (4) с учетом (3) следует

$$\int \left(U^2 - \mid c \mid^2\right) \left\{ \mid f' \mid^2 + \alpha^2 \mid f \mid^2 \right\} dz \geqslant 0.$$

Отсюда $\mid c \mid^2 \leq U_0^2$, что и доказывает теорему.

Теорема 3 (Rayleigh, 1880). *Плоскопараллельное течение однородной несжимаемой жидкости устойчиво, если его профиль скорости не имеет точек перегиба.*

В этом случае краевая задача на собственные значения задается уравнением Рэлея

$$(U-c)\left(\psi'' - \alpha^2 \psi\right) - U''\psi = 0$$

с нулевыми условиями на твердых границах. Вновь предполагаем $c = c_r + c_i$ $(c_i \neq 0)$. Разделим уравнение на $U-c$, умножим на ψ^* и проинтегрируем по всему сечению потока. В силу граничных условий

$$\int \psi'' \psi^* dz = -\int \mid \psi' \mid^2 dz.$$

В результате имеем

$$\int \left(\mid \psi' \mid^2 + \alpha^2 \mid \psi \mid^2 + \frac{U''}{U-c} \mid \psi \mid^2 \right) dz = 0. \qquad (5)$$

Мнимая часть последнего равенства дает

$$c_i \int \frac{U''}{(U-c)^2} \mid \psi \mid^2 dz = 0. \qquad (6)$$

Но такое возможно, если U'' меняет знак, т.е. течение имеет точку перегиба (необходимое условие неустойчивости).

Поскольку в рассматриваемом случае величина $U' = dU/dz = \partial U/\partial z - \partial W/\partial x$ $(W=0)$ есть завихренность двумерного течения, то теорему Рэлея можно сформулировать иначе.

Для устойчивости упомянутого течения достаточно, чтобы его вихрь скорости монотонно изменялся от стенки к стенке.

Теорема 4 (Fjortoft, 1950). *Плоскопараллельное течение однородной несжимаемой жидкости устойчиво, если найдется такая константа K, что $(U-K)\,U''\geqslant 0$.*

Как и ранее, предполагаем $c=c_r+c_i$ $(c_i\neq 0)$. Вещественная часть равенства (5) дает

$$\int \frac{U''\,(U-c_r)}{\mid U-c\mid^2}\mid\psi\mid^2 dz=-\int\left(\mid\psi'\mid^2+\alpha^2\mid\psi\mid^2\right)dz<0.$$

В силу (6) в качестве c_r можно взять любую константу K. Тогда

$$\int \frac{U''\,(U-K)}{\mid U-c\mid^2}\mid\psi\mid^2 dz<0,$$

что возможно, если есть точка, в которой $U''\,(U-K)<0$. Значит, предположение, что $c_i\neq 0$, неверно. Теорема доказана.

Теорема Фьортофта включает в себя два частных случая. *а) Теорема Рэлея, если предположить, что U'' не меняет знак, и взять $K>\mid U_{\max}\mid$, а знак K совпадающим со знаком величины $-U''$. б) Течение имеет одну точку перегиба, т.е. $U''(z_c)=0$ и $[U(z)-U(z_c)]\,U''>0$. Тогда $K=U(z_c)$.*

2. Доказательство теоремы Рэлея методом Ляпунова-Арнольда. До сих пор гидродинамическая устойчивость исследовалась в линейной постановке задачи. Следуя программе, намеченной в Лекции 14, воспользуемся теперь первыми интегралами движения для построения функции Ляпунова и изучения устойчивости сдвиговых плоскопараллельных течений однородной жидкости.

Напоминаю, что в терминах функции тока $\psi=\psi(x,z,t)$ уравнения двумерного течения идеальной однородной несжимаемой жидкости записываются в виде

$$\frac{\partial\triangle\psi}{\partial t}+u\frac{\partial\triangle\psi}{\partial x}+w\frac{\partial\triangle\psi}{\partial z}\equiv\frac{\partial\triangle\psi}{\partial t}+[\psi,\triangle\psi]=0, \tag{7}$$

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial z},\ w=\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{8}$$

При условиях,что на границе C области, занятой жидкостью,

$$\psi\mid_C=const \text{ (непроницаемость границы)}, \tag{9}$$

$$\oint\limits_C \mathbf{u}\delta\mathbf{l} = \oint\limits_C \frac{\partial\psi}{\partial n}\delta l = const \quad (\mathbf{n} - \text{внешняя нормаль}), \tag{10}$$

уравнения (7), (8) имеют два первых интеграла движения (см. решения Упражнений 2 и 3)

$$E = \frac{1}{2}\iint (\nabla\psi)^2\, dxdz,\ I = \iint \Phi(\triangle\psi)\, dxdz, \tag{11}$$

выражающих сохранение энергии и суммарной завихренности соответственно (Φ - произвольная функция одного аргумента). Заметим, что последнее краевое условие следует из теоремы Кельвина, примененной к жидкому контуру, непосредственно примыкающему к границе. Любая жидкая частица такого контура никогда не покинет границу из-за равенства нулю нормальной составляющей скорости. Поэтому упомянутый контур можно считать совпадающим с самой границей.

Напоминаю основную идею метода Ляпунова-Арнольда. Пусть $\psi = \psi_0(x,z)$ – функция тока стационарного течения, исследуемого на устойчивость. Произвольную функцию $\Phi(\triangle\psi)$, входящую в функционал I, подбираем так, чтобы сохраняющийся функционал

$$F[\psi] = E[\psi] + I[\psi] = \iint \left[\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + \Phi(\triangle\psi)\right] dxdz$$

имел при $\psi = \psi_0$ экстремальное значение по сравнению со всеми ψ близкими ψ_0. Тогда знакоопределенность его второй вариации при $\psi = \psi_0$ означает устойчивость рассматриваемого течения.

Условие Рэлея – отсутствие точек перегиба в профиле скорости $U(z)$ течения означает, как отмечалось выше, монотонность изменения его вихря U' от стенки к стенке, т.е. от одной линии тока $\psi_0 = const$ к другой. Предположим поэтому, что вихрь $\triangle\psi_0$ есть монотонная функция ψ_0. Поскольку монотонная функция обращаема, то функция тока $\psi_0 = \Psi(\triangle\psi_0)$ есть монотонная функция от $\triangle\psi_0$.

Пусть теперь $\psi(x,z,t) = \psi_0 + \delta\psi(x,z,t)$ – функция тока возмущенного течения. Вычислим разность $F[\psi] - F[\psi_0]$ с точностью до вариаций второго порядка:

$$F[\psi] - F[\psi_0] = \iint \left[\nabla\psi_0\nabla\delta\psi + \Phi'(\triangle\psi_0)\,\delta\triangle\psi\right] dxdz + \frac{1}{2}\iint \left[(\nabla\delta\psi)^2 + \Phi''(\triangle\psi_0)(\delta\triangle\psi)^2\right] + \ldots$$

Первое слагаемое правой части преобразуем интегрированием по частям:

$$\iint \nabla\psi_0 \nabla\delta\psi dxdz = \nabla\delta\psi \mid \oint\limits_C \frac{\partial\psi_0}{\partial n}\delta l - \iint \psi_0 \triangle\delta\psi dxdz.$$

Поэтому в силу граничных условий первая вариация

$$\delta F[\psi_0] = \iint \left[-\psi_0 + \Phi'(\triangle\psi_0)\right] \triangle\delta\psi dxdz$$

обращается в нуль при $\psi_0 = \Psi(\triangle\psi_0) = \Phi'(\triangle\psi_0)$ (необходимое условие экстремума). Тогда

$$F[\psi] - F[\psi_0] = \frac{1}{2}\iint \left[(\nabla\delta\psi)^2 + \Psi'(\triangle\psi_0)(\delta\triangle\psi)^2\right] dxdz + ...$$

Далее,

$$U = -\frac{\partial\psi_0}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\Psi(\triangle\psi_0),$$

и для плоскопараллельного течения $\triangle\psi_0 = -U'$. Отсюда $\Psi' = U/U''$ и

$$F[\psi] - F[\psi_0] = \frac{1}{2}\iint \left[(\nabla\delta\psi)^2 + \frac{U}{U''}(\delta\triangle\psi)^2\right] dxdz + ...$$

Пока ни откуда не следует, что интеграл в правой части положительно определен. Воспользуемся поэтому следующим рассуждением. Рассмотрение можно проводить в любой системе координат, движущейся относительно исходной с постоянной скоростью K. Если ψ – функция тока в этой новой системе координат, то последняя формула переписывается в виде

$$F[\psi] - F[\psi_0] = \frac{1}{2}\iint \left[(\nabla\delta\psi)^2 + \frac{U(z) - K}{U''}(\delta\triangle\psi)^2\right] dxdz + ... \quad (12)$$

Величину K всегда можно выбрать так, чтобы коэффициент $(U(z) - K)/U''$ стал положительным. В этом случае $\delta^2 F[\psi_0]$ есть положительно определенная квадратическая форма от $\delta\psi$, которую можно взять в качестве меры отклонения ψ от ψ_0:

$$\| \psi - \psi_0 \|_1^2 = \frac{1}{2}\iint \left[(\nabla\delta\psi)^2 + \frac{U(z) - K}{U''}(\delta\triangle\psi)^2\right] dxdz.$$

В качестве второй меры можно взять

$$\| \psi - \psi_0 \|_2^2 = F[\psi] - F[\psi_0] .$$

Поскольку в (12) под многоточием скрыт остаточный член более высокого порядка малости, чем $(\delta\psi)^2$, то обе меры эквивалентны, т.е. существуют такие константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, что

$$C_1 \| \psi - \psi_0 \|_1 \leqslant \| \psi - \psi_0 \|_2 \leqslant C_2 \| \psi - \psi_0 \|_1 . \qquad (13)$$

Пусть в начальный момент отклонения скоростей $\nabla\delta\psi$ и вихря $\delta\triangle\psi$ малы, а, следовательно, мала мера $\| \psi - \psi_0 \|_1$. Тогда в силу (13) в начальный момент мала и мера $\| \psi - \psi_0 \|_2$. Но последняя есть инвариант, который будет оставаться таким же малым все время движения. Опять же в силу (13) малой будет сохраняться и мера $\| \psi - \psi_0 \|_1$, а из-за ее положительной определенности в среднем квадратическом малы будут скорости $\nabla\delta\psi$ и вихрь $\triangle\delta\psi$. Таким образом, *теорема Рэлея доказана здесь в нелинейной постановке задачи, т.е. для конечных возмущений*[1].

Упражнения.

1. Для какого из показанных на рис. 2 профилей течений применима и не применима теорема Фьортофта?

2. Докажите, что при соблюдении условии (9), (10) кинетическая энергия (см. (11)) есть первый интеграл движения для уравнений (7), (8).

Доказательство.

$$\frac{dE}{dt} = \iint \nabla\psi \nabla\psi_t dxdz$$

[1] В.П. Дымников указал на следующее до недавнего времени неизвестное автору обстоятельство. На самом деле доказана так называемая формальная устойчивость сдвигового течения, основанная на формальном применении критерия устойчивости для конечномерных динамических систем к системам с бесконечномерным числом степеней свободы. Равенство нулю первой вариации и положительность второй вариации, вообще говоря, не обеспечивают минимум функции Ляпунова (Филатов А.Н. Теория устойчивости. ИВМ РАН. М.: 2002)

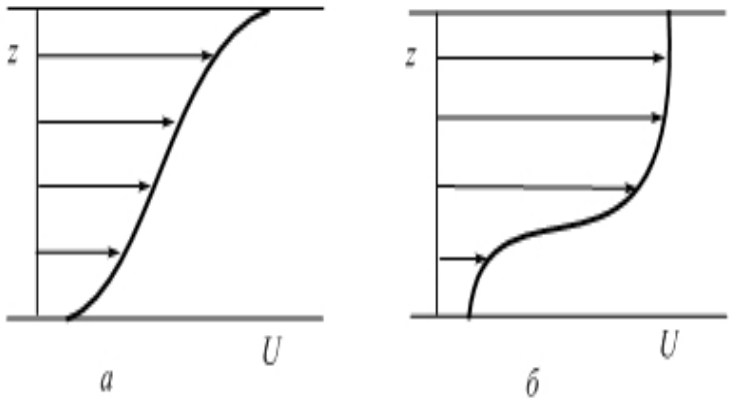


Рис. 2. а) Критерий Фьортофа применим? б) Критерий Фьортофа неприменим?

$$= \psi\,|_C \oint\limits_C \frac{\partial \psi_t}{\partial n}\delta l - \iint \psi \triangle \psi_t dxdz \;\; (\textit{интегрирование по частям})$$

$$= \psi\,|_C \frac{d}{dt}\oint\limits_C \frac{\partial \psi}{\partial n}\delta l - \iint \psi \triangle \psi_t dxdz \;\; (\textit{так как контур } C \textit{ неподвижен})$$

$$\iint \psi\,[\psi, \triangle\psi]\,dxdz \;\; (\textit{согласно } (10) \textit{ и уравнениям движения})$$

$$= \iint \left\{(\psi \triangle \psi \psi_x)_z - (\psi \triangle \psi \psi_z)_x\right\} dxdz \;\; (\textit{проверяется непосредственно})$$

$$= \oint\limits_C \psi \triangle \psi \frac{\partial \psi}{\partial l}\delta l \;\; (\textit{по теореме Стокса}) = \oint\limits_C \psi \triangle \psi d\psi = 0 \;\; (\textit{согласно } (9)).$$

3. Докажите, что при соблюдении условии (9), (10) величина I (см. (11)) есть первый интеграл движения для уравнений (7), (8).

Доказательство.

$$\frac{dI}{dt} = \iint \Phi'(\triangle\psi)\,\triangle\psi_t dxdz = -\iint \Phi'(\triangle\psi)\,[\psi, \triangle\psi]\,dxdz$$

$$= \iint [\Phi(\triangle\psi), \psi]\,dxdz = \iint \left\{(\Phi(\triangle\psi)\,\psi_x)_z - (\Phi(\triangle\psi)\,\psi_z)_x\right\} dxdz$$

$$= \oint\limits_C \Phi(\triangle\psi)\,\frac{\partial\psi}{\partial l}\delta l = \oint\limits_C \Phi(\triangle\psi)\,d\psi = 0.$$

Литература

1. Дикий Л.А. *Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы*, Л.: Гидрометеоиздат, 1976.

2. Miles J.W. *On the stability of heterogeneous shear flows*, J. Fluid Mech., V. 10, No. 2, 1961.

3. Miles J.W. *Richardson's criterion for the stability of stratified shear flows*, Phys. Fluids, V.29, No. 10, 1986.

4. Howard L.N. *Note on a paper of Jhon Miles*, J. Fluid Mech., V. 10, No. 2, 1961.

5. Fjortoft R. *Application of integral theorems in deriving criteria of stability for the baroclinic circular vortex*, Geophys. Publ., V. 17, No. 2, Oslo, 1950.

Лекция 19

Устойчивость зональных течений баротропной атмосферы. Понятие баротропной неустойчивости

1. Теорема Го (Kuo Hsiao-Lan, 1949). Переходя к изучению устойчивости глобальных атмосферных течений, уместно напомнить фильтрованные уравнения движения вращающейся жидкости, которые позволяют легко обобщить классическую теорию устойчивости строго двумерных течений невращающейся жидкости на рассматриваемый случай. Движение баротропной атмосферы в квазигеострофическом приближении описывается уравнением Обухова-Чарни

$$\frac{d}{dt}\left(f+\triangle\psi-L_0\psi\right)\equiv\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\psi-L_0\psi\right)+\left[\psi,\triangle\psi\right]+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \quad (1)$$

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y},v=\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (2)$$

Здесь координаты x и y отсчитываются в направлениях на восток и север соответственно. Геострофическая функция тока $\psi=gh/f_0$, где $h=z\left(x,y,t\right)-z_p$ – отклонение высоты $z\left(x,y,t\right)$ произвольной изобарической поверхности $p\left(x,y,z,t\right)=const$ от ее равновесного гидростатического значения $z\left(p\right)=z_p$ (напомним, что в баротропной атмосфере изобары, совпадающие с изохорами, изменяются подобно друг другу). f_0 – среднее значение параметра Кориолиса $f=2\Omega_0\sin\varphi$ (φ – широта), $L_0=c/f_0$ – масштаб Обухова-Россби и $\beta=df/dy$. В приближении теории мелкой воды h – отклонение высоты свободной поверхности от ее равновесного уровня $H_*\left(x,y\right)=H_0-h_1\left(x,y\right)$, $L_0=\sqrt{gH_0}/2\Omega_0$, а бета-эффект

$\beta = 2\Omega_0 H_0^{-1} dh_1/dy$ обеспечивается неоднородной орографией дна (см. рис. 6.3).

Система (1), (2) имеет три первых интеграла движения (см. Лекцию 7)

$$E = \frac{1}{2}\iint \left[(\nabla\psi)^2 + L_0^{-2}\psi^2\right] dxdy \tag{3}$$

$$I = \iint \Phi(\Pi)\, dxdy, \quad \langle\psi\rangle = \iint \psi dxdy, \tag{4}$$

где $\Phi(\Pi)$ – произвольная функция квазигеострофического потенциального вихря $\Pi = f + \triangle\psi - L_0^{-2}\psi$.

Теорема Го. *Зональное течение идеальной баротропной атмосферы устойчиво, если потенциальный вихрь монотонно изменяется от полюса к полюсу.*

Доказательство. Пусть $\psi_0 = \Psi_0(y)$ – функция тока такого стационарного зонального течения, что соответствующий ей потенциальный вихрь $\Pi_0 = f + \triangle\psi_0 - L_0^{-2}\psi_0$ – есть монотонная функция широтной координаты y. Тогда Π_0 можно принять за новую широтную координату, т.е. считать, что $\psi_0 = \Psi_0(\Pi_0)$.

Вычисляем вариации функционала $F = E + I$:

$$\delta F = \iint \left\{\nabla\psi_0\delta\nabla\psi + L_0^{-2}\psi_0\delta\psi + \Phi'(\Pi_0)\,\delta\Pi\right\} dxdy =$$

(после интегрирования по частям)

$$= \iint \left\{-\psi_0\delta\nabla\psi + L_0^{-2}\psi_0\delta\psi + \Phi'(\Pi_0)\,\delta\Pi\right\} dxdy$$

$$= \iint \left[-\Psi_0(\Pi_0) + \Phi'(\Pi_0)\right]\delta\Pi dxdy,$$

потому что $\psi_0\delta\nabla\psi - L_0^{-2}\psi_0\delta\psi = \delta\Pi$.

Необходимое условие экстремума есть $\Phi'(\Pi_0) = \Psi_0(\Pi_0)$. Вторая вариация

$$\delta^2 F = \iint \left\{(\delta\nabla\psi)^2 + L_0^{-2}(\delta\psi)^2 + \Phi''(\Pi_0)(\delta\Pi)^2\right\} dxdy$$

$$= \iint \left\{(\delta\nabla\psi)^2 + L_0^{-2}(\delta\psi)^2 + \Psi'(\Pi_0)(\delta\Pi)^2\right\} dxdy.$$

Для положительной определенности $\delta^2 F$ нужно, чтобы $\Psi'(\Pi_0) > 0$. В земных условиях все наоборот. Зональная скорость $U = -\partial\psi_0/\partial y$

направлена с запада на восток, т.е. ψ_0 растет с севера на юг (напоминаю, что координатные оси $0x$ и $0y$ направлены соответственно на восток и север). Но потенциальный вихрь, знак которого определяется переносным вихрем f, наоборот, растет с юга на север. Следовательно $\Psi'(\Pi_0) < 0$. Важно, однако, что эта величина знакоопределенная. Поэтому можно поступить таким образом. Перейдем в систему координат, которая вращается относительно первоначально выбранной с угловой скоростью Ω_1. В этой системе координат новая функция тока $\psi_1 = \psi - \phi$, где $\phi = a^2\Omega_1 \sin\varphi$ – не зависящая от времени функция тока, которая соответствует вращению с постоянной угловой скоростью Ω_1 (φ – широта). В терминах ψ_1 уравнение эволюции потенциального вихря записывается в виде

$$\frac{d}{dt}\left(f_1 + \triangle\psi_1 - L_0^{-2}\psi_1 - L_0^{-2}\phi\right) = 0. \tag{5}$$

Здесь $f_1 = 2(\Omega + \Omega_1)\sin\varphi$. Таким образом, в уравнении (5) по сравнению с (1) вместо параметра Кориолиса f появляется параметр $f_{eff} = f_1 - L_0^{-2}\phi$, что не нарушает закон сохранения энергии. Выражения для вариаций остаются в силе. Поэтому все вышеприведенные рассуждения проходят и в этой системе координат. В системе координат, опережающей движение атмосферы, ветер дует с востока на запад, и тогда $\Psi'(\Pi_0) > 0$. Теорема доказана.

2. Механизм баротропной неустойчивости на примере максимально упрощенных уравнений динамики атмосферы (E. Lorenz, 1960). Согласно теореме Го необходимым условием неустойчивости зонального течения является широтная немонотонность его завихренности. Чтобы понять к каким последствиям это может привести и описать, хотя бы качественно, процесс развития неустойчивости, если таковая имеет место, подвергнем, следуя Лоренцу, уравнения динамики баротропной атмосферы максимальному упрощению. Это позволит нам избежать численного интегрирования и выполнить аналитическое исследование нелинейного механизма неустойчивости. Упрощение в первую очередь состоит в том, что пренебрегается двумерной сжимаемостью среды ($L_0^{-1} = 0$), а двумерное двоякопериодическое течение рассматривается не на сфере, а на f-плоскости, т.е. без учета бета-эффекта. Тогда вихревая динамика такой системы описывается обычным дву-

мерным уравнением вихря

$$\frac{\partial(\triangle\psi)}{\partial t} + [\psi, \triangle\psi] = 0 \tag{6}$$

с условиями периодичности

$$\psi\left([x + 2\pi/k,\ y + 2\pi/l\right) = \psi\left(x,\ y\right). \tag{7}$$

Здесь k и l – некоторые фиксированные, не равные нулю, вещественные числа, задающие максимальные пространственные периоды в направлениях осей x и y соответственно.

Разложение по собственным функциям оператора Лапласа, которыми для данной геометрии являются тригонометрические функции $\cos(mkx + nly)$ и $\sin(mkx + nly)$, m и n – целые (не равные нулю) числа, дает следующее Фурье-представление для завихренности:

$$\triangle\psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[A_{mn}\cos(mkx + nly) + B_{mn}\sin(mkx + nly)\right],$$

$$(A_{00} = B_{00} = 0). \tag{8}$$

Его можно переписать в форме

$$\triangle\psi = \sum_{\mathbf{M}} C_{\mathbf{M}} \exp i\mathbf{MR}, \tag{9}$$

где $\mathbf{M} = \mathbf{i}mk + \mathbf{j}nl, \mathbf{R} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$, а $C_{\mathbf{M}} = \frac{1}{2}(A_{mn} - iB_{mn})$, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ – орты в направлениях x и y.

Соответствующий разложению (9) фурье-ряд для ψ имеет вид

$$\psi = \sum_{\mathbf{M}} (\mathbf{M}\cdot\mathbf{M})^{-1} C_{\mathbf{M}} \exp i\mathbf{MR}. \tag{10}$$

Заменяя в (9) индекс суммирования $\mathbf{M}$ на $\mathbf{L}$, а в (10) $\mathbf{M}$ на $\mathbf{H}$ и подставляя (9), (10) в якобиан $[\psi, \triangle\psi]$, получаем его фурье-представление:

$$[\psi, \triangle\psi] = \sum_{\mathbf{H},\mathbf{L}} (\mathbf{k}\cdot\mathbf{H}\times\mathbf{L})(\mathbf{H}\cdot\mathbf{H})^{-1} C_{\mathbf{H}} C_{\mathbf{M}} \exp\{i(\mathbf{H}+\mathbf{L})\cdot\mathbf{R}\}. \tag{11}$$

После замены в (11) индекса суммирования $\mathbf{M}$ на $\mathbf{H}+\mathbf{L}$ и подстановки (9) и (11) в (6) для коэффициентов $C_{\mathbf{M}}$ имеем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений – фурье-представление (6) в пространстве волновых чисел:

$$\frac{dC_{-\mathbf{M}}}{dt} = \sum_{\mathbf{H}} \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{H}\times\mathbf{M}}{\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}} C_{\mathbf{H}} C_{\mathbf{M}-\mathbf{H}}. \tag{12}$$

Аналогичные уравнения получаются для сферы, если делать разложение по собственным функциям сферического оператора Лапласа – сферическим функциям.

Уравнение (6), как известно, обладает двумя первыми интегралами движения – кинетической энергией $E = \frac{1}{2}\iint (\nabla\psi)^2\, dxdy$ и суммарным квадратом завихренности $I = \iint (\triangle\psi)^2\, dxdy$. В пространстве волновых чисел они записываются в виде:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{M}} \frac{C_{\mathbf{M}} C_{-\mathbf{M}}}{\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}}, \quad I = \sum_{\mathbf{M}} C_{\mathbf{M}} C_{-\mathbf{M}}. \tag{13}$$

Теперь заметим, что каждая из производных по времени от E и I равна сумме ряда, элементами которого являются произведения $C_{\mathbf{H}} C_{\mathbf{M}-\mathbf{H}} C_{-\mathbf{M}}$ с соответствующими коэффициентами. Сумму такого ряда можно представить в виде суммы блоков, каждый из которых равен сумме шести слагаемых, получающихся перестановкой векторных индексов $\mathbf{H}$, $\mathbf{M}-\mathbf{H}$, и $-\mathbf{M}$. Любой такой блок тождественно равен нулю. Поэтому, применяя метод Галеркина, систему максимально можно упростить так, чтобы в нелинейном взаимодействии участвовали только моды, соответствующие фиксированным трем векторам $\mathbf{H}$, $\mathbf{M}-\mathbf{H}$, и $-\mathbf{M}$. Полагая в начальный момент все коэффициенты $C_{\mathbf{M}}$ за исключением соответствующих упомянутым векторам равными нулю, мы обнаруживаем, что величины E и I, представленные конечными суммами парных произведений из этих ненулевых коэффициентов, являются первыми интегралами редуцированной системы. Разумеется, что в силу сходимости метода Галеркина такой подход будет тем точнее, чем больше число фиксированных троек векторов учитывается.

В простейшем случае можно ограничиться лишь одной тройкой, в которой каждый индекс m и n принимает значение $1, 0, -1$,

что соответствует учету нелинейного взаимодействия мод наиболее крупного масштаба. Несмотря на всю грубость такого подхода, этот пример, во-первых, может описать поведение системы на некотором начальном этапе, если воспользоваться упомянутыми выше начальными условиями, а, во-вторых, и это самое главное, прояснить механизм неустойчивости с энергетической точки зрения.

Для выбранных значений m и n разложение (8) принимает вид:

$$\triangle\psi = A_{10}\cos kx + A_{01}\cos ly + A_{11}\cos(kx+ly) + A_{1-1}\cos(kx-ly)$$

$$+B_{10}\sin kx + B_{01}\sin ly + B_{11}\sin(kx+ly) + B_{1-1}\sin(kx-ly).$$

Дальнейшее упрощение связано со следующим наблюдением. Если в начальный момент $A_{1-1} = -A_{11}$, а $B_{10} = B_{01} = B_{11} = B_{1-1} = 0$, то они останутся таковыми в любой момент времени t. Полагая теперь $A_{01} = \sqrt{2}A_1$, $A_{10} = \sqrt{2}A_2$ и $A_{1-1} = A_3$, максимально укороченные разложения для завихренности и функции тока можно записать в виде:

$$\triangle\psi = \sqrt{2}A_1\cos ly + \sqrt{2}A_2\cos kx + 2A_3\sin ly\sin kx,$$
$$\psi = -\frac{\sqrt{2}A_1}{l^2}\cos ly - \frac{\sqrt{2}A_2}{k^2}\cos kx - \frac{2A_3}{k^2+l^2}\sin ly\sin kx.$$

Им соответствуют следующие максимально упрощенные уравнения динамики глобальных геофизических течений:

$$\dot{A_1} = -\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2+l^2}\right)klA_2A_3,$$

$$\dot{A_2} = \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{k^2+l^2}\right)klA_3A_1, \qquad (14)$$

$$\dot{A_3} = \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{l^2}\right)klA_1A_2,$$

обладающие двумя положительно определенными квадратичными первыми интегралами движения:

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{A_1^2}{l^2} + \frac{A_2^2}{k^2} + \frac{A_3^2}{k^2+l^2}\right),$$
$$I = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2.$$

Согласно теореме Обухова, любая квадратично нелинейная динамическая система третьего порядка, обладающая двумя положительно определенными квадратичными первыми интегралами движения, эквивалентна уравнениям Эйлера движения твердого тела с неподвижной точкой. В данном конкретном случае в этом легко убедиться, делая формальную замену $d\tau = kldt$, $l^2 = I_1$, $k^2 = I_2$, $k^2 + l^2 = I_3$. Тогда динамическая система (14) переписывается в виде упомянутых уравнений Эйлера в терминах компонент момента количества движения $M_i \equiv A_i$ $i = 1, 2, 3$ (см. Лекцию 12):

$$\dot{M}_1 = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}\right) M_2 M_3,$$
$$\dot{M}_2 = \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right) M_3 M_1,$$
$$\dot{M}_3 = \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) M_1 M_2.$$

С точки зрения динамической метеорологии уравнения (14) описывают эволюцию сдвигового зонального течения с профилем скорости $U = -\partial\psi/\partial y \propto \sin ly$ и немонотонной завихренностью $\triangle\psi \propto \cos ly$, на которое наложены волнообразные крупномасштабные незональные возмущения с широтным волновым числом k. В отсутствии возмущений зональное течение описывается стационарным решением ($A_1 = const$, $A_2 = A_3 = 0$) системы (14). Согласно анализу, сделанному на Лекции 14, такое зональное течение неустойчиво при $k^2 < l^2$, т.е. по отношению к возмущениям, масштаб которых превосходит линейный размер сдвига. С физической точки зрения в этом нет ничего удивительного, поскольку в предельном случае очень малых масштабов незональных возмущений ($k^2 \gg l^2$) они вообще не "заметят" присутствия сдвига. Решениями уравнения Эйлера, как известно, являются соответствующие эллиптические функции, описывающие нелинейные колебания всех трех компонент системы. В связи с этим поучительно заметить, что наблюдаемый на начальном этапе экспоненциальный рост незональных возмущений происходит за счет кинетической энергии зонального потока, который (рост) затем замедляется из-за влияния нелинейности. В итоге устанавливается строго периодический взаимообмен кинетическими энергиями между возмущениями и зональным течением. С этим процессом и связывают наблюдаемые в

атмосфере колебания индекса циркуляции – угловой скорости относительного зонального вращения воздуха в средних широтах.

Упражнения.

1. Попытайтесь вывести максимально упрощенные уравнения динамики баротропной атмосферы с учетом бета-эффекта, описываемой уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\psi - \alpha^2\psi\right) + [\psi, \triangle\psi] + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \tag{15}$$

где $\alpha^2 = L_0^{-2}$.

Подсказка. Следуя Лоренцу, сохраните в разложении ψ по тригонометрическим функциям следующие члены:

$$\psi(x,y,t) = A_{10}(t)\cos(kx) + A_{01}(t)\cos(ly) + B_{10}(t)\sin(kx)$$
$$+B_{01}(t)\sin(ly) + A_{11}(t)\cos(kx+ly) + A_{1-1}(t)\cos(kx-ly)$$
$$+B_{11}(t)\sin(kx+ly) + B_{1-1}(t)\sin(kx-ly).$$

После подстановки этого разложения в (15) и приравнивания коэффициентов при одинаковых гармониках введите обозначения

$$A_{1m} = A_{11} - A_{1-1},\ A_{1p} = A_{11} + A_{1-1},$$
$$B_{1m} = B_{11} - B_{1-1},\ B_{1p} = B_{11} + B_{1-1}.$$

В итоге вы обнаружите, что полученная динамическая система допускает частные решения при $A_{1p} = 0$, $B_{1p} = 0$, $B_{01}(0) = 0$, которые описываются уравнениями (Гледзер А.Е., неопубликованный результат):

$$\dot{A}_{10} = \sigma_k B_{10} + N_k A_{01} A_{1m},\ \dot{A}_{01} = -N_l\left(A_{10}A_{1m} + B_{10}B_{1m}\right),$$
$$\dot{A}_{1m} = \sigma B_{1m} + N A_{10} A_{01}, \tag{16}$$
$$\dot{B}_{10} = -\sigma_k A_{10} + N_k A_{01} B_{1m},\ \dot{B}_{1m} = -\sigma A_{1m} + N A_{01} B_{10}.$$

Здесь

$$\sigma = \frac{\beta k}{k^2 + l^2 + \alpha^2},\ \sigma_k = \frac{\beta k}{k^2 + \alpha^2},$$
$$N = \frac{kl\left(l^2 - k^2\right)}{k^2 + l^2 + \alpha^2},\ N_k = \frac{(1/2)\,k^3 l}{k^2 + \alpha^2},\ N_l = \frac{(1/2)\,kl^3}{l^2 + \alpha^2}.$$

Таким образом, *максимально упрощенные уравнения движения баротропной атмосферы с учетом бета-эффекта задаются динамической системой 5-го порядка.*

Литература

1. Kuo Hsiao-Lan *Dynamic instability of heterogeneous shear flows*, J.Met., V. 6, No. 2, 1949.

2. Дикий Л.А. *Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы*, Л.: Гидрометеоиздат, 1976.

3. Lorenz E.N. *Maximum simplification of the dynamical equations*, Tellus, V.12, No. 3, 1960.

Лекция 20

Понятие бароклинной неустойчивости. Модель Иди

1. Постановка задачи. Напоминаю (см. Лекцию 9), что глобальные движения бароклинной атмосферы описываются квазигеострофическим уравнением потенциального вихря

$$\frac{d}{dt}\left[f+\triangle\psi+\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2}\rho_S\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]=0 \quad \left(\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{1}$$

Здесь выражение в квадратных скобках есть квазигеострофический бароклинный потенциальный вихрь, $\psi=\psi(x,y,z)=p^{'}/f_0\rho_S$ – квазигеострофическая функция тока, $p^{'}$ – отклонение давления от его фонового гидростатического значения, $\rho_S=\rho_S(z)$ – фоновое распределение плотности, $N^2=gd(\ln\Theta_S)/dz$ – квадрат частоты Брента-Вяйселя, $\Theta_S=\Theta_S(z)$ – фоновое распределение потенциальной температуры, $f=2\Omega\sin\varphi$ – параметр Кориолиса (φ – широта) и f_0 – его среднее значение. u и v – зональная и меридиональная компоненты геострофического ветра, которые в терминах функции тока задаются равенствами:

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v=\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{2}$$

Условие непроницаемости нижней границы в терминах функции тока записывается в виде

$$w=-\frac{f_0}{N^2}\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial z}=0, \text{ при } z=0. \tag{3}$$

Напомню также два важных соотношения:

$$\frac{\theta}{\Theta_S} = \frac{f_0}{g}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{4}$$

устанавливающее связь вариации $\theta = \theta(x, y, z, t)$ потенциальной температуры с функцией тока, и термический ветер:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \frac{g}{f_0 \Theta_S}\mathbf{k}\times\nabla\Theta \quad \left(\Theta = \Theta_S + \theta,\ \nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{5}$$

или в координатной форме

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g}{f_0 \Theta_S}\frac{\partial \theta}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{g}{f_0 \Theta_S}\frac{\partial \theta}{\partial x}. \tag{5a}$$

Согласно последним соотношениям вертикальный сдвиг горизонтальной скорости порождается горизонтальным градиентом потенциальной температуры. *Неустойчивость, индуцированная вертикальным сдвигом скорости, называется бароклинной неустойчивостью,* поскольку в отличие от баротропной неустойчивости источником кинетической энергии возмущений в рассматриваемом случае служит бароклинная доступная потенциальная энергия, локальной мерой которой и является горизонтальная температурная неоднородность. В связи с этим уместно вспомнить первые интегралы движения уравнения (1), которые будут использованы при формулировки условий устойчивости зональных бароклинных течений. Речь идет об инварианте энергии

$$E = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho_S \left((\nabla\psi)^2 + \frac{f_0^2}{N^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right) dxdydz \tag{6}$$

и обобщенной интегральной потенциальной завихренности

$$I = \iiint\limits_V \Phi(\Pi, z)\, dxdydz, \tag{7}$$

где $\Phi(y, z)$ – произвольная функция двух переменных. К ним можно добавить инвариант

$$G = \iint\limits_{z=0} \Gamma\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dxdy \tag{8}$$

(Г – произвольная функция одного аргумента), который следует из нижнего граничного условия (3).

Интеграл энергии с помощью соотношений (2) и (4) можно записать в терминах горизонтальной скорости и потенциальной температуры (см. Лекцию 10):

$$E = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho_S \mathbf{u}^2 dxdydz + \frac{1}{2}\iiint \rho_S \frac{g^2}{N^2}\frac{\theta^2}{\Theta_S^2} dxdydz, \qquad (6a)$$

где второе слагаемое, обозначаемое через $P_{bc} \doteq APE_{bc}$ и есть бароклинная доступная потенциальная энергия атмосферы. Напомним для сравнения, что доступная потенциальная энергия баротропной атмосферы задается равенством:

$$APE_{bt} = \frac{1}{2}\iint L_0^{-2}\psi^2 dxdy.$$

Оба вида энергии, как это уже обсуждалось на Лекции 11, можно учесть в одной модели, переходя к p-координатам.

Следует, однако, заметить, что APE_{bc} в том виде, как она здесь определена, не является универсальным выражением для доступной бароклинной потенциальной энергии, а, вообще говоря, зависит от конкретной постановки задачи. Такое выражение, в частности, не пригодно, если в качестве фонового взять равновесное состояние, соответствующее неподвижной нейтрально стратифицированной атмосфере. Это, например, оправдано, если речь идет о квазигеострофических движениях слаборасслоенной несжимаемой жидкости. В этом случае $N^2 \approx 0$, а доступная потенциальная энергия определяется горизонтальной расслоенностью среды. Простейший пример такого рода рассмотрен в одной из следующих лекций. Строгий подход к вычислению APE можно найти в монографии Курганского (1993). Здесь для нас важно показать лишь саму роль APE_{bc} в механизме бароклинной неустойчивости.

2. Теорема Чарни-Стерна (Charney, Stern 1962). *Если приземная температура постоянна, то для устойчивости бароклинного геострофического течения достаточно, чтобы на любом фиксированном уровне $z = const$ потенциальный вихрь зонального движения монотонно убывал в направлении полюс-экватор.*

Замечание. Уместно заметить, что Чарни и Стерн в отличие от нас использовали p-координатное представление уравнений движения и требовали поэтому постоянства приземной плотности, а не

температуры. Оба предположения довольно грубые и до определенной степени справедливы лишь в средних широтах, достаточно удаленных от экватора и полюсов.

Доказательство. Величина G (см. (8)) постоянна в силу условий теоремы. Поэтому в качестве функции Ляпунова можно воспользоваться функционалом $F = E + I$, т.е.

$$F = \iiint\limits_V \left[\frac{1}{2}\rho_S \left(\nabla\psi\right)^2 + \frac{1}{2}\rho_S \frac{f_0^2}{N^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 + \Phi\left(z,\Pi\right)\right] dxdydz.$$

Тогда

$$\delta F = \iiint\limits_V \left[\rho_S \nabla\psi_0 \delta\nabla\psi + \rho_S \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\delta\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial\Phi}{\partial\Pi}\delta\Pi\right] dxdydz =$$

(после интегрирования по частям)

$$= \iiint\limits_V \left\{-\rho_S\psi_0\delta\triangle\psi - \psi_0\delta\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_S\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]\right\} dxdydz$$

$$+\iiint\limits_V \left\{\frac{\partial\Phi}{\partial\Pi}\delta\Pi\left(y,z\right)\right\} dxdydz = \iiint\limits_V \left(-\rho_S\psi_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial\Pi}\right)\delta\Pi dxdydz,$$

потому что

$$\delta\triangle\psi + \delta\left[\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_S\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right] = \delta\Pi.$$

Здесь $\psi_0 = \psi_0\left(y,z\right)$ – функция тока зонального бароклинного течения, исследуемого на устойчивость.

В силу условий теоремы в качестве широтной координаты вместо y можно взять Π, т.е. положить, что $\psi_0\left(y,z\right) = \Psi\left(\Pi,z\right)$. Тогда $\delta F = 0$ влечет $\rho_S\Psi = \partial\Phi/\partial\Pi$. Вычисляем вторую вариацию:

$$\delta^2 F = \iiint\limits_V \rho_S\left[\left(\delta\nabla\psi\right)^2 + \frac{f_0^2}{N^2}\left(\delta\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial\Psi}{\partial\Pi}\left(\delta\Pi\right)^2\right] dxdydz.$$

Положительная определенность $\delta^2 F$ требует, чтобы $\partial\Psi/\partial\Pi > 0$. Дальнейшие рассуждения аналогичны используемым при доказательстве теоремы Го, т.е. для достижения цели нужно рассматривать движение во вращающейся системе координат, опережающей ветер.

3. Модель Иди. Изложение элементов невязкой теории устойчивости глобальных геофизических течений мне хотелось бы закончить работой Иди (Eady). Опубликованная еще в 1949 г. в известном шведском метеорологическом журнале Tellus, эта работа давно уже стала хрестоматийной и описывается практически в любом учебнике по геофизической гидродинамике или динамической метеорологии. Дело в том, что Иди не только впервые вскрыл механизм бароклинной неустойчивости, т.е. причину рождения вертикальной завихренности (циклонов и антициклонов) из-за *неоднородности именно горизонтального распределения плотности или энтропии*, но и объяснил этот механизм физически столь прозрачно, что все последующие работы на эту тему даже в нелинейной постановке задачи лишь количественно развивают идею, не внося сколько-нибудь новых качественных объяснений. Модель Иди есть результат его докторской диссертации, во время подготовки которой он еще не мог знать фундаментальных квазигеострофических уравнений глобальных движений. По этой причине, по-видимому, в его статье отсутствует список литературы, подчеркивая тем самым отсутствие предшественников, хотя в заключение он упоминает работу Чарни (Charney, 1947), которая частично согласуется с его исследованием ("...which in many (but not all) respects is consistent with his own.") По этой же причине Иди формулирует краевую задачу не для уравнения потенциального вихря, а для уравнения эволюции вертикальной скорости, для упрощения которого он использует по существу такие же предположения, как и при выводе упомянутых квазигеострофических уравнений. Ниже дается современное изложение работы Иди, т.е. в терминах потенциальной завихренности, что много лаконичнее оригинала.

3.1. Постановка задачи. Применительно к рассматриваемой задаче величину $f_0^2 N^{-2} \rho_S$ положим медленно меняющейся функцией вертикальной координаты, что позволяет вынести ее из-под знака дифференцирования по z в уравнении (1). Уместно отметить, что сделанное допущение, справедливое для жидкости Обербека-Буссинеска, является весьма спорным для реальной атмосферы. Обычно такую процедуру делают, когда работают в p-координатах (в этом случае под знаком вертикального дифференцирования стоит величина $L_R^{-2} p^2$, $L_R = NH/f_0$ — внутренний радиус деформации, см. (11.7)), но и тогда оно не выглядит более убедительной.

Однако, с физической точки зрения мы не совершили большого греха, слегка изменив пространственное распределение доступной потенциальной энергии. Поэтому полученные ниже результаты вполне пригодны для оценок реальных характеристик линейной устойчивости. Существенно отметить также, что по вертикали среда предполагается устойчиво стратифицированной ($N > 0$). Трехмерное поле ветра в средних и высоких широтах земной атмосферы приближенно описывается формулами (2), (3), причем горизонтальные компоненты скорости ветра u и v отсчитываются в направлениях на восток и север соответственно, а положительная вертикальная скорость направлена вверх.

Задача решается на f-плоскости ($df/dy = 0$) в области, ограниченной лишь по высоте твердыми поверхностями на уровнях $z = 0, H$. На устойчивость исследуется строго зональное (вдоль кругов широт) движение атмосферы, обладающее вертикальным сдвигом или, что то же самое, завихренностью в направлении, противоположном широтному градиенту потенциальной температуры

$$u = U(z) = -\frac{\partial \Psi}{\partial y},\ v = w = 0. \tag{9}$$

3.2. Решение методом нормальных мод. Отвечающие состоянию (9) функция тока и потенциальный вихрь равны соответственно:

$$\Psi(x, y) = -U(z)\, y + F(z), \tag{10}$$

$$\Pi(x, y) = -\frac{f_0^2}{N^2} U'' y + F'' + f. \tag{11}$$

Тогда уравнение (1), линеаризованное относительно первичного течения, с учетом сделанных предположений, записывается в виде

$$\frac{d}{dt}(\Pi + \chi) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0,$$

где $\psi = \psi(x, y, z, t)$ – функция тока инфинитезимальных возмущений u, v и w, наложенных на первичное течение, а

$$\chi = \triangle \psi + \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

– соответствующий им потенциальный вихрь.

Памятуя теорему Сквайра, можно положить далее, что возмущения не зависят от ортогональной плоскости (x,z) координаты y, т.е. $\psi = \psi(x,z,t)$, а термический ветер $\Omega_y = dU/dz$ ради простоты – постоянным по высоте. Тогда $\partial\Pi/\partial y = 0$ и линейная задача устойчивости задается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{12}$$

с граничными условиями

$$w = -\frac{f_0}{N^2}\frac{d}{dt}\frac{\partial(\Psi+\psi)}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0, H,$$

которые после линеаризации записываются в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z} - \Omega_y\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \text{ при } z = 0, H. \tag{13}$$

Коэффициенты, входящие в уравнение (12) и граничные условия (13) зависят только от z. Поэтому, обращаясь к методу нормальных мод, будем искать решение задачи в виде:

$$\psi(x,z,t) = \psi(z)\exp\{ik(x-ct)\}.$$

После подстановки этого выражения в (12), (13) с учетом $\partial/\partial x \Longrightarrow ik$, $\partial/\partial t \Longrightarrow -ikc$ и $(\partial/\partial t + U\partial/\partial x) \Longrightarrow ik(U-c)$ приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$(U-c)\left(-k^2\psi + \frac{f_0}{N^2}\psi''\right) = 0, \tag{14}$$

$$(U-c)\psi' - \Omega_y\psi = 0 \text{ при } z = 0, H. \tag{15}$$

Понятно, что непрерывный спектр задачи принадлежит отрезку $[U\min, U\max]$ и не дает вклада в неустойчивость. В дальнейшем будем полагать, что $U\min = U(0) = 0$, а $U\max = U(H) = \Omega_y H = U_0$. Тогда при $c \neq U$ общее решение уравнения (14) записывается в виде:

$$\psi(z) = A\mathrm{ch}\lambda z + B\mathrm{sh}\lambda z,\ \lambda = \frac{Nk}{f_0},$$

где, согласно граничным условиям (15), коэффициенты A и B удовлетворяют следующей однородной системе линейных уравнений:

$$\Omega_y A + c\lambda B = 0,$$
$$\left[\lambda\left(U_0 - c\right)\mathrm{sh}\lambda H - \Omega_y \mathrm{ch}\lambda H\right] A + \left[\lambda\left(U_0 - c\right)\mathrm{ch}\lambda H - \Omega_y \mathrm{sh}\lambda H\right] B = 0.$$

Условие ее разрешимости означает, что c должно быть корнем квадратного уравнения:

$$c^2 - U_0 c + \left(U_0 \frac{\Omega_y}{\lambda}\mathrm{cth}\lambda H - \frac{\Omega_y^2}{\lambda^2}\right)$$

$$\equiv c^2 - U_0 c + \left(\frac{U_0^2}{\lambda H}\mathrm{cth}\lambda H - \frac{U_0^2}{\lambda^2 H^2}\right) = 0. \qquad (16)$$

Дискриминант этого уравнения

$$D = U_0^2\left[1 - 4\alpha^{-2}\left(\alpha\mathrm{cth}\alpha - 1\right)\right],\ \alpha = \lambda H = NkH/f_0,$$

с помощью тождества

$$\mathrm{cth}\alpha = \frac{1}{2}\left(\mathrm{th}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{cth}\frac{\alpha}{2}\right)$$

можно представить в виде:

$$D = \frac{4}{\alpha^2}U_0^2\left(\frac{\alpha}{2} - \mathrm{cth}\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{2} - \mathrm{th}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Поскольку $\alpha/2 \geqslant \mathrm{th}(\alpha/2)$, то критическое значение α есть корень уравнения

$$\frac{\alpha}{2} = \mathrm{cth}\frac{\alpha}{2},\ \alpha_{\text{кр}} \approx 2.4.$$

При $\alpha > \alpha_{\text{кр}}$ зональное течение устойчивое (решение описывается суперпозицией двух нейтральных мод). Интересно оценить длину волны критической моды, полагая для оценки $N \approx 10^{-2}$ с$^{-1}$, $H \approx$ 10 км и $f_0 \approx 10^{-4}$ с$^{-1}$. Тогда

$$L_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{k_{\text{кр}}} = \frac{2\pi NH}{f_0\alpha_{\text{кр}}} \approx \frac{2\pi 10^{-2}\cdot 10}{10^{-4}\cdot 2.4} \approx 2.6\cdot 10^3 \text{км}.$$

Таким образом, бароклинная неустойчивость носит длинноволновый характер: моды с длиной волны $L > L\ \ (\alpha < \alpha)$ экпоненциально растут со скоростью

$$k \operatorname{Im} c = \frac{k}{\alpha} U_0 \left[\left(\frac{\alpha}{2} - \operatorname{cth} \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{\alpha}{2} - \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \right) \right]^{1/2},$$

причем максимум инкремента приходится на значение $\alpha_m \approx 1.75$. Ему соответствует длина волны $L_m \approx 3.6 \cdot 10^3$ км, четверть которой как раз и сопоставима с характерным размером наблюдаемых в атмосфере циклонов и антициклонов. Применительно к данной задаче характерный размер циклона или антициклона сопоставлять надо именно с четвертью упомянутой длины, потому что найденные решения разбивают всю область интегрирования на чередующиеся подобласти циклонической и антициклонической завихренности размером $L/2$ каждая. Нетрудно показать также, что минимальное время развития вертикальной завихренности (время нарастания амплитуды максимально неустойчивого возмущения в e раз) равно

$$\tau_m \approx \frac{L_m \alpha_m}{0.3 \cdot 2\pi} \approx 4 \text{суток}.$$

Это также согласуется с наблюдательными данными.

Из проделанного анализа становится ясным, что источником рассматриваемой неустойчивости является именно доступная потенциальная энергия, входящая в выражение для полной энергии (6) в качестве второго слагаемого. В самом деле, согласно (16), в отсутствие термического ветра ($\Omega_y = 0$) неустойчивых мод не существует, а общее решение уравнения (1) с учетом сделанного упрощения, удовлетворяющее граничным условиям $w = 0$ при $z = 0, H$, записывается в виде

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, t) + F(z).$$

Здесь $\psi(x, y, t)$ – решение уравнения

$$\frac{d}{dt}(f + \triangle\psi) = 0,$$

а $F(z)$ – произвольная, не зависящая от времени, функция z, олицетворяющая, так сказать, недоступную потенциальную энергию (например, потенциальную энергию фонового распределения

потенциальной температуры). Действительно, величине $\partial\Psi/\partial z = dF/dz$ лишь формально соответствует отличная от нуля потенциальная энергия в выражении (6), которая, будучи инвариантом движения, не преобразуется в кинетическую энергию, а, следовательно, ее можно исключить из рассмотрения. Таким образом, именно отличный от нуля термический ветер $\Omega_y = dU/dz$ обеспечивает такой вертикальный сдвиг функции тока, которому соответствует потенциальная энергия, преобразуемая в кинетическую и порождающая крупномасштабную вертикальную завихренность, т.е. являющаяся одной из главных причин циклогенеза. Иди дает такое объяснение бароклинной неустойчивости: подобно тому, как в бенар-рэлеевской конвекции отрицательный вертикальный градиент температуры порождает переворачивание жидкости в вертикальной плоскости ("vertical overturning"), так и в атмосфере разность температур в направлении полюс-экватор порождает переворачивание воздуха в горизонтальной плоскости ("horizontal overturning"), причем в обоих случаях процесс происходит в направлении уменьшения потенциальной энергии системы.

Из проделанного в лекциях 18 - 20 анализа полезно извлечь, осознать и запомнить следующую важную особенность глобальных геофизических течений. Как это ни парадоксально, оба вида сдвига горизонтальной скорости – горизонтальный сдвиг и вертикальный сдвиг в силу неустойчивости порождают крупномасштабную вертикальную завихренность. Разница состоит в том, что в первом случае источником циклогенеза является кинетическая энергия основного течения, тогда как во втором случае – его доступная потенциальная энергия. Оба механизма – баротропная и бароклинная неустойчивости играют определяющую роль в формировании общей циркуляции земной атмосферы. Последнее обстоятельство является одним из главных препятствий на пути построения теории общей циркуляции.

Упражнения.

1. Доведите до конца доказательство теоремы Чарни-Стерна.

2. Покажите, что приведенная выше оценка для τ_m действительно справедлива.

Литература

1. Курганский М.В. *Введение в крупномасштабную динамику атмосферы*, С-П.: Гидрометеоиздат, 1993.

2. Дикий Л.А. *Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы*, Л.: Гидрометеоиздат, 1976.

3. Charney J.G., Stern M.E. On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere, J. Atmos.Sci., V.19, No. 2, 1962.

4. Eady E. T. *Long waves and cyclone waves*, Tellus, V.1, No. 3, 1949.

Часть IV

РОЛЬ ВЯЗКОСТИ В ФОРМИРОВАНИИ ГЛОБАЛЬНЫХ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Лекция 21

Уравнения движения вязкой жидкости, граничные условия.

До сих пор мы рассматривали движение идеальной жидкости, отражающее, так сказать, генетические особенности поведения реальной жидкости, не отягощенного влиянием необратимых термодинамических процессов, которые всегда имеют место из-за внутреннего трения (вязкости) и теплопроводности среды. Применительно к глобальным геофизическим течениям ситуация осложняется еще и тем, что роль необратимых неадибатических факторов берут на себя не только, а вернее не столько, молекулярная вязкость и теплопроводность, сколько мелкомасштабные движения, не учитываемые квазигеострофическим приближением. Особое, принципиально важное, влияние, как мы увидим ниже, на формирование общей циркуляции атмосферы оказывает земная поверхность, без трения о которую погода и климат на Земле были бы абсолютно не пригодными для человеческой цивилизации. Необратимые диабатические процессы начинают заметно сказываться на поведении глобальных атмосферных движений уже на третьи сутки после начала наблюдений. Поэтому для предсказания погоды на более длительные сроки и описания климата без учета упомянутых необратимых процессов не обойтись. Начнем с вывода уравнений движения вязкой жидкости.

1. Вывод уравнений Навье-Стокса (C.R. Navier, 1827, G.G. Stokes, 1845). Содержание этой лекции основано на материале, изложенном в параграфах 15, 16 и 49, 50 учебника (Ландау, Лифшиц, 1986). Напоминаю, что уравнения Эйлера движения идеальной жидкости в терминах удельного импульса и тензорных обозна-

чениях записываются в виде:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \tag{1}$$

где тензор плотности потока импульса

$$\Pi_{ik} = \delta_{ik} p + \rho u_i u_k \tag{2}$$

описывает чисто обратимый перенос импульса, вызванный влиянием давления и передвижением различных участков жидкости из одного места в другое.

Вязкость или внутреннее трение проявляется в жидкости наличием дополнительного, необратимого, переноса импульса в направлении уменьшения скорости. Его можно учесть в (2) с помощью дополнительного члена σ'_{ik}, необратимо отнимающего долю "идеального" потока импульса:

$$\Pi_{ik} = \delta_{ik} p + \rho u_i u_k - \sigma'_{ik} = \rho u_i u_k - \sigma_{ik}. \tag{3}$$

Тензор σ'_{ik} называется *вязким тензором напряжений*, а тензор

$$\sigma_{ik} = -\delta_{ik} p + \sigma'_{ik} \tag{4}$$

– *тензором напряжений,* выделяющим ту часть потока импульса, которая не связана с переносом импульса движущейся массой жидкости.

Установить общий вид тензора σ'_{ik} можно из следующих соображений. (а) Внутреннее трение в жидкости возникает только в случае, когда имеет место движение частей жидкости относительно друг друга. Поэтому σ'_{ik} должно зависеть от производных скорости по пространственным координатам. Если градиенты скорости не очень велики, то в этой зависимости можно ограничиться только первыми производными, причем саму зависимость σ'_{ik} от $\partial u_i / \partial x_k$ в том же приближении можно считать линейной. (б) Не зависящие от $\partial u_i / \partial x_k$ члены должны отсутствовать в выражении для σ'_{ik}, поскольку $\sigma'_{ik} = 0$ при $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{const}$. (в) Очевидно, что $\sigma'_{ik} = 0$ при твердотельном вращении жидкости с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, которому соответствует поле скорости $\mathbf{u} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$. Линейными комбинациями производных $\partial u_i / \partial x_k$, обращающимися в нуль при $\mathbf{u} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$, являются $\partial u_i / \partial x_k + \partial u_k / \partial x_i$, которые и

должны определять σ'_{ik}. Наиболее общим видом тензора второго ранга , удовлетворяющего условиям (а) - (в), является

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_s}{\partial x_s}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial u_s}{\partial x_s} \tag{5}$$

с независящими от скорости коэффициентами η и ζ. (Последнее утверждение следует из изотропии жидкости как среды, свойства которой описываются лишь скалярными величинами, в данном случае – η и ζ.) Члены в (5) сгруппированы так, чтобы свертка тензора, стоящего в скобках, т.е. сумма его диагональных членов (след тензора) обращалась в ноль. Величины η и ζ называются *коэффициентами вязкости*, причем ζ часто называют *коэффициентом второй вязкости.* Ниже будет показано, что оба они положительны.

Уравнения движения вязкой жидкости получаются теперь прибавлением выражения $\partial\sigma'_{ik}/\partial x_k$ к правой части (1), которые с учетом уравнения неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_s}(\rho u_s) \equiv \frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial u_s}{\partial x_s} = 0, \tag{6}$$

записываются в виде:

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_s\frac{\partial u_i}{\partial x_s}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\,\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_s}{\partial x_s}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial u_s}{\partial x_s}\right). \tag{7}$$

Это – наиболее общий вид уравнений движения вязкой жидкости, в которых величины η и ζ, вообще говоря, зависят от давления и температуры, а потому не выносятся за знак дифференцирования. Однако в большинстве случаев такими зависимостями можно пренебречь. Тогда (7) можно переписать в векторной форме:

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u}\right] = -\nabla p + \eta\triangle\mathbf{u} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla div\mathbf{u}. \tag{8}$$

Это и есть знаменитое *уравнение Навье-Стокса*, которое используется в подавляющем большинстве случаев для описания движения вязкой жидкости.

При описании существенно дозвуковых течений жидкость можно считать несжимаемой, и тогда последним слагаемым в правой части (8) можно пренебречь. В этом случае уравнение Навье-Стокса обычно записывают в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\triangle\mathbf{u}, \tag{9}$$

где величину $\nu = \eta/\rho$ называют *кинематической вязкостью*, которой по сути дела и определяется скорость диссипации кинетической энергии жидкости, т.е. эффективность ее внутреннего трения. О самой η говорят тогда как о *динамической вязкости.* Приведем в связи с этим для сравнения таблицу значений величин η и ν для некоторых жидкостей и газов (при температуре $20°C$):

	η(г/с · см)	ν (см^2/с)
Вода	0.010	0.01
Воздух . . .	$1.8{\cdot}10^{-4}$	0.15
Спирт	0.018	0.022
Глицерин . .	8.5	6.8
Ртуть	0.0156	0.0012

Отсюда, в частности, видно, что, хотя динамическая вязкость воды почти на два порядка превосходит динамическую вязкость воздуха, эффективно внутреннее трение воды при прочих равных условиях более, чем на порядок меньше внутреннего трения воздуха. Заметим также, что динамическая вязкость газов при заданной температуре не зависит от давления, а кинематическая вязкость соответственно обратно пропорционально давлению.

Уравнение Пуассона для однородной несжимаемой идеальной жидкости ($\rho = \rho_0 = const$)

$$\triangle p = -\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} = -\rho_0 \frac{\partial^2 u_i u_k}{\partial x_k \partial x_i}, \tag{10}$$

которое используется для восстановления давления по полю скорости, остается справедливым и для вязкой жидкости, поскольку оно получается применением div к (9) при $\rho = \rho_0 = const$.

2. Постановка граничных условий. Ограничимся рассмотрением граничных условий для течений несжимаемой жидкости ($div\mathbf{u} = 0$). В этом случае тензор вязких напряжений и тензор напряжений принимают простой вид:

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \tag{11}$$

$$\sigma_{ik} = -\delta_{ik}p + \sigma'_{ik} = -\delta_{ik}p + \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right). \tag{12}$$

Наиболее характерные примеры граничных условий относятся к (а) твердой стенке, (б) поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей и (в) свободной поверхности жидкости. В случае (а) из-за сил молекулярного сцепления жидкость прилипает к стенке. Поэтому скорость жидкости на твердой стенке равна скорости самой стенки, и на неподвижной стенке $\mathbf{u} = 0$. Таким образом в отличие от идеальной жидкости в данном случае не только нормальная, но и касательная компонента скорости на твердой стенке должна обращаться в нуль, что связано с повышением порядка уравнений движения по пространственным производным.

Сила, действующая на элемент поверхности $d\mathbf{s}$, есть не что иное, как поток импульса через этот элемент:

$$\Pi_{ik} = (\rho u_i u_k - \sigma_{ik})\, ds_k,$$

где $ds_k = n_k ds$, а $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности. Для определения силы, действующей со стороны жидкости на твердую стенку, нужно перейти в систему координат, в которой стенка покоится: сила равна просто потоку импульса только при неподвижной стенке. Поэтому, полагая в последней формуле $\mathbf{u} = 0$, находим, что сила $\mathbf{F}$, приложенная к единице площади твердой поверхности, равна

$$F_{\mathbf{i}} = -\sigma_{ik}n_k = pn_i - \sigma'_{ik}n_k. \tag{13}$$

Первый член есть обычное давление жидкости, а второй – сила трения о поверхность, обусловленная вязкостью жидкости. Уместно подчеркнуть, что $\mathbf{n}$ в (13) есть единичный вектор нормали, *внешней по отношению к поверхности жидкости,* т.е. внутренней по отношению к твердой поверхности.

(б) На границе раздела двух несмешивающихся жидкостей скорости обеих жидкостей должны быть равны, а силы, с которыми они действуют друг на друга, одинаковы по величине и противоположны по направлению. Второе условие означает, что

$$\sigma_{ik}^{(1)} n_k^{(1)} + \sigma_{ik}^{(2)} n_k^{(2)} = 0.$$

Векторы нормалей $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}$ к поверхностям жидкостей 1 и 2 имеют взаимно противоположное направление. Поэтому, полагая $\mathbf{n}^{(1)} = -\mathbf{n}^{(2)} = \mathbf{n}$, второе граничное условие можно переписать в виде:

$$\sigma_{ik}^{(1)} n_k = \sigma_{ik}^{(2)} n_k. \tag{14}$$

(в) На свободной поверхности напряжения исчезают, т.е.

$$\sigma_{ik} n_k = \sigma'_{ik} n_k - p n_i = 0. \tag{15}$$

3. Диссипация кинетической энергии в несжимаемой жидкости. Полная кинетическая энергия несжимаемой жидкости ($div\mathbf{u} = 0$) равна

$$E = \frac{1}{2}\int_V \rho u^2 dV,$$

где V – объем, занимаемый всей жидкостью. Если жидкость занимает неограниченное пространство, предполагается, что на бесконечности жидкость покоится. Используя уравнение Навье-Стокса в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$$

и уравнение сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = 0,$$

вычислим производную кинетической энергии единицы объема жидкости по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2\right) = \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{2}u^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

В итоге получим (выполните Упражнение 1)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2\right) = -div\left[\rho\mathbf{u}\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho}\right) - \mathbf{u} * \sigma'\right] - \sigma'_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \tag{16}$$

где через $\mathbf{u} * \boldsymbol{\sigma}'$ обозначен вектор с компонентами $u_i \sigma'_{ik}$.

Первый член в квадратных скобках совпадает с потоком энергии идеальной жидкости (см. Лекцию 2), создаваемым обычным переносом массы жидкости при ее движении. А вот второй член $\mathbf{u} * \boldsymbol{\sigma}'$ есть поток энергии, обусловленный внутренним трением, поскольку наличие вязкости приводит к появлению потока импульса σ'_{ik} (см.(3)), а перенос импульса влечет за собой перенос энергии, равный произведению потока импульса на скорость. И наконец, последний член в правой части (16) описывает *диссипацию кинетической энергии в единице объема, т.е. ее превращение в тепло.*

Интегрируя (16) по всему объему жидкости с учетом граничных условий (а) или обращения скорости в нуль на бесконечности, получим скорость диссипации всей кинетической энергии жидкости или, что то же самое, с точностью до знака, скорость генерации тепла за счет вязкости:

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -\int\limits_V \sigma'_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dV = -\frac{1}{2} \int\limits_V \sigma'_{ik} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dV$$

(тензор σ'_{ik} симметричен). Делая сюда подстановку формулы (11), находим, что скорость диссипации кинетической энергии всей жидкости выражается формулой:

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -\frac{\eta}{2} \int\limits_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 dV. \tag{17}$$

Отсюда следует, что $\eta > 0$, *поскольку диссипация* $\dot{E}_{\text{кин}} < 0$.

4. Перенос тепла в сжимаемой жидкости. Система, состоящая из уравнения Навье-Стокса (8) для сжимаемой жидкости и уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(\rho \mathbf{u}) \equiv \frac{d\rho}{dt} + \rho div \mathbf{u} = 0, \tag{18}$$

замыкается уравнение переноса тепла, которое можно вывести из следующих соображений. Пусть $dQ = \rho T ds$ – приток тепла к единице объема жидкости за время dt, где s – удельная энтропия (энтропия единицы массы жидкости), T – абсолютная температура. Тогда уравнение переноса тела записывается в виде:

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \frac{dQ}{dt},$$

где справа стоит источник тепла , создаваемый диссипацией кинетической энергии и молекулярной теплопроводностью самой жидкости. Первое слагаемое, согласно (16), равно $\sigma'_{ik}\partial u_i/\partial x_k$. Плотность потока тепла, переносимого посредством теплопроводности по закону Фурье, равна $\mathbf{q} = -\varkappa\nabla T$. Положительная величина $\varkappa$ называется *коэффициентом теплопроводности* или просто *теплопроводностью.* Тогда $div\mathbf{q} = -div\left(\varkappa\nabla T\right)$ есть отток тепла в единицу времени от выделенной единицы объема, и уравнение баланса тепла принимает вид:

$$\rho T\frac{ds}{dt} = \sigma'_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - div\mathbf{q}$$

или

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\, s\right) = \sigma'_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + div\left(\varkappa\nabla T\right). \tag{19}$$

Уравнение (19) называется *общим уравнением переноса тепла.*

Генерацию тепла, создаваемую внутренним трением, с помощью (5) можно представить в виде:

$$\sigma'_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \eta\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_s}{\partial x_s}\right) + \zeta\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\delta_{ik}\frac{\partial u_s}{\partial x_s}.$$

Легко проверить, что первое слагаемое в правой части этого равенства тождественно выражению

$$\frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_s}{\partial x_s}\right)^2,$$

а второе -

$$\zeta\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\delta_{ik}\frac{\partial u_s}{\partial x_s} = \zeta\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_s}\right)^2 = \zeta\left(div\mathbf{u}\right)^2.$$

В итоге уравнение (19) принимает вид

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + (u\nabla)\, s\right) = div\left(\varkappa\nabla T\right) + \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_s}{\partial x_s}\right)^2$$
$$+\zeta\left(div\mathbf{u}\right)^2. \tag{20}$$

С помощью (18) и (20) нетрудно показать (выполните Упражнение 3), что

$$\frac{\partial\left(\rho s\right)}{\partial t} = -div\left(\rho s\mathbf{u}\right) + \frac{1}{T}div\left(\varkappa\nabla T\right)$$

$$+\frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_s}{\partial x_s}\right)^2+\frac{\zeta}{T}\left(div\mathbf{u}\right)^2. \qquad (21)$$

Рассмотрим неограниченный объем жидкости, покоящейся ($\mathbf{u}=0$) и равномерно нагретой ($\nabla T=0$) на бесконечности. Интегрируя последнее равенство по всему объему такой жидкости, после перехода к интегралу по бесконечно удаленной поверхности находим, что вклад первого члена правой части исчезает. Интеграл от второго члена преобразуется следующим образом

$$\int\frac{1}{T}div\left(\varkappa\nabla T\right)dV=\int div\left(\frac{\varkappa\nabla T}{T}\right)dV+\int\frac{\varkappa\left(\nabla T\right)^2}{T^2}dV,$$

и в силу второго условия на бесконечности первое слагаемое обращается в нуль. В результате имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\rho sdV=\int\frac{\varkappa\left(\nabla T\right)^2}{T^2}dV+\int\frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_s}{\partial x_s}\right)^2dV$$

$$+\int\frac{\zeta}{T}\left(div\mathbf{u}\right)^2dV. \qquad (22)$$

Суммарная энтропия системы, не подверженной внешнему воздействию, может только возрастать, т.е. правая часть (22) должна быть положительной. Кроме того, в каждом из членов этой суммы подынтегральное выражение может быть отлично от нуля даже при равенстве нулю двух других интегралов. Поэтому каждый из этих интегралов должен быть всегда положительным. Отсюда следует наряду с известной уже нам положительностью η и $\varkappa$ положительность второго коэффициента вязкости.

5. Перенос тепла в несжимаемой жидкости. Если скорость движения жидкости мала по сравнению со скоростью звука, то возникающие в результате движения изменения давления настолько малы, что вызываемым ими изменением плотности (и других термодинамических величин) можно пренебречь (если речь не идет о глобальных течениях вращающейся жидкости). Однако неравномерно нагретая жидкость не является при этом вполне несжимаемой. Нельзя пренебречь изменениями плотности под влиянием изменений температуры, даже если скорости течения неравномерно нагретой жидкости малы, и, следовательно, плотность

нельзя считать постоянной. Поэтому в этом случае при определении производных термодинамических величин надо считать постоянным давление. Тогда

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \nabla s = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \nabla T,$$

и поскольку $T\left(\partial s/\partial T\right)_p = c_p$ есть теплоемкость при постоянном давлении, то

$$T\frac{\partial s}{\partial t} = c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad T\nabla s = c_p \nabla T.$$

Уравнение (19) теперь принимает вид:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\, T\right) = div\,(\varkappa \nabla T) + \sigma'_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \tag{23}$$

Полагая далее, $\rho = \rho_0 + \rho'$, $T = T_0 + T'$, где ρ_0 и T_0 – средние значения плотности и температуры, а их пульсации, малые по сравнению со средними значениями, связаны линейным соотношение $\rho'/\rho_0 = -T'/T_0$, величину ρ в (22) можно заменить на ρ_0, и жидкость считать несжимаемой ($div\mathbf{u} = 0$, см. приближение Обербека-Буссинеска в Лекции 15). Делая теперь подстановку формулы (11) в (23), получаем уравнение переноса тепла в несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\, T = k\triangle T + \frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2, \tag{24}$$

где $\nu = \eta/\rho_0$ – кинематическая вязкость, а вместо $\varkappa$ введен *коэффициент температуропроводности* $k = \varkappa/\rho_0 c_p$. Поскольку температура входит в (23) и (24) только под знаком дифференцирования, T не заменяется на T'. Последний член в (24) в практических расчетах, как правило, не учитывается в силу его малости по сравнению с эффектом молекулярной передачи тепла.

В заключение уместно заметить, что уравнения Навье-Стокса были выведены Н.Н. Боголюбовым путем разложения основного уравнения статистической механики – уравнения Лиувилля (точнее эквивалентной ему цепочки уравнений Боголюбова) сначала (на кинетическом этапе) по малому параметру $\varepsilon = \tau/t_0$ (τ – время взаимодействия молекул, t_0 – время прохождения молекулой длины свободного пробега), а затем (на гидродинамическом этапе)

по парамеру $\theta = t_0/t_*$ (t_* – характерное время изменений макроскопических движений). При этом в первом порядке разложения по θ получаюся уравнения Эйлера движения идеальной жидкости, а во втором порядке – уравнения Навье-Стокса с двумя коэффициентами вязкости и законом теплопроводности Фурье $\mathbf{q} = -\varkappa\nabla T$. Подробно эти вопросы обсуждаются в монографии (Уленбек, Форд, 1965.)

Упражнения

1. Выведите (16) из уравнений движения несжимаемой жидкости.

2. Сформулируйте локальный закон сохранения энергии для сжимаемой жидкости с помощью ее уравнений движения (6), (7) и (19), используя термодинамическое соотношение (первый закон термодинамики) $d\varepsilon = Tds - pdV = Tds + (p/\rho^2)\,d\rho$, где ε – внутренняя энергия единицы массы жидкости.

Подсказка: см. параграф 49 цитированной выше книги Ландау и Лифшица.

Ответ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho\varepsilon\right)$$

$$= -div\left[\rho\mathbf{u}\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho}\right) - \mathbf{u} * \sigma' - \varkappa\nabla T\right]. \qquad (25)$$

3. Выведите (21) из (18) и (20).

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика,* М.: Наука, ГРФМЛ, 1986.

2. Уленбек Дж., Форд Дж. *Лекции по статистической механике,* М.: "МИР 1965.

Лекция 22

Механизмы трения в глобальных геофизических течениях. Квазигеострофическое уравнение трансформации потенциального вихря

Особенность динамики вязких глобальных геофизических течений состоит в том, что диссипация их кинетической энергии происходит главным образом из-за трения свободной атмосферы – областей, удаленных от твердых границ или резких перепадов горизонтальной скорости, о так называемые геофизические пограничные слои (ГПС). Торможение обеспечивается обменом импульса между указанными областями и свободной атмосферой. В самих ГПС из-за обострения градиентов скорости происходит усиление внутреннего трения, что приводит к нарушению квазигеострофического и квазигидростатического равновесий, причем влияние этого трения по разному проявляется в окрестности горизонтальных и вертикальных ГПС. Опираясь на сказанное, в качестве определения ГПС удобно принять следующее утверждение. *ГПС – это область, в которой условия квазигеострофического и квазигидростатического равновесий нарушаются под влиянием сил вязкости.*

Это позволяет избежать несколько громоздкой процедуры разложения исходных гидродинамических уравнений по параметру Россби, которой обычно пользуются при редукции задачи, и сразу сформулировать искомые уравнения движения. Наиболее прозрачно влияние ГПС на движение свободной атмосферы проявляется в однородной несжимаемой жидкости. Поэтому дальнейшие рассуждения относятся к лабораторным аналогам глобальных геофизических течений, которые моделируются во вращающихся кольцевых

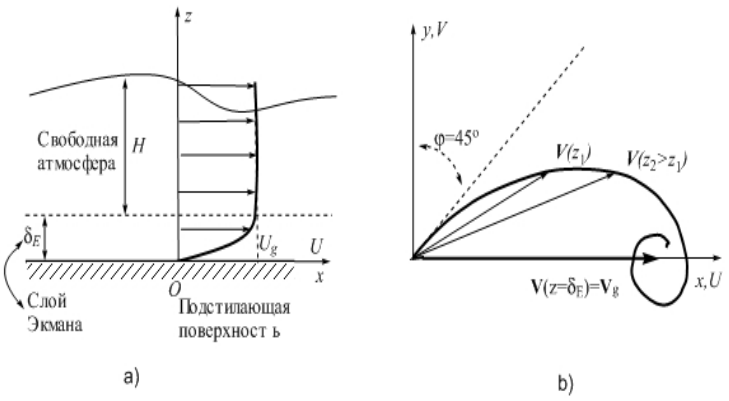


Рис. 1. а) Вертикальный разрез "лабораторной"атмосферы и профиль продольной компоненты скорости U в плоскости (x, z), где ось x совпадает с направлением геострофического ветра $\mathbf{V}_g$. б) Поворот ветра с высотой: спираль Экмана в горизонтальной плоскости.

сосудах, заполненных водой. В этом случае уравнения движения в векторных обозначениях формулируются в виде:

$$2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} grad p + \mathbf{f}_\nu, \tag{1}$$

$$div\mathbf{u} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{\Omega}$ – угловая скорость общего вращения жидкости постоянной плотности ρ, $\mathbf{u}$ – поле скорости течения в ГПС, p – отклонение давления от гидростатического значения и $\mathbf{f}_\nu = \nu \triangle \mathbf{u}$ – вязкие силы ($\triangle = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$), ν – кинематическая вязкость жидкости.

1. Планетарный пограничный слой Экмана. В окрестности горизонтальной границы лабораторной атмосферы (рис. 1а), характерный горизонтальный масштаб изменения скорости движения существенно превосходит его вертикальный масштаб. Поэтому в выражении для вязких сил $\mathbf{f}_\nu = \nu \left(\partial^2\mathbf{u}/\partial x^2 + \partial^2\mathbf{u}/\partial y^2 + \partial^2\mathbf{u}/\partial z^2\right)$ первыми двумя слагаемыми можно пренебречь. Кроме того, по-

скольку толщина горизонтального ГПС, как мы увидим ниже, много меньше высоты атмосферы, геострофический ветер $\mathbf{v}_g(x,y,t) = u_g(x,y,t)\,\mathbf{i} + v_g(x,y,t)\,\mathbf{j}$, удовлетворяющий соотношению

$$2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}_g = -\frac{1}{\rho}\nabla p \quad \left(\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

можно считать не зависящим от вертикальной координаты. Тогда, вычитая из (1) последнее равенство, для горизонтальной составляющей скорости $\mathbf{v}(x,y,z,t) = u(x,y,z,t)\,\mathbf{i} + v(x,y,z,t)\,\mathbf{j}$ получаем уравнение

$$2\boldsymbol{\Omega}\times(\mathbf{v}-\mathbf{v}_g) = \nu\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial z^2} \tag{3}$$

с краевыми условиями прилипания на нижней границе ГПС и обращения $\mathbf{v}$ в геострофический ветер на его верхней границы:

$$\mathbf{v}|_{z=0} = 0, \quad \mathbf{v}|_{z=\infty} = \mathbf{v}_g. \tag{4}$$

Верхнее условие ставится на бесконечности, потому что основной вклад в интересующий нас в дальнейшем интеграл $\int\limits_0^\infty div\mathbf{v}dz$ приходится, как мы увидим ниже, на реальную толщину горизонтального пограничного слоя.

Решение краевой задачи (3), (4) с учетом $\boldsymbol{\Omega} = (0,0,\Omega)$ записывается в виде (выполните Упражнение 1):

$$\mathbf{v}(x,y,z,t) = \mathbf{v}_g(x,y,t)\left[1 - \exp(-z/\delta_E)\cos(z/\delta_E)\right]$$

$$+\mathbf{k}\times\mathbf{v}_g(x,y,t)\exp(-z/\delta_E)\sin(z/\delta_E), \tag{5}$$

где $\mathbf{k}$ – единичный вертикальный орт, а $\delta_E = \sqrt{\nu/\Omega}$ и есть реальная толщина горизонтального ГПС, называемого слоем Экмана или планетарным пограничным слоем (ППС). Заметим, что временной зависимостью горизонтального ветра в слое Экмана управляет ветер в свободной атмосфере.

Наконец, делая подстановку (5) в проинтегрированное по высоте условие трехмерной бездивергентности течения в слое Экмана, т.е.

$$w_E = -\int\limits_0^\infty\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dz,$$

получаем выражение для вертикальной составляющей скорости на верхней границы ППС:

$$w_E = \delta_E \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right). \tag{6}$$

Именно из-за наличия такого ненулевого вертикального потока на верхней границы ППС происходит обмен горизонтальным импульсом между ППС и свободной атмосферой, что и приводит к затормаживанию движения последней. Подробнее об этом речь пойдет в п. 3. Пока же отметим два момента.

Во-первых, в лабораторных экспериментах с водой в качестве рабочего тела $\nu = 0.01\text{см}^2/\text{с}$, а $\Omega = 0.1 \div 1.0$ с^{-1}. Поэтому толщина лабораторных слоев Экмана колеблется в пределах нескольких мм. Полагая формально для реальной атмосферы $\nu = 0.15\text{см}^2/\text{с}$ и $\Omega \sim 10^{-4}\text{с}^{-1}$, получим $\delta_E \approx 40\text{см}$. Это – толщина так называемого ламинарного слоя Экмана, который и наблюдается в лабораторных экспериментах. В ППС реальной атмосферы господствует развитая трехмерная мелкомасштабная турбулентность – хаотические вихревые движения, масштабы которых колеблются от сантиметров до десятков метров. Эти вихри питаются кинетической энергией крупномасштабных течений, торможение которых происходит несравненно эффективнее, чем под влиянием молекулярной вязкости. Простейший, до некоторой степени наивный, но естественный, способ учета такого торможения состоит в замене молекулярной вязкости ν на так называемый коэффициент турбулентной вязкости ν_T , который в атмосфере, согласно различным эмпирическим оценкам, на шесть-семь порядков превосходит ν. В этом случае в зависимости от интенсивности мелкомасштабной турбулентности в планетарном пограничном слое его толщина варьируется от нескольких сот метров до одного километра.

Во- вторых, согласно рис. 1б, на котором изображена спираль Экмана – годограф вектора скорости (5), в ППС происходит поворот ветра с высотой, причем угол поворота $\alpha = 45^\circ$, если $\nu_T = const$, т.е. не зависит от высоты (выполните Упражнение 2).

2. Слои Праудмена-Стюартсона (Praudman, 1956; Stewartson, 1957; Гринспен, 1975; Должанский, 1999). В окрестности вертикальных стенок уравнения (1), (2) описывают иной механизм диссипации кинетической энергии. Чтобы понять

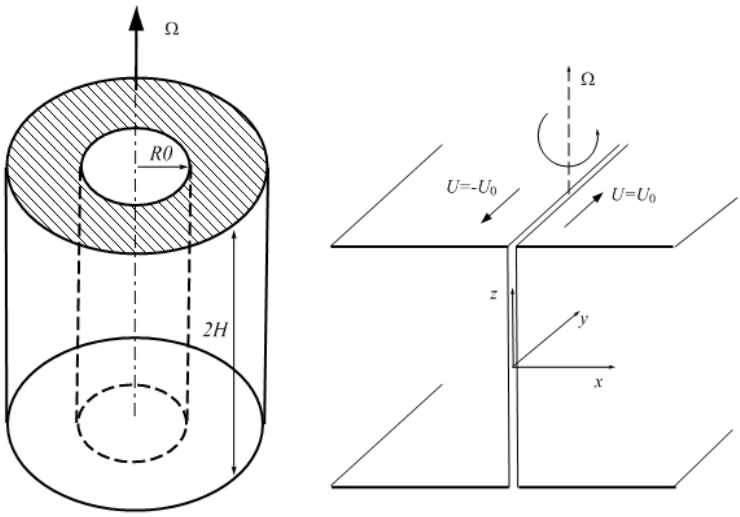


Рис. 2. Схематическое изображение экспериментальной установки для моделирования вертикальных ГПС. Цилиндрический сосуд с жидкостью вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси симметрии. Внутренние и внешние торцы вращаются в противоположных направлениях

это, рассмотрим, следуя Стюартсону, задачу о течении вязкой несжимаемой однородной вращающейся жидкости между двумя горизонтальными плоскостями, которое индуцируется встречным строго антисимметричным движением каждой из полуплоскостей (рис. 2). При этом предполагается, что горизонтальные полуплоскости, расположенные по одну сторону от вертикальной плоскости симметрии $y = 0$, движутся в одном направлении с одинаковой скоростью $u_0 = u_0(y)$. В этом случае характеристики течения не зависят от продольной (азимутальной) координаты x, и краевая задача задается уравнениями

$$-2\Omega v = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{1а}$$

$$2\Omega v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \tag{1б}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \tag{1в}$$

$$0 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2а}$$

с условиями прилипания на горизонтальных стенках и регулярности на $y = \pm\infty$. p – отклонение от гидростатического давления.

Очевидно, что задача антисимметрична относительно вертикальной плоскости $y = 0$ и симметрична относительно горизонтальной плоскости $z = 0$, отстоящей от каждой горизонтальной границы на половине расстояния между движущимися плоскостями. Пусть указанное расстояние равно $2H$. Тогда исключая p из (1б) и (1в), вводя в силу (2а) "вертикальную"функцию тока Ψ согласно равенствам

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial z},\ w = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

и обезразмеривая уравнения с помощью масштабов длины H и характерной скорости U, краевую задачу для искомых функций $u(y, z)$ и $\Psi(y, z)$ можно определить уравнениями

$$2E^{-1}\frac{\partial u}{\partial z} = \triangle^2 \Psi, \tag{7}$$

$$-2E^{-1}\frac{\partial\Psi}{\partial z}=\triangle u \tag{8}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}=\frac{\partial\Psi}{\partial z}=0 \text{ при } z=\pm 1, \tag{9}$$

$$u=u_0(y) \text{ при } z=\pm 1. \tag{10}$$

Здесь для безразмерных величин новых обозначений не вводится, а константа $E=\nu/\Omega H^2=\delta_E^2/H^2$, называемая числом Экмана, в силу сделанных выше оценок есть малый параметр.

Для имитации вертикальной стенки, расположенной в плоскости $y=0$, возьмем в качестве внешнего привода ступенчатую скорость $u_0(y)=y/|y|$ $(0<|y|<\infty)$. Задача решается методом дискретно-непрерывных фурье-разложений по тригонометрическим и гиперболическим функциям, что требует выполнения довольно громоздкой вычислительной процедуры. Приведу поэтому без доказательства формулы Стюартсона, описывающие течение вдали от горизонтальных стенок, которые представляют для нас наибольший интерес:

$$u(y,z)=F_{St}(y,z), \quad \Psi(y,z)=\Psi_{St}(y,z), \tag{11}$$

где

$$F_{St}(y,z)=sign(y)\left[1-\exp\left(-|y|/E^{1/4}\right)-E^{1/6}\Phi(y,z)\right], \tag{12}$$

$$\Phi(y,z)=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(n\pi z)}{(2\pi n)^{2/3}}\times\left[\exp(-\gamma_n|y|)\right.$$
$$\left.-2\exp\left(\frac{-\gamma_n|y|}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_n|y|-\frac{\pi}{3}\right)\right], \tag{13}$$

$$\Psi_{St}(y,z)=sign(y)\,E^{1/2}\left[\frac{1}{2}z\exp\left(-|y|/E^{1/4}\right)+\Gamma(y,z)\right], \tag{14}$$

$$\Gamma(y,z)=\frac{1}{3\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(n\pi z)}{n}\times\left[\exp(-\gamma_n|y|)\right.$$
$$\left.+2\exp(-\gamma_n|y|/2)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_n|y|\right)\right]. \tag{15}$$

Здесь $\gamma_n = (2\pi n/E)^{1/3}$.

Картина поперечного и продольного течений представлена на рис. 3. Сшивка горизонтальных и вертикальных ГПС выполнена в работе [Должанский, 1999]. Из представленных формул и рисунков видно, что в окрестности вертикальной стенки образуются два слоя Праудмена-Стюартсона: внешний – толщины $\delta_{St} = E^{1/4}H = \sqrt{\delta_E H}$ и внутренний – толщины $\delta_{in} = E^{1/3}H = \sqrt[3]{\delta_E^2 H}$, в которых наблюдаются интенсивные поперечные циркуляционные ячейки противоположной направленности, обеспечивающие сглаживание ступенчатого сдвига продольной составляющей скорости. По сути дела полученный результат означает, что *ширина сдвига горизонтальных вязких геофизических течений не может быть меньше толщины внешнего слоя Праудмена-Стюартсона*. В атмосфере слои Праудмена-Стюартсона образуются в окрестности фронтов – границ, разделяющих крупномасштабные массы воздуха с сильно отличающимися динамическими и термодинамическими характеристиками. Формирование в таких областях мощных вертикальных потоков существенно затрудняет описание их динамики из-за нарушения условий квазидвумерности движения, а следовательно, и неприемлемости рассматривать фронты, как это иногда делается, в качестве сингулярных решений двумерных гидродинамических уравнений. **3. Квазигеострофическое уравнение трансформации ПВ баротропной вязкой атмосферы.** Теперь, зная особенности диссипации кинетической энергии в вязкой атмосфере, нетрудно вывести уравнения ее глобальных баротропных движений. Для описания поведения свободной атмосферы вновь воспользуемся мелководным приближением гидродинамических уравнений вращающейся жидкости, которые с учетом вязкости записываются в виде:

$$\frac{du}{dt} - fv = -g\frac{\partial H}{\partial x} + \nu\triangle u, \tag{16}$$

$$\frac{dv}{dt} - fu = -g\frac{\partial H}{\partial y} + \nu\triangle v, \tag{17}$$

$$\frac{dH}{dt} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = w_E. \tag{18}$$

Напоминаю, что здесь u и v – продольная (зональная) и поперечная (меридиональная) составляющие горизонтальной скорости движения свободной атмосферы, $f = f(y)$ – параметр Кориолиса,

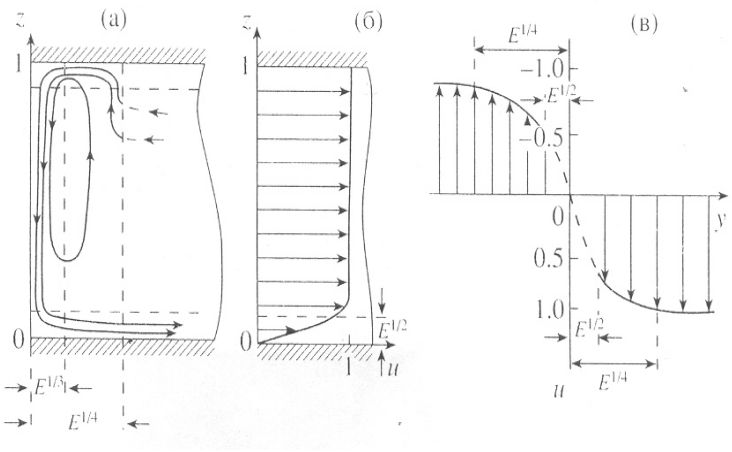


Рис. 3. Поперечная циркуляция (а), вертикальный профиль продольной составляющей скорости u вдали от плоскости разрыва $y = 0$ (б) и горизонтальный профиль продольной составляющей скорости вдали от горизонтальных стенок.

$H = H(x, y, t)$ – высота свободной поверхности баротропной атмосферы, отсчитываемая от верхней границы слоя Экмана, а уравнение (18) сохранения массы свободной атмосферы записано с учетом того, что на ее нижней границе вертикальная скорость $w_E \neq 0$.

Вычитая из продифференцированного по x уравнения (17) продифференцированное по y уравнение (16), получаем уравнение для вертикальной завихренности $\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$:

$$\frac{d\omega}{dt} + (f+\omega)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{df}{dy}v = \nu\triangle\omega.$$

После исключения с помощью (18) дивергенции горизонтальной скорости имеем

$$\frac{d\omega}{dt} - \frac{(f+\omega)}{H}\frac{dH}{dt} + \frac{df}{dy}v = \nu\triangle\omega - \frac{w_E}{H}. \tag{19}$$

Используя теперь соотношения геострофического ветра

$$v = \frac{g}{f_0}\frac{\partial H}{\partial x} \doteq \frac{\partial\psi}{\partial x},\ u = -\frac{g}{f_0}\frac{\partial H}{\partial y} \doteq -\frac{\partial\psi}{\partial y}\ \ (\psi \doteq gH/f_0) \tag{20}$$

(f_0 – среднее значение параметра Кориолиса) и формулу (6), согласно которой в силу (20)

$$w_E = \delta_E \triangle\psi, \tag{21}$$

находим, что квазигеострофическое уравнение эволюции (трансформации) ПВ вязкой баротропной атмосферы записывается в виде (ср. с (7.6)):

$$\frac{d}{dt}\left(\triangle\psi - \frac{f_0^2}{gH_0}\psi\right) + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = \nu\triangle^2\psi - \frac{f_0\delta_E}{H_0}\triangle\psi.$$

Здесь $\beta = df/dy$. Кроме того, при выводе этого уравнения учитывалось также, что $\delta_E \ll H_0$ – средней высоты атмосферы, так что, если H не входит под знак дифференцирования, ее можно заменить на H_0.

Вспоминая теперь, что $\sqrt{gH_0}/f_0 = L_0$ – масштаб Обухова, $\delta_E H_0 = \delta_{St}^2$ и $\delta_E = \sqrt{2\nu/f_0}$, получаем традиционную форму искомого уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\psi - L_0^{-2}\psi\right) + [\psi, \triangle\psi] + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = \nu\triangle^2\psi - \lambda\triangle\psi, \tag{22}$$

где $[a, b] = \partial a/\partial x \cdot \partial b/\partial y - \partial a/\partial y \cdot \partial b/\partial x$ – якобиан скалярных функций $a = a\,(x, y)$и $b = b\,(x, y)$, а $\lambda = 2\nu/\delta_{St}^2$ называется эффективным коэффициентом трения атмосферы о подстилающую поверхность. Уместно отметить, что в наиболее общем виде уравнение трансформации потенциального вихря выведено в работе (Обухов, 1962).

Таким образом, в рамках сделанных предположений *земная поверхность посредством экмановского пограничного слоя затормаживает квазидвумерные геофизические движения по закону сухого трения, причем коэффициент этого линейного по скорости трения определяется толщиной внешнего слоя Праудмена-Стюартсона*. Как мы увидим ниже, именно оно определяющим образом влияет не только на диссипацию кинетической энергии, но и на механизмы баротропной неустойчивости и формирования циклонов и антициклонов в атмосфере. Заметим, что влияние слоя Экмана на бароклинную атмосферу можно учесть, используя формулу (21) в качестве нижнего граничного условия для квазигеострофического уравнения ПВ бароклинной атмосферы (см. (9.31)), записанного с учетом внутренней вязкости среды.

Упражнения.

1. Решите краевую задачу (3), (4) с учетом, что $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega)$.

Подсказка: введите комплексную зависимую переменную $W = u + iv$ *и направьте ось* Ox *в сторону геострофического ветра.*

2. Постройте годограф горизонтальной скорости ветра в пределах слоя Экмана и покажите, что ветер с высотой поворачивается на 45°. В каком направлении происходит происходит этот поворот?

Литература

1. Курганский М.В. *Введение в крупномасштабную динамику атмосферы*, С-П.: Гидрометеоиздат, 1993.

2. Praudman I. *The almost rotation of viscous between concentric spheres*, J. Fluid Mech., V.1, P.505, 1956.

3. Stewartson K. *On almost rigid rotation*, J. Fluid Mech., V.3, No. 3, 1957.

4. Гринспен Х. *Теория вращающейся жидкости*, Л.: Гидрометеоиздат, 1975.

5. Должанский Ф.В. *Поперечная структура поперечных геофизических и магнитогидродинамических течений*, Изв. АН, сер. ФАО, Т. 35, 2, 1999.

6. Обухов А.М. К динамике расслоенной жидкости, ДАН СССР, Т. 145, 6. 1962.

Лекция 23

Течение Колмогорова и роль внешнего трения

1. Постановка линейной задачи устойчивости. Влияние ППС на баротропную неустойчивость глобальных атмосферных течений в наиболее чистом виде можно выделить, рассматривая предельно идеализированную задачу об устойчивости пространственно периодического плоского течения несжимаемой жидкости с синусоидальным профилем скорости. Эта задача предложена А.Н. Колмогоровым еще в 1960 г. на руководимом им семинаре и уже в следующем году была решена в работе (Мешалкин, Синай, 1961) в строго двумерной постановке. Мы же, следуя упомянутым авторам, будем ее решать в квазидвумерной постановке, т.е. с учетом внешнего линейного по скорости трения, имитирующего влияние дна на движение мелкой вязкой воды, а применительно к атмосфере – влияние ППС на квазигеострофические течения. (Это, как оказалось, принципиальное обобщение было сделано в работе (Бондаренко, Гак, Должанский, 1978) и подробно изложено в (Гледзер, Должанский, Обухов, 1981) и (Должанский, Крымов, Манин, 1990)). Чтобы не осложнять задачу, мы также не будем учитывать силу Кориолиса, поскольку на f-плоскости, т.е. в отсутствии бета-эффекта, вихревые течения, которые нас и интересуют, описываются обычным двумерным уравнение вихря. В этом случае в качестве исходных можно взять уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\triangle u - \lambda u + f, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\triangle v - \lambda v, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Здесь плотность жидкости положена равной единице, ν и λ – коэффициенты внутреннего и внешнего трений соответственно, а $f = a \sin(y/l)$ – внешняя сила, создающая первичное течение синусоидального профиля скорости. Остальные обозначения – общепринятые. Условия периодичности по y-координате с периодом $2\pi l$ и отсутствия суммарного переноса массы в продольном направлении, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, t)\, dy = 0 \tag{4}$$

принимаются в качестве граничных.

После обезразмеривания с помощью естественных масштабов длины l и скорости $U = \sqrt{al}$ и введения функции тока согласно равенствам

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{5}$$

уравнение для завихренности $\triangle\psi = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$, соответствующее системе (1) - (3) с упомянутой силой f, записывается в виде:

$$\frac{\partial \triangle\psi}{\partial t} + [\triangle\psi, \psi] = \widehat{\nu}\triangle^2\psi - \widehat{\lambda}\triangle\psi - \cos y. \tag{6}$$

Для зависимых и независимых безразмерных переменных новых обозначений не вводится, а вот обратные безразмерные кинематическая вязкость и коэффициент внешнего трения

$$\widehat{\nu}^{-1} = \frac{Ul}{\nu} \doteq R_\nu \text{ и } \widehat{\lambda}^{-1} = \frac{U}{\lambda l} \doteq R_\lambda \tag{7}$$

есть хорошо известные критерии подобия, характеризующие отношение нелинейных членов соответственно к силам внутреннего и внешнего трения и *называемые числами Рейнольдса по внутреннему и внешнему трению, соответственно.* Чем больше значения чисел Рейнольдса, тем ближе течение вязкой жидкости к течению идеальной жидкости. Заметим также, сопоставляя (6) с (22.22), что уравнение (6) можно трактовать как квазигеострофическое уравнение вихря для несжимаемой ($L_0^{-1} = 0$) вязкой атмосферы на f-плоскости ($\beta = 0$), которая (атмосфера) подвержена действию зональной силы синусоидального профиля.

Первичное течение рассматриваемой системы задается равенствами:

$$u_0 = \frac{1}{\widehat{\nu}+\widehat{\lambda}}\sin y, \quad \triangle\psi_0 = -\frac{1}{\widehat{\nu}+\widehat{\lambda}}\cos y, \quad \psi_0 = \frac{1}{\widehat{\nu}+\widehat{\lambda}}\cos y. \tag{8}$$

Пусть теперь $\psi = \psi_0 + \varphi(x,y,t)$, где φ – инфинитезимальное возмущение первичного течения. Тогда результат линеаризации уравнения (6) записывается в виде:

$$\frac{\partial\triangle\varphi}{\partial t} + \frac{1}{\widehat{\nu}+\widehat{\lambda}}\sin y\frac{\partial(\triangle\varphi+\varphi)}{\partial x} = \widehat{\nu}\triangle^2\varphi - \widehat{\lambda}\triangle\varphi. \tag{9}$$

Условие периодичности φ по y позволяет использовать фурье-разложение, т.е. искать решение в виде:

$$\varphi(x,y,t) = e^{\sigma t}\sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp\{i(\alpha x + ny)\}. \tag{10}$$

После подстановки (10) в (9) и приведения подобных членов для коэффициентов c_n получаем систему уравнений

$$\frac{2\left(\widehat{\nu}+\widehat{\lambda}\right)}{\alpha}\left(\alpha^2+n^2\right)\left[\sigma+\widehat{\lambda}+\widehat{\nu}\left(\alpha^2+n^2\right)\right]c_n +$$

$$\left[\alpha^2-1+(n-1)^2\right]c_{n-1} - \left[\alpha^2-1+(n+1)^2\right]c_{n+1} = 0. \tag{11}$$

Нас интересует знак вещественной части тех значений σ, при которых существует нетривиальное решение системы (11), стремящееся к нулю при $|n| \longrightarrow \infty$.

2. Вывод уравнения для σ. Введем обозначения:

$$a_n = a_n\left(\widehat{\nu},\widehat{\lambda},\sigma\right) = \frac{2\left(\widehat{\nu}+\widehat{\lambda}\right)}{\alpha}\cdot\frac{\left(\alpha^2+n^2\right)\left[\sigma+\widehat{\lambda}+\widehat{\nu}\left(\alpha^2+n^2\right)\right]}{\alpha^2-1+n^2},$$

$$d_n = d_n\left(\widehat{\nu},\widehat{\lambda},\sigma\right) = \left(\alpha^2-1+n^2\right)c_n.$$

Тогда система (11) переписывается в виде:

$$a_n d_n + d_{n-1} - d_{n+1} = 0. \tag{12}$$

Предположим, что система (12) имеет решение, удовлетворяющее поставленным требованиям. Тогда не существует значений k,

для которых $d_k = 0$. В самом деле, если $d_k = 0$ и $k > 0$, то при $k' \neq k$ величина $d_{k'} \neq 0$, потому что в противном случае решение, согласно (12), было бы тривиальным из-за требования регулярности на бесконечности. Поэтому для $n > k+1$ можно ввести величину $\rho_n = d_n/d_{n-1}$ и переписать (12) в виде:

$$a_n + \frac{1}{\rho_n} = \rho_{n+1} \text{ для } n > k+1. \tag{13}$$

Решение системы (13) можно записать в виде:

$$\rho_n = a_{n-1} + \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-3}+\ldots}}$$

$$\vdots$$

$$+\cfrac{1}{a_{k+1} + \cfrac{1}{\rho_{k+1}}}.$$

Предположим, что σ вещественно и $\sigma > -\widehat{\lambda}$. Тогда $a_n > 0$ при $n > 0$ и $\rho_n > a_{n-1} \longrightarrow \infty$, что противоречит требованию стремления c_n к нулю при $n \longrightarrow \infty$. Если σ комплексно, систему (13) можно рассматривать отдельно для вещественных и мнимых коэффициентов a_n. Те же рассуждения для вещественной части a_n дают такой же результат. Случай $d_k = 0$ при $k < 0$ рассматривается аналогично.

Итак, $d_k \neq 0$ при любом k, и для произвольных n можно положить

$$\rho_n = \rho_n\left(\widehat{\nu}, \widehat{\lambda}, \sigma\right) = \frac{d_n}{d_{n-1}} \ (n > 0), \ \ \rho_n^* = \rho_n^*\left(\widehat{\nu}, \widehat{\lambda}, \sigma\right) = \frac{d_{n-1}}{d_n} \ (n \leqslant 0). \tag{14}$$

Введем следующее обозначение для бесконечной цепной дроби

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2+\ldots}}$$

$$\vdots$$

$$+\cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+1}+\ldots}} \doteq [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]$$

Ключевое утверждение состоит в следующем. Если

$$\rho_1 = -\left[0; a_1, a_2, ..., a_k, ...\right], \tag{15}$$

то $\rho_n \longrightarrow 0$ *при* $n \longrightarrow \infty$. *Если равенство* (15) *не выполняется, то* $|\rho_n| \longrightarrow \infty$.

Действительно, из (13) следует, что при $\operatorname{Re}\sigma > -\widehat{\lambda}$, если $\operatorname{Re}\rho_n \geqslant 0$, то и $\operatorname{Re}\rho_{n+k} \geqslant 0$ при $k > 0$, или $\operatorname{Re}\rho_{n+k} > \operatorname{Re}a_n \longrightarrow \infty$ при $n \longrightarrow \infty$, что невозможно. Следовательно, необходимо, чтобы $\operatorname{Re}\rho_n < 0$ при всех положительных n. Для любого фиксированного σ найдется такое k, что $\operatorname{Re}a_n > 1$ для $n > k$, поскольку $\operatorname{Re}a_n \longrightarrow \infty$ при $n \longrightarrow \infty$. Для $n > k$ условие $\operatorname{Re}\rho_{n+1} < 0$ вместе с уравнение (13) означает,что ρ_n на комплексной плоскости находится внутри круга радиуса $1/\operatorname{Re}a_n$, касающегося мнимой оси и лежащего в левой полуплоскости (выполните **Упражнение 1**). Повторным использованием уравнения (13) можно показать, что ρ_{n-1} находится внутри некоторого круга радиуса меньше, чем $1/\operatorname{Re}a_n$, и лежащего в левой полуплоскости, и т. д. Отсюда следует, что ρ_k находится в некотором круге в левой полуплоскости, имеющем радиус меньше, чем $1/\operatorname{Re}a_n$. Пересечение кругов, построенных для ρ_k при различных n, не может содержать более одной точки, так как радиусы этих кругов стремятся к нулю при $n \longrightarrow \infty$ (почему эта точка не принадлежит мнимой оси?).

Можно показать (выполните **Упражнение 2**), что значение ρ_k, заданное формулой

$$\rho_k = -\left[0; a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+l}, ...\right],$$

принадлежит всем этим кругам и, следовательно, является единственным возможным значением для ρ_k. Используя (13) получаем формулу (15).

Для $n \leqslant 0$ аналогичными рассуждениями получаем, что единственное значение ρ_0^*, имеющее смысл для рассматриваемой задачи, задается формулой

$$\rho_0^* = [0; a_{-1}, a_{-2}, ..., a_{-n}, ...] = [0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]. \tag{16}$$

Из (12) при $n = 0$ следует, что

$$a_0 + \rho_0^* = \rho_1.$$

Отсюда в силу (15) и (16)

$$-\frac{a_0}{2} = [0; a_1, a_2, ..., a_k, ...]\,. \tag{17}$$

Таким образом доказана Теорема (Мешалкин, Синай, 1961): *Для того чтобы система* (12) *имела решение, стремящееся к нулю при* $n \longrightarrow \infty$*, необходимо и достаточно, чтобы* σ *удовлетворяло уравнению* (17).

3. Критические кривые. Анализ уравнения (17) позволяет сделать определенные выводы об условиях устойчивости течения Колмогорова. Обозначим правую часть (17) через $D = [0; a_1, a_2, ..., a_k, ...]$, а через $D_k = [0; a_1, a_2, ..., a_k]$ цепную дробь D, обрезанную на k-м члене. Прежде всего отметим, что при $\alpha > 1$ уравнение (17) не имеет решений σ, для которых $\operatorname{Re}\sigma > 0$, т.е. течение Колмогорова устойчиво относительно возмущений с таким продольным волновым числом. В самом деле, при $\alpha > 1$ величина $\operatorname{Re}(-a_0/2) < 0$. С другой стороны, D_k при любом положительном k и $\operatorname{Re}\sigma > -\widehat{\lambda}$ имеет положительную вещественную часть, и, следовательно, равенство (17) невозможно.

Уточнение этого рассуждения показывает, что при $\alpha < 1$ уравнение (17) при $\operatorname{Re}\sigma > -\widehat{\lambda}$ имеет только вещественные решения. Действительно, пусть для определенности $\operatorname{Im}\sigma \geqslant 0$. Тогда

$$\arg\left(-\frac{a_0}{2}\right) \geqslant \arg a_1, \tag{18}$$

и $\arg a_n \geqslant \arg a_{n+1}$ при любом $n \geqslant 1$, причем равенства возможны лишь при $\arg\sigma = 0$. Последние неравенства означают, что $|\arg D_{k+1}| \leqslant |\arg D_k|$ при любом $k \geqslant 1$ и, следовательно,

$$|\arg D_k| \leqslant |\arg D_{k-1}| \leqslant ... \leqslant |\arg D_1| = |\arg a_1|.$$

Поэтому равенство

$$-\frac{a_0}{2} = D_k \tag{19}$$

при любом $k \geqslant 1$ возможно только при условии, что $|\arg(-a_0/2)| \leqslant |\arg a_1|$. Сопоставляя это неравенство с (18), приходим к выводу, что $\operatorname{Im}\sigma = 0$. Аналогичными рассуждениями приходим к такому же результату в предположении, что $\operatorname{Im}\sigma \leqslant 0$.Отсюда следует, что *корни уравнения* (17)*, у которых* $\operatorname{Re}\sigma > -\widehat{\lambda}$*, обязательно вещественны, и в рассматриваемом случае выполняется принцип*

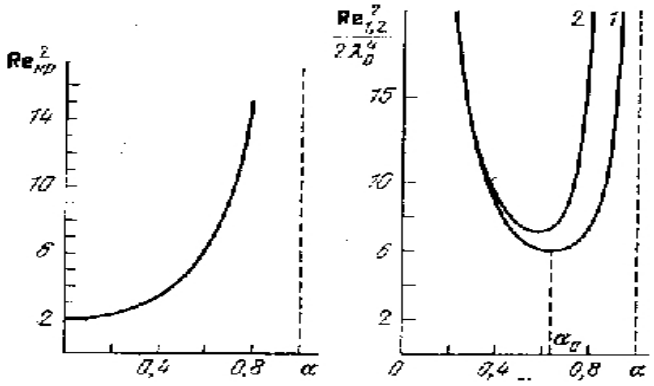


Рис. 1. а) Критическая кривая строго двумерного течения Колмогорова. б) Критическая кривая квазидвумерного течения (с учетом внешнего трения) находится между кривыми 1 и 2, соответствующими первому ($k = 1$) и второму ($k = 2$) приближению согласно формуле (19).

изменения устойчивости Линя, согласно которому критическая кривая находится из условия $\sigma = 0$.

Приближенные критические кривые – границы устойчивости при $\lambda = 0$ и $\lambda \neq 0$ приведены на рис. 1. Построение графиков основано на неравенствах

$$D_2 < D < D_1, \tag{20}$$

причем нетрудно показать, что при $\lambda = 0$ критическое число Рейнольдса $\widehat{\nu}_{\text{кр}}^{-1} = R_{\nu\text{кр}} \longrightarrow \infty$ при $\alpha \longrightarrow 1$ и $R_{\nu\text{кр}\approx\sqrt{2}}$ при $\alpha = 0$, а при $\lambda \neq 0$ величина $R_{\nu\text{кр}} \longrightarrow \infty$ при $\alpha \longrightarrow 0$ и 1. В частности, приближенная критическая кривая, определяемая равенством (19) при $k = 1$, описывается формулой:

$$R_\nu^2 \approx \frac{2\left(1+\lambda_0+\alpha^2\right)\left(\lambda_0+\alpha^2\right)\left(1+\alpha^2\right)}{\alpha^2\left(1-\alpha^2\right)}, \quad \left(\lambda_0 = \frac{\lambda l^2}{\nu} = \frac{R_\nu}{R_\lambda} = \frac{\widehat{\lambda}}{\widehat{\nu}}\right). \tag{21}$$

4. Применение к исследованию устойчивости волн Россби. В свое время в связи с проблемой баротропной неустойчивости атмосферы Лоренц (Lorenz, 1972) рассмотрел задачу об устойчи-

вости элементарной волны Россби

$$\psi_0 = A_0 \cos k_0 (x + c_0 t), \tag{22}$$

удовлетворяющей квазигеострофическому уравнению баротропного потенциального вихря без учета двумерной сжимаемости ($L_0^{-1} = 0$):

$$\frac{\partial \triangle\psi}{\partial t} + [\psi, \triangle\psi] + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \tag{23}$$

Чтобы выяснить влияние слоя Экмана на такого рода неустойчивость, в работе (Должанский, 1985) эта задача рассматривалась в том же приближении для уравнения (22.22) трансформации потенциального вихря

$$\frac{\partial \triangle\psi}{\partial t} + [\psi, \triangle\psi] + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nu \triangle^2 \psi - \lambda \triangle\psi + q, \tag{24}$$

в котором $\lambda = 2\nu/\delta_{St}^2$, а $q = q_0 \cos k_0 (x + ct)$ – источник завихренности, движущийся в отрицательном направлении оси x со скоростью c. Если $c = c_0$, то источник генерирует волну (22) с амплитудой $A_0 = q_0 / (\lambda k_0^2 + \nu k_0^4)$. Фотографии лабораторных волн Россби, генерируемых во вращающемся кольцевом канале движущимися с резонансной скоростью точечным источниками массы (Должанский, Курганский, Черноусько, 1979), приведены в Приложении.

Переходя в систему координат, движущуюся со скоростью $-c_0$, т.е. делая замену $X = x + c_0 t$, а затем обезразмеривая уравнение (24), приходим к задаче Колмогорова, но уже для уравнения

$$\frac{\partial \triangle\psi}{\partial t} + [\psi, \triangle\psi] + C_0 \frac{\partial}{\partial X} (\triangle\psi + n_0 \psi) = \varkappa \triangle^2 \psi - \gamma \triangle\psi + R \cos n_0 X. \tag{25}$$

Здесь $C_0 = c_0/\lambda r$, r следует трактовать как радиус среднего широтного круга, тогда $n_0 = k_0 r$ – число длин волн функции ψ_0, укладывающихся на среднем широтном круге длиной $2\pi r$, $\varkappa = \nu/\lambda r^2$, $R = q_0/\lambda^2$, а $\gamma = 1$ или 0 в зависимости от того, учитывается или нет слой Экмана.

Описанная выше процедура отыскания критической кривой переносится и на уравнение (25), однако в этом случае сходимость цепных дробей из-за присутствия бета-эффекта приходится рассматривать на комплексной плоскости. Неоходимые критерии

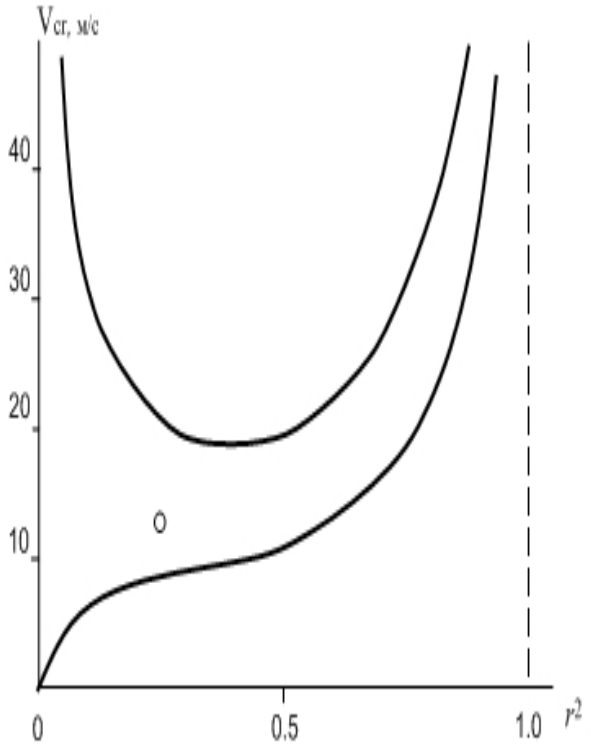


Рис. 2. Критические кривые для планетарной волны с продольным волновым числом $n_0 = 6$): 1 - по невязкой теории Лоренца, 2 - с учетом влияния слоя Экмана.

сходимости сформулированы и доказаны в работе (Должанский, 1985). Критическая кривая, определяемая из первого приближения, задается формулой

$$A^2_{\text{кр}} = \frac{2\left(\gamma + \varkappa l^2\right)\left[\left(l^2 + n_0^2\right)^2\left(\gamma + \varkappa\left(l^2 + n_0^2\right)\right)^2 + C_0 n_0^2 l^2\right]}{n_0^2 l^2\left(n_0^4 - l^4\right)\left(\gamma + \varkappa\left(l^2 + n_0^2\right)\right)}, \qquad (26)$$

где l – меридиональное волновое число инфинитезимального возмущения

$$\varphi = e^{i\sigma t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(nX+ly)},$$

накладываемого на основное течение.

Критические кривые "невязкой" и "вязкой" волн Россби с учетом влияния ППС приведены на рис. 2 в плоскости параметров $\varsigma^2 = l^2/n_0^2$ и $V = n_0 r\lambda A$, из которого видно, насколько принципиально изменяется форма критической кривой при учете внешнего трения. В частности, согласно (Лоренц,1972) типичная волна с $n_0 = 6$ и амплитудой $V = 12$м/с неустойчива, причем наибольший инкремент имеет возмущение с меридиональным волновым числом $l = 0.5n_0$. Согласно невязкой и вязкой теориям при таком значении l

$$6.6\text{м/с} \approx V_L < 12\text{м/с} < V_D \approx 17.7\text{м/с},$$

где V_L и V_D – критические значения скорости по невязкой и вязкой теориям. Заметим также, что учет одной лишь внутренней вязкости не стабилизирует рассматриваемую волну, хотя и дает *конечное отличное от нуля пороговое значение амплитуды без изменения формы критической кривой.* **5. Выводы.** Из сопоставления критических кривых течения Колмогорова и планетарных волн при $\lambda = 0$ и $\lambda \neq 0$ следует, что внешнее трение подавляет наиболее неустойчивые длинноволновые моды строго двумерного течения, в результате чего происходит принципиальное изменение формы критической кривой. Более того, согласно нелинейной теории (Кляцкин, 1972; Юдович, 1973; Непомнящий, 1976) все математически существующие в закритической области строго двумерного течения стационарные и автоколебательные регулярные режимы оказываются неустойчивыми, что указывает на рождение хаотического турбулентного режима сразу после потери устойчивости первичного режима. Иначе обстоит дело в квазидвумерном

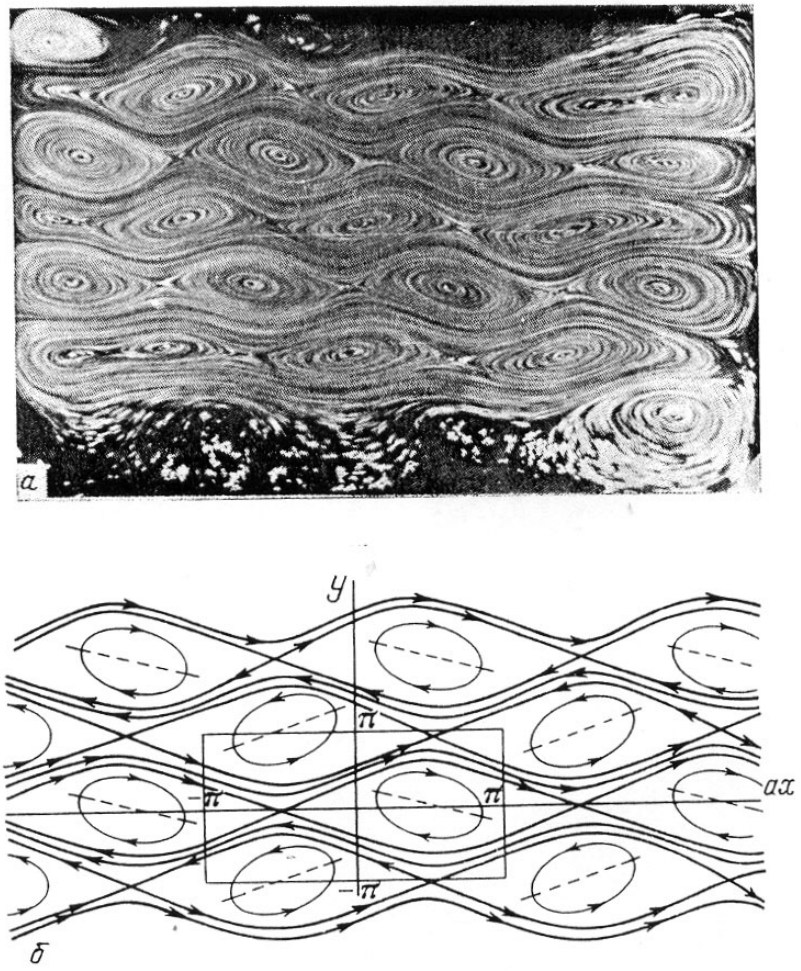


Рис. 3. Снимок закритического режима (а) и рассчитанные методом Галеркина линии тока (б) для течения Колмогорова.

течении Колмогорова. Наиболее неустойчивая мода с отличным от нуля волновым числом α_0, соответствующим минимуму критической кривой, при малых и умеренных закритичностях формирует вторичные стационарные течения, представленны на рис. 3 как результат нелинейной теории и лабораторного эксперимента. На следующей лекции мы убедимся в том, что сделанные выводы носят общий характер, т.е. они справедливы в отношении двумерного течения произвольного профиля скорости.

Упражнения.

1. Докажите, что для $n > k$ условие $\operatorname{Re}\rho_{n+1} < 0$ вместе с уравнением (13) означает, что ρ_n на комплексной плоскости находится внутри круга радиуса $1/\operatorname{Re} a_n$, касающегося мнимой оси и лежащего в левой полуплоскости.

Подсказка. Согласно условию $\operatorname{Re}\rho_{n+1} < 0$ и уравнению (13)

$$\operatorname{Re} a_n + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\rho_n}\right) < 0,$$

Пусть $\rho_n = r_n e^{i\varphi}$. Тогда $\operatorname{Re} a_n + r_n^{-1}\cos\varphi < 0$ $(-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$, а $r_n = -\cos\varphi$ – окружность радиуса 1, касающаяся мнимой оси.

2. Покажите, что значение ρ_k, заданное формулой

$$\rho_k = -\left[0; a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+l}, ...\right],$$

принадлежит всем кругам, имеющим радиус меньше, чем $1/\operatorname{Re} a_n$, и находящихся в левой полуплоскости.

3. Попытайтесь без доказательства сходимости цепных дробей в комплексной плоскости вывести первое приближение (26) для критической кривой волны Россби.

Литература

1. Мешалкин Л.Д., Синай Я.Г. *Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения вязкой жидкости,* ПММ, Т.25, 5, 1961.

2. Бондаренко Н.Ф., Гак М.З., Должанский Ф.В. *Лабораторная и теоретическая модели плоского периодического течения*, Изв. АН СССР, сер. ФАО, Т.15, 10, 1979.

3. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. *Системы гидродинамического типа и их применение,*М.: Наука, 1981.

4. Должанский Ф.В., Крымов В.А., Манин Д.Ю. *Устойчивость и квазидвумерные вихревые структуры сдвиговых течений*, УФН, Т. 160, 7, 1990.

5. Lorenz E.N. *Barotropic instability of Rossby wave motion*, J. Atm. Sci., V. 29, 1972.

6. Должанский Ф.В. *О влиянии слоя Экмана на устойчивость планетарных волн,* Изв. АН СССР, сер. ФАО, Т.21, 4, 1985.

7. Должанский Ф.В., Курганский М.В., Черноусько Ю.Л. *Лабораторное и теоретическое исследование волн Россби во вращающемся кольцевом канале*, Изв. АН СССР, сер. ФАО, Т.15, 6, 1979.

8. Кляцкин В.И. *К нелинейной теории устойчивости периодического течения*, ПММ, Т.36, 2, 1972.

9. Юдович В.И. *Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости и относительно длинноволновых периодических возмущений*, Изв АН СССР, МЖГ, 1, 1973

10. Непомнящий А.А. *Об устойчивости вторичных течений вязкой жидкости в неограниченном пространстве*, ПММ, Т.40, 5, 1976.

Лекция 24

Устойчивость квазидвумерных сдвиговых течений с произвольным профилем скорости

1. Новая трактовка результатов линейной теории устойчивости течения Колмогорова. Уравнение (23.21) критической кривой течения Колмогорова, записанное в терминах обратных чисел Рейнольдса $\widehat{\nu} = R_\nu^{-1}$ и $\widehat{\lambda} = R_\lambda^{-1}$,

$$\widehat{\nu} = \sqrt{\frac{\alpha^2\left(1-\alpha^2\right)}{2\left(1+\widehat{\lambda}/\widehat{\nu}+\alpha^2\right)\left(\widehat{\lambda}/\widehat{\nu}+\alpha^2\right)\left(1+\alpha^2\right)}} \tag{1}$$

в пространстве параметров $\left(\alpha, \widehat{\lambda}, \widehat{\nu}\right)$ можно рассматривать в качестве критической поверхности или поверхности нейтральной устойчивости течения Колмогорова, на которой инкременты σ инфинитезимальных возмущений (23.10) обращаются в нуль. Такую поверхность, изображенную на рис. 1, нетрудно построить, принимая во внимание, что критические кривые в плоскостях $\widehat{\lambda} = 0$ и $\widehat{\nu} = 0$ задаются соответственно уравнениями

$$\widehat{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\alpha^2}, \tag{2}$$

$$\widehat{\lambda} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}}. \tag{3}$$

Из рисунка видно, что критическая кривая (2) не является равномерным пределом функции (1) при $\widehat{\lambda} \longrightarrow 0$, поскольку любое сечение критической поверхности произвольной плоскостью имеет подковообразную форму за исключением сечения плоскостью

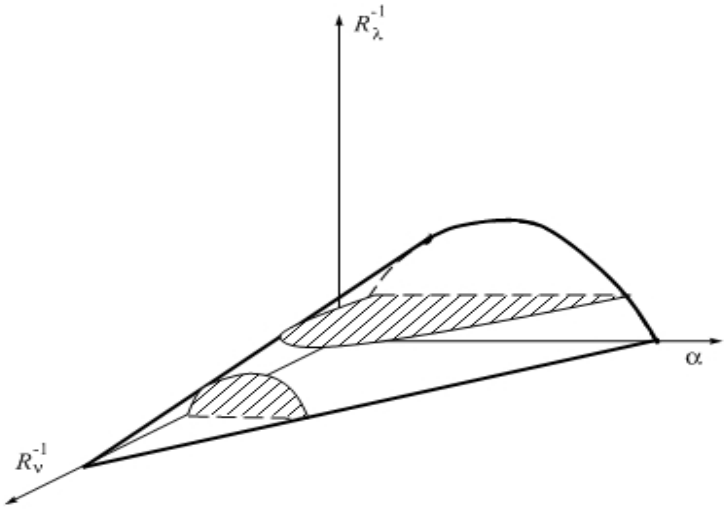


Рис. 1. Поверхность нейтральной устойчивости квазидвумерного течения Колмогорова в пространстве параметров $(\alpha, 1/Re_\lambda, 1/Re_\nu,)$

$\widehat{\lambda} = 0$. С другой стороны, по той же причине кривая (3) есть равномерный предел функции $\widehat{\lambda} = \widehat{\lambda}\,(\alpha, \widehat{\nu})$, неявно задаваемой формулой (1), при $\widehat{\nu} \longrightarrow 0$.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: *линейная теория устойчивости строго двумерного течения Колмогорова, т.е. построенная без учета внешнего трения, структурно неустойчива по отношению к его включению, и, наоборот, линейная теория квазидвумерного течения, т.е. построенная с учетом внешнего трения, качественно не чувствительна к включению или исключению внутренней вязкости.* Более того, нетрудно видеть, что при $\lambda_0 = \widehat{\lambda}/\widehat{\nu} = R_\nu/R_\lambda \gg 1$ результаты "квазидвумерной" линейной теории практически автомодельны по R_ν – вывод, который (что особенно важно) переносится, как мы увидим ниже, и на нелинейную теорию устойчивости.

Является ли описанная ситуация исключительным свойством течения Колмогорова, или она характерна для течений с произвольным профилем сдвига? Чтобы ответить на этот казалось бы весьма сложный вопрос, мы дадим новую трактовку результатам

предшествующей лекции, что позволит нам сделать определенные выводы относительно устойчивости квазидвумерных сдвиговых течений, используя хорошо продвинутую теорию устойчивости строго двумерных течений.

Критическая поверхность (1) есть результат решения системы (23.11), в которой в силу принципа устойчивости Линя величина σ полагалась равной нулю. Положим теперь $\widehat{\lambda} = 0$, и будем решать задачу на отыскание зависимости инкремента σ возмущения (23.10) от волнового числа α при при произвольно заданном положительном значении $\widehat{\nu}$, т.е. нас интересует дисперсионная зависимость $\sigma = \sigma(\alpha, \widehat{\nu})$. Для этого в (23.11) вместо σ надо положить равным нулю $\widehat{\lambda}$. Но задача (23.11) при $\widehat{\lambda} = 0$ и $\sigma \neq 0$ с точностью до замены $\widehat{\lambda}$ на σ совпадает с задачей (23.11) при $\sigma = 0$ и $\widehat{\lambda} \neq 0$. Поэтому искомое решение неявно задается выражением

$$\widehat{\nu} = \sqrt{\frac{\alpha^2 (1 - \alpha^2)}{2 (1 + \sigma/\widehat{\nu} + \alpha^2) (\sigma/\widehat{\nu} + \alpha^2) (1 + \alpha^2)}}. \tag{4}$$

В частности, при $\widehat{\nu} \longrightarrow 0$ получаем дисперсионное соотношение для невязкого течения Колмогорова:

$$\sigma = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}}. \tag{4a}$$

Таким образом, *если известна дисперсионная зависимость* $\sigma = \sigma(\alpha, \widehat{\nu})$ *для линейной задачи строго двумерного течения течения Колмогорова, то критическая кривая квазидвумерного течения Колмогорова определяется равенством*

$$\widehat{\lambda} = \sigma(\alpha, \widehat{\nu}), \tag{5}$$

которое по сути означает равенство инкремента растущей моды строго двумерного течения ее декременту, обусловленного влиянием внешнего трения.

2. Результаты линейной теории устойчивости строго двумерных сдвиговых течений и их новая трактовка. Из физических соображений очевидно, что сформулированный для течения Колмогорова принцип построения критической поверхности применим к произвольному сдвиговому течению. Для убедительности сформулируем классическую задачу линейной устойчивости,

которую мы рассматривали на Лекции 16, для уравнения трансформации потенциального вихря (22.22)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\psi - L_0^{-2}\psi\right) + [\psi, \triangle\psi] + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = \nu\triangle^2\psi - \lambda\triangle\psi + q, \qquad (6)$$

где источник потенциальной завихренности q зависит только от поперечной (меридиональной) координаты y. Тогда (6) имеет стационарное решение $\psi = \Psi(y)$, описывающее основное течение $U(y) = -d\Psi/dy$ в направлении оси x и зависящее только от y. Требуется исследовать устойчивость этого решения по отношению к инфинитезимальным возмущениям.

В отсутствии бета-эффекта и двумерной сжимаемости ($\beta = 0$, $L_0^{-1} = 0$), роль которых не принципиальна, обезразмеренная и редуцированная методом нормальных мод линейная задача устойчивости сводится к задаче на собственные значения для уравнения Орра-Зоммерфельда (см. Линь, 1958)

$$\left\{U - \left[c_r + i\left(c_i + \frac{\widehat{\lambda}}{\alpha}\right)\right]\right\}\left(\varphi'' - \alpha^2\varphi\right) - U''\varphi$$

$$= i\frac{\widehat{\nu}}{\alpha}\left(\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi\right) \qquad (7)$$

с граничными условиями прилипания на боковых границах $\alpha\varphi = \varphi' = 0$ при $y = y_1, y_2$ или регулярности при $|y| \longrightarrow \infty$, если область интегрирования не ограничена. Здесь φ – безразмерная амплитуда гармонического возмущения

$$\psi = \varphi(y)\exp\{i\alpha(x - ct)\}, \; c = c_r + ic_i, \qquad (8)$$

α – безразмерное продольное волновое число, $\alpha c_i = \sigma$ – инкремент, принимающий положительное значение для неустойчивых мод. Напоминаю, что ограничиться двумерной постановкой задачи позволяет теорема Сквайра, согласно которой наиболее опасные возмущения находятся в плоскости основного течения.

Теперь видно, что задача (7) с упомянутыми граничными условиями и $\widehat{\lambda} = 0$ эквивалентна такой же задаче, но при $c_i = 0$ и $\widehat{\lambda} \neq 0$, а, следовательно, *справедлива и формула* (5), *в которой* $\sigma = \sigma(\alpha, \widehat{\nu})$ – *дисперсионная зависимость инкремента от волнового числа при различных* $\widehat{\nu}$ *для строго двумерных течений.*

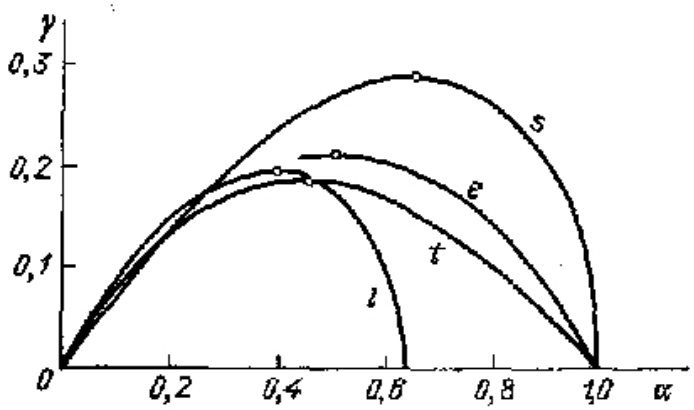


Рис. 2. Дисперсионная зависимость $\sigma = \sigma(\alpha)$ для $U = \sin(y)$ (кривая s), $erf(y)$ (кривая e), $th(y)$ (кривая t) и кусочно-линейного профиля (кривая l) в невязком случае.

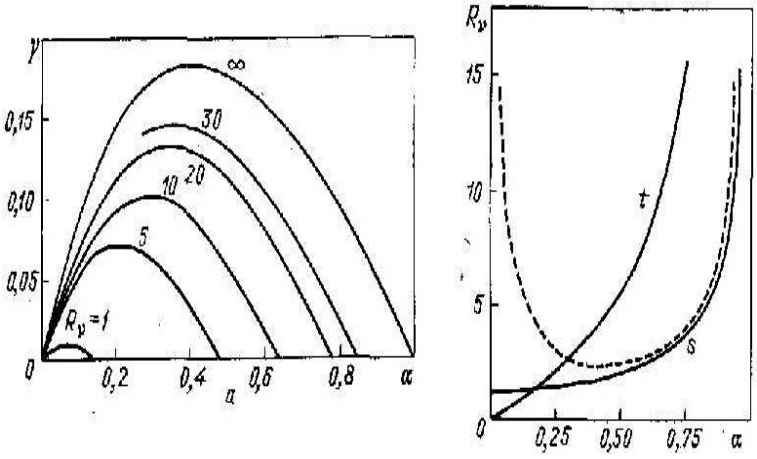


Рис. 3. а) Дисперсионная зависимость $\gamma = \sigma(\alpha, R_\nu)$ для $U = th(y)$. б) Критические кривые для для $U = \sin(y)$ (кривая s) и $th(y)$ (кривая t) без внешнего трения.

Рассмотрим в связи с этим результаты классической линейной теории устойчивости двумерных сдвиговых течений, большинство из которых относится к частному случаю невязких движений ($\nu = 0$), т.е. к уравнению Рэлея (16.7):

$$[U - (c_r + ic_i)]\left(\varphi'' - \alpha^2\varphi\right) - U''\varphi = 0. \tag{9}$$

Напомню, что уравнение (9) в отличие от (7) инвариантно относительно операции комплексного сопряжения с точностью до изменения знака c_i. Поэтому существование решения с отрицательным c_i влечет существование комплексно сопряженного решения с положительным c_i. Следовательно, любое $c_i \neq 0$ означает неустойчивость в невязкой теории – свойство, которым не обладают решения Орра-Зоммерфельда. В связи с этим уместно отметить важный результат Вазова и Линя (см. Линь, 1958) согласно которому из нарастающих ($c_i \neq 0$) решений уравнения Рэлея только с $c_i > 0$ являются пределами решений уравнения Орра-Зоммерфельда при $\nu \longrightarrow 0$.

Типичные дисперсионные кривые, полученные разными авторами для невязкой задачи, показаны на рис. 2. Кривая (l) на этом рисунке соответствует кусочно-линейному профилю

$$U = y \text{ при } |y| \leqslant 1,\ U = \frac{y}{|y|} \text{ при } |y| \geqslant 1, \tag{10}$$

и описывается формулой, полученной еще Рэлеем (см. (Бетчов, Криминале, 1971), (Должанский, Крымов, Манин, 1990))

$$\sigma = \frac{1}{2}\left[e^{-4\alpha} - (1 - 2\alpha)^2\right]^{1/2}. \tag{11}$$

Кривая (s) относится к течению Колмогорова и описывается формулой (4). Дисперсионные кривые (e) и (t) для профилей $U = \mathrm{erf}\,(y)$ и $U = \mathrm{th}y$ получены численным интегрированием (см. Drazin, Reid, 1981). Отметим, что за редким исключением уравнение Рэлея не поддается точному аналитическому интегрированию. Асимптотики для дисперсионных соотношений и собственных функций в окрестностях нейтральных точек $\alpha = 0$ и $\alpha = \alpha_s \neq 0$ (в которых $\sigma = 0$) можно найти в (Бетчов, Криминале, 1971) и (Drazin, Reid, 1981).

На рис. 3а в плоскости $(\alpha, \sigma(\alpha, R_\nu))$ показаны дисперсионные кривые вязкой задачи, полученные численным интегрированием при различных числах Рейнольдса (см. Бетчов, Криминале, 1971). Характер рисунка является типичным для различных профилей сдвиговых течений, т.е. инвариантным по отношению к изменениям формы профиля, которые незначительно влияют на величину и расположение максимумов и нулей дисперсионных кривых. Критические кривые для вязких сдвиговых течений с профилями $U = \sin y$ и $U = \operatorname{th} y$ для сравнения приведены на рис. 3б. Их форма также типична для различных профилей. Заслуживает, однако, внимания различие порогов устойчивости, равные нулю и $\sqrt{2}$ для $\operatorname{th} y$ и $\sin y$ соответственно. Нулевой порог устойчивости имеют также профили (e) и (l). Это легко понять, поскольку в окрестности $\alpha = 0$ длинноволновые моды воспринимают течение как ступенчатый поток Гельмгольца $U = y/|y|$ (отношение ширины сдвига к длине волны стремится к нулю при $\alpha \longrightarrow 0$), который экспоненциально неустойчив по отношению к любому волнообразному возмущению. Его дисперсионная кривая в размерных значениях инкремента γ и волнового числа k показана на рис. 4а. (см. Лекцию 16, *Пример 3*). Для сравнения на рис. 4б приведена зависимость $\gamma = \gamma(k)$ для "размазанного" разрыва ширины D, из которого видно, что устранение разрыва скорости приводит к стабилизации течения относительно мелкомасштабных возмущений.

3. Поверхность нейтральной устойчивости типичных квазидвумерных сдвиговых течений. Используя теперь формулу (5), заменим на рис. 3а букву σ на $\widehat{\lambda}$ и проведем через начало координат координатную ось, ортогональную плоскости рисунка, на которой будем откладывать соответствующие значения $\widehat{\nu} = R_\nu^{-1}$. В итоге в пространстве $\left(\alpha, \widehat{\lambda}, \widehat{\nu}\right)$ получим изображенную на рис. 5 поверхность нейтральной устойчивости квазидвумерного течения с профилем скорости $U = \operatorname{th} y$, типичную для всех упомянутых вязких течений, подверженных влиянию внешнего трения. Следовательно, и все выводы, сделанные в отношении течения Колмогорова переносятся практически на произвольное квазидвумерное сдвиговое течение.

Теперь отметим два важных момента. Во-первых, при обсуждении ГПС (см. Лекцию 22) подчеркивалось, что один из критериев применимости квазидвумерного приближения состоит в том,

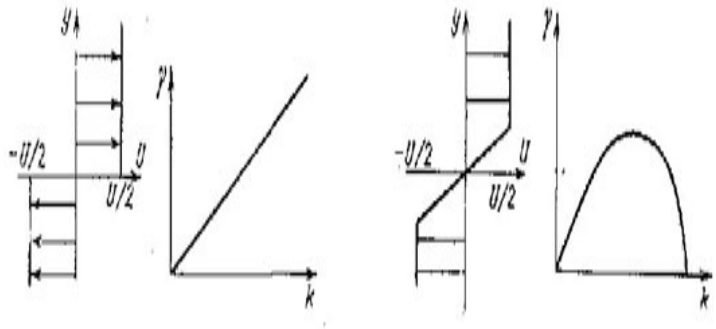


Рис. 4. а) Профиль скорости и дисперсионная кривая тангенциального разрыва. б) То же, что на (а), но для "размазанного"разрыва.

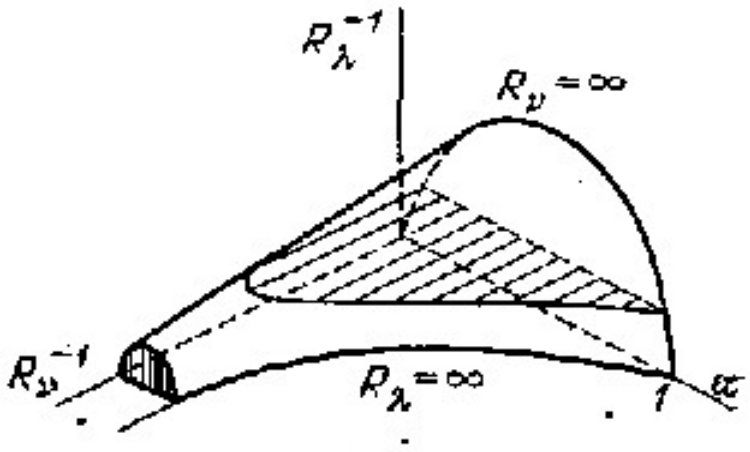


Рис. 5. Поверхность нейтральной устойчивости квазидвумерного течения с профилем скорости $U = th(y)$.

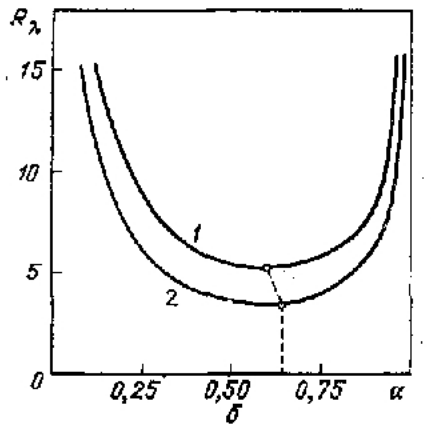


Рис. 6. Кривые нейтральной устойчивости для $U = \sin(y)$ при $Re_\nu/Re_\lambda = 1$ (кривая 1) и ∞ (кривая 2).

что характерный горизонтальный масштаб течения – ширина его сдвига скорости должен существенно превосходить толщину внешнего слоя Праудмена-Стюартсона, в котором как раз и велики вертикальные скорости, а, следовательно, движение трехмерно. Для геофизических течений это условие выполняется по определению, причем, поскольку $\delta_{St} \ll H \ll L_0$, а $\lambda = \nu/\delta_{St}^2$ ($\delta_{St}^2 = H\delta_E$), то $R_\nu/R_\lambda = (UL_0/\nu)\,/\,(U/L_0\lambda) = L_0^2/\delta_{St}^2 = L_0^2/\delta_E H = O\left(10^5\right) \gg 1$. Но в этом случае, как следует из полученных результатов, по крайней мере линейная теория устойчивости автомодельна по R_ν. Сопоставьте, например, критические кривые на рис. 6. Это совсем не тривиальный вывод, означающий возможность пренебречь внутренней вязкостью, т.е. членом со старшей производной в уравнениях движения, что, вообще говоря, без должных оснований весьма опасно. Во-вторых, автомодельность по R_ν делает возможным моделировать глобальные атмосферные течения в лабораторных условиях, в которых не достижимы гигантские реальные значения R_ν, что нередко использовалось скептиками в качестве одного из главных аргументов неправомерности сравнения натурных и лабораторных течений. Условия же автомодельности в лаборатории легко достигаются. В частности, в экспериментах Хайда и Мейсона (Hide, Mason, 1975) и Лаборатории геофизической гидродинамики

ИФА РАН, ширина вращающихся кольцевых каналов и глубина содержащейся в них жидкости (вода), в которых воспроизводятся фундаментальные режимы общей циркуляции атмосферы, порядка 10 см (напоминаю, квазидвумерность обеспечивается не малой глубиной жидкости, а вращением системы – теорема Праудмена-Тейлора, см. Лекцию 6), а толщина слоя Экмана порядка 1 мм. Поэтому $R_\nu/R_\lambda = O\left(10^2\right)$, что вполне достаточно для автомодельности по R_ν.

Другой пример: в экспериментах по моделированию неустойчивости сдвиговых течений в тонких слоях электропроводящей жидкости МГД методом (см. Должанский, Крымов, Манин, 1990) характерные горизонтальный (L) и вертикальный (H) масштабы порядка нескольких сантиметров и миллиметров соответственно. В мелководном приближении вязкой жидкости коэффициент придонного трения $\lambda = 2\nu/H^2$, и тогда вновь $R_\nu/R_\lambda = 2L^2/H^2 = O\left(10^2\right)$.

4. О нелинейной теории устойчивости квазидвумерных сдвиговых течений. В отведенное нам время мне не хотелось бы опускать обсуждение физической сути явлений, которыми сопровождается формирование закритических режимов ради детального описания технических трудностей, возникающих при построении нелинейной теории устойчивости рассматриваемых течений, и математических методов их преодоления. Поэтому я коротко остановлюсь лишь на ключевых моментах затронутой проблемы.

В исключительных, но важных, случаях задачу методом Галеркина удается свести к изучению нелинейной динамической системы малого порядка. Успех такого подхода связан, во первых, с удачным выбором базисных функций, по которым ведется разложение искомых решений, обеспечивающим быструю сходимость метода. Во-вторых, нередко сами наблюдательные данные или результаты лабораторных измерений указывают на то, что вторичные течения формируются из небольшого числа мод. Каноническим примером такого рода может служить течение Колмогорова, неустойчивость и вторичные режимы которого с высокой точностью описываются динамической системой третьего порядка. В частности, соответствующая этой модели критическая кривая совпадает с (4). Очень рекомендую убедиться в этом, выполнив Упражнение 1. Основные принципы конструирования конечномерных и дискретных анало-

гов гидродинамических уравнений сформулированы в монографии (Гледзер, Должанский, Обухов, 1981).

Эффективный подход к изучению мягких режимов потери устойчивости, которые и наблюдаются в рассматриваемых течениях, связан с применением метода Стюарта-Ватсона (см. Drazin, Reid, 1981), идея которого восходит к работам Пуанкаре и Ландау и заключается в следующем. Рассматривая линейную задачу устойчивости как первый член разложения по степеням малой амплитуды возмущений A (мягкая потеря устойчивости означает малость A при слабых закритичностях), продолжить это разложение и получить для амплитуды уравнение Ландау

$$\dot{A} = \sigma A + K_L |A|^2 A, \ A \ll 1, \tag{12}$$

где постоянная K_L называется константой Ландау.

Линейная часть этого уравнения описывает рост возмущений из-за линейной неустойчивости, т.е. из-за взаимодействия возмущения с основным течением, а нелинейный член – самовоздействие возмущения, которое замедляет или усиливает рост его амплитуды в зависимости от знака K_L. Физически самовоздействие возникает из-за нелинейности гидродинамических уравнений: гармоническое возмущение порождает свою вторую гармонику и искажает средний профиль продольной скорости течения с отклонением от которого затем и взаимодействует.

Технически задача сводится к выводу и решению уравнений для возмущений второго порядка малости включительно, причем линейная часть оператора этих уравнений при $R_\nu \gg 1$ совпадает оператором уравнения Рэлея. После этого эволюционное уравнение для амплитуды выводится из условия разрешимости уравнения третьего порядка. Его коэффициенты, включая константу Ландау, выражаются в виде определенных интегралов от возмущений первого и второго порядков. Интересно отметить, что согласно современным исследованиям (Romanova, Annenkov, 2005) линейная неустойчивость сдвиговых течений при определенных условиях подавляется не кубической, а квадратичной нелинейностью.

Основная техническая проблема метода Стюарта-Ватсона в ее классической постановке ($\lambda = 0$) связана с регуляризацией критического слоя. С математической точки зрения критический слой – это окрестность особой точки $y = y_c$ уравнения Рэлея

$$\left\{U - \left[c_r + i\left(c_i + \frac{\widehat{\lambda}}{\alpha}\right)\right]\right\}\left(\varphi'' - \alpha^2\varphi\right) - U''\varphi = 0,$$

в которой коэффициент при старшей производной обращается в нуль. При $\widehat{\lambda} = 0$ в окрестности кривой нейтральной устойчивости ($\alpha c_i = \sigma = 0$) критическая точка близка к вещественной оси, и хотя для традиционно рассматриваемых антисимметричных профилей скорости $U(y) = -U(-y)$ величина U'' тоже обращается в нуль, особенность все равно проявляется в следующих порядках разложения. Чтобы сшить решения уравнения Рэлея слева и справа от особенности, в критическом слое строят специальные разложения, вид которых зависит от того, какой из членов уравнения преобладает – вязкий, нелинейный или нестационарный.

Внешнее трение снимает проблему критического слоя, во первых, потому, что $\widehat{\lambda} \neq 0$, и особая точка смещается в комплексную плоскость, а, во-вторых, минимум кривой нейтральной устойчивости $R_\lambda = R_\lambda\left(\alpha, R_\nu^{-1} = 0\right)$, в котором проводится разложение, приходится на значение $\alpha = \alpha_0 \neq 0$. Описанным методом рассчитывались вторичные режимы для различных профилей скорости основного течения. При этом неожиданно выяснилось, что характер закритических режимов крайне чувствителен к незначительным изменениям профиля первичного течения.

Итак, обнаружено, что при $R_\nu/R_\lambda \gg 1$ линейная и слабонелинейная теории устойчивости квазидвумерных сдвиговых течений автомодельны по R_ν. Принимая во внимание, что в натурных и лабораторных условиях закритичность сдвиговых течений по R_λ невелика, применительно к общей циркуляции атмосферы приходим к следующим выводам.

(1) Одним из определяющих критериев подобия общей циркуляции атмосферы является число Рейнольдса, определяемое по внешнему трению, а не внутренней вязкости.

(2) Относительно спокойный характер общей циркуляции атмосферы объясняется умеренной закритичностью по R_λ и автомодельностью по R_ν, принимающего в атмосфере астрономические значения ($R_\nu = UL_0/\nu = O\left(10^{12}\right)$ по молекулярной вязкости $\nu = 0.15$ см^2/с и $R_\nu = O\left(10^6\right)$ по турбулентной вязкости, тогда как переход к турбулентности в отсутствии внешнего трения происходит при $R_\nu = O\left(10^3\right)$).

(3) Одной из причин непрогнозируемости погоды на длительные сроки может быть связана с баротропной неустойчивостью глобальных сдвиговых течений из-за сильной чувствительности вторичных режимов к малым изменениям профиля основного потока.

В заключение отметим, что вывод о структурной неустойчивости результатов классической теории строго двумерных течений носит общий характер. Аналогичная ситуация будет иметь место, если вместо внешнего трения на жидкость влияет, например, стратификация, магнитное поле (в случае электропроводящей жидкости) или вращение системы в целом.

Упражнения

1. Применяя к уравнению (23.6) обычную процедуру Галеркина и ограничиваясь в разложении функции тока наиболее неустойчивыми модами $n = 0, \pm 1$, т.е. полагая

$$\psi = \Psi(t)\cos y + \left[\exp(i\alpha_0 x)\sum_{-1}^{1}\varphi_n \exp(iny) + \text{к.с.}\right],$$

выведите нелинейную динамическую систему для величин $\Psi(t)$, $z_0 = \varphi_0(t)$ и $z_1 = [\varphi_1(t) - \varphi_{-1}(t)]/2\alpha_0$, где α_0 – значение волнового числа, которое соответствует мнимому критической кривой квазидвумерного течения Колмогорова при фиксированном R_ν. Найдите стационарные решения и покажите, что условия устойчивости первичного режима совпадают с первым приближением критерия устойчивости квазидвумерного течения Колмогорова, полученным из его линейной теории устойчивости.

2. Попытайтесь самостоятельно методом Стюарта-Ватсона решить задачу об устойчивости течения с кусочно-линейным профилем скорости (10). Это весьма поучительная задача, показывающая, что нелинейность не всегда способна подавить линейную неустойчивость. (В случае неудачи обратитесь к работе (Манин, 1989).)

Литература

1. Должанский Ф.В., Крымов В.А., Манин Д.Ю. *Устойчивость и квазидвумерные вихревые структуры сдвиговых течений,* УФН, Т. 160, 7, 1990.

2. Линь Цзяцзяо. *Теория гидродинамической устойчивости*, М.: ИЛ, 1958.

3. Бетчов Р., Криминале В. *Вопросы гидродинамической устойчивости*, М.: Мир, 1971.

4. Drazin P.G., Reid W.H. *Hydrodynamic stability*, Cambridge: Univ. Press, 1981.

5. Hide R., Mason P.T. *Sloping convection in rotating fluid*, Advance in Phys., V.24, No. 1, 1975.

6. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. *Системы гидродинамического типа и их применение,* М.: Наука, ГРФМЛ, 1981.

7. Romanova N.N., Annenkov S.Yu. *Three-wave resonant interactions in unstable media,* J. Fluid Mech., V. 539, P. 57, 2005.

8. Манин Д.Ю. Изв. АН СССР, МЖГ, вып. 2, 1989.

Лекция 25

Уравнения игрушечной модели общей циркуляции атмосферы и их квазигеострофическое приближение

1. Предварительные замечания. Закончилось время разбрасывать камни, настало время собирать их. В заключительных лекциях я попытаюсь из изученных нами отдельных механизмов, ответственных за формирование общей циркуляции атмосферы, сконструировать единую систему взаимодействующих геофизических шестеренок, рычагов и винтиков, которая позволило бы нам описать и понять, что такое атмосфера с точки зрения ее работы как теплового двигателя. Собственно это и есть одна из основных целей геофизической гидродинамики, которая не поддается аналитическому математическому аппарату, а потому лишь частично достигается весьма трудоемким и изощренным численным интегрированием гидродинамических уравнений, усложнению и совершенствованию которого не видно конца.

Я предлагаю вашему вниманию совершенно иной, в определенном смысле диаметрально противоположный, подход, т.е. не усложнять редукции уравнений движения и граничных условий, а наоборот, упрощать их, но строго соблюдая при этом фундаментальную гидродинамическую симметрию, которая выражается через законы сохранения энергии и массы, циркуляционную теорему Кельвина и лагражеву инвариантность потенциального вихря и потенциальной температуры. Идея такого подхода основана на эвристическом предположении, что именно эта симметрия, а не степень пространственно-временного разрешения численных схем, гранич-

ные условия или геометрия системы, играют определяющую роль в работе атмосферы как теплового двигателя.

Для достижения цели мы имеем идеальный инструмент – уравнения Эйлера движения твердого тела с неподвижной точкой и Эйлера-Пуассона движения тяжелого волчка, гидродинамическая трактовка которых и их инвариантов обсуждалась на Лекциях 12 и 13. Добавим к этому без доказательства, что упомянутые механические уравнения и соответствующие им уравнения Эйлера же движения идеальной однородной жидкости и Обербека-Буссинеска движения неоднородной жидкости с теоретико-групповой точки зрения рассматриваются как частные случаи введенных В.И. Арнольдом (Арнольд, 1979) понятия обобщенного твердого тела и Ф.В. Должанским понятия обобщенного тяжелого волчка, конфигурационным пространством (пространство обобщенных координат) которых служит произвольная группа Ли. Образно говоря, уравнения Эйлера и Эйлера-Пуассона являются механическими прародителями соответствующих гидродинамических уравнений, а потому генетически обладают общими с ними симметриями и характеристиками решений. В частности, на Лекции 12 мы непосредственно убедились в том, что циркуляционная теорема Кельвина в механике выражается законом сохранения момента импульса, а теоремам Элера об устойчивости вращений твердого тела вокруг его длинной и короткой главных осей инерции соответствует в гидродинамике теорема Эйлера об устойчивости течения однородной несжимаемой идеальной жидкости с профилем скорости без точек перегиба, что можно понять из сопоставления доказательств обеих теорем методом Ляпунова-Арнольда, приведенных на Лекциях 14 и 18 соответственно.

Отмеченные аналогии наводят на мысль о существовании других характеристик механических движений, отражающих менее очевидные важные свойства движения жидкости. Наибольший интерес представляет предсказать на основе механических уравнений такие качественные особенности поведения жидкости, которые трудно (если вообще возможно) обнаружить в результате численного интегрирования гидродинамических уравнений. Начинать, очевидно, следует с сопоставления механических движений с течениями глобального масштаба, где можно ожидать наибольшего сходства. Естественным фильтром, отсеивающим мелкомасштаб-

ные компоненты и облегчающим тем самым "охоту на крупного зверя является квазигеострофическое приближение уравнений движения вращающейся жидкости. Рассмотрим в связи с этим поведение классического гироскопа и тяжелого волчка в поле сил Кориолиса при различных числах Россби и, сопоставляя квазигеострофические и точные решения их уравнений движения, попытаемся понять, можно ли извлечь из такого сопоставления определенные выводы в отношении глобальных геофизических течений.

2. Уравнения игрушечной модели общей циркуляции атмосферы. Об этих уравнениях по сути уже шла речь на Лекции 13, и они использовались в дальнейшем для иллюстрации подходов к теории гидродинамической устойчивости. В этом и следующем пункте я вновь возвращаюсь к их выводу для полноты и последовательности изложения материала последних тех лекций, который можно рассматривать как теорию общей циркуляции атмосферы, построенной из принципов симметрии и ее механического прообраза. Движение идеальной слабостратифицированной несжимаемой вращающейся атмосферы описываются уравнениями (ср.с (13.1), (13.2)):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} + 2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p - \mathbf{g}\beta T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,T = 0, \quad div\mathbf{u} = 0, \tag{2}$$

где отклонения $T(x_1, x_2, x_3, t)$ температуры от среднего значения $T_0 = const$ связаны с отклонениями $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ плотности от $\rho_0 = const$ соотношением $T/T_0 = -\rho/\rho_0$. Уравнение Фридмана для $\mathbf{\Omega} = rot\mathbf{u}$ и уравнение для $\mathbf{q} = \beta\nabla T$ записываются в виде (ср. (13.3), (13.4)):

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + \{\mathbf{\Omega} + \mathbf{2\Omega}_0, \mathbf{u}\}_P = \mathbf{g} \times \mathbf{q}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{q} = -\mathbf{q}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}. \tag{4}$$

Применяя процедуру, описанную в Лекции 13, т.е. подставляя (12.4), (12.6) и разложение

$$T(r,t) = \mathbf{r}\cdot\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial T}{\partial x_3}x_3, \ \nabla T = \nabla T(t), \ T(0,t) = 0$$

в (3), (4), получаем уравнения (ср. с (13.8), (13.9))

$$\dot{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0) + g\mathbf{l}_0 \times \boldsymbol{\sigma},\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}, \tag{5}$$

которые в классе пространственно линейных полей скорости и температуры описывают движение жидкости внутри эллипсоида

$$S \equiv \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 = 0,$$

вращающегося с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_0$ вокруг оси, проходящей через его центр. Здесь $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{M}_0 = I\boldsymbol{\omega}_0$, причем компоненты $\boldsymbol{\omega}_0$ выражаются через компоненты $\boldsymbol{\Omega}_0$ соотношениями, аналогичными (12.7),

$$\sigma = \frac{1}{T_0}\left(a_1\frac{\partial T}{\partial x_1}\mathbf{i} + a_2\frac{\partial T}{\partial x_2}\mathbf{j} + a_3\frac{\partial T}{\partial x_3}\mathbf{k}\right).$$

Остальные обозначения такие же, как в Лекциях 12 и 13.

В дальнейшем воспользуемся также соотношениями:

$$\omega_1 = -\frac{a_3}{a_2}\frac{\partial v}{\partial z},\ \omega_2 = \frac{a_3}{a_1}\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{6}$$

которые следуют из (12.4), (12.6).

С точностью до замены $\boldsymbol{\omega} \longrightarrow -\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{M} \longrightarrow -\mathbf{m}$, $2\mathbf{M}_0 \longrightarrow -\mathbf{m}_0$, и $\boldsymbol{\sigma} \longrightarrow \boldsymbol{\gamma}$ система (5) совпадает с уравнениями движения тяжелого волчка в поле сил Кориолиса (ср. с (13.20), (13.21)):

$$\dot{\mathbf{m}} = (\mathbf{m} + \mathbf{m}_0) \times \boldsymbol{\omega} + g\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{l}_0,\ \ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{m} = I\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{m}_0 = I\boldsymbol{\omega}_0.$$

В отсутствии стратификации ($\mathbf{q} = \beta\nabla T = 0$) движение описывается уравнением:

$$\dot{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0), \tag{7}$$

которое будем называть *уравнением движения баротропного волчка,* а систему (5) – *уравнениями движения бароклинного волчка.*

3. Квазигеострофическое приближение уравнений движения бароклинного волчка. Три первых интеграла движения системы (5)

$$E = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M} + g\mathbf{l}_0 \cdot \sigma,\ \ \Pi = (\mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0) \cdot \sigma,\ \ \Theta = \sigma \cdot \sigma \tag{8}$$

выражают сохранение полной энергии

$$E_h = \frac{1}{2}\rho_0 \int\limits_D \mathbf{u}^2 \delta\mu + \rho_0 \beta \int\limits_D \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} T \delta\mu$$

и лагранжеву инвариантность потенциального вихря

$$\Pi_h = (\mathbf{\Omega} + 2\mathbf{\Omega}_0) \cdot \nabla T$$

и температуры T для рассматриваемого класса решений исходных гидродинамических уравнений (1), (2) (ср.с (13.5), (13.6.)). Таким образом, мы имеем полный набор необходимых "инструментов чтобы приступить к построению искомого приближения. Полезно вспомнить в связи с этим общую схему, которая использовалась на Лекции 9 для вывода квазигеострофического приближения уравнений движения бароклинной атмосферы.

I. Число Россби $\varepsilon = U/f_0 L = O(\omega/f_0)$ вместе с безразмерными параметрами

$$\xi = \frac{f_0^2 L^2}{g H_0} = O(\varepsilon), \quad \eta = \frac{N^2 H_0}{g} = O(\varepsilon) \tag{9}$$

предполагаются малыми, причем одинаковый порядок их малости, как упоминалось на Лекции 9, не является жестким условием, а используется здесь для упрощения выкладок. Здесь f_0 – параметр Кориолиса (удвоенная средняя по широте вертикальная компонента угловой скорости вращения Земли), L и H_0 – характерные горизонтальный и вертикальный масштабы глобальных течений, U и ω – их типичные скорость и завихренность, N – частота Брента-Вяйсяля, квадрат которой применительно к уравнениям (1), (2) равен $N^2 = g\beta\partial T/\partial z$ при условии $\partial T/\partial z > 0$.

II. Движение предполагается квазигидростатическим и квазигеострофическим. Последнее означает, что с точностью до $O(\varepsilon)$ выполняются соотношения термического ветра (с механической точки зрения они означают приближенное равновесие между силами Кориолиса и давления, выраженное в терминах завихренности).

III. В основу вывода кладутся уравнения сохранения потенциального вихря и потенциальной температуры (в рассматриваемом случае ее роль принадлежит T), которые раскладываются по малому параметру ε с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$.

Будем предполагать, что ускорение $\mathbf{g}$ параллельно главной оси эллипсоида Oz (полуось a_3), вокруг которой происходит вращение системы в целом с угловой скоростью Ω_0, и применим описанную схему для вывода квазигеострофического приближения уравнений (5).

В качестве параметров ε, L^2 и H_0 естественно взять величины

$$\varepsilon = \frac{\omega}{2\omega_0} \quad \left(\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}\right), \; 2L^2 = I_3 = a_1^2 + a_2^2, \; H_0 = a_3. \tag{10}$$

Тогда

$$\xi = \frac{4\omega_0^2 \left(a_1^2 + a_2^2\right)}{2ga_3} = \frac{2\omega_0^2 I_3}{ga_3} = O\left(\varepsilon\right), \tag{11}$$

$$N^2 = g\beta\frac{\partial T}{\partial z} \; = \frac{g\sigma_3}{a_3}, \;\; \eta = \frac{N^2 a_3}{g} = \sigma_3 = O\left(\varepsilon\right). \tag{12}$$

Для исходных уравнений (1) и (2) соотношение термического ветра записывается в виде:

$$-2\left(\mathbf{\Omega}_0\nabla\right)\mathbf{u} = \beta\mathbf{g} \times \nabla T + O\left(\varepsilon\right), \tag{13}$$

причем запись (13) означает, что отношение отброшенных членов к оставленным порядка ε. В координатной форме (13) переписывается в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g\beta}{2\Omega_0}\frac{\partial T}{\partial y} + O\left(\varepsilon\right), \;\; \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{g\beta}{2\Omega_0}\frac{\partial T}{\partial x} + O\left(\varepsilon\right). \tag{13a}$$

Для модельных уравнений (5) соотношение термического ветра имеет вид:

$$\boldsymbol{\omega} \times 2\mathbf{M}_0 + g\mathbf{l}_0 \times \sigma = O\left(\varepsilon\right), \tag{14}$$

или в координатной форме ($\mathbf{l}_0 = (0, 0, -a_3)$):

$$\omega_2 = -\frac{a_3 g\sigma_2}{2I_3\omega_0} + O\left(\varepsilon\right), \; \omega_1 = -\frac{a_3 g\sigma_1}{2I_3\omega_0} + O\left(\varepsilon\right). \tag{14a}$$

Принимая во внимание (6) и (14a), находим, что $-\omega_1$ и $-\omega_2$ с точностью до преобразования сжатия/растяжения можно рассматривать в качестве компонент термического ветра: $-\omega_1 \propto \partial v/\partial z \propto \partial T/\partial x$, $-\omega_2 \propto -\partial u/\partial z \propto \partial T/\partial y$. В дальнейшем ради удобства компонентами термического ветра мы будем называть величины ω_1 и ω_2, имея в виду, что это справедливо с точностью до знака.

Согласно (14a) и (11)

$$\omega_2/\omega_0 \propto \omega_1/\omega_0 \propto O(\varepsilon) \propto \sigma_2/O(\varepsilon) \propto \sigma_1/O(\varepsilon).$$

Отсюда

$$\sigma_1 \propto \sigma_2 = O\left(\varepsilon^2\right). \tag{15}$$

Запишем модельные уравнения (5) в координатной форме

$$\begin{array}{l} I_1\dot{\omega}_1 = (I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3 + 2I_3\omega_0\omega_2 + ga_3\sigma_2, \\ I_2\dot{\omega}_2 = (I_1 - I_3)\,\omega_1\omega_3 - 2I_3\omega_0\omega_1 - ga_3\sigma_1, \end{array} \tag{16}$$

$$\begin{array}{l} I_3\dot{\omega}_3 = (I_2 - I_1)\,\omega_2\omega_3, \\ \dot{\sigma_1} = \omega_2\sigma_3 - \omega_3\sigma_2, \\ \dot{\sigma}_2 = \omega_3\sigma_1 - \omega_1\sigma_3, \end{array} \tag{17}$$

$$\dot{\sigma}_3 = \omega_1\sigma_2 - \omega_2\sigma_1. \tag{18}$$

Система (16)-(18) обладает, в частности, следующими семействами неподвижных точек, описывающих стационарные режимы вращений вокруг главных осей:

$$(i)\ \ \omega_1 = \omega_2 = 0,\ \sigma_1 = \sigma_2 = 0,\ \omega_3 = \omega_{30},\ \sigma_3 = \sigma_{30};$$

$$(ii)\ \ \omega_1 = \omega_3 = 0,\ \sigma_1 = \sigma_3 = 0,\ \omega_2 = \omega_{20},\ \sigma_2 = \sigma_{20},$$

$$2I_3\omega_0\omega_{20} + ga_3\sigma_{20} = 0;$$

$$(iii)\ \ \omega_2 = \omega_3 = 0,\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0,\ \omega_1 = \omega_{10},\ \sigma_1 = \sigma_{10},$$

$$2I_3\omega_0\omega_{10} + ga_3\sigma_{10} = 0.$$

Переменные, отмеченные индексом 0, могут принимать произвольные действительные значения (не путать переменные с внешним параметром ω_0). Нетрудно видеть, что любой представитель семейства (ii) или (iii) является *нетривиальным строго геострофическим стационарным режимом* движения при любом $\omega_0 \neq 0$. Из уравнения (18), согласно сделанным оценкам (15) и соотношениям термического ветра (14a) с учетом (11), следует, что $\dot{\sigma}_3 = o\left(\varepsilon^3\right)$. Следовательно, $\sigma_3 = \sigma_{30}$ – константа с высокой точностью, и последние два уравнения системы (17) с требуемой точностью можно переписать в виде:

$$\dot{\sigma}_1 = \omega_2\sigma_{30} - \omega_3\sigma_2,\ \ \dot{\sigma}_2 = \omega_3\sigma_1 - \omega_1\sigma_{30}. \tag{19}$$

Исключая теперь из (19) величины σ_1 и σ_2 с помощью (14a), получаем систему:

$$\dot{\omega}_1 = -\left(\frac{ga_3\sigma_{30}}{2I_3\omega_0} + \omega_3\right)\omega_2, \;\; \dot{\omega}_2 = \left(\frac{ga_3\sigma_{30}}{2I_3\omega_0} + \omega_3\right)\omega_1, \qquad (20)$$

которую можно трактовать как аналог редуцированного разложением по параметру ε уравнения "потенциальной" температуры (точнее уравнения для ее градиента, см. Лекцию 9), записанного в терминах компонент термического ветра.

Теперь остается выяснить, что такое потенциальный вихрь в квазигеострофическом приближении? В силу сделанных выше оценок выражение для (см. (8))

$$\Pi = (\mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0) \cdot \sigma = I_1\omega_1\sigma_1 + I_2\omega_2\sigma_2 + I_3\omega_3\sigma_3 + 2I_3\omega_0\sigma_3$$

можно переписать в виде

$$\Pi = I_3\left(2\omega_0 + \omega_3\right)\sigma_{30} + O\left(\varepsilon^3\right).$$

Поэтому квазигеострофический потенциальный вихрь равен

$$\Pi_G = I_3\left(2\omega_0 + \omega_3\right)\sigma_{30}, \;\; \dot{\Pi}_G = I_3\sigma_{30}\dot{\omega}_3, \qquad (21)$$

и его эволюция описывается первым уравнением системы (17).

Таким образом, *квазигеострофическое приближение системы уравнений* (16) - (18) *шестого порядка, описывающей движение бароклинного волчка, сводится к динамической системе третьего порядка:*

$$\begin{aligned} I_3\dot{\omega}_3 &= \left(I_2 - I_1\right)\omega_1\omega_2, \\ \dot{\omega}_1 &= -\left(\frac{ga_3\sigma_{30}}{2I_3\omega_0} + \omega_3\right)\omega_2, \\ \dot{\omega}_2 &= \left(\frac{ga_3\sigma_{30}}{2I_3\omega_0} + \omega_3\right)\omega_1. \end{aligned} \qquad (22)$$

Эта система соответствует уравнениям для медленных переменных из теории релаксационных колебаний (см., например, Арнольд и др. (1986)), и в данном случае описывает медленную эволюцию главных компонент глобальных геофизических течений – вертикальную завихренность и термический ветер.

Упражнения

1. Исследуйте на устойчивость режимы (i) - (iii) в рамках исходной (16)-(18) и укороченной (22) систем. Каково влияние вертикальной стратификации σ_{30}?

2. Найдите первые интегралы системы (22). Какой их физический смысл и как они соотносятся с первыми интегралами квазигеострофических уравнений движения бароклинной атмосферы?

Литература

1. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики,* М.: Наука, 1979.

2. Arnold V.I., Khesin D.A. *Topological methods in hydrodynamics*, Appl. Math. Sci., V. 125, 2000.

3. Должанский Ф.В. *О механических прообразах фундаментальных гидродинамических инвариантов и медленных многообразий*, УФН, Т. 175,12, 2005.

4. Должанский Ф.В. *О механических прообразах фундаментальных гидродинамических инвариантов,* Изв. РАН, сер. ФАО, Т. 37, 4, 2001.

3. Арнольд В.И. и др. В сб. *Итоги науки и техники*, Сер. Современные проблемы математики, Т.5, М.: ВИНИТИ, 1986.

Лекция 26

Движение баротропного и бароклинного волчков как механические прототипы общих циркуляций баротропной и бароклинной невязких атмосфер

1. Движение баротропного волчка. Уравнение движения баротропного волчка

$$\dot{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0) \tag{1}$$

в терминах $\mathbf{M}_a = \mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0$ записывается в виде

$$\dot{\mathbf{M}}_a = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}_a. \tag{2}$$

Умножая скалярно (1) на $\boldsymbol{\omega}$, а (2) на $\mathbf{M}_a$, получаем два первых интеграла движения:

$$2E = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M} = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2, \tag{3}$$

$$\mathbf{M}_a^2 = (M_1 + 2M_{01})^2 + (M_2 + 2M_{02})^2 + (M_3 + 2M_{03})^2, \tag{4}$$

существование которых для рассматриваемого класса решений означает сохранение кинетической энергии и выполнение циркуляционной теоремы Кельвина соотвественно (см. Лекцию 12).

Используя инварианты (3) и (4), как в случае $\boldsymbol{\Omega}_0 = 0$ (см. Лекцию 12), можно получить представление о поведении баротропного волчка, не интегрируя его уравнений движения. В пространстве

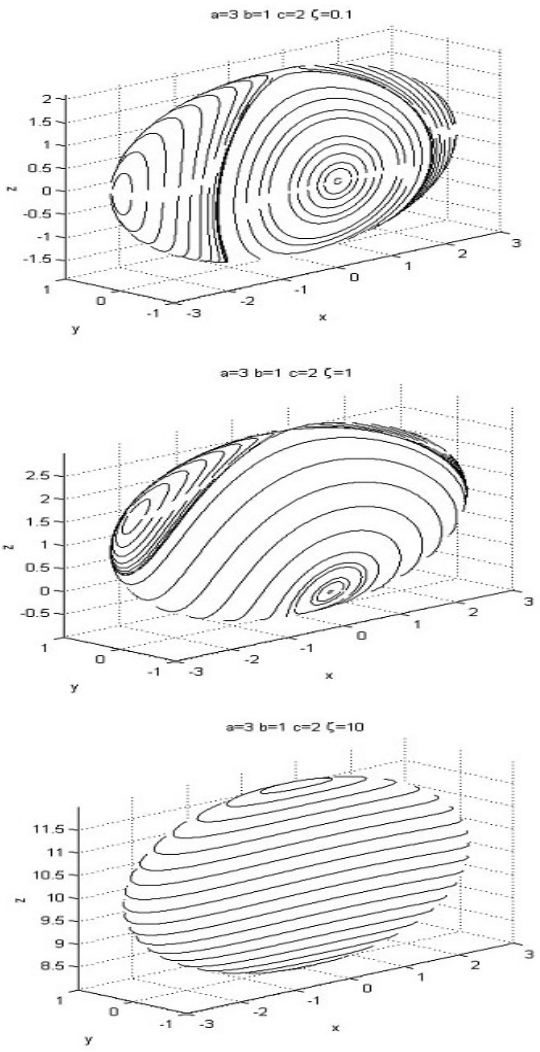


Рис. 1. Фазовые портреты баротропного волчка в пространстве кинетических моментов при различных числах Россби.

кинетических моментов траектории волчка образуются пересечениями "энергетических"эллипсоидов

$$\frac{M_1}{2EI_1}+\frac{M_2}{2EI_2}+\frac{M_3}{2EI_3}=1$$

с "циркуляционными"сферами

$$\frac{(M_1+2M_{01})^2}{M_a^2}+\frac{(M_2+2M_{02})^2}{M_a^2}+\frac{(M_3+2M_{03})^2}{M_a^2}=1$$

радиуса $M_a=|\mathbf{M}+2\mathbf{M}_0|$ с центром в точке $-2\mathbf{M}_0$.

На рис. 1 изображены типичные фазовые портреты динамической системы (1) для различных значений параметра Россби $\varepsilon=|\mathbf{M}|/|2\mathbf{M}_0|$. Приведенные картинки представляют определенный интерес с гидродинамической точки зрения, поскольку они иллюстрируют процесс постепенного исчезновения сложных элементов движения по мере усиления влияния сил Кориолиса. Видно, что с уменьшением ε, начиная с $\varepsilon=\infty$, происходит последовательное исчезновение сначала одной , а затем и другой гиперболических точек. Глобальным геофизическим течениям соответствуют малые числа Россби, при которых траектории баротропного волчка практически образуются пересечениями энергетического эллипсоида с семейством плоскостей, ортогональных вектору $\mathbf{M}_0$. Отсюда следуют два вывода: а) *фазовый портрет геофизических движений баротропного волчка состоит из замкнутых эллиптических траекторий и не содержит гиперболических точек*, б) *при малых числах Россби проекция кинетического момента баротропного волчка на направление* $\mathbf{M}_0$ *практически сохраняется (с точностью до* $O(\varepsilon^2)$*).*

Движение по замкнутым траекториям проще всего описать в предположении, что направление $\mathbf{M}_0$ совпадает с направление одной из главных осей эллипсоида, например, оси z или, что то же самое, x_3. В этом случае (1) в координатной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 &= (I_3-I_2)\,\omega_2\omega_3+2I_3\omega_0\omega_2,\\ I_2\dot{\omega}_2 &= (I_1-I_3)\,\omega_1\omega_3-2I_3\omega_0\omega_1, \end{aligned} \tag{5}$$

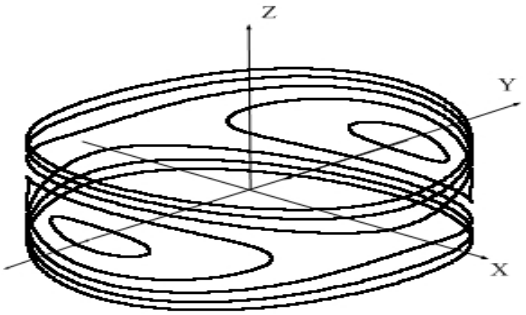


Рис. 2. Фазовый портрет квазигеострофического движения бароклинного волчка в пространстве безразмерных координат X, Y, Z, иллюстрирующий механизм бароклинной неустойчивости Иди.

$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_2 - I_1)\,\omega_1\omega_2.$$

При $\varepsilon \ll 1$ величины $\dot{M}_3 = O(\varepsilon^2)$, $M_3 = M_{30} + O(\varepsilon^2)$, $M_{30} = const = O(\varepsilon)$, и уравнения движения в переменных $X = \sqrt{I_2}M_1$ и $Y = \sqrt{I_1}M_2$ с точностью до членов порядка ε^2 записываются в виде:

$$\dot{X} = 2\frac{I_3}{\sqrt{I_1 I_2}}\omega_0 Y, \quad \dot{Y} = -2\frac{I_3}{\sqrt{I_1 I_2}}\omega_0 X. \tag{6}$$

Отсюда следует, что конец вектора $\mathbf{M}$ или, что то же самое $\mathbf{M}_a$, вращается по эллиптической траектории $M_1^2/I_1 + M_2^2/I_2 = const$ с угловой скоростью

$$\sigma = -2\frac{I_3}{\sqrt{I_1 I_2}}\omega_0 = -2\frac{a_1 a_2}{\sqrt{I_1 I_2}}\Omega_0, \tag{7}$$

т.е. в направлении, противоположном вращению системы отсчета.

Учитывая дуальную трактовку уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой, эти прецессии баротропного волчка, а также приближенную инвариантность проекции его кинетического момента на направление $\mathbf{M}_0$ можно рассматривать в качестве *механических прообразов соответственно процесса распространения планетарных волн, уносящих кинетический момент атмо-*

сферы в направлении, противоположном вращению Земли, и приближенной лагранжевой инвариантности вертикальной завихренности глобальных атмосферных движений, выражаемой уравнением Обухова-Чарни.

2. Движение бароклинного волчка. Поделим левые и правые части уравнений (25.22) на ω_0^2. Тогда аддитивную константу, входящую в скобки правых частей последних двух уравнений, с учетом (25.11), (25.12) и $4\omega_0^2 = f_0^2$ можно записать в виде:

$$S = \frac{ga_3\sigma_{30}}{2I_3\omega_0^2} = \frac{N^2H_0^2}{f_0^2L^2} = \frac{L_R^2}{L^2}, \tag{8}$$

где $L_R \doteq NH_0/f_0$ – уже известный нам внутренний радиус деформации Россби (см. (10.12)), а величина S, входящая в обезразмеренное квазигеострофическое уравнение (9.31) потенциального вихря бароклинной атмосферы как заданный параметр, называется параметром стратификации (см.,например, (Педлоски 1984)).

В безразмерных переменных

$$X = \frac{\omega_1}{\omega_0}, \;\; Y = \frac{\omega_2}{\omega_0}, \;\; Z = S + \frac{\omega_3}{\omega_0}, \;\; \tau = \omega_0 t \text{ (медленное время)}$$

система (25.22) записывается в исключительно простой форме:

$$\dot{X} = -YZ, \;\; \dot{Y} = ZX, \;\; \dot{Z} = \Gamma XY, \tag{9}$$

где $\Gamma = (I_2 - I_1)/I_3 = (a_1^2 - a_2^2)/(a_1^2 + a_2^2)$.

Не умаляя общности, можно положить $a_1 > a_2$, так что $0 < \Gamma < 1$. Система (9) имеет два положительно определенных первых интеграла движения:

$$2E_G = \Gamma X^2 + Z^2, \;\; \Theta_G = X^2 + Y^2. \tag{10}$$

Согласно теореме Обухова (см. Гледзер, Должанский, Обухов (1981)), это означает, что *квазигеострофическое приближение уравнений движения бароклинного волчка эквивалентно уравнениям Эйлера движения классического гироскопа, записанных в терминах главных характеристик общей циркуляции атмосферы – вертикальной завихренности, компонент термического ветра и параметра стратификации.* Уместно заметить в связи с этим,

что квазигеострофическое приближение редуцированных уравнений движения вращающейся мелкой воды также совпадает с механическими уравнениями Эйлера и описывает медленную эволюцию волн Россби (Lorenz, 1980).

Семейства (i)-(iii) (см. Лекцию 25) стационарных решений полной системы уравнений (25.16)-(25.18) исчерпывают совокупность неподвижных точек редуцированной системы (9) и в новых переменных записываются в виде:

$$(i)\ X = Y = 0,\ Z = Z_0;$$
$$(ii)\ X = Z = 0,\ Y = Y_0;$$
$$(iii)\ Y = Z = 0,\ X = X_0.$$

Здесь величины с нулевым индексом могут принимать произвольное вещественное значение, причем нулевое решение $X = Y = Z = 0$ при $S \neq 0$ описывает циркуляцию вокруг вертикальной оси и по существу также является нетривиальным представителеи семейства (i).

Упомянутые первые интегралы движения (10) следует трактовать как полную энергию и аналог лагранжевой инвариантности потенциальной температуры. Второе слагаемое в выражении для энергии при $S = 0$ есть кинетическая энергия вертикальной завихренности, тогда как первое слагаемое, *определяемое одной из компонент термического ветра*, по сути следует интерпретировать как *меру доступной потенциальной энергии* системы. И вот почему.

Не учитываемая в квазигеострофическом приближении кинетическая энергия горизонтальной завихренности порождается горизонтальной неоднородностью потенциальной температуры и потому приписывается к потенциальной энергии квазигеострофической системы. (Это утверждение общего положения, относящееся к любым глобальным геофизическим течениям.) Стационарному состоянию системы (9)

$$X = X_0 \neq 0,\ Y = Z = 0 \qquad (A)$$

с отличной от нуля X-компонентой термического ветра соответствует в размерных переменных горизонтальная завихренность $\omega_{10} \propto -\partial T/\partial x$. Тогда кинетическая энергия этой завихренности

равна

$$K_X = \frac{1}{2} I_1 \omega_{10}^2 = \frac{1}{2} \left(a_2^2 + a_3^2 \right) \omega_{10}^2.$$

Такой же завихренности в Y-направлении соответствует стационарное решение

$$X = 0,\ Y = X_0 \neq 0\, Z = 0, \qquad (B)$$

но с кинетической энергией

$$K_Y = \frac{1}{2} I_2 \omega_{10}^2 = \frac{1}{2} \left(a_1^2 + a_3^2 \right) \omega_{10}^2.$$

Теперь заметим, что интегралы движения не запрещают переход от состояния (A) к нестационарному состоянию

$$X = 0,\ Y = X_0 \neq 0\, Z = \sqrt{\Gamma} X_0,$$

в котором компоненты X и Y обмениваются ролями, но запрещают обратный переход из-за нарушения закона сохранения энергии. *Разность кинетических энергий состояний* (A) *и* (B)

$$\triangle K = K_Y - K_X = \frac{1}{2} \left(a_1^2 - a_2^2 \right) \omega_{10}^2$$

и есть мера избытка потенциальной энергии, которым обладает состояние (A) *по отношению к состоянию* (B)*, т.е. доступная потенциальная энергия, порождающая вертикальную завихренность. В безразмерных переменных эта энергия и равна*

$$P_{bc} = \frac{1}{2} \frac{\left(a_1^2 - a_2^2 \right) \omega_1^2}{I_3 \omega_0^2} = \frac{1}{2} \Gamma X^2. \qquad (11)$$

Фазовый портрет системы (9) изображен на рис. 2, из которого следует, что неподвижная точка (ii) устойчива, а (iii), как гиперболическая точка, неустойчива. По сути дела рис. 2 иллюстрирует пионерский результат Иди, обсуждавшийся нами на Лекции 20, где было показано, что течение с нулевой вертикальной завихренностью и отличным от нуля термическим ветром $\partial u / \partial z = -\left(g\beta / 2\Omega_0 \right) \partial T / \partial y$ оказывается неустойчивым из-за избытка доступной потенциальной энергии, которая превращаясь в кинетическую энергию вертикальной завихренности, порождает атмосферный циклогенез. Именно такой механизм описывает и модель (9).

В случае $S \neq 0$ величину Z^2 уже нельзя трактовать как меру кинетической энергии системы. Не случайно поэтому, как мы увидим ниже, точные и квазигеострофические решения достигают наибольшего согласия при $S = 0$: чем больше S отлично от нуля, тем больше расхождение между точными и квазигеострофическими траекториями. Поэтому *параметр стратификации в определенном смысле можно рассматривать в качестве меры отклонения траекторий исходной модели от медленного многообразия, описываемого системой* (9).

Замечание. Уместно отметить, что решения квазигеострофических и исходных атмосферных уравнений движения достигают наилучшего согласия при $S = O(1)$, а не нулю. В связи с этим напоминаю (см. Лекцию 9), что квазигеострофические атмосферные уравнения движения формулируются для отклонений от состояния статического равновесия с устойчивым вертикальным профилем потенциальной температуры, чему соответствует положительное значение N^2. В нашем же случае мы отталкивались от равновесного состояния с $N^2 = 0$, что объясняется выбором приближения Обербека-Буссинеска для отклонений от состояния статического равновесия с однородным профилем средней температуры $T_0 = \beta^{-1} = const$.

3. Сравнение квазигеострофических и точных движений бароклинного волчка в зависимости от параметра стратификации при малых начальных числах Россби. В случае сферической ($a_1 = a_2 = a_3$) или цилиндрической (волчок Лагранжа) симметрий аналитические решения квазигеострофического триплета можно было бы сопоставить с известными аналитическими решениями исходных модельных уравнений. Такое сопоставление для сферически симметричного волчка было сделано в работе (Глуховский, Должанский, 1980). Это, однако, наименее интересные примеры, в которых полностью или частично исключен гидродинамический механизм нелинейного взаимодействия ω-компонент, ответственный за генерацию агеострофической компоненты движения (см. (25.16)). Чтобы избежать такого упрощения, я приведу результаты численного интегрирования приближенных и исходные модельных уравнений, выполненные А.Е. Гледзером

Рис. 3. Фазовые портреты квазигеострофических и "точных"движений бароклинного волчка в плоскости X, Y, при различных параметрах S: нумерация слева направо и сверху вниз S=0.2; -0.2, 0.6, -0.6, 0.65, -0.65. Жирные кривые соответствуют квазигеострофическим траекториям, тонкие линии - точным траекториям.

и В.М. Пономаревым и опубликованных в работах (Должанский, Пономарев, 2002; Должанский, 2005; Гледзер А.Б. и др., 2006). (Неинтегрируемость асимметричного тяжелого волчка была доказана еще С. Ковалевской. Современное доказательство изложено в (Зиглин, 1980).) Корректность вычислений основывалась на использовании следующих двух критериев точности интегрирования: а) степень выполнения законов сохранения (25.8) и (10) и б) точность возвращения в начальную точку при интегрировании назад.

Во всех приведенных ниже примерах погрешности выполнения упомянутых законов сохранения и возвращения в исходную точку не превышали соответственно 10^{-6} и 10^{-4} процента. Все численные эксперименты по сопоставлению решений квазигеострофических и исходных модельных уравнений проводились для эллипсоида с полуосями $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$. В качестве начальных данных использовалось неустойчивое стационарное состояние квазигеострофического триплета $\boldsymbol{\omega}/\omega_0 = (0.1, 0, 0)$ с начальным возмущением $\boldsymbol{\omega}'/\omega_0 = (0, 0, 10^{-5})$, а соотвествующие значения компонент σ_1 и σ_2 вычислялись по формулам термического ветра (25.14a). От варианта к варианту изменялся лишь параметр стратификации S.

Результаты расчетов представлены на рис. 3 и 4 в виде проекций фазовых траекторий приближенной и исходной моделей на двумерное (X, Y) и трехмерное (X, Y, Z) подпространства для различных положительных и отрицательных начальных значений S (напомним, что S - инвариант только для квазигеострофической модели). Параметр S изменялся в пределах $0 \leqslant |S| \leqslant 1$.

Отметим прежде всего, что при $|S| \ll 1$ фазовые портреты приближенной и исходной моделей практически совпадают. Это указывает на само существование так называемого медленного многообразия - инвариантного множества в пространстве решений невязких уравнений движения вращающейся жидкости, в окрестности которого решения являются квазигеострофическими, или, другими словами, задаваемого гиперповерхностью адиабатического (по физической теминологии) инварианта (6.5). Проблема существования и устойчивости квазигеострофического многообразия, впервые затронутая А.М. Обуховым (1949), активно обсуждается в современной гидродинамической литературе (см., например, Lorenz, 1980, 1986; Lorenz, Krishnamurthy, 1987 и цитируемые там работы).

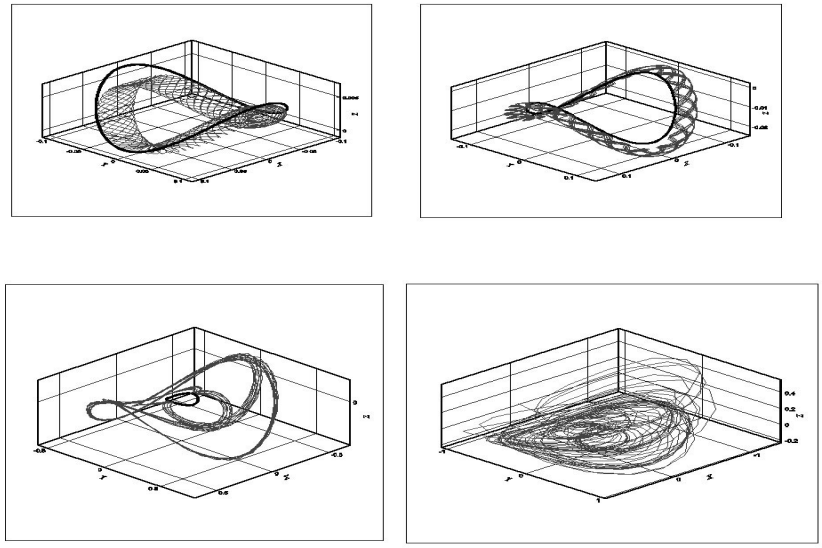


Рис. 4. Фазовые портреты квазигеострофических и "точных" движений бароклинного волчка в пространстве X, Y, Z при докритических и закритическом значении параметра (правый нижний) S. Жирные кривые соответствуют квазигеострофическим траекториям, тонские линии - точным траекториям.

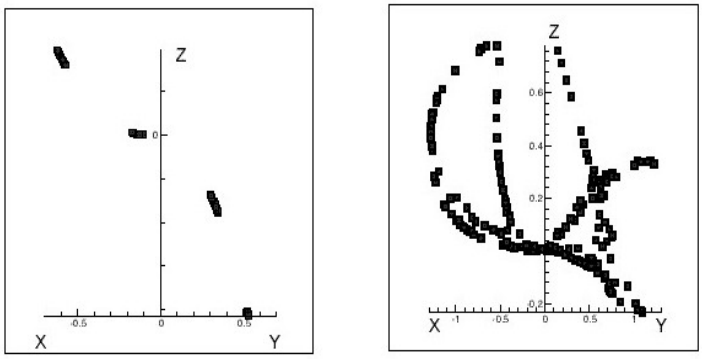


Рис. 5. Отображения Пуанкаре в плоскости X, Y при а) докритическом значении параметра $S = -0.6$ и закритическом значении.

При малых и умеренных значениях $|S|$ "точные"траектории отражаются от медленного многообразия внутрь или вне его в зависимости от знака S, как если бы оно было своеобразным кривым зеркалом. Чем больше значение $|S|$, тем больше амплитуда отклонения. Подчеркнем, что указанная особенность наблюдается даже тогда, когда агеострофическая амплитуда становится сравнимой (или даже превышающей) по величине с геострофической компонентой при положительных изменениях параметра стратификации вплоть до $S = 1$ и $|S| \approx 0.64$ при отрицательных его изменениях. Пробой "зеркала"происходит с внешней стороны при $S \approx -0.65$, и траектория заполняет ранее недоступное пространство в течении конечного интервала времени $\triangle\tau \sim 10^2$, что, по-видимому, сопровождается возникновением хаоса. Это проиллюстрировано на рис. 5, на котором представлены отображения Пуанкаре для докритического и закритического значений S. Иерархия моделей, занимающих промежуточное положение между квазигеострофическими и исходными уравнениями движения бароклинного волчка и позволяющими аналитически описать его поведение при умеренных значения S, сконструированы в (Гледзер 2003).

Интересно отметить, что описанные результаты весьма схожи с результатами Э.Лоренца (Lorenz 1980), который сравнивал точные решения обрезанных по Галеркину атмосферных уравнений движения с решениями их квазигеострофического приближения. В модели Лоренца роли медленных и быстрых движений играют соответственно планетарные и *инерционно-гравитационные волны*. В нашем же случае при $S \neq 0$ медленные эволюции вертикальной завихренности и термического ветра сопровождаются высокочастотными *инерционно-гравитационными колебаниями*, которые периодически отдаляют фазовые траектории от медленного многообразия (см. рис. 3 и 4).

Подведем некоторые предварительные итоги. *Простейшая динамическая система, обладающая главными симметриями уравнений движения идеальной вращающейся жидкости, отражает такие фундаментальные элементы общей циркуляции атмосферы как волны Россби, переносящие момент импульса (завихренность) на запад, приближенную инвариантность проекции завихренности на направление вращения, бароклинный механизм*

неустойчивости Иди, медленное квазигеострофическое многообразие и его влияние на агеострофические движения. Подчеркиваю, модель является простешей в том смысле, что любая ее редукция означает потерю хотя бы одной из фундаменальных симметрий.

Литература

1. Педлоски Дж. *Геофизическая гидродинамика*, Т.2, М.: Мир, 1984.

2. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. *Системы гидродинамического типа и их применение,* М.: Наука, 1981.

3. Lorenz E.N. *Attractor sets and quasi-geostrophic equilibrium*, J. Atm.Sci., V.37, P. 1685, 1980.

4. Глуховский А.Б., Должанский Ф.В. *Трехмодовые геострофические модели конвекции вращающейся жидкости*, Изв. АН СССР, сер. ФАО, Т.16, 5, 1980.

5.Должанский Ф.В., Пономарев В.М. *Простейшие медленные многообразия баротропных и бароклинных движений вращающейся жидкости*, Изв. РАН, сер. ФАО, Т. 38, 2002.

6. Должанский Ф.В. *О механических прообразах фундаментальных гидродинамических инвариантов и медленных многообразий*, УФН, Т. 175, 12, 2005.

7. Гледзер А.Е. и др. *Режимы Хэдли и Россби в простейшей модели конвекции вращающейся жидкости*, Изв.РАН, сер. ФАО, Т. 42, 3, 2006.

8. Зиглин С.Л. *Тр. Моск. мат. общ.*, Т. 41, 1980.

9. Обухов А.М. *К вопросу о геострофическом ветре*, Изв. АН СССР, Т.13, 4, 1949. Переиздана в кн. Обухов А.М. *Турбулентность и динамика атмосферы*, Л.: Гидрометеоиздат, 1988.

10. Lorenz E.N. J. Atm.Sci., V.43, P.1547, 1986.

11. Lorenz E.N., Krishnamurthy V.J. *On nonexistence of slow manifold*, J. Atm.Sci., V.44, No. 20, 1987

12. Гледзер А.Е. *О медленных движениях в редуцированных уравнениях стратифицированной жидкости в поле сил Кориолиса*, Изв.РАН, сер. ФАО, Т. 39, 6, 2003.

Лекция 27

Игрушечная общая циркуляция вязкой атмосферы

1. Учет трения и внешнего нагревания. Читателю уже известно (см Лекцию 22), что в геофизических гидродинамических системах диссипация кинетической энергии происходит в основном в планетарном пограничном слое, который затормаживает движение свободной атмосферы приблизительно по линейному закону трения. Внешнее нагревание, как это нередко делается в теоретических исследованиях, можно учесть по формуле Ньютона. Согласно ей удельные притоки тепла прямо пропорциональны отклонениям температуры от ее фонового значения. За фоновое распределение температуры принимается температурное поле, которое устанавливается в неподвижной жидкости из-за внешнего неоднородного нагревания и теплопроводности среды. Тогда, следуя указанным предположениям, вязкое движение бароклинного волчка описывается уравнениями:

$$\dot{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0) + g\mathbf{l}_0 \times \boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{M}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma} + \mu \left(\boldsymbol{\sigma}_B - \boldsymbol{\sigma} \right). \quad (1)$$

Здесь σ_B соответствует пространственно линейному распределению фоновой температуры, а величины λ и μ следует трактовать как эффективные коэффициенты вязкости и теплопроводности размерности обратного времени, которые, вообще говоря, задаются физическими параметрами среды. Вспомните, что, например, для атмосферы величина $\lambda \simeq 2\nu/\delta_{ St}^2$, которой мы пользуемся при выполнении количественных оценок. Остальные обозначения прежние.

2. Игрушечные циркуляций Хэдли и Россби. Рассмотрим типичную геофизическую ситуацию, в которой движение вязкого бароклинного волчка происходит под влиянием горизонтально неоднородного нагревания. Положим по прежнему, что $a_1 > a_2$, а векторы $\mathbf{g}$ и $\mathbf{\Omega}_0$ противоположны по направлению и параллельны оси x_3. Чтобы включить механизм бароклинной неустойчивости, направим градиент фоновой температуры вдоль оси x_1. В этом случае $\sigma_B = (\sigma_{B1}, 0, 0)$.

Применяя процедуру, описанную на Лекции 25, получаем квазигеострофическое приближение системы (1):

$$\begin{gathered} I_3\dot{\omega}_3 = (I_2 - I_1)\,\omega_1\omega_2 - \lambda I_3\omega_3, \\ \dot{\omega}_1 = -\omega_2\omega_3 - \mu\omega_1 - \mu g a_3\sigma_{B1}/2I_3\omega_0, \\ \dot{\omega}_2 = \omega_3\omega_1 - \mu\omega_2. \end{gathered} \tag{2}$$

Заметим, что величина σ_3 не входит в систему (2) ни параметрически (ср. с (25.22)), ни в виде уравнения для нее, поскольку σ_3 в конечном итоге затухает из-за однородности вертикального распределения фоновой температуры (результат численного интегрирования).

В безразмерных переменных

$$X = \frac{\omega_1}{\mu}, \quad Y = \frac{\omega_2}{\mu}, \quad Z = \frac{\omega_3}{\mu}, \quad \tau = \mu t$$

система (2) принимает вид:

$$\dot{X} = -YZ - X - D, \quad \dot{Y} = ZX - Y, \quad \dot{Z} = \Gamma XY - \zeta Z. \tag{3}$$

Такой выбор медленного времени продиктован тем, что для геофизических систем, как правило, $\mu^{-1} \gtrapprox \lambda^{-1} \gg \Omega_0^{-1}$ (например, характерное время радиационного выхолаживания земной атмосферы около 10 суток, а λ^{-1} вы можете оценить сами, полагая $\nu = \nu_T = 10^5$ см^2/с, см. Лекцию 22). Величину $\zeta = \lambda/\mu$ можно интерпретировать как эффективное число Прандтля, а $D = g a_3\sigma_{B1}/2I_3\omega_0\mu$ - как безразмерный термический привод.

Пусть вектор σ_B направлена в отрицательную сторону оси x_1, так что $D = -|D|$. В этом случае естественной конвекции, возбуждаемой внешними источниками тепла, соответствуют положительные значения ω_2. Система (3) имеет два типа стационарных

решений:

$$H)\ X = |D|, Y = Z = 0, \tag{4}$$

$$R_{+,-})\ X = D_0 \equiv (\zeta/\Gamma)^{1/2}, Y = \pm D_0^{1/2} (|D| - D_0)^{1/2},$$

$$Z = \pm D_0^{-1/2} (|D| - D_0)^{1/2}. \tag{5}$$

Смысл этих решений становится понятным, если сопоставить их с режимами общей циркуляции атмосферы по механизму действия игрушечной и реальной систем как тепловых машин. Начнем с того, что согласно анализу решений исходной модели (см. Должанский, Плешанова, 1980; Гледзер, Должанский, Обухов, 1981) в режиме H обе величины Y и Z пренебрежимо малы, но строго положительны, при любом $D \neq 0$, не нарушающим квазигеострофическое равновесие. Малость и положительность Y означает, что естественная конвекция, возникающая в поперечных сечениях, ортогональных оси x_2, крайне не эффективна с точки зрения передачи тепла от нагревателя к холодильнику. Интенсивная циркуляция вокруг оси x_1 не увеличивает эффективность этого режима. В итоге в жидкости устанавливается распределение температуры, практически совпадающее с фоновым (согласно соотношениям термического ветра $X = -D$, $Y = 0$ означает, что $\nabla T = \nabla T_B$). С энергетической точки зрения режим Хэдли (Hadley), наблюдаемый в природе и лабораторных и численных экспериментах по моделированию общей циркуляции атмосферы (ОЦА), характеризуется аналогичными свойствами – мощным, но не эффективным зональным течением, ортогональным направлению полюс-экватор и слабенькой естественной конвекцией в меридиональной (радиальной) плоскости (см. рис. 1а и 2а). Интенсивность меридиональной циркуляции на два порядка слабее зонального потока (Лоренц, 1970).

В режимах R ситуация кардинально меняется. Интенсивность циркуляции вокруг оси x_1, а по соотношениям термического ветра и разность температур на этой оси уже не зависят от D, т.е. от мощности внешнего теплового источника. Если $\triangle T$ – указанная разность температур, то отношение $\triangle T/\triangle T_B = |D_0/D| < 1$, и, следовательно, в режимах R рассматриваемая тепловая машина становится существенно эффективнее. Интенсивности жидких вращений вокруг осей, ортогональных ∇T_B, с увеличением D возрастают по закону $\sqrt{|D| - D_0}$. Но, если в режиме R_+ оба этих вращения способствуют передаче тепла от нагревателя к холодильни-

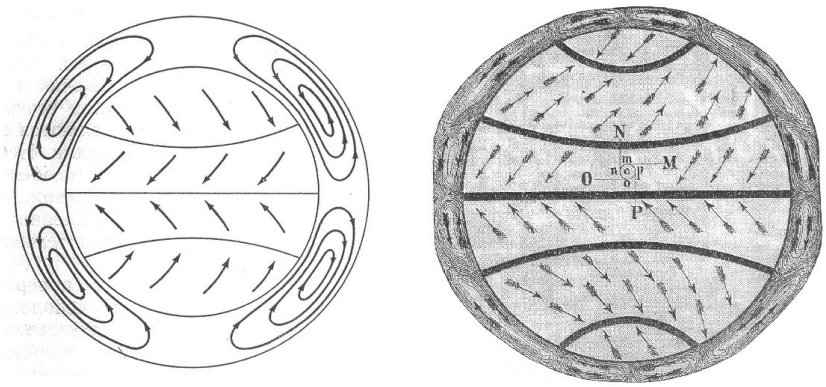


Рис. 1. Схемы общей циркуляции атмосферы: а) по Хэдли (1735); б) по Феррелу (1859)

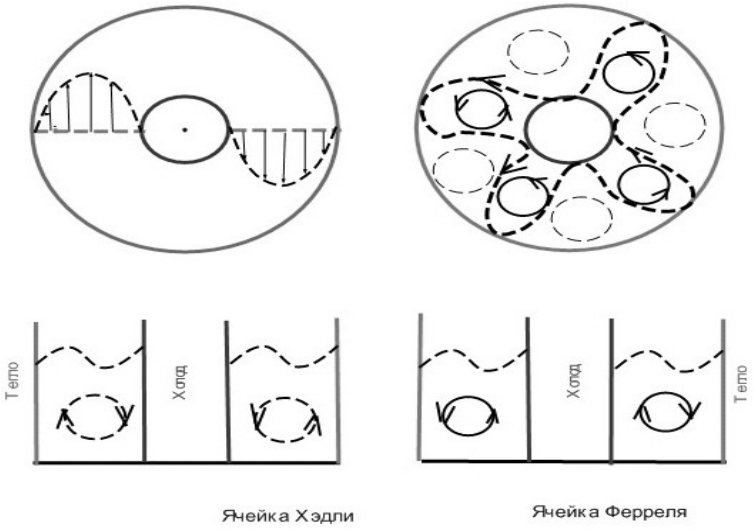


Рис. 2. Схематическое изображение режимов Хэдли и Россби, наблюдаемых в экспериментах с вращающимися кольцевыми каналами с жидкостью, нагреваемой на периферии и охлаждаемой в центре. Представлены виды сверху и сбоку.

ку, то в режиме R_- циркуляция вокруг оси x_2 происходит в направлении, противоположном естественной конвекции. С этим явлением, которое налюдается в естественных и лабораторных условиях (см. рис. 1б и 2б), в свое время связывали так называемый эффект отрицательной вязкости (Старр, 1971). И вновь с энергетической точки зрения описанная ситуация схожа с атмосферными и лабораторными режимами Россби (Rossby). Действительно, из рис. 2б, на котором схематически представлены результаты лабораторных экспериментов по моделированию ОЦА (см. Лоренц, 1970; Hide, Mason, 1975) видно, что отрицательное влияние "противоестественной" конвекции в радиальной (меридиональной) плоскости компенсируется интенсивным горизонтальным струйным течением, которое поочередно приходя в соприкосновение с нагревателем и холодильником осуществляет перенос тепла в нужном направлении. Этому же способствуют крупномасштабные вихри, огибаемые струйным течением, роль которых в игрушечных режимах Россби исполняет вертикальная завихренность ω_3. Схожая картина наблюдается и в атмосфере.

2.1. Диаграмма устойчивости режимов Хэдли и Россби. В связи с перечисленными свойствами режимов H и R представляет интерес исследование их области существования и устойчивости на предмет сопоставления с такими же областями соответствующих режимов натурных или лабораторных глобальных геофизических течений. Согласно (5), значение $|D| = D_0$ есть нижняя граница области существования режимов R. В геофизической гидродинамике конвекцию вращающейся жидкости принято описывать в терминах термического числа Россби и числа Тейлора

$$Ro_T = \frac{1}{2}\frac{gH\beta\triangle T}{\Omega_0^2 L^2},\ Ta = 4\Omega_0^2 H^4 \nu^{-2},$$

где H – глубина жидкости, L – характерный горизонтальный масштаб (ширина кольцевого канала в лабораторных экспериментах или радиус Земли для натурных течений), β – коэффициент теплового расширения и $\triangle T$ разность температур нагревателя и холодильника (экватора и полюса для атмосферы или внешней и внутренней боковых стенок кольцевого канала в лабораторных экспериментах), а в качестве ν берут молекулярную кинематическую вязкость в лабораторных экспериментах и турбулентную вязкость

для атмосферных течений, на шесть - семь порядков превосходящую молекулярную.

Применительно к рассматриваемой модели эти величины естественно определить формулами:

$$Ro_T = \frac{ga_3|\sigma_{B1}|}{2I_3\omega_0^2}, \quad Ta = \frac{\omega_0^2}{\lambda^2}. \tag{6}$$

В терминах этих параметров

$$|D| = Ro_T Ta^{1/2}\zeta. \tag{7}$$

Тогда в плоскости внешних критериев подобия (Ta, Ro_T) упомянутая нижняя граница задается кривой:

$$Ro_T = (\zeta\Gamma Ta)^{-1/2}, \tag{8}$$

которая в рамках квазигеострофического приближения совпадает с нижней границей устойчивости режимов R, что не удивительно. Удивительно другое: *эта кривая совпадает с асимптотикой нижней границы существования и устойчивости режимов Россби в кольцевых каналах, найденной Лоренцем* (Lorenz, 1962) *теоретически на основе обрезанной двухслойной модели бароклинного течения.*

Детальное исследование, выполненное в работах (Должанский, Плешанова, 1980) и (Гледзер, Должанский, Обухов, 1981) на основе нередуцированных уравнений (1) и откорректированное в (Должанский, 2005) дополнительными расчетами, показывает, что области существования и устойчивости режимов Россби имеют форму, аналогичную представленной на рис. 3, причем верхняя ветвь асимтотически ведет себя как $Ro_T \sim Ta^{1/2}$. Это не значит, что области существования и устойчивости режимов R_+ и R_- совпадают. В частности, сплошная кривая на рис. 3 воспроизводит границу устойчивости режима R_-, тогда как режим R_+ устойчив не только внутри области, очерченной этой кривой, но во внешней ее окрестности.

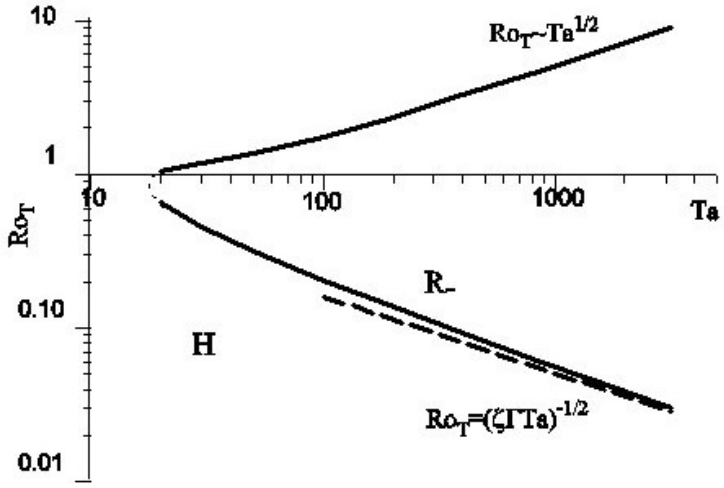


Рис. 3. Критическая кривая режима R_- в плоскости внешних параметров подобия Ta, Ro_T; асимптотика нижней ветви совпадает с асимптотикой нижней границы устойчивости режимов Россби в кольцевых каналах, теоретически полученной Лоренцом (Lorenz, 1962).

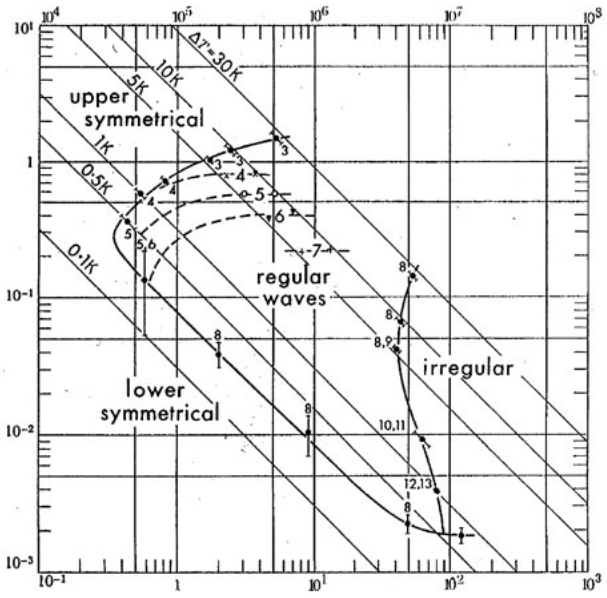


Рис. 4. Экспериментальная диаграмма неустойчивости режимов конвекции неоднородно нагретой по горизонтали жидкости во вращающихся каналах (Hide, Mason, 1975). Квадрат угловой скорости Ω^2 пропорционален числу Тэйлора, а параметр θ, равный отношению горизонтальной разности плотностей к Ω^2, пропорционален термическому числу Россби.

Кривая устойчивости режимов Россби в кольцевых каналах, найденная в упомянутой работе Лоренца отличается от представленной на рис. 3 поведением верхней ветви, которая в его случае асимптотически стремится к константе. Было бы слишком смело давать этому различию строгое объяснение (модели ведь разные). Отметим только, что в отличие от Лоренца в нашем случае при построении верхней ветви квазигеострофическое приближение не применялось.

Если теперь сопоставить теоретические границы устойчивости режимов Россби с экпериментальной критической кривой, представленной на рис. 4, мы видим, что, хотя все кривые имеют форму наковальни, нижняя ветвь экспериментальной кривой ведет себя как $Ro_T \sim Ta^{-1}$, а не $Ro_T \sim Ta^{-1/2}$. В отношении верхней ветви экспериментальных данных недостаточно. Причина такого расхождения до недавнего времени оставалась неясной. Мы вернемся к этому вопросу в пункте 3.

В заключение этого пункта отметим два момента. Во- первых, критическая кривая режима R_+ не строилась из-за трудности отличить этот режим от режима H в окрестности верхней ветви. Во-вторых, хотя в квазигеострофическом приближениии режимы $R_\pm$ с точки зрения устойчивости равноправны, переход $H \longrightarrow R_+$ преобладает над $H \longrightarrow R_-$ в рамках исходной модели.

2.2. КПД игрушечных режимов Хэдли и Россби. Интересно теперь количественно сопоставить эффективность режимов Хэдли и Россби с точки зрения передачи тепла от нагревателя к холодильнику и производства кинетической энергии. В отсутствии вращения ($\Omega_0 = 0$) режим H – это обычная комнатная конвекция, эффективность которой можно оценить следующим образом.

а) КПД комнатной конвекции невращающейся жидкости. Если $\boldsymbol{\sigma}_B$ направить в положительном направлении оси x_1, то для принятой нами конфигурации ($\mathbf{l}_0 = (0, 0, -a_3)$) комнатная конвекция согласно (1) описывается системой уравнений:

$$\begin{gathered} I_2\dot{\omega_2} = -ga_3\sigma_1 - \lambda I_2\omega_2, \\ \dot{\sigma_1} = \omega_2\sigma_3 - \mu\sigma_1 + \mu\sigma_{B1}, \\ \dot{\sigma_3} = \omega_2\sigma_1 - \mu\sigma_3, \\ \omega_1 = \omega_3 = 0,\ \sigma_2 = 0, \end{gathered} \tag{9}$$

стационарные решения которой в терминах безразмерных переменных

$$x = \frac{\sigma_1}{\sigma_{B1}},\ y = \frac{\omega_2}{\mu},\ z = \frac{\sigma_3}{\sigma_{B1}}$$

удовлетворяют уравнениям

$$R_a x + y = 0,\ yz - x + 1 = 0,\ xy + z = 0, \tag{10}$$

$$R_a = \frac{g a_3 \sigma_{B1}}{I_2 \lambda \mu}. \tag{11}$$

Здесь R_a – число Рэлея (в терминах эффективных коэффициентов вязкости и теплопроводности), которым обычно характеризуют конвекцию невращающейся жидкости.

Нетрудно показать, что система (10), сводящаяся относительно y к неполному кубическому уравнению

$$y^3 + y + R_a = 0,$$

имеет единственное вещественное решение, которое при $R_a \gg 1$, характерных для природных и лабораторных течений, с хорошей точностью можно представить в виде

$$x = R_a^{-2/3},\ y = -R_a^{1/3},\ z = R_a^{-1/3}. \tag{12}$$

КПД конвекции есть отношение

$$\eta = \frac{\text{скорость генерации КЭ} = \dot{K}}{\text{солнечная инсоляция – накачка} = Q}, \tag{13}$$

КЭ - кинетическая энергия. Теперь надо понять, что такое Q в данной модели? Закон сохранения энергии для системы (9) записывается в виде

$$\dot{E} = -\lambda I_2 \omega_2 + \mu g a_3 \sigma_3, \tag{14}$$

где полная энергия

$$E = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 - g a_3 \sigma_3. \tag{15}$$

Величина Q есть константа, не зависящая от динамических переменных задачи. Поэтому закон сохранения энергии в виде (14)

не дает нам никакой информации о Q. Однако в терминах $\gamma = \sigma_{B1} - \sigma_3$, ω_2, σ_1 он переписывается в виде

$$\dot{E} = -\lambda I_2 \omega_2^2 - \mu g a_3 \gamma + \mu g a_3 \sigma_{B1}, \tag{14a}$$

причем под полной энергией можно теперь подразумевать величину

$$E = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + g a_3 \gamma. \tag{15a}$$

Сделанной заменой мы явно ввели разность температур нагревателя и холодильника как меру внешней термической накачки:

$$Q = \mu g a_3 \sigma_{B1}. \tag{16}$$

Тогда, поскольку в для стационарных режимов $\dot{K}$ равна взятой с обратным знаком скорости диссипации кинетической энергии, то согласно (11), (12)

$$\eta = \frac{\dot{K}}{Q} = \frac{\lambda I_2 \omega_2^2}{\mu g a_3 \sigma_{B1}} = \left(\frac{g a_3 \sigma_{B1}}{I_2 \lambda \mu} \right)^{-1} \frac{\omega_2^2}{\mu^2} = R_a^{-1/3}. \tag{17}$$

Непосредственным вычислением нетрудно убедиться в том, что скорость преобразования потенциальной энергии $P = g a_3 \gamma$ в кинетическую энергию в единицах Q, т.е. $\dot{P}/Q$ также равна $R_a^{-1/3}$.

Полагая для атмосферы вертикальный масштаб $H = a_3 = 10$ км, горизонтальный масштаб $L = \sqrt{I_2} = 5 \cdot 10^3$ км, $\lambda^{-1} = \mu^{-1} = 10$ суток, $\sigma_{B1} = \triangle T / T_0 = 60/300$ ($60^\circ K$ - разность температур между экватором и полюсом) получаем следующую оценку

$$\eta \approx 12\%. \tag{18}$$

Оценка очевидно завышена, но учитывая условность применения формулы (17) к реальной атмосфере, ее можно считать приемлемой для сопоставления с КПД игрушечных режимов Хэдли и Россби при прочих равных условиях.

б) КПД режимов Хэдли и Россби. Рассмотрим теперь эффективность режимов Хэдли и Россби в рамках квазигеострофического приближения. В этом случае закон сохранения энергии для системы (3) имеет вид

$$\dot{E} = -\zeta Z^2 - \Gamma X^2 + \Gamma |D| X, \tag{19}$$

а сумма кинетической (КЭ) и доступной потенциальной энергий (ДПЭ) игрушечной общей циркуляции атмосферы равна

$$E = \frac{1}{2}Z^2 + \frac{1}{2}\Gamma X^2. \tag{20}$$

Для отыскания накачки перепишем энергетический баланс (19) в виде

$$\dot{E} = -\zeta Z^2 - \Gamma\left(X^2 - |D|\,X + \frac{1}{4}|D|^2 - \frac{1}{4}|D|^2\right) = \\ = -\zeta Z^2 - \Gamma\left(X - \frac{1}{2}|D|\right)^2 + \frac{1}{4}\Gamma|D|^2.$$

Отсюда

$$Q_G = \frac{1}{4}\Gamma|D|^2, \tag{21}$$

а энергия и ее баланс в переменных Z, $\Theta = X - |D|/2$ принимают форму

$$E = \frac{1}{2}Z^2 + \frac{1}{2}\Gamma\left(\Theta + \frac{1}{2}|D|\right)^2, \tag{20a}$$

$$\dot{E} = -\zeta Z^2 - \Gamma\Theta^2 + Q_G.$$

Теперь, используя (4), (5), нетрудно сосчитать весь энергетический цикл

$$\frac{\text{производство ДПЭ}}{Q_G} = \frac{\text{скорость преобразования ДПЭ в КЭ}}{Q_G} \\ = \frac{\text{скорость генерации КЭ}}{Q_G} = \frac{\zeta Z^2}{Q_G} = \eta_G,$$

где в режимах

$$H)\ \eta_G = 0;\ R)\ \eta_G = \frac{4}{\Lambda}\left(1 - \frac{1}{\Lambda}\right), \tag{22}$$

$$\Lambda = \frac{|D|}{D_0} = (\zeta\Gamma Ta)^{1/2}\,Ro_T.$$

Таким образом, в рамках квазигеострофического приближения эффективность режима H равна нулю (поступающая радиационная энергия преобразуется в агеострофическую компоненту и переизлучается в пространство), а в режимах R реализуется цикл Оорта (см. Лоренц, 1967) с КПД

$$\eta_G \approx 17\%,$$

если принять для атмосферы $\zeta = \lambda/\mu \approx 1$, а типичные значения $Ro_T \approx 0.03$ и $Ta = 10^6$ с поправкой на то, что определенное нами число Тейлора приблизительно в четыре раза меньше традиционного. На диаграмме, изображенной на рис. 3 точка с выбранными значениями Ta и Ro_T расположена в области существования и устойчивости режимов Россби. Кроме того, при вычислении Γ предполагалось, что разность температур $\Delta T = 60°K$ в направлении полюс-экватор устанавливается на расстоянии в четверть длины экваториальной окружности, а характерный горизонтальный масштаб в направлении по долготе соответствует наиболее неустойчивой бароклинной моде, число длин волн которой, укладывающихся на среднем широтном круге, равно 6. Это соответствует $\Gamma \approx 0.6$ и $\Lambda \approx 24$.

Нулевая эффективность режима H практически означает, что КПД режима Хэдли не превышет одного процента, поскольку в квазигеострофическом приближении кинетическая энергия рассчитывается с точностью до квадрата числа Россби. Таким образом, при переходе от режима H к режиму R эффективность рассматриваемой тепловой машины возрастает почти на порядок. Следует, однако, обратить внимание на одно существенное расхождение в энергетических циклах игрушечной и реальной общих циркуляций. Игрушечный режим Россби почти полностью истощает резервуар ДПЭ:

$$\frac{\text{ДПЭ}}{\text{КЭ}} = \Gamma \frac{X^2}{Z^2} = \zeta \left[\Lambda - 1\right]^{-1} \approx 4\%,$$

тогда как в реальной атмосфере указанное отношение приблизительно равно 3.7 (Лоренц, 1970).

Такое расхождение, по-видимому, объяснятся отсутствием в трактовке рассматриваемой модели зональной составляющей ДПЭ. Поэтому обнаруженное расхождение следует рассматривать как неизбежную расплату за сделанные упрощения.

Обращает на себя внимание, что приведенная оценка "квазигеострофического" КПД близка к максимально термодинамически допустимому значению $(T_E - T_P)/T_E \approx 20\%$ (T_E и T_P – температуры экватора и полюса соответственно). Более того, согласно (22) на кривой $\Lambda = 2 = (\zeta\Gamma Ta)^{1/2} Ro_T$ значение $\eta_G = 1$, что в данном случае не запрещено законами термодинамики, поскольку по самому построению квазигеострофическое приближение выделяет лишь ту часть Q_G мощности внешнего привода, которая производит только доступную потенциальную энергию (см. первое уравнение (3)), мерой которой в рассматриваемой модели служит величина $\Gamma X^2/2$. В принятых нами безразмерных переменных уравнение баланса энергии нередуцированной модели можно записать в виде

$$\dot{E} = -\zeta\left(\frac{I_1}{I_3}X^2 + \frac{I_2}{I_3}Y^2 + Z^2\right) - \frac{ga_3}{I_3\mu^2}\gamma + Q,$$

где $\gamma = |\sigma_{B1}| - \sigma_3$, а безразмерная мощность внешнего привода

$$Q = \frac{ga_3\,|\sigma_{B1}|}{I_3\mu^2} = 2\zeta^2 TaRo_T.$$

По формуле (21)

$$Q_G = \frac{1}{4}\Gamma\,|D|^2 = \frac{1}{4}\Gamma\zeta^2 TaRo_T^2.$$

Отсюда следует, что истинный КПД вертикальной завихренности

$$\eta = \frac{\zeta Z^2}{Q} = \frac{Q_G}{Q}\eta_G = \frac{1}{8}\Gamma Ro_T\eta_G$$

составляет лишь доли процента.

3. Влияние угла наклона оси общего вращения относительно силы тяжести. Из приведенной на рис. 4 экспериментальной диаграммы, видно, что в области, ограниченной критической кривой режимов Россби, наряду со стационарными режимами наблюдаются также строго периодические и нерегулярные автоколебания. Однако в рамках предшествующей постановки задачи никаких автоколебаний в системе (1) обнаружить не удается. Нами был упущен важный фактор – бета-эффект. Глобальные бароклинные геофизические течения есть ни что иное, как наклонная конвекция вращающейся жидкости, формирующаяся в условиях,

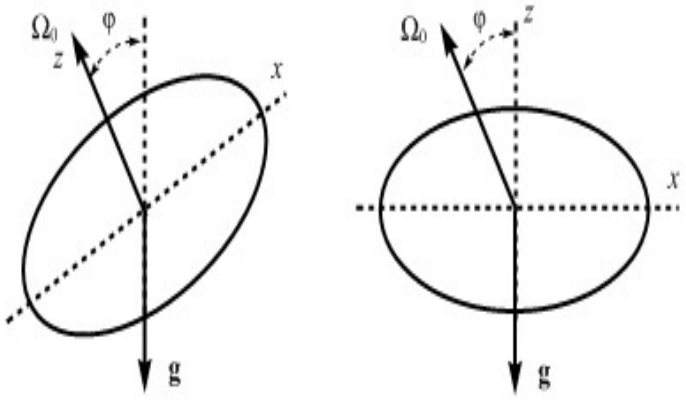


Рис. 5. Две ориентации эллипсоида относительно непараллельных направлений гравитации и общего вращения, создающие одинаковый в квазигеострофическом приближении слопинг-эффект.

когда ось общего вращения не параллельна силе тяжести, что и приводит к возникновению бета-эффекта.

Не имея возможности сымитировать бета-эффект, ограничимся учетом "наклонности" конвекции – слопинг-эффекта (sloping convection). Пусть $\boldsymbol{\omega}_0$ и $-\mathbf{g}$ образуют угол φ, как показано на рис. 5 для двух ориентаций эллипсоида по отношению к гравитации и общему вращению. Угол предполагается достаточно малым, чтобы не повлиять на соотношения термического ветра (25.14a).

С учетом малости φ квазигеострофическое приближение системы (1) для обеих ориентаций в терминах X, Y и Z записывается в виде:

$$\dot{X} = -YZ - X - D, \quad \dot{Y} = XZ - Y, \quad \dot{Z} = \Gamma XY - \beta Y - \zeta Z, \quad (23)$$

где $\beta = \beta_0 T a^{1/2} \zeta$ и $\beta_0 = 2\,(a_1/a_3)\,\varphi$ или $\beta_0 = 2\,(I_1/I_3)\,\varphi$ в зависимости от ориентации a или $б$ (рис. 5).

При $\Gamma = 0$ ($a_1 = a_2$) заменой переменных

$$X = (\zeta/\beta)\, z - D, \quad Y = -\,(\zeta/\beta)\, y, \quad Z = x,$$

система (23) сводится к знаменитой стохастической динамической

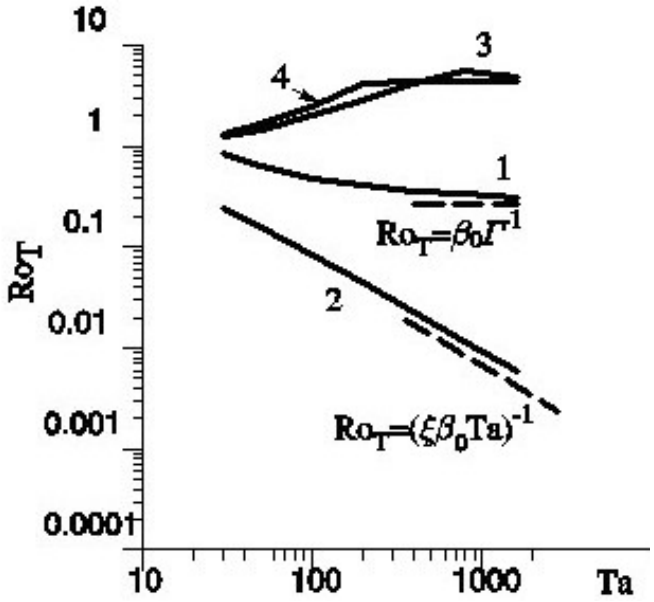


Рис. 6. Критические кривые режима R_- для положительного (2,3) и отрицательного (1,4) слопинг-эффектов при $|\varphi| = 1^\circ$ и $\zeta = 1$.

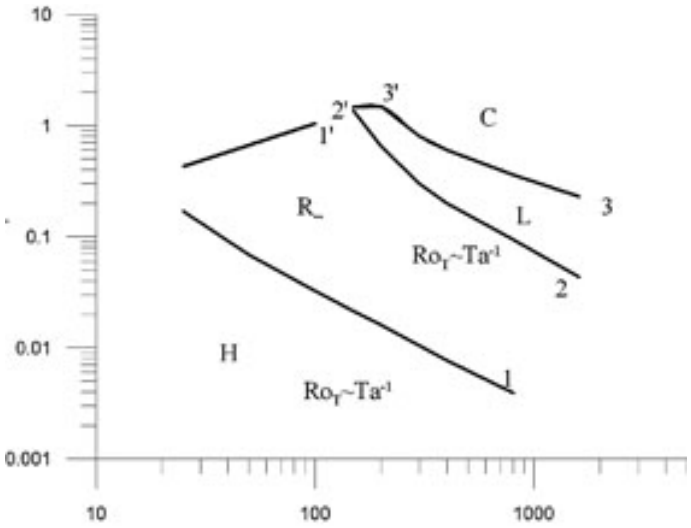


Рис. 7. Критические кривые режима R_-, периодического C и стохастического L режимов при $\zeta = 3$ для положительного слопинг-эффекта, $\sigma_{B1}\varphi > 0$, $|\varphi| = 1^\circ$. Символ L означает, что хаос аналогичен хаосу в аттракторе Лоренца.

системе Лоренца третьего порядка (Lorenz, 1963):

$$\dot{x} = \zeta\,(y - x)\,, \quad \dot{y} = -xz - y + rx, \quad \dot{z} = yx - bz, \tag{24}$$

где $b = 1$ и $r = (\beta/\zeta)\,D = sign\,(\sigma_{B1})\,\beta_0 \zeta Ro_T Ta$.

Это означает, что при определенных условиях, обсуждаемых ниже, система (23) описывает стохастические режимы игрушечных глобальных геофизических течений. Отметим, что в геофизической трактовке уравнения (24) описывают медленное квазигеострофическое многообразие в редуцированной системе взаимодействующих планетарных и инерционно-гравитационных волн (Lorenz, 1980).

Системы (23) и (24) инвариантны относительно замены $D \to -D$, $\beta \to -\beta$ ($\sigma_{B1} \to -\sigma_{B1}$, $\varphi \to -\varphi$). Поэтому положим по определению слопинг-эффект положительным (отрицательным), если $D\beta$ или $\sigma_{B1}\varphi > 0$ ($D\beta$ или $\sigma_{B1}\varphi < 0$). Так как слопинг-эффект нарушает симметрию первоначальной конфигурации сил, существует два типа режимов Россби в зависимости от его знака. Как и ранее, предполагается, что $\sigma_{B1} < 0$. Поэтому для положительного слопинг-эффекта, т.е. при $D < 0$ и $\beta < 0$ стационарные режимы Хэдли и Россби описываются формулами:

$$H) \quad X = |D|, \quad Y = Z = 0,$$

$$R_{+,-}) \quad X = D_1 \equiv \sqrt{\beta^2/4\Gamma^2 + \zeta/\Gamma} - |\beta|/2\Gamma,$$

$$Y = \pm D_1^{1/2}\,(|D| - D_1)^{1/2}\,, \quad Z = \pm D_1^{-1/2}\,(|D| - D_1)^{1/2}\,.$$

Для отрицательного слопинг-эффекта, т.е. при $D < 0$ и $\beta > 0$

$$H) \quad X = |D|,\ Y = Z = 0,$$

$$R_{+,-}) \quad X = D_2 \equiv \sqrt{\beta^2/4\Gamma^2 + \zeta/\Gamma} + |\beta|/2\Gamma,$$

$$Y = \pm D_2^{1/2}\left(|D| - D_2\right), \quad Z = \pm D_2^{-1/2}\left(|D| - D_2\right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что уравнения нижних ветвей области существования режимов Россби задаются равенствами $|D| = D_{1,2}$. В плоскости внешних критериев подобия (Ta, Ro_T) они описываются кривыми (воспользуйтесь (6) и соответствующим выражением для β)

$$Ro_T = \sqrt{\beta_0^2/4\Gamma^2 + 1/\zeta\Gamma Ta} \mp |\beta_0|/2\Gamma, \tag{25}$$

которые асимптотически при $Ta \longrightarrow \infty$ ведут себя как $Ro_T = (\zeta|\beta_0|Ta)^{-1}$ и $Ro_T = \beta_0/\Gamma = const$ соответственно для положительного и отрицательного слопинг-эффектов.

Легко показать, что в рамках редуцированных уравнений (23) формулы (25) описывают также критические кривые режимов H и R. Из сопоставления (8) и (25) видно, что слопинг-эффект дестабилизирует или стабилизирует режим H в зависимости от знака слопинг-эффекта.

Результаты численного исследования устойчивости режимов H и R_- на основе нередуцированных уравнений движения (1) представлены на рис. 6 для $\zeta = 1$, положительного и отрицательного слопинг-эффектов, на рис. 7 для $\zeta = 3$, $\sigma_{B1}\varphi > 0$ и на рис. 8 для $\zeta = 0.4$, $\sigma_{B1}\varphi < 0$. Соответствующие этим расчетам главные полуоси эллипсоида $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, а угол между $-\mathbf{g}$ и $\mathbf{\Omega}_0$ равен $|\varphi| = 1^\circ$. Для каждого из указанных примеров асимптотика нижней ветви критической кривой согласуется с "геострофической" кривой устойчивости.

В областях, ограниченных на рис. 6 ($\zeta = 1$) критическими кривыми режима R_-, автоколебаний не было обнаружено. Рисунок иллюстрирует влияние слопинг-эффекта на устойчивость стационарных режимов Россби. Критические кривые смещаются вниз или вверх, а скорость убывания их нижних ветвей возрастает или убывает в зависимости от $\sigma_{B1}\varphi \gtrless 0$ соответственно. Однако рост верхних ветвей заметно замедляется под действием слопинг-эффекта любого знака. Заметим также, что слопинг-эффект способствует переходу $H \longrightarrow R_-$, который при определенных условиях становится доминирующим. *Не этим ли объясняется то обстоятель-*

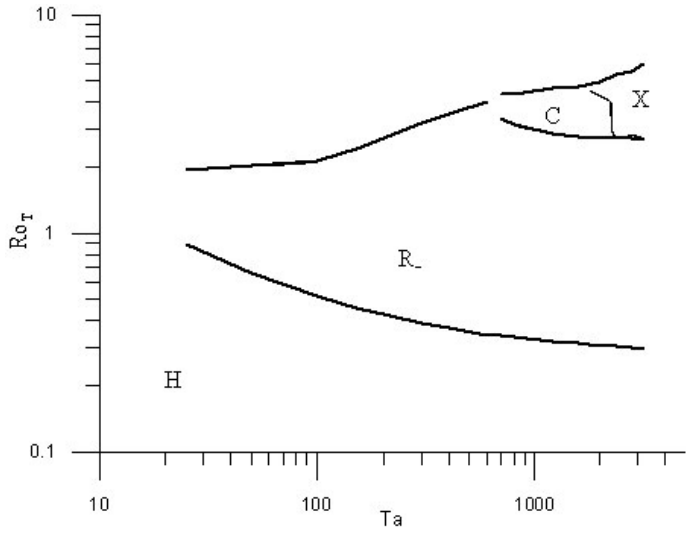


Рис. 8. Критические кривые режима R_-, периодического C и стохастического X режимов при $\zeta = 0.4$ для отрицательного слопинг-эффекта $\sigma_{B1}\varphi < 0$, $|\varphi| = 1^o$. Символ X означает, что механизм перехода к хаосу не установлен.

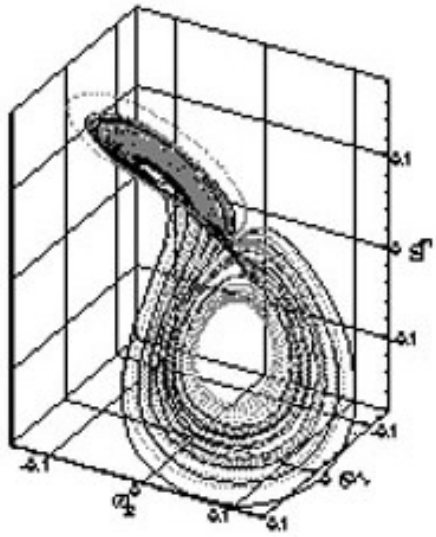


Рис. 9. Фазовый портрет квазигеострофического и "точного"аттрактора в области переменных $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ при положительном слопинг-эффекте и $\zeta = 3$, $Ta = 450$, $Ro_T = 0.2$.

ство, что в атмосфере наблюдается режим Россби не с обычной, а обратной феррелевской меридиональной циркуляцией?

Кривая $1 - 1'$ на рис. 7 отделяет области устойчивости режимов H и R_-. Хаос, родственный аттрактору Лоренца, наблюдается в области L, ограниченной кривыми $2-2'$ и $3'-3$. Отметим, что зависимость $Ro_T \sim Ta^{-1}$, описывающая ветвь $2-2'$, найдена численно и не имеет теоретического объяснения. При $\zeta > 1$ критические кривые смещаются в область малых чисел Россби, что способствует сближению точных и квазигеострофических фазовых траекторий. В частности, рис. 9 иллюстрирует степень близости точного и квазигеострофического стохастических аттракторов, и это типично для подавляющей части области L.

Некоторые наблюдения, сделанные при численном моделировании хаоса в области L, состоят в следующем.

1) Квазигеострофическая модель (23) хорошо описывает установившиеся режимы, но переходные стадии точных и приближенных решений могут существенно отличаться. Кроме того, установившиеся точные и квазигеострофические траектории значительно

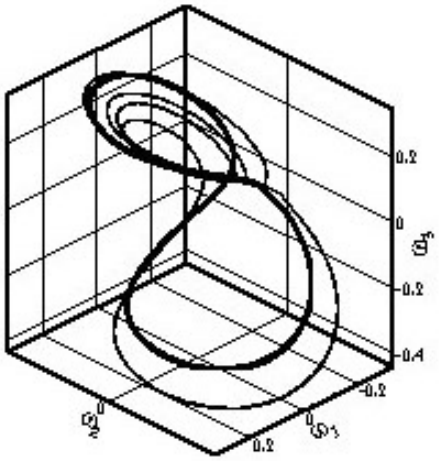


Рис. 10. Фазовый портрет автоколебательного режима в области $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ при отрицательном слопинг-эффекте и $\zeta = 0.4$.

различаются фазами.

2) Как правило, "точный" хаос сопровождается квазигеострофическим, тогда как обратное неверно. В частности, квазигеострофический хаос наблюдается во внешней окрестности ветви $3' - 3$.

3) Иногда переход $R_- \longrightarrow L$ означает впадание в метастабильное состояние. Аттрактор Лоренца продолжает существовать длительное время, но затем медленно деградирует в режим R_+, т.е. реализуется двойной переход $R_- \longrightarrow L \longrightarrow R_+$. Ситуация, типичная для окрестности кривой $2 - 2'$, что существенно затрудняет ее построение. Если период общего вращения принять за сутки, то длительность метастабильного состояния варьировалась в экспериментах от нескольких месяцев до нескольких десятилетий. Уместно отметить, что режимы R_+ и L сосуществуют, т.е. оба режима устойчивы в области L или, по крайней мере, один из них метастабильный.

При $\zeta > 1$ и отрицательном слопинг-эффекте автоколебаний в проделанных численных экспериментах не наблюдалось. Это не слишком удивительно, потому что квазигеострофическая модель еще удовлетворительно описывает движение бароклинного волчка

в подавляющей части области устойчивости R-режимов, а изменения знака слопинг-эффекта влечет изменение знака коэффициента r в системе Лоренца (24). Согласно первоначальной трактовке Лоренца (Lorenz, 1963), они описывают рэлеевскую конвекцию жидкости, подогреваемой снизу, а r – число Рэлея. Изменение знака r означает подогрев сверху, а в этом случае трудно ожидать возникновения колебаний.

Ситуация меняется, если, сохраняя знак слопинг-эффекта отрицательным, положить $\zeta < 1$. Это проиллюстрировано на рис. 10, соответствующем $\zeta = 0.4$ и $\sigma_{B1}\varphi < 0$ $(|\varphi| = 1^o)$. В этом случае критическая кривая, показанная на рис. 8, сдвинулась в область "агеострофических" чисел Россби. Поэтому квазигеострофические уравнения (23) "работают" лишь в окрестности нижней ветви критической кривой. Регулярные автоколебания и хаос неизвестного происхождения возникают в областях C и X соответственно (см. рис. 8) и описываются только нередуцированными уравнениями.

4. Выводы. Подводя итоги этой заключительной лекции, отметим следующее. Во-первых, *под влиянием слопинг-эффекта асимптотика поведения нижней ветви критической кривой меняется с* $Ro_T \sim Ta^{-1/2}$ *на* $Ro_T \sim Ta^{-1}$ *или* $Ro_T = const$ *в зависимости от положительности или отрицательности слопинг-эффекта соответственно*. Эти изменения проявляются при угле $|\varphi| = 1^\circ$ и вполне реалистических значениях числа Тейлора, т.е. характерных для большинства лабораторных экспериментов, обсуждаемых в работах (Лоренц, 1970) и (Hide, Mason, 1975) (см. также диаграмму на рис. 4). Эксперименты проводились с вращающимися кольцевыми сосудами со свободной поверхностью жидкости, заполняющей их. Искривление свободной поверхности под влиянием центробежных сил создает положительный слопинг-эффект, соответствующий малым, но конечным значениям φ. Вероятно малость этого угла побудила Лоренца (Lorenz, 1962, 1963a) при построении 8-ми и 12-ти компонентных моделей пренебречь бета-эффектом ,создаваемым центробежными силами, что и привело к асимптотике $Ro_T \sim Ta^{-1/2}$. Выше показано, что *учет малого угла наклона* $\mathbf{\Omega}_0$ *по отношению к* $-\mathbf{g}$ *дает результат, согласующийся с экспериментом* (на это обратил внимание А. Е. Гледзер, сопоставьте рис. 4 с рис. 6 и 7).

Во-вторых, *слопинг-эффект является причиной возникновения*

в рассматриваемой модели регулярных и хаотических автоколебаний, которые действительно наблюдаются в лабораторных экспериментах (рис. 4). Для их обнаружения и описания Лоренц вместо 8-ми сконструировал 12-ти компонентную систему. В какой степени найденные здесь автоколебательные режимы соответствуют реальности, еще предстоит выяснить, уточнив, в частности, значения эффективных коэффициентов трения λ и теплопроводности μ, адекватных эксперименту (более предметно этот вопрос обсуждается в работе (Гледзер и др., 2006)). Однако сам факт возникновения малокомпонентной турбулентности глобальных геофизических течений из-за слопинг-эффекта важен с точки зрения понимания причин их непредсказуемости.

И, наконец, в третьих, *тяжелый волчок в поле сил Кориолиса действительно можно рассматривать в качестве механического прообраза атмосфер вращающихся планет: он воспроизводит бароклинный механизм неустойчивости Иди, энергетику и области устойчивости фундаментальных режимов Хэдли и Россби, обратную конвективную ячейку Феррeля, малокомпонентную турбулентность и непредсказуемость глобальных геофизических течений, а также сосуществование принципиально различных режимов движения и ненулевой вероятности немотивированного извне взаимного перехода одного метастабильного динамического состояния в другое* (последнее представляет особый интерес для климатологов)

Литература

1. Должанский Ф.В., Плешанова Л.А. В сб. *Физика атмосферы и проблема климата*, М.: Наука, 1980.

2. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. *Системы гидродинамического типа и их применение*, М.: Наука, 1981.

3. Лоренц Э.Н. *Природа и теория общей циркуляции атмосферы*, Л.: Гидрометеоиздат, 1970.

4. Старр В.П. *Физика явлений с отрицательной вязкостью*, М.: Мир, 1971.

5. Hide R., Mason P.J. *Sloping convection in a rotating fluid*, Adv. Phys. V. 24, No. 1, 1975.

6. Lorenz E.N. *Simplified dynamic equations applied to the rotating-basin experiments*, J. Atm. Sci., V. 19, No. 1, 1962.

7. Должанский Ф.В. *О механических прообразах фундаментальных гидродинамических инвариантов и медленных многообразий*, УФН, Т. 175, 12, 2005

8. Lorenz E.N. *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atm. Sci., V. 20, No. 3, 1963.

9. Lorenz E.N. *The mechanics of vacillation*, J. Atm. Sci., V. 20, No. 5, 1963a.

10. Lorenz E.N. *Attractor sets and quasi-geostrophic equilibrium*, J. Atm. Sci., V.37, P. 1685, 1980.

11. Гледзер А.Е. и др. *Режимы Хэдли и Россби в простейшей модели конвекции вращающейся жидкости*, Изв. РАН, сер. ФАО, Т. 42, 4, 2006.

Часть V

ДОПОЛНЕНИЕ
Элементы теории турбулентности и специфика атмосферных турбулентных течений

Лекция А

О случайных полях и их статистическом описании

1. Предварительные замечания. В основном курсе из-за ограниченности времени, предоставленного для чтения лекций, я оставил без внимания, хотя и неоднократно упоминал, одну из фундаментальных особенностей движения атмосферы – его хаотичный или, как принято говорить, турбулентный характер. Именно для такого специфического движения жидкости Леонардо да Винчи, обладавший мощным воображением и незаурядным чувством юмора, ввел термин *турбулентность*, означавший в ту эпоху *состояние толпы во время народных волнений*. Хаотичность охватывает практически весь спектр пространственно-временных масштабов атмосферных движений, но имеет разное происхождение в областях больших и малых волновых чисел. Уже простое задумчивое наблюдение бурных горных потоков завораживает хаотичностью – неповторимостью движений, а потому подобно ночному костру вызывает желание продолжать медитацию неограниченно долго. Именно эта неповторимость позволяет рассматривать скорость в турбулентном потоке как случайную функцию координат и времени, вследствие чего при многократном повторении экспериментов с турбулентным течением или длительной медитации над ним мы всякий раз наблюдаем новые реализации при неизменных внешних условиях. Отсюда, в частности, следует, что описывать турбулентность с помощью точных решений уравнений Навье-Стокса (даже если бы мы умели их точно интегрировать) столь же неразумно, как описывать термодинамическую систему в терминах траекторий отдельных частиц, из которых она состоит. В отличие от термо-

динамической системы, как правило, пребывающей в равновесном состоянии, даже развитая (т. е. установившаяся, в определенном смысле стационарная однородная и изотропная) турбулентность – явление не равновесное, существенно неравновесное, а потому к ее описанию не применимы термодинамические статистические подходы.

Вот как описал рифмованными строками явление развитой турбулентности, основываясь на наблюдениях за облаками, знаменитый Ричардсон еще в 1922 г. в книге, посвященной численному предсказанию погоды, перефразируя известную стихотворную шутку Джонатана Свифта о блохах (цитирую по книге (Монин, Яглом, 1992)):

> Big whorls have little whorls,
> Which feed on their velocity;
> Little whorls have smaller whorls,
> And so on unto viscosity.
> Крупные завихрения рождают мелкие завихрения.
> Питающиеся за счет их скорости;
> Мелкие завихрения рождают еще меньшие завихрения,
> И так далее до начала действия вязкости[1].

По существу здесь говорится о каскадном механизме передачи энергии по спектру от источника, который в пространстве волновых чисел расположен в области их малых значений, в область больших волновых чисел (малых масштабов), где и происходит диссипация кинетической энергии из-за обострения градиентов скорости. Имея в виду именно развитую турбулентность, ниже дается краткое изложение статистических подходов, применяемых для ее описания.

2. Корреляционная функция и понятия однородных и изотропных скалярных случайных полей. Основой статисти-

[1] В вольном переводе В.Н. Штерна, который особенно нравился А.М. Обухову, указанное четверостишие звучит так:

В поток бурлящий бросив взгляд,
Вихрей увидишь там каскад:
Меньшой энергию у большего берет,
Пока мельчайших вязкость не сотрет.

ческого подхода к теории турбулентности является переход от рассмотрения одного единственного турбулентного течения – реализации к рассмотрению статистической совокупности возможных реализаций при фиксированных внешних условиях. Другими словами, скорость, температура и другие характеристики турбулентного течения рассматриваются как случайные поля. Из-за неизвестности распределения вероятностей в пространстве реализаций к весьма тонкому вопросу о вычислении средних значений мы подойдем так, как это принято на современном этапе. Под средним "значением" $\langle f(\mathbf{r},t)\rangle$ случайного поля $f(\mathbf{r},t)$ подразумевается среднее по совокупности возможных реализаций (или, как еще говорят, "среднее по ансамблю"), которое в практических приложениях, основываясь на эргодической гипотезе, заменяется средним по времени. Гипотеза состоит в том, что временные средние значения при неограниченном увеличении интервала осреднения сходятся к соответствующим теоретическим средним значениям.

Одной из важнейших характеристик скалярных случайных полей является корреляционная функция, которая определяется следующим образом. *Пусть* $f(\mathbf{r}) = \langle f(\mathbf{r})\rangle + \xi(\mathbf{r})$ *– скалярная случайная функция пространственной переменной* $\mathbf{r}$, $\langle f(\mathbf{r})\rangle$ *– ее среднее (в идеале по ансамблю) поле, а* $\xi(\mathbf{r})$ *– флуктуация или отклонение от среднего. Корреляционной функцией случайного поля* $f(\mathbf{r})$ *называется величина*

$$B(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \langle [f(\mathbf{r}_1) - \langle f(\mathbf{r}_1)\rangle]\,[f(\mathbf{r}_2) - \langle f(\mathbf{r}_2)\rangle]\rangle = \langle \xi(\mathbf{r}_1)\,\xi(\mathbf{r}_2)\rangle\,. \tag{1}$$

Другими словами, $B(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ *есть среднее от произведения флуктуаций в точках* $\mathbf{r}_1$ *и* $\mathbf{r}_2$.

Случайное поле называется *однородным*, если его среднее значение постоянно, а корреляционная функция не меняется при одновременном смещении упомянутой пары точек в одном и том же направлении на одну и туже величину:

$$\langle f(\mathbf{r})\rangle = \text{const},\ B(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = B(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_0)\,. \tag{2}$$

Полагая в (2) $\mathbf{r}_0 = -\mathbf{r}_2$, получаем

$$B(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,0) \doteq B(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) = B(\mathbf{r})\,, \tag{3}$$

а равенство (1) можно переписать в виде

$$B(\mathbf{r}) \doteq B(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}) = \langle [f(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r}) - \langle f\rangle]\,[f(\boldsymbol{\rho}) - \langle f\rangle]\rangle = \langle \xi(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r})\,\xi(\boldsymbol{\rho})\rangle\,, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\rho}$ - векторная координата произвольной точки пространства. Таким образом, в однородном случайном поле корреляционная функция зависит лишь от разности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, т. е. от расположения точек $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ относительно друг друга, и автомодельна относительно выбора начала координат.

Очевидно, что $B(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = B(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)$ и, следовательно,

$$B(\mathbf{r}) = B(-\mathbf{r})\,. \tag{5}$$

Если события в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ независимы, то $\langle f(\mathbf{r}_1)\,f(\mathbf{r}_2)\rangle = \langle f(\mathbf{r}_1)\rangle\,\langle f(\mathbf{r}_2)\rangle$, и $B(0) = 0$. Отсюда следует, что $B(\mathbf{r})$ *характеризует статистическую связь между флуктуациями функции* $f(\mathbf{r})$ *в точках, расположенных друг от друга на векторном расстоянии* $\mathbf{r}$. Эта связь тем сильнее, чем ближе точки расположены друг к другу. Поэтому

$$B(0) \geqslant |B(\mathbf{r})|\,, \tag{6}$$

что формально следует из равенств:

$$\left\langle [\xi(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r}) - \xi(\boldsymbol{\rho})]^2 \right\rangle = \left\langle [\xi(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r})]^2 \right\rangle - 2\,\langle \xi(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r})\,\xi(\boldsymbol{\rho})\rangle + \left\langle [\xi(\boldsymbol{\rho})]^2 \right\rangle =$$
$$= 2B(0) - 2B(\mathbf{r}) \geqslant 0 \;\Rightarrow\; B(0) \geqslant B(\mathbf{r})\,,$$

$$\left\langle [\xi(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r}) + \xi(\boldsymbol{\rho})]^2 \right\rangle = 2B(0) + 2B(\mathbf{r}) \geqslant 0 \;\Rightarrow\; B(0) \geqslant -B(\mathbf{r})\,.$$

Однородное случайное поле $f(\mathbf{r})$ *называется изотропным, если* $B(\mathbf{r}) = B(r)$, *т. е. его корреляционная функция зависит лишь от расстояния между точками наблюдения.*

3. Локально однородные и изотропные случайные поля и их статистическое описание. Реальные случайные поля турбулентных течений можно рассматривать как однородные и изотропные лишь с очень большой натяжкой. В частности, статистические характеристики атмосферной турбулентности из-за расслоенности среды обычно зависят от высоты. Наличие твердых границ (например,подстилающая поверхность), в окрестности которых происходит обострение градиентов скорости из-за прилипания

на стенках, вращение жидкости в целом, подавляющее вертикальные движения, применяемое в лабораторных экспериментах магнитное поле, оказывающее на движение электропроводящей жидкости влияние, аналогичное вращению, – все это факторы, которые нарушают строгую однородность и изотропность случайных полей. По самому построению корреляционной функции $B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ на ее значения оказывают влияние неоднородности всех масштабов, а потому в рассматриваемом случае она зависит от каждого из аргументов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ в отдельности, а не только от разности $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Иначе говоря, $B(\mathbf{r})$ как функция, зависящая только от $\mathbf{r}$, просто не существует. Физическая интуиция, однако, подсказывает, что, если L – геометрический масштаб характерного изменения неоднородности, то его влияние на $f(\mathbf{r}_1) - f(\mathbf{r}_2)$ – разность значений случайного поля в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ будет тем меньше, чем меньше расстояние $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ по сравнению с L: эта разность фильтрует влияние наибольших неоднородностей. Тем самым мы приходим к понятиям *локально однородного случайного поля и его структурной функции*, введенным А.Н. Колмогоровым в 1941 г.

Пусть $f(\mathbf{r}) = \langle f(\mathbf{r}) \rangle + \xi(\mathbf{r})$ – *скалярная случайная функция пространственной переменной* $\mathbf{r}$. *Величина*

$$D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left\langle \{[f(\mathbf{r}_1) - \langle f(\mathbf{r}_1) \rangle] - [f(\mathbf{r}_2) - \langle f(\mathbf{r}_2) \rangle]\}^2 \right\rangle$$

$$= \left\langle [\xi(\mathbf{r}_1) - \xi(\mathbf{r}_2)]^2 \right\rangle \tag{7}$$

называется структурной функцией случайного поля $f(\mathbf{r})$. Другими словами, $D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ есть средний квадрат разности флуктуации в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

Еще раз подчеркну смысл введенного А.Н. Колмогоровым понятия структурной функции. Он (смысл) состоит в том, что на разность значений флуктуаций в двух точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ основное влияние оказывают лишь те неоднородности поля $f(\mathbf{r})$, которые находятся на расстояниях меньших или порядка $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Если $r \ll L$, то влияние наибольших неоднородностей практически не сказывается на $\xi(\mathbf{r}_1) - \xi(\mathbf{r}_2)$, а потому структурную функцию при таких значения r можно рассматривать как функцию $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Теперь понятие локальной однородности и локальной изотропности можно ввести следующим образом.

Случайное поле $f(\mathbf{r})$ *называется локально однородным, если среднее значение* $\langle f(\mathbf{r}_1) - f(\mathbf{r}_2)\rangle$ *и структурная функция* (7) *зависят лишь от* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Полагая $\mathbf{r}_2 = \rho$, $\mathbf{r}_1 = \rho + \mathbf{r}$, это утверждение можно выразить формулой:

$$D(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = D(\mathbf{r}). \tag{8}$$

Локально однородное случайное поле $f(\mathbf{r})$ *называется локально изотропным, если его структурная функция зависит лишь от* $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ [2]:

$$D(\mathbf{r}) = D(r). \tag{9}$$

Предполагая временно глобальную однородность и изотропность, установим связь между $B(\mathbf{r})$ и $D(\mathbf{r})$, которая применяется (см. ниже) для построения спектрального разложения структурной функции по спектральной плотности кинетической энергии флуктуаций скорости.

$$\begin{aligned} D(\mathbf{r}) \doteq D(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) &= \left\langle [\xi(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r}) - \xi(\boldsymbol{\rho})]^2 \right\rangle = \\ = \left\langle [\xi(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r})]^2 \right\rangle &- 2\langle \xi(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r})\, \xi(\boldsymbol{\rho})\rangle + \left\langle [\xi(\boldsymbol{\rho})]^2 \right\rangle = \\ &= B(0) - 2B(\mathbf{r}) + B(0). \end{aligned}$$

Отсюда

$$D(\mathbf{r}) = 2B(0) - 2B(\mathbf{r}). \tag{10}$$

Если $B(\mathbf{r})$ существует, то, как правило, $B(\infty) = 0 \Rightarrow D(\infty) = 2B(0)$, и мы получаем формулу для восстановления $B(\mathbf{r})$ по известной $D(\mathbf{r})$:

$$B(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}[D(\infty) - D(\mathbf{r})]. \tag{11}$$

4. Статистическое описание случайных векторных полей. Типичным примером случайного векторного поля является

[2]*) Сторого говоря, в определениях (8) и (9) следовало бы говорить об инвариантности функции распределения случайной величины $f(\mathbf{r}_1) - f(\mathbf{r}_2)$ относительно трансляций, вращений и зеркальных отражений вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ соответственно. Аналогичное замечание относится к определениям однородности и изотропности, данные в пункте 2.

поле скорости $\mathbf{u}$ турбулентного течения. Специфика описания случайных векторных полей, во многом аналогичного описанию скалярных полей, состоит в том, что вместо корреляционный и структурной функций рассматриваются корреляционный тензор

$$B_{ij}(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}) = \langle [u_i(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r}) - \langle u_i(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r})\rangle]\,[u_j(\boldsymbol{\rho}) - \langle u_j(\boldsymbol{\rho})\rangle]\rangle \qquad (12)$$

и структурный тензор

$$D_{ij}(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}) = \langle [u_i(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r}) - u_i(\boldsymbol{\rho})]\,[u_j(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r}) - u_j(\boldsymbol{\rho})]\rangle\,. \qquad (13)$$

Для статистически (глобально) однородного случайного векторного поля величины $B_{ij}(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}) = B_{ij}(\mathbf{r})$ и $D_{ij}(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}) = D_{ij}(\mathbf{r})$ и связаны соотношением (ср. с (10))

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = 2B_{ij}(0) - 2B_{ij}(\mathbf{r})\,. \qquad (14)$$

Для изотропного скалярного поля $f(\mathbf{r})$ величина $\langle f(\mathbf{r}_1)\,f(\mathbf{r}_2)\rangle$ не зависит от ориентации вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. В случае же векторных полей понятие изотропности несколько сложнее и состоит в следующем. Любой тензор $B_{ij}(\mathbf{r})$, зависящий от векторной координаты $\mathbf{r}$ и инвариантный относительно вращений и зеркальных отражений вектора $\mathbf{r}$, есть линейная комбинация

$$B_{ij}(\mathbf{r}) = P(r)\,\delta_{ij} + Q(r)\,n_i n_j, \qquad (15)$$

где $n_i = x_i/r$ $(i = 1,2,3)$ – компоненты единичного вектора в направлении $\mathbf{r}$, $P(r)$ и $Q(r)$ – скалярные функции расстояния $r = |\mathbf{r}|$. Противное этому утверждению означает выделение некоторого направления в пространстве. Аналогично

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = R(r)\,\delta_{ij} + S(r)\,n_i n_j. \qquad (16)$$

Таким образом, условия изотропности сводят число независимых компонент у каждого из корреляционного и структурного тензоров к двум.

Пусть ось $z = x_3$ системы координат совпадает по направлению с $\mathbf{r}$. Тогда $\mathbf{n} = (0,0,1)$, и согласно (15) и (16)

$$B_{11} = B_{22} = P,\ D_{11} = D_{22} = R,$$
$$B_{33} = P + Q, \qquad D_{33} = R + S.$$

Равные между собой поперечные компоненты принято обозначать символами

$$B_{tt} = B_{11} = B_{22},\ D_{tt} = D_{11} = D_{22}$$

(обозначение t от *transversal*). Продольные компоненты обозначаются символами B_{rr} и D_{rr}. В новых обозначениях (15) и (16) записываются в виде:

$$B_{ij}(\mathbf{r}) = B_{tt}(r)\,\delta_{ij} + [B_{rr}(r) - B_{tt}(r)]\,n_i n_j, \tag{15a}$$

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = D_{tt}(r)\,\delta_{ij} + [D_{rr}(r) - D_{tt}(r)]\,n_i n_j. \tag{16a}$$

Из векторного анализа известно, что любое достаточно гладкое векторное поле можно разложить на потенциальную (описываемую скалярным потенциалом) и соленоидальную (бездивергентную и описываемую векторным потенциалом) составляющие. Аналогичное разложение имеет место и для статистических характеристик случайных векторных полей. Ограничимся подробным рассмотрением соленоидальных полей, каким является, например, поле скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ несжимаемой жидкости с отличной от нуля завихренностью ($rot\mathbf{u} \neq 0$). По определению

$$div\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \tag{17}$$

Далее, начиная с (17), будем использовать тензорные обозначения, подразумевая суммирование по одинаковым индексам, но *не относя к тензорным индексы* t и r. Кроме того, статистические характеристики соленоидального и потенциального полей будем снабжать верхним индексом s и p соответственно.

Полагая в (12), (13) величину $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$, продифференцируем эти выражения по координатам вектора $\mathbf{r}$. С учетом (17) получим:

$$\frac{\partial B^s_{ij}(\mathbf{r})}{\partial x_i} = \frac{\partial B^s_{ij}(\mathbf{r})}{\partial x_j} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial D^s_{ij}(\mathbf{r})}{\partial x_i} = \frac{\partial D^s_{ij}(\mathbf{r})}{\partial x_j} = 0. \tag{19}$$

Подчеркнем, что равенства (19) получены для структурного тензора статистически однородного поля , но *они выполняются и в случае локально однородного поля, когда корреляционный тензор,*

зависящий только от $\mathbf{r}$, *уже не существует.* Используя (18) и (19) нетрудно (выполните Упражнение 1) вывести следующие соотношения между продольными и поперечными компонентами тензоров B_{ij}^s и D_{ij}^s, впервые полученные Карманом (Karman Th. von):

для *статистически изотропных полей*

$$B_{tt}^s = \frac{1}{2r}\frac{d}{dr}\left(r^2 B_{rr}^s\right); \tag{20}$$

для *локально изотропных полей*

$$D_{tt}^s = \frac{1}{2r}\frac{d}{dr}\left(r^2 D_{rr}^s\right). \tag{21}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае через продольную компоненту каждого из корреляционного и структурного тензоров выражаются все остальные компоненты этих тензоров.

Аналогичным образом, рассматривая однородное и изотропное потенциальное векторное поле

$$v_i = \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i}, \tag{22}$$

где $\varphi(\mathbf{r})$ – однородное и изотропное скалярное поле с корреляционной функцией

$$\langle \varphi(\mathbf{r}_1)\varphi(\mathbf{r}_2)\rangle = \Phi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \quad (\langle \Phi\rangle = 0), \tag{23}$$

нетрудно вывести соотношения

$$B_{rr}^p(r) = \frac{d\left[rB_{tt}^p(r)\right]}{dr}, \; D_{rr}^p(r) = \frac{d\left[rD_{tt}^p(r)\right]}{dr}, \tag{24}$$

связывающие поперечные и продольные компоненты корреляционного и структурного тензоров потенциального поля. Уместно также упомянуть следующий важный результат.

Статистически (локально) изотропное скалярное поле и статистически (локально) изотропное векторное поле не коррелируют, т. е.

$$B_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \doteq \langle u_i(\mathbf{r}_1)\varphi(\mathbf{r}_2)\rangle = 0, \tag{25}$$

$$D_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \doteq \langle [u_i(\mathbf{r}_1) - u_i(\mathbf{r}_2)][\varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_2)]\rangle = 0, \tag{26}$$

если $\varphi(\mathbf{r})$ *и* $\mathbf{u}(\mathbf{r})$*- поля с указанными свойствами.*

Упражнения.

1. Выведите соотношения (20) и (21), дифференцируя (15a) и (16a) с учетом формул

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} = n_i,\ \frac{\partial n_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_j}{r}\right) = \frac{\delta_{ij} - n_i n_j}{r},$$
$$\frac{\partial n_i}{\partial x_i} = \frac{2}{r},\ n_i \frac{\partial n_j}{\partial x_i} = 0,\ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

2. Докажите утверждение (25), дифференцируя левую часть (25) с учетом того, что $B_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B(r)\, n_i$, и условия соленоидальности (17). Докажите утверждение (26).

3. Выведите первую формулу (24), дифференцируя (23) по координатам точек $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

Подсказка: после дифференцирования с учетом смысловой нагрузки скалярного потенциала Вы получите формулу

$$B_{ij} = -\frac{\partial^2 \Phi(r)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Продифференцируйте правую часть этого равенства и сопоставьте результат с (15). Аналогично выводится вторая формула (24).

Литература

1. Монин А.С., Яглом А.М. *Статистическая гидромеханика*, Т. 1, С-П.: Гидрометеоиздат, 1992.

2. Татарский В.И. *Распространение волн в турбулентной атмосфере (Глава 1. Предварительные сведения по теории турбулентности)*, М.: Наука, ГРФМЛ, 1967.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*, М.: Наука, ГРФМЛ, 1986.

Лекция В

Спектральное представление характеристик турбулентности. Уравнение Колмогорова

1. Спектральное представление структурных функций турбулентного поля скорости. Механизм нелинейного взаимодействия мод различного масштаба и связанный с ним процесс передачи энергии по спектру в турбулентном течении удобнее описывать и нагляднее представлять в K-пространстве – пространстве волновых чисел. Поэтому в теории турбулентности наряду с традиционным описанием явлений в R-пространстве – реальном физическом пространстве в равной степени используется фурье-представление или K- представление физических величин и уравнений, ими управляющих. Для отыскания искомых спектральных представлений структурных функций мы будем опираться на гипотезу А.Н. Колмогорова о локальной однородности и изотропности развитой турбулентности в области малых масштабов, привлекая на промежуточном этапе корреляционные функции, условно полагая, что турбулентность глобально однородна и изотропна. Полученные в итоге формулы, в которых участвуют лишь структурные функции останутся справедливыми и для локально изотропной турбулентности, хотя корреляционные функции как функции одного лишь расстояния $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ в этом случае уже не существуют.

Вообще говоря, спектральные разложения корреляционной и структурной функций однородного случайного векторного поля

скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ с учетом их четности записываются в виде:

$$B_{ij}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\rho+\mathbf{r})\, u_j(\rho)\rangle = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\, \Phi_{ij}(\mathbf{k})\, d^3k, \qquad (1)$$

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = \langle [u_i(\rho+\mathbf{r}) - u_i(\rho)]\,[u_j(\rho+\mathbf{r}) - u_j(\rho)]\rangle$$
$$= 2\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} [1-\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]\, \Phi_{ij}(\mathbf{k})\, d^3k, \qquad (2)$$

причем (2) следует из $(A.10)$. Преобразование Фурье $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ корреляционной функции $B_{ij}(\mathbf{r})$ называют спектральным тензором поля скоростей, след которого есть удвоенная трехмерная спектральная плотность средней кинетической энергии флуктуаций, приходящейся на единицу массы жидкости (напоминаю, что $\langle\mathbf{u}\rangle = 0$, т. е. $\mathbf{u}$ – отклонение от средней скорости турбулентного течения):

$$B_{ii}(0) = \langle u_i(\rho)\, u_i(\rho)\rangle = \left\langle u_1^2\right\rangle + \left\langle u_2^2\right\rangle + \left\langle u_3^2\right\rangle = \left\langle \mathbf{u}^2\right\rangle = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ii}(\mathbf{k})\, d^3k. \qquad (3)$$

Основываясь на упомянутой гипотезе А.Н. Колмогорова, спектральное описание удобно проводить в терминах одномерной плотности $E(k)$ средней кинетической энергии K единицы массы жидкости, которая вводится согласно формуле:

$$K \doteq \frac{1}{2} B_{ii}(0) = \int\limits_0^{\infty} E(k)\, dk. \qquad (4)$$

Связь между $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ и $E(k)$ нетрудно установить, принимая во внимание, что согласно гипотезе А.Н. Колмогорова тензор $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ зависит лишь от $k = |\mathbf{k}|$ и может быть представлен в виде (ср. с $(A.15)$, $(A.16)$):

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = F(k)\,\delta_{ij} + G(k)\, k_i k_j. \qquad (5)$$

Условия соленоидальности $(A.18)$ дают равенство

$$k_i F(k) + k_i k^2 G(k) = 0,$$

которое вместе с (5) позволяет выразить $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ через $F(k)$:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) F(k). \tag{6}$$

Подставляя (6) в (3), вводя в K-пространстве сферические координаты и интегрируя по углам, получаем

$$B_{ii}(0) = 8\pi \int_0^\infty F(k)\, k^2 dk. \tag{7}$$

Из сопоставления (7) с (4) следует формула

$$F(k) = \frac{E(k)}{4\pi k^2}, \tag{8}$$

подстановка которой в (6) дает искомую связь

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi k^2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) E(k). \tag{9}$$

Тогда спектральное представление для следа $D_{ii}(r)$ структурного тензора через $E(k)$ получается подстановкой (9) в (2) с учетом $\Phi_{ii} = 2F = E(k)/2\pi k^2$ и интегрированием по угловым переменным:

$$D_{ii}(r) = 4\int_0^\infty \left(1 - \frac{\sin kr}{kr}\right) E(k)\, dk. \tag{10}$$

Согласно (A.16а) и (A.21)

$$D_{ii}(r) = 2D_{tt}(r) + D_{rr}(r), \;\; D_{tt} = \frac{1}{2r}\frac{d}{dr}\left(r^2 D_{rr}\right).$$

Отсюда следует равенство

$$D_{ii}(r) = D_{rr}(r) + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r^2 D_{rr}\right),$$

после интегрирования которого с учетом того, что $D_{rr}(0) = 0$, получим

$$D_{rr}(r) = \frac{1}{r^3}\int_0^r \rho^2 D_{ii}(\rho)\, d\rho. \tag{11}$$

Подстановка (10) в (11) дает спектральное представление продольной структурной функции:

$$D_{rr}(r) = 4\int_0^\infty \left(\frac{1}{3} + \frac{\cos kr}{k^2r^2} - \frac{\sin kr}{k^3r^3}\right) E(k)\, dk, \tag{12}$$

а спектральное представление поперечной структурной функции задается полуразностью выражений (10) и (12):

$$D_{tt}(r) = 2\int_0^\infty \left(\frac{2}{3} - \frac{\sin kr}{kr} - \frac{\cos kr}{k^2r^2} + \frac{\sin kr}{k^3r^3}\right) E(k)\, dk. \tag{13}$$

2. Диссипация турбулентной кинетической энергии и ее спектральное представление. Согласно (21.17) диссипация ε кинетической энергии в единице массы жидкости выражается формулой

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 = \nu\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right],$$

где ν – кинематическая вязкость жидкости.

Нас будет интересовать среднее значение $\langle\varepsilon\rangle$ скорости диссипации кинетической энергии, которое в дальнейшем мы также будем обозначать через ε, опуская знак осреднения. Осредняя выражение для ε, получим

$$\varepsilon = \nu\left[\left\langle\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\right\rangle + \left\langle\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\rangle\right]. \tag{14}$$

Первый член в квадратных скобках (14) можно записать в виде

$$\left\langle\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\right\rangle = \lim_{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\to 0}\left\langle\frac{\partial u_i(\mathbf{r}_1)}{\partial x_{j1}}\frac{\partial u_i(\mathbf{r}_2)}{\partial x_{j2}}\right\rangle, \tag{15}$$

а правую часть (15) преобразуем с учетом однородности следующим образом:

$$\left\langle\frac{\partial u_i(\mathbf{r}_1)}{\partial x_{j1}}\frac{\partial u_i(\mathbf{r}_2)}{\partial x_{j2}}\right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_{j1}}\frac{\partial}{\partial x_{j2}}\langle u_i(\mathbf{r}_1)\, u_i(\mathbf{r}_2)\rangle =$$

$$= \frac{\partial^2 B_{ii}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial x_{j1}\partial x_{j2}} = -\frac{\partial^2 B_{ii}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial x_{j1}\partial x_{j1}} = -\frac{\partial^2 B_{ii}(\mathbf{r})}{\partial x_j^2}. \qquad (16)$$

Здесь x_j – j-я координата вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Теперь с учетом $\partial^2/\partial x_j^2 = \triangle$ (оператор Лапласа) и равенства $\triangle B_{ii} = -\triangle D_{ii}/2$, следующего из $(A.14)$, вместо (15) имеем:

$$\left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left[\triangle D_{ii}(\mathbf{r})\right]_{\mathbf{r}=0} = \frac{1}{2}\triangle D_{ii}(0). \qquad (17)$$

Далее,

$$\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\rangle = \lim_{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\to 0} \left\langle \frac{\partial u_i(\mathbf{r}_1)}{\partial x_{j1}}\frac{\partial u_j(\mathbf{r}_2)}{\partial x_{i2}} \right\rangle =$$
$$= \lim_{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\to 0} \frac{\partial}{\partial x_{j1}}\frac{\partial}{\partial x_{i2}} B_{ij}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0$$

в силу $\partial B_{ij}/\partial x_i = 0$ (см. $(A.18)$). Поэтому

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2}\triangle D_{ii}(0). \qquad (18)$$

Разложение в ряд Тейлора функции $D_{ii}(r)$ при малых r начинается с квадратичного члена:

$$D_{ii}(r) = ar^2 + O\left(r^4\right),$$

потому что по определению $D_{ii}(0) = 0$, а $D'_{ii}(0) = 0$ (штрих означает дифференцирование по r) из-за четности структурной функции. Поэтому

$$\triangle D_{ii} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dD_{ii}}{dr}\right) = 6a \text{ при } r = 0.$$

После подстановки этого значения в (18), получим $a = \varepsilon/3\nu$ и, следовательно,

$$D_{ii}(r) = \frac{\varepsilon}{3\nu}r^2 + O\left(r^4\right). \qquad (19)$$

После подстановки (19) в (11) и интегрирования находим сначала

$$D_{rr}(r) = \frac{1}{15}\frac{\varepsilon}{\nu}r^2 + O\left(r^4\right), \qquad (20)$$

а затем с помощью $(A.21)$ и поперечную компоненту

$$D_{tt}(r) = \frac{2}{15}\frac{\varepsilon}{\nu}r^2 + O\left(r^4\right). \tag{21}$$

Таким образом, при малых r структурные функции определяются скоростью диссипации турбулентной кинетической энергии и кинематической вязкостью.

Теперь нетрудно найти спектральное представление величины ε в терминах спектральной плотности турбулентной кинетической энергии $E(k)$, используя формулу (10), которую после разложения функции $(1 - \sin kr/kr)$ в ряд можно представить в виде

$$D_{ii}(r) = 4\int_0^\infty \left[\frac{k^2r^2}{6} + O\left(k^4r^4\right)\right] E(k)\, dk. \tag{22}$$

Согласно (19)

$$D''_{ii}(0) = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{\nu}.$$

С другой стороны, дифференцируя (22) дважды в нуле и сопоставляя с последним равенством, приходим к искомому представлению:

$$\varepsilon = 2\nu\int_0^\infty k^2 E(k)\, dk. \tag{23}$$

Замечу, что формулу (23) можно получить непосредственно из K-представления уравнений Навье-Стокса (выполните Упражнение), записывая для него закон сохранения энергии с учетом гипотезы Колмогорова о локальной изотропности турбулентности. Приведенный вывод, однако, интересен тем, что из него следует сходимость интеграла (23) при выполнении гипотезы Колмогорова, поскольку $D_{ii}(r) = O\left(r^2\right)$ при малых r. Из-за быстро растущего множителя k^2 для сходимости этого интеграла необходимо, чтобы $E(k)$ убывала при больших k быстрее, чем k^{-3}. Ниже мы подробнее остановимся на этом вопросе.

3. Уравнение Колмогорова. На первый взгляд кажется вполне естественным воспользоваться уравнением Навье-Стокса

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\triangle u_i \tag{24}$$

(напоминаю, что речь идет турбулентных течениях несжимаемой вязкой жидкости постоянной плотности) с целью получить эволюционное уравнение для структурной функции $D_{rr}(\mathbf{r})$. Умножая (24) на $u_l(\mathbf{r}')$ и затем усредняя полученное уравнение, эволюционный член $\langle u_l(\mathbf{r}')\,\partial u_i(\mathbf{r})/\partial t\rangle$ и вязкий член $\nu\langle u_l(\mathbf{r}')\,\triangle u_i(\mathbf{r})\rangle$ можно выразить через структурную функцию $D_{il}(r)$ и заменить их выражениями $\partial D_{il}(\mathbf{r},t)/\partial t$ и $\nu\triangle D_{il}(\mathbf{r},t)$ соответственно. Член с давлением обращается в нуль в силу $(A.26)$. Однако нелинейный член уравнения $u_j\partial u_i/\partial x_j$ после умножения на $u_l(\mathbf{r}')$ будет содержать выражение типа $\langle u_l(\mathbf{r}')\,u_j(\mathbf{r})\,u_i(\mathbf{r})\rangle$, что делает невозможным получение замкнутого уравнения для структурной функции.

Введем тензор

$$D_{ijl}(\mathbf{r}) = \left\langle \left[u_i(\mathbf{r}+\mathbf{r}') - u_i(\mathbf{r}')\right]\left[u_j(\mathbf{r}+\mathbf{r}') - u_j(\mathbf{r}')\right]\left[u_l(\mathbf{r}+\mathbf{r}') - u_l(\mathbf{r}')\right]\right\rangle.$$

Подобно тому как все компоненты тензора $D_{ij}(\mathbf{r})$ с помощью условий несжимаемости и изотропности выражались через единственную скалярную функцию $D_{rr}(\mathbf{r})$, все компоненты тензора $D_{ijl}(\mathbf{r})$ можно выразить через продольную функцию

$$D_{rrr}(r) = \left\langle \left\{\mathbf{n}\left[\mathbf{u}(\mathbf{r}+\mathbf{r}') - \mathbf{u}(\mathbf{r}')\right]\right\}^3 \right\rangle, \tag{25}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$.

В итоге после несложных, но довольно громоздких, преобразований результат умножения (24) на $u_l(\mathbf{r}')$ и применения операции осреднения можно привести к виду:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial D_{rr}}{\partial t} - \frac{2}{3}\varepsilon = \frac{1}{6r^4}\frac{\partial\left(r^2 D_{rrr}\right)}{\partial r} - \frac{\nu}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\frac{\partial D_{rr}}{\partial r}\right). \tag{26}$$

Уравнение (26) описывает затухающую турбулентность, поскольку исходное уравнение (24) не содержит внешних сил. Положение можно исправить путем введения внешних источников энергии мощностью ε на каждую единицу массы и искать стационарные решения уравнения (26), полагая в нем $\partial D_{rr}/\partial t = 0$ и рассматривая ε как внешний источник энергии, компенсирующий ее потери за счет вязкости. В этом случае, умножая (26) на r^4 и интегрируя по r с учетом обращения в нуль структурных функций при $r = 0$, получим уравнение Колмогорова

$$D_{rrr} = -\frac{4}{5}\varepsilon r + 6\nu\frac{dD_{rr}}{dr}, \tag{27}$$

связывающее функции D_{rrr} и D_{rr}.

Пример с выводом уравнения Колмогорова иллюстрирует невозможность построения замкнутой системы уравнений развитой турбулентности, поскольку любое уравнение для момента κ-го порядка (функции типа $D_{r...r}$ – продольной компоненты структурного тензора κ-го ранга), полученное описанным методом из уравнений Навье-Стокса, будет содержать момент следующего порядка, что принципиально отличает эту ситуацию от положения дел в термодинамике. Это и значит, что даже развитая турбулентность – система не равновесная, описание которой до сих пор основывается на дополнительных физических или эвристических соображениях в зависимости от проницательности или интуиции предлагающих их авторов. Ниже мы рассмотрим классические результаты, основанные на гипотезах и физических соображениях А.Н Колмогорова и А.М. Обухова.

Упражнение

К-представление уравнения Навье-Стокса (24), описывающего движение жидкости в кубической решетке с условиями периодичности по каждой из пространственных координат, записывается в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2\right)v_i\left(\mathbf{k}\right)+\frac{i}{2}\triangle_{ijl}\left(\mathbf{k}\right)\sum_{\mathbf{k}_1}v_j\left(\mathbf{k}_1\right)v_l\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1\right)=0,\ i,j,l=1,2,3;$$

$$\triangle_{ijl}\left(\mathbf{k}\right)=\triangle_{il}\left(\mathbf{k}\right)k_j+\triangle_{ij}\left(\mathbf{k}\right)k_l,\ \triangle_{ij}\left(\mathbf{k}\right)=\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2},\ k=\left|\mathbf{k}\right|.$$

Здесь

$$\mathbf{u}\left(\mathbf{x},t\right)=\sum_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{v}\left(\mathbf{k},t\right),\ \mathbf{k}=\frac{2\pi}{L}\left(m,n,p\right),\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}\left(\mathbf{k},t\right)=0,$$

m, n, p – целые положительные и отрицательные числа, включая нуль.

Сформулируйте для этого K-представления закон сохранения энергии и покажите, что

$$K=\int_0^\infty E\left(k\right)dk,\ \varepsilon=2\nu\int_0^\infty k^2E\left(k\right)dk.$$

Что такое здесь $E(k)$?

Литература

1. Татарский В.И. *Распространение волн в турбулентной атмосфере (Глава 1. Предварительные сведения по теории турбулентности)*, М.: "Наука ГРФМЛ, 1967.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*, М.: "Наука ГРФМЛ, 1986.

3. Монин А.С., Яглом А.М. *Статистическая гидромеханика. Часть 2*, М.: "Наука ГРФМЛ, 1967.

4. Гледзер Е.Б. *О "законе 2/3"теории турбулентности и оценке содержащейся в нем постоянной на основе редукции уравнений гидродинамики.* ЖЭТФ, Т.91, Вып. 3(9), 1986.

Лекция С

Законы развитой турбулентности по сценарию Ричардсона-Колмогорова-Обухова

Эскиз развитой турбулентности, сделанный Ричардсоном с его каскадным механизмом дробления вихрей, трудами А.Н. Колмогорова и А.М. Обухова превратился в настоящий шедевр научной мысли, широко применяемый для описания природных и технологических движений жидкости таких как хаотические течения в трубах, реках, океане, атмосфере, звездах и даже галактиках. Суть теории состоит в следующем. Уже на примере течения Колмогорова мы видели, что потеря устойчивости первичного течения при достижении числом Рейнольдса некоторого критического значения сопровождается рождением вихрей, уступающих по своим размерам и скоростям в них первичному режиму, а, следовательно, характеризующихся и меньшим, чем первоначальное, значением своего числа Рейнольдса. С увеличением первичного или, как мы будем говорить, глобального числа Рейнольдса растет и число Рейнольдса вторичного режима, который в свою очередь, теряя устойчивость, уступает место новому вихревому режиму с меньшим, чем вторичное, значением местного или локального числа Рейнольдса. Очевидно, что при очень больших глобальных числах Рейнольдса такой ричардсоновский процесс деления вихрей будет продолжаться до тех пор, пока очередное локальное число Рейнольдса не окажется докритическим, не превышающим критического значения глобального числа Рейнольдса, за которое исключительно ради удобства рассуждений мы примем единицу.

Этому ричардсоновскому наброску развитой турбулентности по крайней мере не противоречат многочисленные наблюдательные

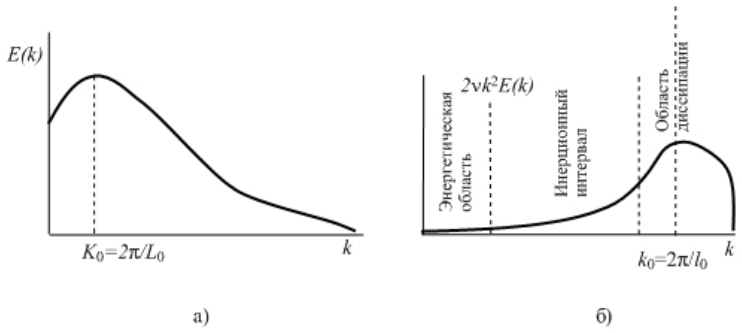


Рис. 1. Схематическое изображение зависимости спектральной мощности кинетической энергии турбулентности (а) и спектральной плотности скорости диссипации турбулентной энергии от волнового числа (б).

данные и результаты лабораторных и технологических измерений, согласно которым типичные зависимости спектральной плотности $E(k)$ турбулентной энергии и спектральной плотности $2\nu k^2 E(k)$ скорости диссипации турбулентной энергии от волнового числа при больших глобальных числах Рейнольдса имеют вид, представленный на Рис. 1а и 1б соответственно. Видно, что области накачки – притока и диссипации – стока кинетической энергии локализованы и сильно разнесены в пространстве волновых чисел или, что то же самое, в пространстве геометрических масштабов пульсаций (возмущений или отклонений среднего течения), а между ними находится область, в которой диссипация практически отсутствует. В каждой из указанных областей, называемых соответственно энергетическим интервалом, интервалом диссипации и инерционным интервалом действуют свои законы турбулентности, установленные А.Н. Колмогоровым и А.М. Обуховым.

Начнем с того, что развитая турбулентность с энергетической точки зрения рассматривается как установившийся процесс, в котором мощность внешних источников энергии уравновешивается скоростью ее диссипации

$$\varepsilon = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k)\, dk. \tag{1}$$

В качестве независимых внешних определяющих параметров развитой турбулентности естественно выбираются физические свойства среды – кинематическая вязкость ν, плотность ρ, средняя скорость U турбулентного течения, ее характерное изменение (амплитуда) $\triangle U$ и линейный масштаб L, на котором это изменение наблюдается. В принятых ограничениях величина ε есть константа размерности $\text{см}^2/\text{с}^3$, которую, исключая $\triangle U$, также используют в качестве независимого внешнего параметра в зависимости от удобства трактовки того или иного физического результата. Кроме того, если речь не идет о давлении и связанных с ним характеристиках, то из рассмотрения исключается плотность, поскольку размерности интересующих нас величин, такие как скорость, спектральные плотности и структурные функции, не содержат размерность массы. Отметим еще один общий для всего спектра турбулентности факт, связанный с включением U в число определяющих параметров. Очевидно, что средний перенос не влияет (важна

лишь его максимальная изменчивость $\triangle U$) ни на пространственные характеристики эйлеровых полей скорости, ни на временные динамические характеристики лагранжевых (движущихся вместе с жидкостью или, что то же самое, жидких) частиц, но скажется на временных характеристиках эйлеровых полей, потому что их временная эволюция за время τ в данной фиксированной точке пространства происходит из-за прихода в эту точку жидкой частицы, отстоящей от нее в начальный момент времени на расстоянии $U\tau$. Перейдем теперь к обсуждению конкретных законов, господствующих в каждом из упомянутых интервалов.

а) Энергетический интервал удобно определить как окрестность волнового числа $k = K_0$, в котором спектральная плотность энергии достигает максимума (Рис. 1а), а величину $L_0 = 2\pi/K_0$ принять за внешний масштаб турбулентности. Большие значения глобального числа Рейнольдса

$$R = \frac{\triangle U L_0}{\nu} \tag{2}$$

означают отсутствие влияния вязкости (автомодельность по вязкости) в рассматриваемом интервале, а, следовательно, из соображений размерности

$$\varepsilon \sim \frac{(\triangle U)^3}{L_0} = \triangle U L_0 \left(\frac{\triangle U}{L_0}\right)^2. \tag{3}$$

В силу (B.14) (второе слагаемое в нем равно нулю) величина ε сопоставима со скоростью диссипации в гипотетической жидкости, вязкость которой $\nu = \triangle U L_0$, измеренная вязкостью рассматриваемой жидкости, равна $\triangle U L_0/\nu = R$ (на самом деле она равна отношению $R/R_{\text{кр}}$, но мы договорились с Вами полагать $R_{\text{кр}}$ условно равным единице). Эту величину называют турбулентной вязкостью, подчеркивая тем самым в согласии с идеей ричардсоновского каскада диссипативную роль пульсаций скорости по отношению к среднему течению.

б) Интервал диссипации задается окрестностью волнового числа $k = k_0$, на котором скорость диссипации кинетической энергии достигает максимума (см. Рис. 1б). Соответствующий ему масштаб длины $l_0 = 2\pi/k_0$ называют *внутренним масштабом турбулентности,* который определяется из условия постоянства ε и требования, что в интервале диссипации локальное число Рейнольдса

порядка единицы:

$$\varepsilon \sim \frac{(\triangle U)^3}{L_0} \sim \nu \left(\frac{u_0}{l_0}\right)^2, \; R_{l_0} = \frac{u_0 l_0}{\nu} \sim 1.$$

Здесь u_0 – характерная амплитуда скорости на дистанции l_0.

Отсюда с учетом (2) следует, что

$$l_0 \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} = L_0 R^{-3/4}, \; u_0 \sim (\varepsilon\nu)^{1/4} = \triangle U R^{-1/4}. \qquad (4)$$

Таким образом, внутренний масштаб турбулентности l_0, который еще называют *масштабом Колмогорова,* вместе с амплитудой пульсаций скорости в интервале диссипации падают с увеличением глобального числа Рейнольдса. Приравнивая диссипацию кинетической энергии в форме (3) к диссипации в области $\lambda \ll l_0$, т. е. полагая

$$\triangle U L_0 \left(\frac{\triangle U}{L_0}\right)^2 \sim \nu \left(\frac{u_\lambda}{\lambda}\right)^2,$$

получим

$$u_\lambda \sim \frac{\triangle U}{L_0} \lambda R^{1/2} \sim \frac{u_0}{l_0} \lambda, \qquad (5)$$

что указывает на ламинарный характер движения в рассматриваемой области в согласии с докритическим значением числа Рейнольдса.

Уместно заметить, что оценки (4) непосредственно получаются из соображений размерности, по сути не менее строгих, чем приведенный здесь якобы вывод этих оценок, который следует рассматривать лишь как физическую иллюстрацию к ним. Это замечание относится и ко всем последующим физическим разъяснениям, сопутствующим соображениям размерности.

в) Инерционный интервал. К нему относятся волновые числа k и соответствующие им масштабы λ, удовлетворяющие условиям

$$K_0 \ll k \ll k_0, \; L_0 \gg \lambda \gg l_0, \qquad (6)$$

что позволяет формулировать универсальные законы турбулентности, свободные от влияния "краевых эффектов" – движений в

энергетической и диссипативной областях. Согласно первой гипотезе Колмогорова о локальной однородности и изотропности турбулентности вне энергетического интервала в качестве определяющих независимых внешних параметров в рассматриваемой области можно взять ε, U, ν. Следующий решающий шаг, сделанный А.Н. Колмогоровым, состоит в гипотезе (вторая гипотеза Колмогорова) о постоянстве потока энергии по спектру во всем инерционном интервале. В силу закона сохранения энергии это означает, что передача энергии по спектру происходит без участия вязкости со скоростью, равной скорости генерации или, что то же самое, со скоростью диссипации ε кинетической энергии турбулентности.

Таким образом, *согласно второй гипотезе Колмогорова в инерционном интервале характеристики турбулентности автомодельны по ν и зависят лишь от ε, U и волнового числа k или, что то же самое, от расстояния λ, на котором изменение скорости равно u_λ.* Отсюда по соображениям размерности с учетом замечания, сделанного относительно U, следует закон Колмогорова-Обухова

$$u_\lambda \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3} \sim \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{1/3}, \tag{7}$$

который в терминах спектральной плотности энергии принимает вид

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \tag{8}$$

известный под названием *"закон -5/3 Колмогорова-Обухова"*.

Вновь, как и ранее, формулируя (7) и (8), соображения размерности можно подкрепить физическими рассуждениями, выражая ε в рассматриваемой области через турбулентную вязкость $\nu = \lambda u_\lambda$и квадрат градиента скорости:

$$\varepsilon \sim \lambda u_\lambda \left(\frac{u_\lambda}{\lambda}\right)^2 = \frac{u_\lambda^3}{\lambda},$$

или полагая по определению спектральной плотности энергии, что

$$u_\lambda^2 = \int_k^\infty E(k)\, dk \sim \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{2/3} \sim (\varepsilon\lambda)^{2/3}.$$

Видно, что обе оценки дают закон Колмогорова-Обухова, полученный из соображений размерности.

Частотный спектр развитой турбулентности, если речь идет о колебаниях эйлеровых полей скорости в фиксированной точке пространства, заполняет по упомянутой выше причине интервал, нижний конец которого $\Omega_0 \sim U/L_0$, а верхний – $\omega_0 \sim U/l_0 = (U/L_0)\,R^{3/4}$. Инерционному интервалу принадлежат частоты $\omega \sim U/\lambda \sim Uk$ и характерные времена τ, удовлетворяющие условиям

$$\frac{U}{L_0} \ll \omega \ll \frac{U}{L_0} R^{3/4},\ \frac{L_0}{U} \gg \tau \gg \frac{L_0}{U} R^{-3/4}, \tag{9}$$

причем сильное неравенство $\omega \gg U/L_0$ означает, что локальные характеристики турбулентности практически "не замечают"нестационарности основного течения, если таковая присутствует.

Амплитуда (изменение) u_τ эйлерова поля скорости в фиксированной точке пространства за время τ получается подстановкой $\lambda = U\tau$ в (7):

$$u_\tau \sim (\varepsilon U \tau)^{1/3}. \tag{10}$$

Кроме (7) при выводе этой формулы используется гипотеза "замороженной"турбулентности (гипотеза Тэйлора (1938)), согласно которой за время τ при параллельном переносе поля пульсаций со скоростью U эти пульсации практически не меняются. Поэтому одновременная амплитуда разностей пульсаций скорости u_λ на расстоянии λ равна амплитуде разности, измеренной в одной точке с промежутком времени τ переноса на расстояние $\lambda = U\tau$. Понятно, что формула (10) хорошо работает в аэродинамической трубе или сильном ветре при натурных измерениях, когда $U \sim 10 - 20$ м/с, а τ принадлежит инерционному интервалу времени, т.е. достаточно мала. Изменение v_τ скорости лагранжевой частицы за то же время τ не зависит от U, и, следовательно, по соображениям размерности равно

$$v_\tau \sim (\varepsilon \tau)^{1/2}. \tag{11}$$

Формулы (7) и (10), используя (3), можно переписать в терминах $\triangle U$ и L_0:

$$\frac{u_\lambda}{\triangle U} \sim \left(\frac{\lambda}{L_0}\right)^{1/3},\ \frac{u_\tau}{\triangle U} \sim \left(\frac{\tau}{T}\right)^{1/3}. \tag{12}$$

Отсюда видно *свойство подобия локальной турбулентности: мелкомасштабные характеристики различных турбулентных течений отличаются лишь масштабами измерения длин и скоростей или, что тоже самое, длин и времен.*

Делая подстановку $k \sim \omega/U$ в (8), получаем частотную плотность энергии

$$E(\omega) = (U\varepsilon)^{2/3}\,\omega^{-5/3},\ \omega \sim kU \tag{13}$$

для колебаний эйлеровых полей скорости, причем $E(\omega)\,d\omega$ есть энергия, заключенная в частотном интервале $d\omega$.

Частота колебаний лагранжевой частицы не зависит от U и равна $\sigma \sim u_k k \sim u_\lambda/\lambda$. По соображениям размерности

$$E(\sigma) \sim \varepsilon\sigma^{-2},\ \sigma \sim u_k k \sim u_\lambda/\lambda. \tag{14}$$

Формулы (13) и (14) соотносятся подобно (10) и (11), причем легко проверить, что $E(\omega)\,d\omega = E(\sigma)\,d\sigma$.

Отметим еще одну важную особенность развитой турбулентности в инерционном интервале – закон диффузии лагранжевых частиц, расположенных на расстоянии λ. Скорость удаления частиц, равная по соображениям размерности

$$\frac{d\lambda}{dt} \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}, \tag{15}$$

растет с увеличением λ, т. е. процесс самоускоряющийся. Это объясняется тем, что диффузия происходит под влиянием только тех пульсаций, масштаб которых $\leqslant \lambda$: пульсации больших масштабов осуществляют лишь трансляцию – параллельный перенос частиц без изменения дистанции между ними.

Закон Колмогорова-Обухова в терминах структурных функций. Согласно первой гипотезе Колмогорова о локальной однородности и изотропности развитой турбулентности при $\lambda \ll L_0$ ее пространственные характеристики зависят лишь от λ, ν и ε. В частности, формулы $(B.19)$-$(B.21)$, полученные на предыдущейлекции, с точностью до замены r на λ описывают асимптотическое поведение структурных функций в диссипативном интервале при $\lambda \ll l_0$ именно в терминах этих параметров:

$$\lambda \ll l_0 : D_{ii}(\lambda) \approx \frac{\varepsilon}{3\nu}\lambda^2,\ D_{\lambda\lambda}(\lambda) \approx \frac{1}{15}\frac{\varepsilon}{\nu}\lambda^2,\ D_{tt}(\lambda) = \frac{2}{15}\frac{\varepsilon}{\nu}\lambda^2. \tag{16}$$

В инерционном же интервале (6) согласно второй гипотезе Колмогорова зависимость от ν исчезает, а, следовательно, по соображениям размерности спектральному *закону -5/3 Колмогорова-Обухова* (8) в K-пространстве отвечает *закон* -2/3 *Колмогорова-Обухова* в R-пространстве:

$$D_{\lambda\lambda}(\lambda) = C\varepsilon^{2/3}\lambda^{2/3},\ L_0 \gg \lambda \gg l_0, \tag{17}$$

где C – положительная константа.

Очевидно, что аналогичный закон справедлив для поперечной структурной функции и следа структурного тензора:

$$D_{tt}(\lambda) = \frac{4}{3}C\varepsilon^{2/3}\lambda^{2/3},\ D_{ii}(\lambda) = \frac{11}{3}C\varepsilon^{2/3}\lambda^{2/3},\ L_0 \gg \lambda \gg l_0, \tag{18}$$

причем входящие в них константы выражаются через C путем подстановки (17) в формулы (см. Лекцию B, две формулы, следующие после $(B.10)$):

$$D_{tt} = \frac{1}{2\lambda}\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda^2 D_{\lambda\lambda}\right),\ D_{ii}(\lambda) = 2D_{tt}(\lambda) + D_{\lambda\lambda}(\lambda). \tag{19}$$

В том, что -2/3-закону в R-пространстве отвечает -5/3-закон в K-пространстве, можно убедиться и непосредственным вычислением, используя спектральные представления структурных функций, о которых шла речь на предыдущей лекции. В частности (выполните весьма полезное и не совсем простое Упражнение 1), спектральная плотность энергии связана со следом структурного тензора соотношением

$$E(k) = -\frac{k}{2\pi}\frac{d}{dk}\left[\frac{1}{k}\int_0^\infty \sin(k\lambda)\frac{dD_{ii}(\lambda)}{d\lambda}d\lambda\right], \tag{20}$$

после подстановки в которое второй формулы (18) получим " - 5/3-закон"с константой, выраженной через C:

$$E(k) = \frac{55}{27}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} = 0.76C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}. \tag{21}$$

Таким образом, по известной константе одного из представлений закона Колмогорова-Обухова можно восстановить константу любого другого его представления. Однако оценить любую из

упомянутых констант, например C, из соображений подобия уже невозможно, на что указывал еще А.Н. Колмогоров. Многочисленные оценки на основе наблюдательных и экспериментальных данных не сильно отличаются от первоначальной колмогоровской оценки и колеблются в пределах $1.5 \lessapprox C \lessapprox 2$. Попытки теоретической оценки константы C, начатые еще в 60-е годы прошлого века и продолжаемые с применением метода теории ренормгруппы квантовых теорий, как правило, дают зависимость $C = C(q_i)$ от ряда некоторых внешних параметров q_i, связанных с принимаемыми в теориях гипотезами. Между тем возможна ситуация, когда эти внешние параметры могут слабо влиять на численные значения величины $C(q_i)$. В наиболее простой форме эта идея была реализована Е.Б. Гледзером (1986) на основе дискретного аналога уравнений Навье-Стокса, воспроизводящего ричардсоновский каскадный механизм передачи энергии по спектру в дискретном пространстве волновых чисел. Зависимость C от коэффициента q дробления масштабов – отношения характерных размеров возмущений последовательных ярусов (ступеней каскада) представлена на Рис. 2. *Наиболее важное обстоятельство состоит в существовании широкого интервала изменения q, в котором C есть медленно меняющаяся функция q со значениями, близкими к экспериментальным, что позволяет говорить о ней как об универсальной константе развитой турбулентности.*

Сонм атмосферных наблюдательных данных и неоднократно воспроизведенных лабораторных и технологических измерений подтверждают справедливость законов Колмогорова-Обухова в реальных хорошо развитых турбулентных течениях. До сих пор, однако, не удалось убедительно решить проблему сшивки инерционного и диссипативного интервалов. Дело в том, что интеграл в выражении для скорости диссипации кинетической энергии

$$\varepsilon = 2\nu \int_0^\infty k^2 E\,(k)\, dk$$

после формальной подстановки в него (21) оказывается расходящимся, хотя его сходимость следует как из физических соображений, так и из поведения (16) структурных функций при $\lambda \ll l_0$. Неоднократные, порой весьма утонченные, попытки найти продолжение -5/3 закона на диссипативном интервале наталкиваются на

определенные противоречия с экспериментом. Дело в том, что в рассматриваемом сценарии развитой турбулентности центральная роль отводится ε, которая предполагается постоянной величиной, что автоматически локализует процесс диссипации турбулентной энергии в окрестности масштаба Колмогорова $l_0 = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$. Однако, выполненные за последние годы прецизионные измерения характеристик турбулентности показывают, что средняя скорость диссипации турбулентной энергии $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r},t)$ есть функция координат и времени, распространяющаяся на масштабы, существенно меньшие масштаба Колмогорова. Кроме того, в развитых турбулентных течениях обнаружены вихревые структуры в виде нитей, называемых в теории поля струнами, с продольным масштабом порядка L_0 и поперечным масштабом порядка l_0. Это приводит к анизотропии диссипации, которая фокусируется на боковых стенках струны – областях наибольшего обострения градиентов скорости. Быстрые рождения и исчезновения струн порождает *burst*-ы – вспышки диссипации, с которыми связывают процесс перемежаемости турбулентности – эпизодические нерегулярные автоколебания основного потока с амплитудами, сопоставимыми с величиной среднего течения. Трудно сказать, что здесь курица, а что – яйцо, однако еще основоположники теории А.Н. Колмогоров и А.М. Обухов, а также Л.Д. Ландау указывали на возможность зависимости $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r},t)$ и ее решающего влияния на поведение крупномасштабных компонент турбулентности. На уточнении и построении теории обрисованного здесь нового сценария развитой турбулентности и сосредоточены современные экспериментальные и теоретические исследования, среди которых отмечу работу Е.Б. Гледзера (2005), содержащую, в частности, обзор современного положения дел в рассматриваемой области. В ней рассматривается ансамбль дискретных и континуальных аналогов уравнений Навье-Стокса, описывающих упомянутые сценарии турбулентности как ситуацию общего положения, а исключением из правила является первоначальный сценарий. Упомянуть следует и проблему описания так называемых когерентных структур – пространственно упорядоченных образований, наблюдаемых при сильно закритических числах Рейнольдса. Не обсуждая гипотез возникновения такой самоорганизации крупномасштабных мод, отмечу лишь нерегулярность их временного поведения, возможно связанную с так называемой ма-

локомпонентной турбулентностью, с которой мы уже имели дело при обсуждении стохастической модели Лоренца применительно к описанию глобальных атмосферных движений.

Упражнения

1. Согласно $(B.2)$ и $(B.9)$ трехмерное спектральное разложение следа структурного тензора имеет вид

$$D_{ii}(\mathbf{r}) = 2\iiint_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]\,\Phi_{ii}(\mathbf{k})\,d^3k, \tag{22}$$

где для локально однородной и изотропной турбулентности

$$\Phi_{ii}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{2\pi k^2}. \tag{23}$$

С другой стороны, для локально однородной и изотропной турбулентности можно записать одномерное разложение

$$D_{ii}(r) = 2\int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(kr)]\,V(k)\,dk. \tag{24}$$

Докажите сначала, что

$$\Phi_{ii}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2\pi}\frac{dV(k)}{dk}, \tag{25}$$

а затем и формулу (20).

Решение. Действуя градиентом на (22), получим фурье-разложение для $\nabla D_{ii}(r)$:

$$\nabla D_{ii}(\mathbf{r}) = 2\mathbf{k}\iiint_{-\infty}^{\infty} \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,\Phi_{ii}(\mathbf{k})\,d^3k.$$

Обращая эту формулу, т.е. беря обратное преобразование Фурье, имеем

$$\Phi_{ii}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{16\pi^3k^2}\iiint_{-\infty}^{\infty} \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,\nabla D_{ii}(\mathbf{r})\,d^3k, \tag{26}$$

причем для рассматриваемого случая

$$\mathbf{k}\nabla D_{ii}(\mathbf{r}) = \frac{k\mathbf{r}}{r}\frac{dD_{ii}(r)}{dr}.$$

Вводя в K-пространстве сферические координаты и интегрируя по угловым переменным, получим

$$\Phi_{ii}(k) = \frac{1}{4\pi k^2}\int_0^\infty [\sin(kr) - kr\cos(kr)]\frac{dD_{ii}(r)}{dr}dr. \qquad (27)$$

Аналогично, дифференцируя одномерное разложение (24) и обращая результат, находим

$$V(k) = \frac{1}{2\pi k}\int_0^\infty \sin(kr)\frac{dD_{ii}(r)}{dr}dr. \qquad (28)$$

Сопоставляя теперь результат дифференцирования формулы (28) по k с (27), получаем формулу (25), которая совместно (23) и (28) дает (20).

2. Используя (18), проинтегрируйте (20).

Литература

1. Татарский В.И. *Распространение волн в турбулентной атмосфере (Глава 1. Предварительные сведения по теории турбулентности)*, М.: "Наука ГРФМЛ, 1967.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*, М.: "Наука ГРФМЛ, 1986.

3. Монин А.С., Яглом А.М. *Статистическая гидромеханика. Часть 2*, М.: "Наука ГРФМЛ, 1967.

4. Гледзер Е.Б. *О "законе 2/3"теории турбулентности и оценке содержащейся в нем постоянной на основе редукции уравнений гидродинамики.* ЖЭТФ, Т.91, Вып. 3(9), 1986.

5. Гледзер Е.Б. *Диссипация и перемежаемость турбулентности в рамках гидродинамических аппроксимаций.* Изв. РАН, сер. ФАО, Т.41, 6, 2005.

Лекция D

Специфика атмосферной турбулентности

Усредненные уравнения Навье-Стокса с учетом несжимаемости среды ($\rho = \rho_0 = \text{const}$) записываются в виде:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} - \frac{\partial \left\langle u_i' u_j' \right\rangle}{\partial x_j} + \nu \triangle \langle u_i \rangle , \qquad (1)$$

где $\langle u_i' \rangle = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, а величина

$$\tau_{ij} = \left\langle u_i' u_j' \right\rangle \qquad (2)$$

называется тензором напряжений Рейнольдса.

По аналогии с введением понятия вязкого тензора напряжений и коэффициентов вязкости при выводе уравнений Навье-Стокса (Лекция 21) традиционный феноменологический способ замыкания уравнения (1) с учетом диссипативного влияния пульсаций скорости u_i' на среднее течение $\langle u_i \rangle$ состоит в трактовке тензора напряжений Рейнольдса как тензора напряжений турбулентной вязкости:

$$\tau_{ij} = -\nu_{\text{турб}} \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) , \qquad (3)$$

где турбулентная вязкость $\nu \sim \triangle U L_0$ (см. предыдущую лекцию).

Очевидно, что при практическом использовании гипотезы замыкания (3) выбор значений турбулентной вязкости зависит от пространственных и временных масштабов, по которым движение усредняется, и, как правило, $\nu_{\text{турб}}$ на несколько порядков превосходит кинематическую вязкость, что позволяет пренебречь последним слагаемым в правой части (1). Например, при описании атмосферного слоя Экмана, исходя из наблюдений, что высота планетарного пограничного слоя атмосферы $\delta_E = (\nu/\Omega)^{1/2}$ порядка

нескольких сотен метров, значение турбулентного коэффициента вязкости принимается равным $10^5 \doteqdot 10^6$ см^{2}с$^{-1}$, превосходящим значение кинематической вязкости воздуха на шесть-семь порядков.

Одна из отличительных черт атмосферной турбулентности состоит в том, что области притока и стока кинетической энергии разнесены не только в пространстве волновых чисел, но и в реальном физическом пространстве. Диссипация кинетической энергии происходит главным образом в планетарном пограничном слое, включающим в себя приземный слой высотой несколько десятков метров, в котором доминирует трение о подстилающую поверхность, распространяющее свое влияние из-за турбулентного перемешивания на весь слой. Рассмотрим оба этих слоя с позиций теории турбулентности.

1. Турбулентность в приземном слое атмосферы. Ограничимся ради простоты изучением нейтрально стратифицированного слоя, свободного от влияния архимедовых сил. Поскольку в окрестности земной поверхности силы давления и Кориолиса малы по сравнению с силами трения, то нейтрально стратифицированный приземный пограничный слой определяется как область, в которой напряжения трения уравновешиваются напряжениями Рейнольдса $\tau_{ij} = \left\langle u_i' u_j' \right\rangle$. Очевидно, что характерный горизонтальный масштаб усредненных движений в приземном слое много больше его высоты, а потому все усредненные характеристики движения из-за отсутствия выделенного горизонтального направления можно считать зависящими лишь от высоты z, а турбулентный поток импульса направленным по вертикали.

Пусть ось x совпадает по направлению с вектором средней скорости ветра $\langle \mathbf{u} \rangle$, так что $\langle u_x \rangle \doteqdot u(z)$, $\langle u_y \rangle \doteq v = 0$, $\langle u_z \rangle_z \doteq w = 0$. *Тогда в силу сделанных предположений и соображений симметрии* $\tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{23} = \tau_{32} = 0$, *а* $\langle w'u' \rangle = \tau_{31}$ - *вертикальный поток горизонтального импульса, равный* $\langle u'w' \rangle = \tau_{13}$ - *горизонтальному потоку вертикального импульса* (почему?) *и уравновешивающий напряжение трения, есть величина постоянная.* Очевидно, что эта константа отрицательна (атмосфера отдает импульс Земле), которую мы обозначим через

$$-u_*^2 = \langle u'w' \rangle = \tau_{13}, \tag{4}$$

имея в виду ее размерность квадрата скорости.

Производная скорости, как и сама скорость в приземном слое, зависит лишь от z и по соображениям размерности единственным образом выражается через параметры z и u_*:

$$\frac{du}{dz} = \frac{u_*}{\varkappa z}, \tag{5}$$

где числовая константа $\varkappa$ называется постоянной Кармана, экспериментальное значение которой приблизительно равно 0.4.

Согласно формуле (3), полагая в ней $i = 1$, а $j = 3$,

$$-u_*^2 = -\nu \frac{u_*}{\varkappa z}.$$

Отсюда следует выражение для коэффициента турбулентной вязкости:

$$\nu_{\text{турб}} = \varkappa u_* z, \tag{6}$$

зависящего от высоты. Этот пример показывает, что при использовании гипотезы замыкания (3) в турбулентных пограничных слоях недостаточно знать значение коэффициента турбулентности в одной точке, а надо иметь в виду его возможную зависимость от пространственных координат, которая определяется спецификой баланса сил, присущего рассматриваемому пограничному слою.

Делая подстановку (3) в (1) нетрудно сосчитать (см. вывод формулы (21.17)) удельную (приходящуюся на единицу массы) скорость диссипации кинетической энергии

$$\varepsilon = \nu_{\text{турб}} \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \nu_{\text{турб}} \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right)^2. \tag{7}$$

В рассматриваемом случае с учетом $\langle \mathbf{u} \rangle = (u(z), 0, 0)$ и формул (5) и (6)

$$\varepsilon = \frac{u_*^3}{\varkappa z}. \tag{8}$$

Иногда, используя оценку $\nu_{\text{турб}} \sim L_0 \triangle U = L_0^2 \triangle U / L_0$ коэффициент турбулентности записывают в виде

$$\nu_{\text{турб}} = L_0^2 \left| \frac{du}{dz} \right|,$$

что позволяет оценить внешний масштаб турбулентности в приземном слое:

$$L_0 = \varkappa z. \tag{9}$$

Интегрируя уравнение (5), получаем известный из наблюдений в приземном слое логарифмический закон распределения ветра по высоте:

$$u(z) = \frac{u_*}{\varkappa} \ln \frac{z}{z_0}. \tag{10}$$

Константа интегрирования z_0 трактуется как высота шероховатости, зависящая от структуры подстилающей поверхности, которая не учитывалась при формулировки уравнения (5), а потому найденный закон справедлив лишь для $z \gg z_0$. Формулой (10) пользуются, в частности, для определения u_* и, следовательно, рейнольдсовых напряжений в приземном слое по сравнительно простым измерениям средней скорости ветра на различных высотах.

2. Турбулентный планетарный пограничный слой и его влияние на движения глобального масштаба (Dolzhanskii, Manin, 1993; Danilov, Dolzhanskii, Manin, 1993). Влияние планетарного пограничного слоя на крупномасштабные движения атмосферы осуществляется через вертикальные токи на его верхней границе, посредством которых происходит обмен горизонтальным импульсом между свободной атмосферой и пограничным слоем, что и приводит в конечном итоги к затормаживанию глобальных течений. Этот механизм торможения в наиболее явном виде проявляется при выводе квазигеострофического уравнения трансформации потенциального вихря вязкой баротропной атмосферы, которое можно записать в виде (см. Лекцию 22, воспользуйтесь уравнением (22.19) и перейдите к описанию в терминах функции тока Ψ сохраняя нетронутым член, содержащий вертикальную скорость w_E на верхней границе экмановского слоя):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\Psi - L_0^{-2}\Psi\right) + [\Psi, \triangle\Psi] + \beta\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\frac{f_0}{H_0}w_E + q, \tag{11}$$

$$U_x = -\frac{\partial\Psi}{\partial y},\ U_y = \frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

Через q здесь обозначена сумма внешнего источника завихренности и ее диссипации $\nu\triangle^2\Psi$ из-за вязкости. В отличие от Лекции 21 компоненты скорости и функцию тока, относящиеся к свободной

атмосфере, обозначаются здесь заглавными буквами U_x, U_y и Ψ соответственно. Справедливое в случае ламинарного (лабораторного) слоя Экмана выражение для вертикальной скорости

$$w_E = \delta_E \triangle \Psi, \tag{12}$$

распространялось в Лекции 22 и на случай турбулентного атмосферного планетарного пограничного слоя с заменой кинематической вязкости ν на турбулентную вязкость $\nu_{\text{турб}}$. Последняя, как уже упоминалось выше, оценивается из условия, что известную из наблюдений высоту ППС, колеблющуюся от нескольких сот метров до одного километра, можно приравнять к $\delta_{E\text{турб}} = (2\nu_{\text{турб}}/f_0)^{1/2}$. Практически это означает, что оценки могут различаться более, чем на порядок. Уже это указывает на то, что прямолинейная замена кинематической вязкости эмпирическим коэффициентом турбулентной вязкости для описания реального планетарного слоя и его влияния на глобальные движения является чрезмерным наивным упрощением. Чтобы убедиться в этом, мы рассмотрим с Вами менее идеализированную, хотя также весьма далекую от реальности, ситуацию, в которой движение ППС есть развитая по сценарию Ричардсона-Колмогорова-Обухова турбулентность. Точнее, речь идет о выполнении следующих условий.

1. Планетарный пограничный слой есть область развитой трехмерной турбулентности.

2. Характерный линейный масштаб λ вихрей, участвующих в каскадном процессе передачи энергии по спектру, много меньше высоты ППС δ_{ET} ($\lambda \ll \delta_{ET}$).

3. Характерное время τ релаксации турбулентности в ППС много меньше характерного времени изменения погоды ($\tau \ll f_0^{-1}$).

4. Характерный масштаб неоднородности турбулентности по горизонтали существенно превосходит масштаб ее неоднородности по вертикали.

5. Планетарный пограничный слой нейтрально стратифицирован.

Предлагаемая идеализация не учитывает ни вертикальной температурной расслоенности реального ППС, ни присутствие в нем так называемых когерентных структур, состоящих из упорядоченных систем вихрей размером порядка толщины слоя и закрученных вокруг горизонтально ориентированных осей. *Наша главная*

цель – выяснить влияние "мелкозернистой" трехмерной турбулентности с масштабами вихрей порядка 0.1 - 10 м на динамику глобальных течений размерами порядка 1000 и более километров.

Сделанные предположения позволяют рассматривать турбулентность в ППС как установившийся горизонтально однородный и, согласно первой гипотезе Колмогорова, локально изотропный в пространстве процесс, практически мгновенно приспосабливающийся к изменениям движения свободной атмосферы. Зависимость от времени и горизонтальных координат x и y учитывается лишь параметрически через горизонтальную скорость ветра $U(x,y,t)$ на верхней границе ППС и параметр Кориолиса $f(x,y)$. Согласно же второй гипотезе Колмогорова *усредненные характеристики рассматриваемого ППС автомодельны по* ν, что принципиально отличает турбулентный планетарный пограничный слой от ламинарного слоя Экмана или его суррогатного турбулентного "оппонента"с турбулентным коэффициентом вязкости $\nu_{\text{турб}}$.

Отсюда следует, что вертикальная зависимость характеристик пограничного слоя сводится к функциям от безразмерной вертикальной координаты $\zeta = zf/U$, однозначно определяемой из соображений размерности двумя внешними параметрами ППС U и f. Тогда в системе отсчета с осью x, совпадающей по направлению с квазигеострофическим ветром $\mathbf{U}(x,y,t)$ на верхней границе слоя, усредненные по ансамблю горизонтальные компоненты скорости внутри ППС можно записать в виде:

$$u = U(x,y,t)\,\varphi_1(\zeta),\ v = U(x,y,t)\,\varphi_2(\zeta),\ U = |\mathbf{U}|. \qquad (13)$$

Здесь $\varphi_1(\zeta)$ и $\varphi_2(\zeta)$ – универсальные безразмерные функции безразмерной вертикальной координаты ζ, удовлетворяющие естественным граничным условиям

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_2(\infty) = 0,\ \varphi_1(\infty) = 1. \qquad (14)$$

Верхняя граница, как это обычно делается в теориях пограничных слоев, условно удаляется на бесконечность, а $\varphi_2(\zeta)$ тождественно не равна нулю из-за уже известного нам поворота ветра с высотой (см. Лекцию 22). Отметим также, что не выделенное здесь явно влияние приземного слоя на вертикальное распределение горизонтального ветра учитывается в дальнейшем при оценках значений не определяемых из соображений размерности и подобия функции

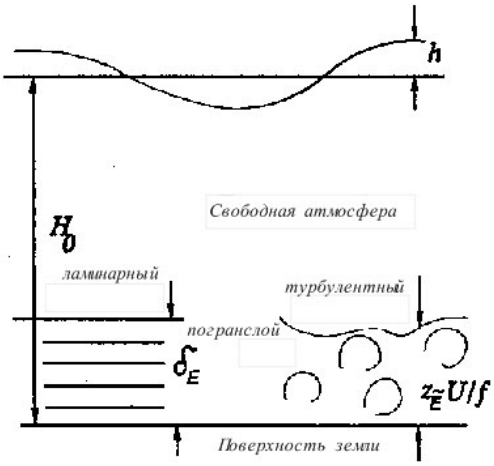


Рис. 1. Схематическое изображение ламинарного и турбулентного планетарных пограничных слоев.

$\varphi_1(\zeta)$ и $\varphi_2(\zeta)$ по данным измерений независимых лабораторных экспериментов.

Одно из главных и принципиальных отличий турбулентного ППС от ламинарного, схематически проиллюстрированное на Рис.1, состоит в том, что даже при $f = f_0 = \text{const}$ его толщина $\delta_{ET} \sim U/f$, определяемая двумя, а не тремя (ν, U и f) внешними параметрами, есть функция координат и времени, что, как мы увидим ниже, имеет весьма неожиданные последствия. В дальнейшем ради простоты рассмотрение ППС проводится без учета зависимости f от координат.

2.1. Вертикальная скорость на верхней границе турбулентного ППС. Интегрируя уравнение неразрывности по высоте пограничного слоя, в пределах которого среда предполагается несжимаемой и однородной, получаем

$$w_E = -\int_0^{\delta_{ET}} div\mathbf{u}dz \quad \left(div\mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \tag{15}$$

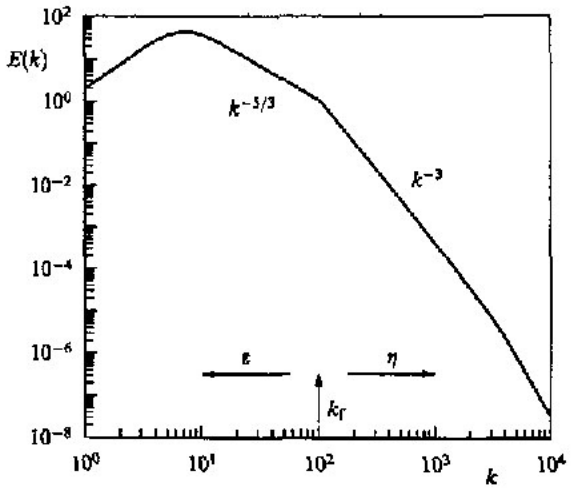


Рис. 2. Схематическое представление спектра кинетической энергии двумерной турбулентности. k_f - волновое число накачки; справа от него интервал энстрофии; слева -- интервал энергии, характеризующийся потоком энергии ε.

причем в дальнейших рассуждениях от неизвестной величины δ_{ET} требуется лишь, чтобы она была много меньше высоты атмосферы.

Формулы (13) для горизонтального поля ветра можно переписать в инвариантной форме:

$$\mathbf{u} = A(\zeta)\,\mathbf{U}(x,y,t)\,,\ A(\zeta) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\zeta) - \varphi_2(\zeta) \\ \varphi_2(\zeta)\ \varphi_1(\zeta) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Отсюда

$$div\mathbf{u} = A_{ik}\frac{\partial U_k}{\partial x_i} - \frac{\zeta}{U}\frac{\partial U}{\partial x_i}A'_{ik}(\zeta)\,U_k. \tag{17}$$

Здесь A_{ik} – элементы матрицы A, U_k – компоненты векторного поля $\mathbf{U}$, модуль которого обозначен через U, штрих означает дифференцирование по ζ, а по одинаковым индексам подразумевается суммирование.

После подстановки (17) в (15) и интегрирования по частям имеем:

$$w_E = \frac{1}{f}B_{ik}\frac{\partial(UU_k)}{\partial x_i},\ B = \begin{pmatrix} \varkappa_1 & \varkappa_0 \\ -\varkappa_0 & \varkappa_1 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где

$$\varkappa_0 = \int_0^\infty \varphi_2(\zeta)\,d\zeta,\ \varkappa_1 = \int_0^\infty [1-\varphi_1(\zeta)]\,d\zeta \tag{19}$$

– положительные константы (см. ниже). Используя теперь легко проверяемые тождества

$$div(U\mathbf{U}) = rot_z(\mathbf{k}\times U\mathbf{U})\,,\ rot_z(U\mathbf{U}) = div(\mathbf{k}\times U\mathbf{U})\,, \tag{20}$$

получаем следующее дуальное представление для w_E:

$$w_E = \frac{\varkappa_0}{f}\mathrm{rot}_z(U\mathbf{U}) + \frac{\varkappa_1}{f}\mathrm{rot}_z(\mathbf{k}\times U\mathbf{U}) = \frac{\varkappa_0}{f}\mathrm{div}(\mathbf{k}\times U\mathbf{U}) + \frac{\varkappa_1}{f}\mathrm{div}(U\mathbf{U})\,. \tag{21}$$

Здесь $\mathbf{k}$ – единичный вертикальный орт, $rot_z(U\mathbf{U}) = \partial(UU_y)/\partial x - \partial(UU_x)/\partial y$, причем при выводе (21) использовались граничные условия (14) в предположении, что функции $[1-\varphi_1(\zeta)]$ и $\varphi_2(\zeta)$ убывают на бесконечности быстрее, чем $1/\zeta$. Гидродинамический смысл дуального представления (21) становится очевидным, если вспомнить, что w_E играет в уравнении (11) роль источника (стока)

завихренности, а в уравнении (22.18) сохранения массы свободной атмосферы – роль источника массы.

Положительность констант $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ следует из того, что ветер в ППС поворачивается в сторону дефицита давления, а, следовательно, компоненты скорости ветра в упомянутой специальной системе координат внутри слоя строго положительны. Кроме того, можно показать, что константы $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ малы и имеют одинаковый порядок малости. Поэтому можно положить $\varkappa_1 = \alpha\varkappa_0$, где $\alpha = O(1)$ и $\varkappa_0 \ll 1$. Отметим также, что, поскольку функции φ_1 и φ_2 имеют порядок единицы, то $\varkappa_0$ можно рассматривать как безразмерную толщину ППС, т.е. измеренную в единицах U/f.

2.2. Уравнения глобальных течений с учетом влияния турбулентного планетарного пограничного слоя. Формально уравнение (11) при $L_0^{-1} = 0$ можно трактовать как уравнение вихря для строго двумерной атмосферы с внешним источником завихренности, которое получается применением rot_z к двумерным гидродинамическим уравнениям, записанным в терминах скорости. Тогда

$$-\frac{f}{H_0} w_E = rot_z \mathbf{F},$$

где $\mathbf{F}$ согласно первой формуле (21) можно представить в виде:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{D_0}\left(U\mathbf{U} + \alpha \mathbf{k} \times U\mathbf{U}\right) + \nabla\Phi. \tag{22}$$

Здесь $\Phi = \Phi(x, y, t)$ – произвольная скалярная функция горизонтальных координат и времени, а $D_0 = H_0/\varkappa_0$.

Восстанавливая теперь уравнение для поля скорости рассматриваемой гипотетической строго двумерной атмосферы, получаем гидродинамические уравнения с квадратичным трением и дифференциальным вращением:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \left(1 + \alpha\frac{U}{D_0 f}\right) f\mathbf{k} \times \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{D_0} U\mathbf{U} + \mathbf{F}_q, \tag{23}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_x \frac{\partial}{\partial x} + U_y \frac{\partial}{\partial y},$$

$\mathbf{F}_q$ – сила, создающая внешний источник завихренности $q = rot_z \mathbf{F}_q$, а Φ включена в давление. При $L_0^{-1} \neq 0$ подстановка (21) в (11) с учетом тождеств

$$rot_z(U\mathbf{U}) \equiv div(\mathbf{k} \times U\mathbf{U}) \equiv |\nabla\Psi| \triangle\Psi + \nabla\Psi\nabla|\nabla\Psi|, \tag{24}$$

$$rot_z\,(\mathbf{k}\times U\mathbf{U}) \equiv div\,(U\mathbf{U}) \equiv [\Psi, |\nabla\Psi|] \tag{25}$$

дает квазигеострофическое уравнение трансформации потенциального вихря для баротропной атмосферы с учетом турбулентного ППС:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\Psi - L_0^{-2}\Psi\right) + \left[\Psi, \left(\triangle\Psi + f + \frac{\alpha}{D_0}\,|\nabla\Psi|\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{D_0}\left(|\nabla\Psi|\,\triangle\Psi + \nabla\Psi\nabla\,|\nabla\Psi|\right) + q. \tag{26}$$

Гироскопический член в (26) можно переписать в виде:

$$f + \frac{\alpha}{D_0}\,|\nabla\Psi| = f\left(1 + \frac{\alpha\varkappa_0\,|\nabla\Psi|}{H_0 f}\right) = f\left(1 + \alpha\frac{\delta_{ET}}{H_0}\right).$$

Здесь $\delta_{ET} = \varkappa_0\,|\nabla\Psi|\,/f = \varkappa_0 U/f$ и есть упомянутая выше эволюционирующая высота турбулентного ППС, создающая нелинейный орографический бета-эффект, описываемый в уравнении (26) α-членом.

Таким образом, *в отличие от ламинарного слоя Экмана турбулентный планетарный пограничный слой затормаживает свободную атмосферу по нелинейному закону трения, создавая дополнительно нелинейный орографический бета-эффект.* Физическая трактовка этого явления довольно проста: в турбулентном ППС в отличие от ламинарного возбуждены не только поступательные, но и вращательные степени свободы, а переменная по пространству и времени толщина ППС эквивалентна орографическому эффекту.

В заключение этого пункта отметим два момента. Во-первых, несмотря на предложенную здесь довольно сильную идеализацию турбулентного планетарного пограничного слоя без учета когерентных структур и стратификации, основной вывод о его нелинейном влиянии на реальную атмосферу остается в силе хотя бы уже потому, что мелкомасштабная турбулентность действительно наблюдается реальном ППС, а его высота эволюционирует во времени и пространстве. Во-вторых, согласно независимым оценкам (см. Dolzhanskii, Manin, 1993 и цитируемую там литературу), выполненным по наблюдательным данным и результатам лабораторных измерений характеристик турбулентного движения жидкости в окрестности вращающегося с постоянной скоростью плоского

диска (турбулентный вариант известной задачи Кармана) значение $\varkappa_0$ колеблется в пределах 10^{-3} - 10^{-2}, т. е. $D_0 = H_0/\varkappa_0$ порядка нескольких тысяч километров. Эта оценка принципиально важна, в чем мы убедимся в следующем пункте.

3. Специфика атмосферной турбулентности на крупных масштабах. С общефизической точки зрения тот факт, что развитая мелкомасштабная 3D-турбулентность (three dimensional turbulence) может столь серьезно повлиять на бета-эффект и закон трения глобальных атмосферных течений, масштабы которых в 10^6 - 10^7 раз превосходят характерный размер вихрей в ППС, весьма поучителен для осознания важности корректного учета микропроцессов при описании макродвижений. Главная же отличительная особенность атмосферной турбулентности, как и всей динамики глобальных течений, состоит в ее квазидвумерности на крупных масштабах. С этим обстоятельством связано сенсационное открытие так называемого явления отрицательной вязкости (книга Старра (V.P. Starr, 1968) так и называется "Physics of Negative Viscosity Phenomena"), сделанное метеорологами в 60-х годах прошлого столетия, которые при обработки данных наблюдений обнаружили, что напряжения Рейнольдса крупномасштабных пульсаций скорости, трактуемые по гипотезе (3), дают отрицательный коэффициент турбулентной диффузии, что могло означать лишь обратный (в сторону малых волновых чисел) поток энергии по спектру. Приблизительно в те же годы Крейчнан (R.H. Kraichnan, 1967, 1971), Лейт (C.E. Leith, 1968) и Бэтчелор (G.R. Batchelor, 1969) обратили внимание на то, что механизм нелинейного взаимодействия строго 2D-мерных уравнений гидродинамики устроен таким образом, что, если накачка энергии происходит на некотором промежуточном волновом числе $k = k_f$, то энергия по спектру передается преимущественно в направлении больших масштабов. Обращено было также внимание на то, что из-за наличия в двумерной гидродинамике второго интегрального инварианта движения – суммарного квадрата завихренности

$$I = \frac{1}{2}\iint \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy = \frac{1}{2}\iint (\triangle\psi)^2\, dxdy, \qquad (27)$$

называемого энстрофией, при больших числах Рейнольдса можно организовать другой каскадный процесс – спектральный перенос

удельной (приходящейся на единицу массы) энстрофии в направлении малых масштабов. Последнее опять же следует из специфики двумерной нелинейности, осуществляющей передачу энстрофии преимущественно в область больших волновых чисел.

Используя по существу те же рассуждения и идеи, которые применялись при построении развитой 3D турбулентности, упомянутые авторы пришли к выводу о возможности существования при больших числах Рейнольдса двух инерционных интервалов по разные стороны окрестности накачки (см. рис. 2), в одном из которых, распоженном на оси волновых чисел слева от накачки, происходит спектральный перенос энергии с постоянной скоростью ε, а в другом – справа от накачки – спектральный перенос энстрофии с постоянной скоростью η. Обе величины относятся к единице массы жидкости и имеют размерности соответственно $[\varepsilon]$ =см^2/с^3 и $[\eta]$ =с$^{-3}$. По соображениям размерности левому инерционному интервалу соответствует "{кр - 5/3 закон" распределения энергии по спектру (по модулю волнового числа)

$$E\left(k\right) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3},\ k \ll k_f, \tag{28}$$

а справа от накачки – "закон -3"

$$E\left(k\right) \sim \eta^{2/3} k^{-3},\ k_f \gg k \gg k_d. \tag{29}$$

Здесь $k_d^{-1} \sim l_d = \left(\nu^3/\eta\right)^{1/6}$ – внутренний масштаб развитой 2D турбулентности или масштаб, в окрестности которого происходит диссипация энстрофии.

Теория развитой 2D турбулентности, объясняющая эффект отрицательной вязкости, страдает, однако, существенным недугом – "инфракрасной катастрофой связанной с отсутствие внешнего масштаба диссипации кинетической энергии: внутренняя, кинематическая, вязкость не способна стабилизировать рост энергии в окрестности нулевого значения волнового числа. В этом отношении идеализация квазидвумерных течений строго двумерными физически плохо обусловлена. В частности, применительно к баротропной атмосфере из рассмотрения выпало внешнее трение $-\lambda\mathbf{U}$, линейное по скорости для ламинарного ППС (см. (22.22)), и $-D_0^{-1}U\mathbf{U}$, квадратичное по скорости для турбулентного ППС (см. (22)). В первом случае по соображениям размерности (ср. с $(C.4)$) внешний колмогоровский масштаб диссипации (см. обзор Должанский, Крымов,

Манин, 1990)

$$L_D \sim \left(\frac{\varepsilon}{\lambda^3}\right)^{1/2} \sim R_\lambda^{3/4}, \tag{30}$$

причем последняя оценка следует из требования (см. Лекцию C) обращения в единицу локального числа Рейнольдса для мод глобального масштаба. Напоминаю, что R_λ – число Рейнольдса по внешнему трению (см. (23.7)).

Во втором случае

$$L_D \sim D_0,$$

который согласно сделанным оценкам по порядку величины равен 10^3 км, что согласуется с размерами наблюдаемых циклонов и антициклонов – наиболее энергоемких метеорологических объектов.

Набросанный эскиз квазидвумерной турбулентности не охватывает, однако, все определяющие факторы атмосферной турбулентности, подверженной влиянию бета-эффекта и преобразования доступной потенциальной энергии в кинетическую. Эти и ряд других вопросов относятся к проблеме так называемой геострофической турбулентности (см, например, Salmon, 1996). В частности, до сих пор нет четкого представления о возможности реализации энстрофийного инерционного интервала. Лабораторные эксперименты по моделированию затухающей квазидвумерной турбулентности, в частности, указывают на важную роль третьего измерения в этом интервале, в котором кинетическая энергии горизонтальной скорости расходуется на генерацию вертикальных течений (Данилов и др., 2002). Современное состоянии дел в теории квазидвумерной турбулентности подробно изложено в обзоре (Данилов, Гурария, 2000), в котором любознательный читатель обнаружит немало интересных постановок задач, ждущих своего разрешения.

Литература

1.Монин А.С., Яглом А.М. *Статистическая гидромеханика. Т.1,* С-П.: Гидрометеоизат, 1992.

2. Татарский В.И. *Распространение волн в турбулентной атмосфере (Глава 1. Предварительные сведения по теории турбулентности)*, М.: "Наука ГРФМЛ, 1967.

3. Dolzhanskii F.V., Manin D.Yu. *On the effect of turbulent Ekman layer on global atmospheric dynamics. Geophys.* Astrophys. Dynamics, V. 72 P. 93, 1993.

4. Danilov S.D., Dolzhanskii F.V., Manin D.Yu. *Dynamics of large-scale flows with turbulent Ekman layer and their stability.* Ann. Geophysics, 11, P. 104, 1993.

5. Должанский Ф.В., Крымов В.А., Манин Д.Ю. *Устойчивость и вихревые структуры квазидвумерных сдвиговых течений.* УФН, Т.160, 7, 1990.

6. Salmon R. *Lectures on Geophysical fluid dynamics.* NY, Oxford, Oxford University Press, 1996.

7. Данилов С.Д., Довженко В.А., Должанский Ф.В., Кочина В.Г. *Затухающая квазидвумерная турбулентность в тонком слое жидкости.* ЖЭТФ, Т.122, 1 (7), 2002.

8. Данилов С.Д., Гурария Д. *Квазидвумерная турбулентность.* УФН, Т.170, 9, 2000.

Научное издание

Должанский Феликс Витальевич

Лекции
по геофизической гидродинамике

Институт вычислительной математики
Российской академии наук
119333 Москва, ул. Губкина, д. 8

Оригинал-макет изготовлен в ИВМ РАН
Компьютерная верстка
Подписано в печать 15.12.2006 г. Формат 60×90 1/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная № 1. Печ.л. 23.63
Тираж 250 экз. Заказ

Отпечатано согласно представленному оригинал-макету
в ФГУП "Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ"
140010 г. Люберцы Московской обл., Октябрский просп., 403.
Тел. 554-21-86